Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Acta Latinoamericana de Matemática Educativa

VOLUMEN 34 » NÚMERO 1 » AÑO 2021 » ISSN 2448-6469

ALME34

Coordinación editorial

Mónica Marcela Parra-Zapata
Colombia

Editores responsables

Rebeca Flores
México

Horacio Saúl Sostenes González
México

Edilma Rubí Granados Martínez
Guatemala

Anelys Vargas Ricardo
Cuba

Stalet Josué Pérez Urrea
Guatemala

Osvaldo Rojas
Colombia

Comité editorial

Cristian Paredes Cancino
México

José Isaac Sánchez Guerra
México

Isabel García-Martínez
Chile

Adriana Engler
Argentina

Luis Manuel Cabrera Chim
México

Rodolfo David Fallas Soto
Costa Rica

Paola Alejandra Balda Álvarez
Colombia

Milton Rosa
Brasil

Paula Andrea Rendón-Mesa
Colombia

Diseño:
Gabriela Sánchez Téllez

ACTA LATINOAMERICANA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA, Volumen 34, Número 1, febrero 2021, es una publicación semestral editada por el Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, Av. Universidad 1900, Oxtopulco Universidad, Delegación Coyoacán, C.P. 04460, Ciudad de México, www.clame.org.mx, alme.clame@gmail.com. Reserva de Derechos al Uso Exclusivo 04-2015-082710244200-203, otorgado por el Instituto Nacional del Derecho de Autor, ISSN: 2448-6469. Se autoriza la reproducción total o parcial, previa cita a la fuente: Autor(es) (2021). Nombre del artículo. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 34 (1)*. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Comité Científico de Evaluación

ARGENTINA

Ana Rosa Corica Caponio
Elisa Silvia Oliva Díaz
Laura Sonia Oliva
María Angélica Pérez Monges

BRASIL

Aline Silva De Bona Aline

COLOMBIA

Kevin André-Pierre Valentin
Luz Stella Mejía Aristizábal
María Camila Ocampo Arenas
Maria Denis Vanegas Vasco
René Alejandro Londoño Cano
Zaida Margot Santa-Ramírez

CUBA

Daciel Alberto Olivera Cortina
Ivonne Burguet Lago
Frank Alain Castro Sierra

ESPAÑA

Carmen López Esteban

MÉXICO

Amaranta Viridiana Jiménez Villalpando
Angélica Dueñas Cruz
Carlos Daniel Prado Pérez
Edgar Ponciano Bustos
Eduardo Carlos Briceño Solis
Giovana Pereira Sander
Gloria Angélica Moreno Durazo
Jaime Jesús Espíritu Cadena
Jesús Enrique Hernández Zavaleta
José Rafael Couoh Noh
Lorenzo Contreras Garduño
Karla Liliana Puga Nathal
María del Carmen Fajardo Araujo
Plácido Hernández Sánchez
Vivian Libeth Uzuriaga López

PERÚ

Isela Patricia Borja Rueda

REPÚBLICA DOMINICANA

Ángela Martin

VENEZUELA

Angélica María Martínez de López
Ivonne Coromoto Sanchez Sanchez

PRESENTACIÓN

El Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (ALME) es una publicación semestral editada por un equipo editorial conformado por matemáticos educativos procedentes de distintos países latinoamericanos que trabajan arduamente por visibilizar sus acciones y producción académica.

El actual contexto caracterizado por los desafíos que impuso la COVID-19, ha ocasionado cambios significativos en los diferentes espacios que cohabitamos; en especial para ALME, pues impactó en los ritmos y tiempos requeridos para la producción académica entre los miembros de la Comunidad Latinoamericana de Matemática Educativa, y en el número de contribuciones recibidas por el inevitable aplazamiento de la XXXIV Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa.

Es por ello que, el ALME número 1 del volumen 34 que presentamos, contiene 14 artículos de diversas posturas metodológicas y teóricas, agrupados en temáticas relacionadas con el análisis del discurso matemático escolar, propuestas para la enseñanza de la Matemática, los aspectos socioepistemológicos para el análisis y el rediseño del discurso matemático escolar, el pensamiento del profesor, sus prácticas y su formación profesional, y el uso de recursos tecnológicos en el proceso de aprendizaje de la Matemática.

Este número es fruto del trabajo arduo que realizaron los autores y el equipo editorial para contribuir a la profesionalización de la Comunidad Latinoamericana de Matemática Educativa, y al fortalecimiento del desarrollo del pensamiento matemático en un contexto de retos e incertidumbres que la actual pandemia nos impone.

Pérez

Olga Lidia Pérez González
Presidenta del Consejo Directivo
CLAME (2016-2021)

TABLA DE CONTENIDOS

SECCIÓN 1:
ANÁLISIS DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR

SECCIÓN 2:
PROPUESTAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

TABLA DE CONTENIDOS

SECCIÓN 3

ASPECTOS SOCIOEPISTEMOLÓGICOS EN EL ANÁLISIS Y EL REDISEÑO DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR

SECCIÓN 4:

EL PENSAMIENTO DEL PROFESOR, SUS PRÁCTICAS Y ELEMENTOS PARA SU FORMACIÓN PROFESIONAL

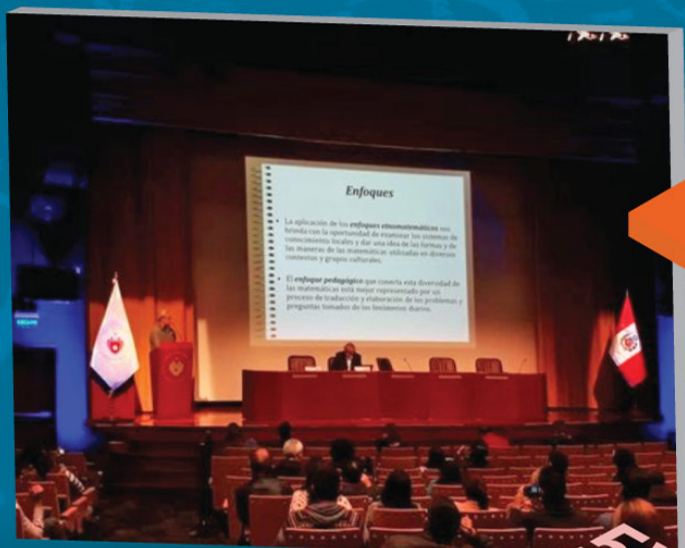
TABLA DE CONTENIDOS

SECCIÓN 5:

USO DE LOS RECURSOS TECNOLÓGICOS EN EL PROCESO DE APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

SECCIÓN 1

ANÁLISIS DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR



VOL 34, NÚMERO 1, AÑO 2021

LA EVALUACIÓN DESDE LA MATEMÁTICA EDUCATIVA. REFLEXIONES AL INTERIOR DE UN GRUPO DE DISCUSIÓN ASSESSMENT AND MATHEMATICS EDUCATION. REFLECTIONS WITHIN A DISCUSSION GROUP

Luis Manuel Cabrera Chim, Beatriz Elena Martínez Díaz, Yolanda Chávez Ruiz y Adriana Gómez Reyes
Universidad Autónoma de San Luis Potosí, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Escuela Normal de Rincón de Romos, Universidad Nacional Autónoma de México. (México)
lmcabrerach@gmail.com, beatriz.martinez@cinvestav.mx, yolachavezruiz@gmail.com, orodelsilencio@yahoo.com.mx

Resumen

La evaluación es una parte integral de los procesos de enseñanza y de aprendizaje, y un instrumento para alcanzar los objetivos educativos. Por tanto, debe estar sustentada en un modelo sólido sobre el aprendizaje, el cual permita interpretar sus resultados y orientar las acciones de mejora. Esto requiere promover la formación docente en este tema, bajo las particularidades de la Matemática Escolar, para, por ejemplo, diversificar los instrumentos de evaluación para evaluar diferentes aspectos sobre el aprendizaje de las matemáticas, o ser capaz de emplear los resultados de la evaluación estandarizada y la del aula para la mejora del aprendizaje. Esto plantea la importancia de que la Matemática Educativa tome a la evaluación como objeto de estudio. Derivado de estas ideas, este grupo de discusión pretende establecer un espacio para la generación y difusión de conocimientos centrado en la Evaluación desde la Matemática Educativa. En este documento se presentan fundamentos teóricos base que orientarán las reflexiones que se generen en el grupo.

Palabras clave: evaluación, matemática educativa, formativa, instrumentos, grupo de discusión.

Abstract

Assessment is an integral part of the teaching and learning process. The assessment should become one more instrument to achieve the learning objectives. To fulfill this purpose, it must be supported by a solid model about learning, which allows interpreting its results and providing tools or guidelines to carry out the relevant improvement actions. Therefore, it is important to train teachers in this subject, under the particularities of School Mathematics, for example, to diversify assessment instruments and evaluate different aspects of mathematics learning, or to be able to use the results of standardized and classroom assessments to improve learning. This raises the importance of Educational Mathematics takes the assessment as an object of study. This discussion group aims to establish a space for the generation and dissemination of knowledge focused on Assessment from Educational Mathematics. Thus, this document presents the basic theoretical foundations that will guide the reflections generated in the group.

Key words: assessment, mathematics education, formative, instruments, discussion group

Introducción

Evaluar, en un sentido amplio, implica hacer juicios de valor con respecto a un proceso o producto (Garza, 2004) para tomar decisiones en favor de cualquier proceso de mejora. En este texto nos centraremos en la Evaluación Formativa que contribuye a favorecer el aprendizaje (Azcárate, 2006; Black y Wiliam, 2012; Cardeñoso, 2006; Van den Heuvel-Panhuizen y Becker, 2003; Nortvedt y Buchholtz, 2018; Sanmartí, 2007; Suurtamm et al., 2016; Chávez-Ruíz y Martínez-Rizo, 2018).

La evaluación es una parte integral de los procesos de enseñanza y de aprendizaje. Esta cumple una función reguladora enfocada a analizar si los estudiantes están alcanzando los objetivos establecidos y tomar decisiones que permitan acortar la brecha entre los resultados y los objetivos (Becerra y Moya, 2008; Cardeñoso, 2006; Nortvedt y Buchholtz, 2018; Sanmartí, 2007; Suurtamm et al., 2016). Por tanto, la evaluación debe convertirse en un instrumento más para el logro de los objetivos de aprendizaje y no concebirse solamente como una acción para verificarlo. Esta transición en la forma de concebir los procesos de evaluación abre el debate sobre qué información debe recopilarse para valorar la pertinencia de los procesos de enseñanza y los resultados de aprendizaje obtenidos, de modo que, en caso necesario, se tomen las decisiones y acciones que permitan mejorar estos procesos y resultados. Esto constituye un problema de investigación abierto y que requiere del desarrollo de reflexiones profundas, propuestas de intervención y la obtención de evidencia empírica sobre la pertinencia de estas propuestas. Muchos de los temas o situaciones sin resolver relativos a la evaluación que han aparecido en las últimas décadas, siguen aún sin respuesta (Nortvedt y Buchholtz, 2018).

Lo dicho anteriormente se hace evidente a través de la cantidad de trabajos, cada vez mayor, que se desarrollan al respecto a nivel internacional. Esto es posible de observar en La Reunión Latinoamericana en Matemática Educativa, en donde cada vez es más común encontrarse con participaciones que tratan investigaciones relacionadas con la evaluación del aprendizaje. Sin embargo, este espacio aún no incorpora el tema de la evaluación como una de sus líneas de investigación (al menos hasta la convocatoria de RELME 34), lo cual puede ser la razón de que tampoco se cuente con un grupo de discusión que aborde específicamente este tema.

Por esta razón, nos interesa conformar un espacio que permita generar un diálogo continuo, entre aquellas y aquellos profesores e investigadoras e investigadores de Latinoamérica interesados en compartir sus experiencias en el aula y los proyectos de investigación que se encuentren realizando sobre este tema.

Por otra parte, el desarrollo de la evaluación formativa implica grandes desafíos que es necesario atender para alcanzar sus potencialidades, mismas que han obstaculizado su adecuado desarrollo en diferentes países (Martínez-Rizo, 2013). Por ejemplo, la necesaria formación continua de los profesores y las concepciones sobre la propia evaluación.

Lo descrito hasta ahora señala la importancia de que la Matemática Educativa tome como objeto de estudio a la evaluación y que contribuya al desarrollo de conocimientos y estrategias encaminados a su adecuada implementación en el aula y a cumplir sus propósitos. Esto partiendo del hecho que para la mejora del aprendizaje es necesario conocer cómo se produce este. Por tanto, la evaluación en matemática tendrá particularidades propias que no son aplicables a otras disciplinas y, por otra parte, si no son consideradas, ésta se verá limitada para alcanzar sus propósitos. Así, la Matemática Educativa puede proporcionar herramientas y conocimientos que permitan estudiar, comprender e incidir sobre situaciones o fenómenos asociados a la evaluación y ayudar a transformar las prácticas evaluativas. Esta situación no se ha logrado definir en la actualidad y es la que impulsa fuertemente la generación de conocimientos alrededor de este tema a nivel internacional (Suurtamm et al., 2016).

Para adentrarse en la problemática anterior, se plantean los siguientes objetivos para discutir en la primera edición de este grupo de discusión:

- Discutir el tema de la evaluación desde la Matemática Educativa.

- Analizar la evaluación formativa y su contribución para la mejora del aprendizaje.
- Análisis de propuestas de evaluación para el aprendizaje.
- Contrastar la evaluación estandarizada frente a la evaluación formativa.

Así, este documento tiene como propósito definir algunas perspectivas teóricas que pueden servir de fundamento común para orientar y favorecer las reflexiones compartidas sobre los objetivos que se señalan y que se generen en el grupo de discusión. Además, podría ser la base para promover la generación y difusión de conocimientos y/o resultados de investigación sobre la evaluación en matemáticas.

Discusiones iniciales y posturas teóricas

A continuación, se presentan algunas de las reflexiones y posturas teóricas mencionadas en el párrafo final de la sección anterior. Estas serán enriquecidas con las aportaciones de los participantes, las cuales podrían transformarlas, ampliarlas o profundizarlas; incluso podrían replantearse los objetivos anteriores o incluirse otros no contemplados. Esto sucederá durante la RELME 34, tan pronto se pueda desarrollar.

En la primera edición del grupo de discusión participarán cuatro personas, cada una presentará sus posturas sobre la evaluación y sus aportaciones a los objetivos planteados. Esto se realizará combinando una exposición individual corta y un formato de mesa redonda en la cual se promoverá la participación de los asistentes. Se pretende además que los asistentes formen equipos y reflexionen sobre los objetivos señalados antes y/o propongan otros temas de interés. Cada equipo presentará sus reflexiones y se discutirán grupalmente para llegar a posibles consensos.

Analizar el tema de la evaluación desde la Matemática Educativa

Los avances referidos a la Evaluación Educativa han generado una gran cantidad de resultados teóricos y prácticos, dando como resultado un campo de saber (Tiana, 2012). La importancia que ha tomado la evaluación puede verse reflejada en la constitución de sistemas nacionales de evaluación educativa en diversos países y proyectos internacionales como PISA o los estudios TIMSS y PIRLS. En la actualidad se evalúa todo ámbito de la educación: rendimiento de alumnos, currículos escolares, centros educativos, programas específicos o sectoriales y el trabajo de los docentes (Tiana, 2012).

Aunque las reflexiones y los análisis sobre la evaluación del aprendizaje de las matemáticas no son nuevos dentro la Matemática Educativa (Becerra y Moya, 2008), en un inicio los esfuerzos de la disciplina estaban enfocados en comprender e incidir sobre los procesos de aprendizaje de las matemáticas. La evaluación se dejó, en cierto modo, de lado, viéndose incluso como algo de menor importancia para la educación matemática o incluso como algo externo (Niss, 1993; citada en Becerra y Moya, 2008). Sin embargo, en los últimos años, este tema ha cobrado relevancia, en parte por el fuerte impulso que tiene la realización de evaluaciones a gran escala y a la visibilidad de sus resultados (Suurtamm et al., 2016; Nortvedt y Buchholtz, 2018), lo cual ha planteado la necesidad de analizar cómo se desarrollan estos procesos y, en general, de la evaluación de los aprendizajes matemáticos. Esto ha llevado a establecer relaciones cercanas entre la Evaluación Educativa y la Matemática Educativa.

Diversos trabajos que se han desarrollado sobre las características que tienen los ítems de pruebas a gran escala o estandarizadas y las tareas de evaluación que se plantean en el salón de clase, señalan que muchas veces estas se centran en evaluar habilidades de cálculo empleando tareas algorítmicas, dejando fuera habilidades más complejas que son importantes dentro el proceso de aprendizaje de las matemáticas, como las implicadas para la resolución de problemas (Cardeñoso, 2006; Nortvedt y Buchholtz, 2018; Suurtamm et al., 2016; Swan y Burkhardt, 2012). Así, diversos grupos académicos y actores educativos preocupados por esta situación han convertido el tema de la evaluación del aprendizaje de las matemáticas en su objeto de estudio.

Sin embargo, dentro la disciplina de la Matemática Educativa no se han logrado generar consensos sobre el propósito de la educación Matemática (Niss, 2007), lo que deriva en que tampoco se haya llegado a un consenso sobre qué cosas de las Matemáticas vale la pena enseñar o cómo los estudiantes aprenden Matemáticas (Nortvedt y Buchholtz, 2018, p. 556). Lo anterior tampoco es de extrañar, pues dentro de la disciplina existe una gran variedad de teorías y cada una especifica lo que entenderá por aprender, lo que vale la pena enseñar a los alumnos y, por lo tanto, lo que será evaluado dependerá de lo que se establezca en cada una de ellas.

A pesar de la situación anterior, un consenso al que se puede llegar −desde nuestra disciplina, así como de las vecinas−, es que la evaluación debería utilizarse principalmente para la mejora del aprendizaje sin importar el enfoque teórico que se retome para la enseñanza y el aprendizaje (Van den Heuvel-Panhuizen y Becker, 2003; Black y Wiliam, 2012). Esto no niega el hecho de que la evaluación debe estar ligada al modelo didáctico que sustenta los procesos de enseñanza y aprendizaje. Así, las teorías o perspectivas del aprendizaje que sustenten a dicho modelo servirán para analizar e interpretar las acciones de los estudiantes, es decir, para orientar los procesos de evaluación y sobre esta base deben analizarse (García, Aguilera, Pérez y Muñoz, 2011; Suurtamm et al., 2016).

En este sentido, los procesos de evaluación se planean en el momento mismo que se planean los procesos de enseñanza y de aprendizaje. Así, es necesario concebir a la evaluación como un proceso de regulación de la enseñanza y del aprendizaje, es decir, concebir al proceso educativo desde una visión tripartita Enseñanza-Aprendizaje-Evaluación (Cardeñoso, 2006; Sanmartí, 2007). Por tanto, los conocimientos disciplinares de la Matemática Educativa se convierten en fundamentos importantes para establecer cómo promover la construcción de los aprendizajes matemáticos que se han establecido como objetivo. A su vez, proporcionarán los criterios sobre los que se deberá buscar evidencia de su logro por parte de los estudiantes. Esto permitirá monitorear el progreso de sus aprendizajes y determinará si es necesario generar otras acciones que lo ayuden a alcanzarlos. Pero, estas acciones deben fundamentarse en la comprensión de las causas que están dificultando la consecución de los aprendizajes (Sanmartín, 2007); aspecto en el que la Matemática Educativa tiene de nueva cuenta una aportación relevante.

No obstante, no es sencillo transformar las prácticas de evaluación actuales que se desarrollan en el aula. Cardeñoso (2006) señala que es necesario problematizar esta tarea docente, lo cual implica preguntarse *qué y por qué* evaluamos, *cuándo, cómo y con qué* lo realizamos y tener claridad sobre *los para qué* evaluamos. Esto implica el estudio, análisis y transformación de muchos de los aspectos que definen la forma como se desarrolla esta tarea y de los fenómenos que se desarrollan alrededor de esta. Por ejemplo, las concepciones que tienen los profesores sobre los objetivos de esta y lo que los sistemas educativos proponen (Hidalgo y Murillo, 2017). Se establece que solo conociendo y cambiando estas concepciones se podrá mejorar la práctica evaluativa.

Por otra parte, para obtener la información y evidencia necesarias para retroalimentar el desempeño de los estudiantes en los procesos de enseñanza y aprendizaje, y generar oportunidades que les permitan alcanzar los objetivos pretendidos, es necesario dar oportunidad y promover que se expresen, que se sientan con la confianza de demostrar y hacer evidentes sus ideas y dudas, de modo que se puedan conocer las dificultades y progresos en sus aprendizajes (Cardeñoso, 2006). Esto implica que los profesores dejen de juzgar o determinar las respuestas y las ideas de los estudiantes, lo que habitualmente realizan. Es importante que ellos asuman un papel verdaderamente participativo en su evaluación, darles la oportunidad para que muestren y valoren lo que han aprendido y asuman su responsabilidad en su aprendizaje (Cardeñoso, 2006; Secretaría de Educación Pública, 2017). Por su parte, también implica que la evaluación sea vista como una oportunidad de mejora de la práctica docente, de las instituciones e incluso de los programas y del ambiente en el aula (Flores y Gómez, 2009).

Un último aspecto que mencionaremos refiere a los fenómenos o sentimientos negativos que se han generado alrededor de las Matemáticas y de la Evaluación, lo cual conlleva a que durante los procesos de evaluación muchos estudiantes presenten altos grados de estrés. Esto puede inhibir que demuestren sus conocimientos y lo que pueden hacer con ellos, derivando en resultados de evaluación inadecuados. Por su parte, para el profesor la evaluación puede implicar trabajo extra, requiriendo identificar las técnicas o instrumentos a emplear, su correcta aplicación y la adecuada interpretación de la información y resultados obtenidos. Si esta acción no se visualiza con relevancia formativa para los procesos de enseñanza y de aprendizaje, y solo se mira como un proceso administrativo, su desarrollo podría verse limitado a un mero trámite y rendición de cuenta. Esta postura no permitirá mejorar al proceso educativo en su conjunto.

Analizar la evaluación formativa y su contribución para la mejora del aprendizaje

Las actividades que realizan los profesores en el aula y, a partir de la pandemia, de manera virtual y a distancia, es lo que en términos generales se llama práctica docente o práctica de enseñanza. Esta tiene como propósito último que otras personas aprendan. Las actividades que integran la práctica de enseñanza son muchas y muy variadas: hacer un diagnóstico del grupo, planificar, diseñar situaciones didácticas, observar el progreso de los estudiantes, resolver sus dudas, promover el aprendizaje, evaluar sus productos, ofrecer retroalimentación de su trabajo, entre otras. En todas estas actividades la evaluación está presente, se podría decir que la evaluación contribuye a regular las prácticas de enseñanza (Chávez-Ruiz y Martínez-Rizo, 2018).

Al enfocarse en las prácticas de enseñanza de las matemáticas, se puede encontrar que evaluación y matemáticas son términos que para muchos profesores y estudiantes provocan desagrado. Si se habla de la evaluación en matemáticas, se puede suponer que el estrés aumenta. Para muchos profesores hablar de evaluación en matemáticas implica trabajo extra, muchas veces se percibe como un trabajo administrativo más que formativo; sin utilidad práctica en este ejercicio, ya que luego de invertir horas de revisión en trabajos, muchas veces no hay una devolución a los alumnos. Por otra parte, para muchos estudiantes, por lo general, la evaluación significa un examen, una actividad sin posibilidades de ser creativos y donde se les va a juzgar; la perciben como una actividad impuesta.

Para lograr que la evaluación se convierta en una herramienta que contribuya al aprendizaje, se requiere desarrollar una nueva cultura de la evaluación que se refleje en el uso de la información (Azcárate, 2006) y en las dinámicas de clase, que promuevan ambientes en los que los estudiantes puedan expresarse libremente y mostrar sus errores o concepciones inadecuadas (Cardeñoso, 2006). Si la idea es formar estudiantes con un pensamiento matemático creativo, reflexivo, estratégico, la evaluación formativa puede contribuir con este propósito. En este sentido, se requiere un cambio cultural en los roles de profesores y alumnos (Burkhardt y Schoenfeld, 2019), encaminada a una participación más democrática, donde estos actores tengan una participación más activa en el aprendizaje, acompañando y apoyándose mutuamente.

En el camino para lograr lo anterior, la concepción de la evaluación ha transitado desde una perspectiva centrada en la comprobación del logro de los objetivos educativos y en el control y sanción de estos, hacia una que la coloca como reguladora de los procesos de enseñanza y aprendizaje y, por tanto, que permite ajustar la enseñanza a las necesidades de los estudiantes y apoyarlos en la consecución de los aprendizajes (Martínez-Rizo, 2009; Martínez, 2020; Sanmartín, 2007; Suurtamm et al., 2016).

No obstante, el desarrollo de una buena evaluación formativa no se distingue de una buena enseñanza (Martínez-Rizo, 2013), pues ambos contribuyen a que los estudiantes alcancen los aprendizajes pretendidos. Así, una adecuada evaluación formativa comienza a formularse en el momento mismo en que comienza la planeación de los procesos de enseñanza y aprendizaje (Cardeñoso, 2006). Es en este momento en el que se seleccionan las variables que definirán cómo será el proceso de enseñanza y que potenciarán la aparición de ideas, nociones, relaciones, procedimientos, razonamientos, habilidades cognitivas y demás elementos que intervienen en la construcción de los aprendizajes. Así, estos elementos son la base para determinar las estrategias o instrumentos de evaluación que permitan reunir evidencia de su consecución. En ese sentido, los pilares de la evaluación, el criterio y la evidencia, se establecen desde la planeación del proceso educativo (Cardeñoso, 2006). La evaluación formativa no puede limitarse a identificar si se están alcanzando o no esos criterios o indicadores, sino que también debe identificar o establecer hipótesis de las causas de que esto no ocurra para fundamentar en esta información sus procesos de retroalimentación y ajuste de la enseñanza (Cardeñoso, 2006; Martínez, 2020). Sólo en este momento la evaluación contribuirá a mejorar los aprendizajes.

Uno de los propósitos de este artículo es hacer visible la evaluación formativa como una herramienta para mejorar el aprendizaje de las matemáticas. Aunque se ha mencionado mucho que la evaluación formativa favorece el aprendizaje (Chávez-Ruiz y Martínez-Rizo, 2018; García, Mejía y Meza, 2009; Martínez-Rizo, 2012a), también es sabido que ésta no se ha implementado con éxito en las clases de matemáticas (Burkhardt y Schoenfeld, 2019). Se podría decir que la evaluación formativa tiene ciertas dificultades para los profesores, ya que posiblemente no se han experimentado las ventajas formativas de su implementación o no se ha indagado lo suficiente para exponer las ventajas que tiene para el aprendizaje de las matemáticas.

Recapitulando; como ya hemos venido comentando, la evaluación formativa en matemáticas es un proceso que le permite al profesor obtener información útil de los procesos de aprendizaje de los estudiantes, para adecuar o ajustar su enseñanza a dichos procesos y ofrecer retroalimentación y seguimiento hasta el logro de los propósitos establecidos. En este sentido, es útil considerar la naturaleza y potencial de las tareas matemáticas y el seguimiento que damos a las respuestas de los estudiantes, identificando no solo los procesos correctos, sino los incorrectos; por lo que es importante centrar la atención más en los procesos que en el resultado de dichas tareas.

Análisis de propuestas de evaluación para el aprendizaje

Existe consenso sobre la importancia de promover el empleo de diferentes instrumentos de evaluación para recopilar información que permita valorar el progreso de los estudiantes en la consecución de los objetivos de aprendizaje y los diferentes aspectos involucrados en esto (Cardeñoso, 2006; Martínez, 2020; Suurtamm et al., 2016). No obstante, esto ha planteado un desafío importante relacionado con cuáles deben ser las características que deben tener esos instrumentos y cómo articular la información que nos proporcionan, así como plantear cómo usar esa información para promover la mejora de los aprendizajes.

Los trabajos que se han desarrollado respecto a este desafío postulan la importancia de no centrarse únicamente en hechos o piezas aisladas de información, sino que también se valoren aspectos cognitivos más complejos como los razonamientos, las habilidades para la resolución de problemas o la modelación (Martínez-Rizo, 2009; Suurtamm et al., 2016). En este sentido, las propuestas de evaluación para el aprendizaje deben permitir que los estudiantes demuestren una diversidad de desempeños, que les permitan identificar los diferentes avances que pueden tener y que serán la base para proporcionar una retroalimentación adecuada que le ayude a continuar con su aprendizaje.

Al tener claras las metas de aprendizaje y los criterios con los que se juzgará la calidad de sus trabajos, los estudiantes tendrán más responsabilidad sobre las evidencias de su aprendizaje, con lo que se promueve su autorregulación (García-Jiménez, Gallego-Noche, y Gómez-Ruíz, 2015). Es importante dotar a los estudiantes de las herramientas necesarias para lograr un compromiso con su proceso de aprendizaje, y que les permitan desprenderse de las normas centradas en los profesores (Elrod y Strayer, 2015). Investigaciones como la de Romero-Martín, Castejón-Oliva y López-Pastor (2015) y Hortigüela-Alcalá, Pérez-Pueyo y López-Pastor (2015) reportan que es posible una mayor implicación de los estudiantes en su proceso de evaluación y observan que, a pesar de ser una mayor carga de trabajo para ellos, se sienten satisfechos con el resultado final.

Para determinar la pertinencia de un instrumento para desarrollar la evaluación para el aprendizaje, se requiere conocer adecuadamente sus alcances y limitaciones y tener claro lo que será evaluado (Martínez, 2020). Esta conjunción permitirá establecer formas más adecuadas para desarrollar la evaluación para el aprendizaje.

No obstante, la elección de los instrumentos o estrategias de evaluación más adecuados para los objetivos de aprendizaje no es suficiente, es necesario que estas se implementen en un ambiente en el cual los estudiantes tengan la confianza para intervenir y exponer sus ideas, sean correctas o no, sin sentir que estas son juzgadas (Cardeñoso, 2006). De otro modo, ellos tenderán a simular que están aprendiendo, lo cual llevará a fundamentar acciones de retroalimentación e intervención sobre bases equivocadas, sin alcanzar el objetivo de mejorar el aprendizaje.

Además, la evaluación no solo debe concentrarse en el desempeño de los logros de los estudiantes. Flores y Gómez (2009) concuerdan con otros autores al considerar que la evaluación no incluye solo el aprendizaje, es también una oportunidad de mejora de la práctica docente, de las instituciones, de los programas e incluso el análisis del ambiente en el aula. Como parte de la evaluación del ambiente es importante reconocer cómo se sienten los estudiantes y los profesores, y cómo se van desarrollando las actividades. Para esto resultan útiles instrumentos como la Bitácora COL, la cual consiste en contestar tres preguntas básicas (aunque pueden presentar algunas variantes): ¿qué fue lo importante?, ¿cómo me sentí? y ¿qué cambiaría? En la Figura 1 se muestra una versión digital de este instrumento, llevada a cabo en las aulas virtuales, a las que la pandemia de COVID-19 ha forzado. Para desarrollarlo, se puede emplear un pizarrón digital dónde todos pueden acceder y editar. Esta bitácora realizada cada semana permite observar cómo los estudiantes reconocen lo que se destaca en el trabajo de periodo y sus reacciones a las actividades, pero sobre todo observar la conformación del ambiente de aprendizaje y cómo se van apropiando de la responsabilidad para desenvolverse en un ambiente centrado en el aprendizaje.

Contrastar la evaluación estandarizada frente a la evaluación formativa

La evaluación es parte integral de los procesos de enseñanza y de aprendizaje, y puede realizarse con diferentes propósitos, siendo uno de estos la mejora educativa, que puede realizarse a la par del desarrollo de los procesos de aprendizaje, y otro es el monitoreo o la rendición de cuentas del sistema educativo en su conjunto, de la escuela, de los profesores o de los alumnos. Con respecto al primer propósito mencionado, en las últimas décadas ha tomado relevancia la evaluación formativa que se desarrolla en el aula; mientras que para el segundo y a nivel del sistema educativo, ha tomado relevancia la evaluación externa a gran escala. Es por ello que se considera pertinente contrastar estas dos evaluaciones, respecto a sus características, alcances y la información que proporcionan, pues a pesar de tener propósitos distintos, ambas comparten el objetivo de apoyar y mejorar el aprendizaje de las Matemáticas (Martínez-Rizo, 2009; Suurtamm et al., 2016).

Figura 1: Bitácora COL. Notas de pizarrón. Grupo CCH Sur, Prof. Adriana Gómez.

Contesten por favor estas tres
preguntas.
¿Qué es lo importante? Salir adelante.
¿Cómo me sentí? Bien.
¿Qué cambiaría? Po el momento nada.

1. Estar tranquiloy pensar con la
cabeza fría.
2. Me sentí bien.
3.Nada por ahora todo tranqui.

1.- Aprender a organizarme y conocer a mis
maestros.
2.- Bien, realmente me gusta tener tarea.
3. Tal vez que mis clases sean más didácticas.

1.- ¿Qué es lo importante?
Estar consiente de el que se debe hacer y cómo , y un pensamiento
crítico
2.- ¿Cómo me sentí?
En esta semana bien, faltan las demás...
3.- Qué cambiaría?
Algunas clases con mejores explicaciones y didácticas.

Contesten por favor estas tres preguntas.
¿Qué es lo importante?
Adaptarse para sobrevivir. Se que suena
demasiado anticuado, pero si no te adaptas a tu
entorno de trabajo/estudio es dificil seguir.
¿Cómo me sentí?
Raro, me siento extrañamente agotado y siempre
tengo sueño, aunque es bueno volver a estudiar.
¿Qué cambiaría?
Quitando la pandemia, creo que no hay un algo en
especial.

¿Qué es lo importante? Ser comprometidos a n
disfrutar
¿Cómo me sentí? Bien un poco cansado
¿Qué cambiaría? Mm nada

Elaboración propia

Como se mencionó anteriormente, una de las características principales de la evaluación formativa es que permite tomar decisiones en el momento justo que se desarrolla la enseñanza para, en caso de ser necesario, ajustarla y para retroalimentar de manera ideal a los estudiantes (Chávez-Ruiz y Martínez-Rizo, 2018) con el fin de apoyarlos en la consecución de los aprendizajes (Martínez, 2020). Esta evaluación permite valorar todos los aspectos del currículo que efectivamente se desarrollaron en el aula y los niveles cognitivos complejos que tienen lugar, tomando en consideración las circunstancias de cada niña y niño y el contexto o entorno en el que tuvieron lugar los procesos educativos (Martínez-Rizo, 2009; Martínez, 2020). Sin embargo, los resultados obtenidos como parte de la evaluación formativa presentan limitaciones para poder servir de base para comparar los desempeños de los alumnos de otras aulas o escuelas, pues en su formulación muchas veces intervienen criterios subjetivos o no generalizables (Martínez-Rizo, 2009).

Por otro lado, la evaluación estandarizada a gran escala ha tomado cada vez más relevancia entre las autoridades educativas como un medio para conocer el estado y los avances de los sistemas educativos en su conjunto, o bien, para la colocación de estudiantes. Por ejemplo, en el ingreso a la universidad (Suurtamm et al., 2016). Estas evaluaciones buscan establecer una base que permita una comparabilidad de los resultados de los alumnos y las escuelas −a nivel provincial, estatal, nacional o internacional−, es decir, buscan informar sobre la situación promedio del aprendizaje de los estudiantes de cierto nivel, al contrastarse estos con los objetivos o estándares a alcanzar a nivel del sistema educativo (Martínez-Rizo, 2009; Martínez-Rizo, 2012b). Por ejemplo, estas evaluaciones pueden identificar escuelas que presentan dificultades para alcanzar estos objetivos o estudiantes que tienen niveles de logro muy por debajo de lo esperado. Sin embargo, poseen limitaciones intrínsecas propias de sus características. Algunas son que solo pueden evaluar una muestra de aquello que es relevante aprender, en ocasiones no miden adecuadamente niveles cognitivos complejos, la influencia del contexto en los resultados de los estudiantes o no permiten conocer el grado de evolución de sus aprendizajes (Martínez-Rizo, 2009; Suurtamm et al., 2016).

Para sintetizar lo anterior, como lo menciona Martínez-Rizo (2012b), “es importante distinguir evaluaciones que buscan llegar a juicios sobre individuos −sean estos alumnos, docentes, centros escolares u otros−, en contraste con las que buscan alcanzar conclusiones sobre un sistema educativo en conjunto” (p. 2), esto con el fin de evitar confusiones sobre los propósitos de cada una y que la información que proporcionan a los docentes, instituciones educativas y a los encargados de la política educativa sea mal empleada.

Cada una de las evaluaciones −a gran escala y formativa−tiene propósitos particulares, por lo que es de esperarse que la información proporcionada sea útil para finalidades distintas. Sin embargo, ambas deben tomarse en consideración, pues las evaluaciones estandarizadas no solo se han incrementado en número sino también en grado de especialización; tal es el caso de México y América Latina que crearon instituciones para administrar y organizar estas evaluaciones y, además, se han vuelto la piedra angular sobre lo que hoy se considera la función política de las reformas educativas (Sola, 1999). Por ello, es importante que ambas evaluaciones se complementen y no se supediten una a la otra, ya que el trabajo en conjunto puede contribuir a tomar decisiones de mejora en distintos niveles, como lo es a nivel del sistema educativo y de los procesos de aprendizaje de los estudiantes en su contexto.

Muestra de lo anterior es algo que se puede constatar desde la matemática educativa, pues se ha demostrado que la información que provee la evaluación estandarizada tiene utilidad práctica para diseñar o elaborar recursos para ofrecer a los estudiantes una mejor evaluación formativa (cfr. Ávila y García, 2008; García y López, 2008; García, 2014; Shimizu, 2011; Shalem et al., 2012).

Reflexiones finales

A manera de cierre y para ejemplificar la articulación de las reflexiones establecidas en los objetivos a tratar en el grupo de discusión, se presentan dos ejemplos de la importancia de tomar a la evaluación del aprendizaje de las matemáticas como objeto de estudio.
El primero se relaciona con el hecho de que para cambiar la forma de enseñanza y aprendizaje se requiere reflexionar y repensar los procesos de evaluación. Es necesario dejar de pensar la evaluación como una acción no relacionada o independiente de los procesos de enseñanza y aprendizaje. No reconocer esta relación resulta incorrecto; basta ver que lo que se evalúa es lo que se considera importante de aprender. Esto toma mayores dimensiones si tomamos en consideración que, aunque es una acción incorrecta, lo que se evalúa en las pruebas externas y a gran escala tiene un efecto normativo en lo que los profesores privilegian para enseñar en el aula. Así, solo hasta que se conciben los procesos de enseñanza, aprendizaje y evaluación como inseparables, a la evaluación como elemento regulador y se incide en ellos en forma conjunta, es que se podrá lograr incidir y transformar benéficamente los sistemas educativos. Entonces la evaluación proporciona información que permite mejorar tanto los resultados educativos como las acciones que se desarrollan para alcanzarlos.

Cambiar la forma como se concibe y desarrolla la evaluación no se reduce a emplear nuevos instrumentos, sino que implica replantearse la filosofía subyacente y cómo se usa la información que se recopila (Azcárate, 2006). Por tanto, incorporar la evaluación para el aprendizaje como instrumento de mejora educativa requiere desarrollar procesos de desarrollo profesional que contribuyan a problematizar los procesos de evaluación.

Por su parte, la mención dos párrafos arriba sobre el efecto de la evaluación externa a gran escala en los procesos de enseñanza, nos deja ver la importancia de promover en la formación de los profesores estos temas; de modo que puedan hacer una adecuada interpretación de sus objetivos, pero sobre todo de sus resultados y del uso de la información que proveen para la mejora educativa. Información que debe complementarse con la evaluación que se desarrolla en el aula.

El segundo ejemplo tiene que ver con la selección o desarrollo de los instrumentos de evaluación más adecuados para los propósitos establecidos y para los contenidos que se evalúan. En este sentido, el primer paso para esta selección es tener claro cuáles son los *criterios y evidencias* que se presentan como las más adecuadas para valorar los resultados de aprendizaje o los procesos desarrollados con dicha finalidad. Estos elementos deben ser proporcionados por la Matemática Educativa, a partir de aquellos resultados y conocimientos sobre cómo se construyen o aprenden los conocimientos matemáticos y aquellas habilidades que son valoradas en la formación matemática. Por su parte, la Evaluación Educativa puede aportar sus conocimientos disciplinares sobre los aspectos técnicos asociados con las características y el empleo de los instrumentos pertinentes, así como analizar la validez y confiabilidad a la información recopilada y los resultados obtenidos. También puede aportar sus conocimientos, en caso de ser necesario, para el desarrollo de nuevos instrumentos o para generar modelos de análisis de la información recopilada en dichas pruebas y la generación de resultados o relaciones válidas entre las variables medidas. Esto toma mayor relevancia cuando se diseñan pruebas que pueden tener "consecuencias importantes", como los exámenes de selección para ingreso a algún nivel educativo, para el egreso o para la certificación.

La Evaluación es un tema que debe estar presente en la agenda de investigación de la Matemática Educativa. La Evaluación Educativa y la Matemática Educativa son dos campos de investigación que tienen largas trayectorias, aportes y avances significativos, con muchos elementos en común. Si pensamos de manera general en un sistema educativo, estaríamos hablando de alumnos, profesores, directores de escuelas, asignaturas, libros de texto, contenidos, materiales didácticos, planes y programas de estudio, entre otros aspectos. Las investigaciones en estos campos abordan estos aspectos y, por tanto, es necesario un encuentro y discusión teórica, metodológica o epistemológica entre ambos.

Referencias bibliográficas

Ávila, A. y García, S. (2008). *Los decimales: Más que una escritura: reflexiones sobre su aprendizaje y enseñanza*. México: Nacional para la Evaluación de la Educación.

Azcárate, P. (2006). Propuestas alternativas de evaluación en el aula de Matemáticas. En J. Chamoso y J. Durán (Eds). *Enfoques actuales en la didáctica de las matemáticas* (pp. 187-220). España: Ministerio de Educación y Ciencia.

Becerra, R. y Moya, A. (2008). Una perspectiva crítica de la evaluación en matemática en la Educación Superior. *Revista Universitaria de Investigación, 9*(1), 35-69.

Black, P., y Wiliam, D. (2012). Assessment for learning in the classroom. In J. Gardner (Ed.), *Assessment and learning* (pp. 11–32). London: Sage.

Burkhardt, H., y Schoenfeld, A. (2019). Formative Assessment in Mathematics. En H. L. Andrade, R. E. Bennett, y G. J. Cizek (Eds.), *Handbook of Formative Assessment in the Disciplines,* 1.ª ed (pp. 35-67). Inglaterra: Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315166933-3

Cardeñoso, J. (2006). La evaluación como elemento de instrucción y sus peculiaridades en el área de matemáticas. En J. Chamoso y J. Durán (Eds). *Enfoques actuales en la didáctica de las matemáticas* (pp. 157-186). España: Ministerio de Educación y Ciencia.

Chávez-Ruiz, Y. y Martínez-Rizo, F. (2018). Evaluar para aprender: hacer más compleja la tarea a los alumnos. *Educación Matemática, 30*(3), 211-246. Doi: 10.24844/EM3003.09

Elrod, M. y Strayer, J. (2015). Using an observational rubric to facilitate change in undergraduate classroom norms. En Suurtamm, C. y Roth, A. (Eds.). *Annual Pespectives in Mathematics Education: Assessment to Enhance Teaching and Learning* (p. 87-96). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Flores, A. H., y Gómez, A. (2009). Aprender Matemática, Haciendo Matemática: la evaluación en el aula. *Educación Matemática*, *21*(2), 117-142.

García, A., Aguilera, M., Pérez, M. y Muñoz, G. (2011). *Evaluación de los aprendizajes en el aula. Opiniones y prácticas de docentes de primaria en México*. México: Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación.

García, B., Mejía, J. y Meza, A. (2009). *Propuesta para evaluar y reportar el proceso de desarrollo de competencias de los alumnos de educación básica, mediante una nueva boleta de calificaciones*. México: Secretaría de Educación Pública.

García-Jiménez, E., Gallego-Noche, B. y Gómez-Ruíz, M. A. (2015). Feedback and Self-Regulated Learning: How Feedback Can Contribute to Increase Students' Autonomy as Learners. En M. Peris.Ortíz, J.M. Merigó Lindahl (eds.), *Sustainable Learning in Higher Education, Innovation, Technology and Knowledge Management* (pp. 113-130). Estados Unidos: Springer International Publishing.

García, S. y López, O. L. (2008). *La enseñanza de la geometría*. México: Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación.

García, S. (2014). *Sentido numérico*. México: Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación.

Garza, V. E. (2004). La evaluación educativa. *Revista Mexicana de Investigación Educativa, 9*(23), pp. 807-816.

Hidalgo, N. y Murillo, F. J. (2017). Las concepciones sobre el proceso de evaluación del aprendizaje de los estudiantes. *REICE. Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambios en Educación, 5*(1), 107-128. DOI: https://doi.org/10.15366/reice2017.15.1.007

Hortigüela-Alcalá, D., Pérez-Pueyo, Á., y López-Pastor, V. (2015). Implicación y regulación del trabajo del alumnado en los sistemas de evaluación formativa en educación superior. *RELIEVE, 21*(1), ME6. DOI: 10.7203/relieve.21.1.5171

Martínez, A. (2020). Evaluación para el aprendizaje. En M. Sánchez y A. Martínez (Eds.) *Evaluación del y para el aprendizaje: instrumentos y estrategias* (pp. 41-49). Ciudad de México, UNAM.

Martínez-Rizo, F. (2009). Evaluación formativa en aula y evaluación a gran escala: hacia un sistema más equilibrado. *Revista Electrónica de Investigación Educativa, 11* (2). Recuperado de http://redie.uabc.mx/vol11no2/contenido-mtzrizo2.html

Martínez-Rizo, F. (2012a). El futuro de la evaluación educativa. *Sinéctica*, *40*, 11. Recuperado de http://www.sinectica.iteso.mx/articulo/?id=40_el_futuro_de_la_evaluacion_educativa

Martínez-Rizo, F. (2012b). *Evaluación en el aula: Retos y desafíos*. México: Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación.

Martínez-Rizo, F. (2013). Dificultades para implementar la evaluación formativa. Revisión de literatura. *Perfiles Educativos, 35*(139), 128-150.

Niss, M. (2007). Reflections on the state of and trends in research on mathematics teaching and learning. En F. K. J. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 1293–1312). Charlotte: Information Age Publishing.

Nortvedt, G. y Buchholtz,N. (2018). Assessment in Mathematics Education: responding to issues regarding methodology, policy, and equity. *ZDM, 50, 555-570*. doi: 10.1007/s11858-018-0963-z

Romero-Martín, R., Castejón-Oliva, F. J., y López-Pastor, V. (2015). Divergencias del alumnado y del profesorado universitario sobre las dificultades para aplicar la evaluación formativa. *RELIEVE, 21*(1), ME5. DOI: 10.7203/relieve.21.1.5169

Sanmartí, (2007). *10 ideas Clave. Evaluar para aprender* (1er. Ed). Barcelona, España: Editorial GRAÓ.

Secretaría de Educación Pública. (2017). *Aprendizajes Clave para la educación integral. Matemáticas. Educación secundaria. Plan y programas de estudio, orientaciones didácticas y sugerencias de evaluación*. Autor. México

Shalem, Y., Sapire, I., y Huntley, B. (2012). How curriculum mapping of large-scale assessments can benefit Mathematics teachers. En *Proceeding of the 12th International Congress on Mathematical Education: Topic Study Group 33* (pp. 6601-6610). Seoul, Korea: ICMI.

Shimizu, Y. (2011). Building bridges between large-scale external assessment and mathematics classrooms: A japanese perspective. En B. Kaur y K. Y. Wong (Eds.). *Assessment in the mathematics classroom: 2011 Association of Mathematics Educators Yearbook* (pp. 217-235). Singapore: World Scientific Publishing.

Sola, M. (1999). El análisis de las creencias del profesorado como requisito de desarrollo profesional. En A. Pérez, J. Barquín y F. Angulo (Eds.). *Desarrollo profesional del docente. Política, investigación y práctica* (pp. 661-683). Madrid: Akal.

Suurtamm, C., Thompson, D., Young, R., Díaz, L., Sayac, N., Schukajlow, S., Silver, E., Ufer, S. y Vos, P. (2016). *Assessment in Mathematics Education. Large-Scale Assesment and Classromm Assesment. ICME-13 Topical Surveys*. Hamburg: ICME13-Springer Open.

Swan, M., y Burkhardt, H. (2012). A designer speaks: Designing assessment of performance in mathematics. *Educational Designer: Journal of the International Society for Design and Development in Education, 2*(5), 1–41. http://www.educationaldesigner.org/ed/volume2/issue5/article19.

Tiana, A. (2012). Evaluación y cambio educativo: los debates actuales sobre las ventajas y los riesgos de la evaluación. En E. Martín y F. Martínez (Eds.) *Avances y desafíos en la evaluación educativa* (pp. 17-26). España: OEI y Fundación Santillana.

Van den Heuvel-Panhuizen, M., y Becker, J. (2003). Towards a didactic model for assessment design in mathematics education. In A. J. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, y F. K. S. Leung (Eds.), *Second international handbook of mathematics education* (686–716). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

SECCIÓN 2

PROPUESTAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

VOL 34, NÚMERO 1, AÑO 2021

ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN UNA SECUNDARIA INCLUSIVA: CINCO CASOS DE TERCER GRADO CON NECESIDADES EDUCATIVAS ESPECIALES

MATHEMATICS TEACHING IN AN INCLUSIVE SECONDARY SCHOOL: FIVE THIRD-GRADE CASES WITH SPECIAL EDUCATIONAL NEEDS

Beatriz García Rodríguez, Ignacio Garnica y Dovala
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. (México)
beatriz.garcia@cinvestav.mx, igarnica@cinvestav.mx

Resumen
Esta investigación, en curso de corte cualitativo, plantea el problema de la inclusión y la enseñanza de las matemáticas en aulas regulares con alumnos con necesidades educativas especiales (NEE); tres con Problemas de Aprendizaje (PA), uno con Trastorno de Déficit de Atención e Hiperactividad (TDAH) y, uno con Trastorno de Espectro Autista (TEA) y barreras de comunicación. Ante escasos resultados de investigación relativa al ámbito, se indagó acerca de las posibilidades de enseñanza y atenciones especiales en el aula, para identificar características y pensamiento matemático de cada caso, a efecto de implementar actividades dirigidas hacia la integración de contenidos matemáticos.

Palabras clave: educación inclusiva, necesidad especial específica-matemáticas, cualitativo, estudio de casos

Abstract
This ongoing, qualitative research presents the problem of inclusion and mathematics teaching in regular classrooms which include five students with special educational needs (SEN); three of the students with Learning Problems (PA); one with Attention Deficit and Hyperactivity Disorder (ADHD); and one with Autism Spectrum Disorder (ASD) and communication barriers. With limited research results in this field, special teaching opportunities and attention in the classroom were investigated to identify each case characteristics and mathematical thinking, in order to implement activities aimed at integrating mathematical content.

Keys words: inclusive education, special specific-mathematical need, qualitative, case study

Introducción

La *Educación Inclusiva* es un tema que compete a docentes, a la comunidad escolar y al sistema educativo mexicano. El diario Oficial de la Federación (DOF) la define como:

> Un proceso educativo que parte del respeto a la dignidad humana y de la valoración a la diversidad y que, en consecuencia, propicia que todas las personas, especialmente de los sectores sociales en desventaja, desarrollen al máximo sus potencialidades mediante una acción pedagógica diferenciada y el establecimiento de condiciones adecuadas a tal diversidad, lo que implica la eliminación o minimización de todo aquello que constituya una barrera al desarrollo, aprendizaje y a la participación en la comunidad escolar (DOF, 2019, s.p.).

En el Plan y Programa de Estudios 2011 de la Secretaría de Educación Pública (SEP) hace referencia en “atender a los alumnos que, por su discapacidad cognitiva, física, mental o sensorial (visual o auditiva), requieren de estrategias de aprendizaje y enseñanza diferenciadas, es necesario que se identifiquen las barreras de aprendizaje…” (SEP, 2011, p.35). Sin embargo, en el Plan 2017 se manifiestan cambios en el sentido de consolidar la educación inclusiva “mediante acciones que promuevan la plena participación en el sistema de educación regular, de estudiantes con discapacidad y aptitudes sobresalientes, en beneficio de toda la comunidad educativa” (SEP 2017, p.81). Se visualiza un cambio del primer al segundo documento para atender oportunamente a los estudiantes en condiciones de necesidad y para esta investigación en condiciones de necesidad especial específica.

Esta investigación en *curso* se inició en una secundaria mexicana *inclusiva.* Directivos de la institución educativa opinan que la *inclusión* consiste en recibir a *todos* los alumnos sin restricciones de condición física, cognitiva social o emocional, consideran que el docente es a el actor clave para que el alumnado alcance las condiciones necesarias de aprendizaje mediante estrategias de enseñanza o adaptaciones curriculares, en promedio atienden de 1 a 3 estudiantes con necesidad educativa especial (NEE) por grupo. Mediante un sondeo expresaron que la enseñanza se torna complicada por las condiciones institucionales, atención a grupos numerosos, sesiones de 50 minutos, diversidad de estudiantes, dificultades en el diseño de actividades e incertidumbre si los alumnos con NEE comprenden los temas o solo reproducen los trabajos de sus compañeros. Manifiestan que los documentos referentes a la *educación inclusiva* no corresponden con la enseñanza real del aula y la orientación para la atención no se asemeja con la práctica diaria, en lugar de incluirlos se les *excluye* de los aprendizajes. Opinan que son los especialistas en educación especial los indicados de atender estos casos.

Para desarrollar esta investigación y comprender el ámbito de inclusión, la autora de este estudio atendió a tres grupos de segundo año del ciclo escolar 2018-2019, de los cuales estaban inscritos cinco casos con NEE: *tres con Problemas de Aprendizaje* (PA), *uno con Trastorno de Déficit de Atención e Hiperactividad* (TDAH) *y uno con Trastorno del Espectro Autista* (TEA). Uno de los retos más importantes de este trabajo fue romper la barrera de la comunicación con cada uno de los cinco casos, principalmente con el de TEA, es por esto, que se continuaron con los grupos en el siguiente ciclo escolar 2019-2020. La perspectiva de incluir a *todos* los estudiantes y dar una atención oportuna no es una situación particular de la escuela o de un grupo docentes. Forlin, et al., (2013) señalan que la *educación inclusiva* es un tema complejo para distintos países y abordarlo depende del contexto político y social de cada gobierno.

Referentes teóricos

Derivado de lo anterior, se revisaron documentos referentes para comprender qué implica la educación inclusiva con las condiciones arriba descritas y la enseñanza de las matemáticas de alumnos con necesidades educativas especiales específicas en aulas regulares. Se consideraron en cuatro aspectos fundamentales; *1) El concepto de inclusión en la educación, 2) Características del trastorno y cognitivo de los cinco casos, 3) Enseñanza de las*

matemáticas en condiciones adversas en el aula regular, 4) Adquisición de las nociones del sistema métrico decimal (SMD) como estrategia para dar sentido a los números decimales y a la noción de fracción.
Concepto de inclusión en la educación.

La UNESCO (Organización de las Naciones Unidas para la Educación, Ciencia y Cultura, por sus siglas en inglés) señala que:

> La educación inclusiva es un proceso que entraña la transformación de las escuelas y otros centros de aprendizaje para atender a todos los niños, incluidos los niños y las niñas, los estudiantes de minorías étnicas, los afectados por el VIH y el SIDA, y los discapacitados y las dificultades de aprendizaje (UNESCO, 2008, p.5).

Algunos países siguen considerando que la *inclusión* es atender a los niños con discapacidad y de necesidades educativas especiales y que éstos, se integren en las escuelas ordinarias. Los investigadores sugieren una cultura de colaboración que impulse y apoye la solución de problemas en el progreso hacia una educación inclusiva (UNESCO, 2008). Otros autores (Forlin et al., 2013) consideran que este concepto puede agruparse en dos categorías: *conceptualizar la educación inclusiva en características claves* y *conceptualizar la educación inclusiva como la eliminación de lo que excluye y margina*. La *primera* se refiere a características fundamentales, como la colocación del educando por edad, la asistencia a una escuela local y otras más. La *segunda* se relaciona con la que identifica y elimina las barreras a la participación en la educación. En este ámbito internacional señalan que la *inclusión* va a depender en su mayoría del contexto y su desarrollo para el éxito implicaría; reconocer y comprender que la inclusión va en continua evolución, crear entornos de aprendizaje de acuerdo a las necesidades de todos los alumnos, elaborar planes de estudios para adaptar a las necesidades de los estudiantes, mantener la participación de la comunidad escolar y familia, identificar y reducir los obstáculos al aprendizaje y la participación, capacitar y contribuir al desarrollo profesional de los docentes, por mencionar algunos. En este caso, los docentes de la secundaria tienen presente la mayoría de las implicaciones anteriores, consideran que no se logra concretar porque no hay una guía/modelo de cómo debe llevarse en la práctica diaria en condiciones reales institucionales. Para esto, los autores responden que si se quiere aplicar un enfoque inclusivo es necesario preparar de forma oportuna a todos los interesados de todos los niveles educativos. Actualmente, los cursos de actualización docentes en la Ciudad de México difícilmente abordan la situación de cómo atender alumnos con NEE en aulas regulares.

Con relación a las *características del trastorno y cognitivo,* se buscaron documentos para entender la naturaleza de los trastornos y síndromes de los cincos *casos*. Ardila, Rosselli y Matute (2005) señalan que durante la infancia hay que diferenciar dos tipos de problemas; *trastornos del aprendizaje* y *los desórdenes de la conducta.* El *primero* se refiere a fallas de tipo cognoscitivo como; dislexia, disgrafia, discalculia, problemas especiales, entre otros y, el *segundo* a las dificultades en el aprendizaje; hiperactividad, impulsividad y déficit de atención. A partir de esta información y los diagnósticos proporcionados por la UDEEI (Unidad de Educación Especial y Educación Inclusiva), su función es trabajar de manera conjunta con personal docente y directivos, con el fin de garantizar que todos los estudiantes tengan una educación de calidad sin importar sus condiciones físicas, psicológicas, sociales, culturales y económicas (SEP, 2015). Se consideraron a tres alumnos con *PA* debido a las dificultades en lectura, escritura y matemáticas que presentaron en los diagnósticos de la UDEEI. No hubo documento médico a pesar de que la maestra especialista solicitó a los padres de familia realizar una valoración psicológica en alguna institución de salud. En el caso del alumno con TDAH la madre de familia presentó a la UDEEI el diagnóstico médico con el trastorno identificado. Este trastorno Capdevila-Brophy, Artigas-Pallarés, y Obiols-Llandrich (2006), lo caracterizan:

> (…) por un patrón persistente de comportamientos problemáticos que reflejan desatención y desinhibición conductual (impulsividad e hiperactividad) que no se explica por cualquier otro trastorno del desarrollo, del pensamiento o afectivo. La sintomatología interfiere con el funcionamiento del paciente en, por lo menos, dos ambientes distintos (casa, escuela, trabajo) (p. 127).

Para el caso del alumno con TEA el padre de familia presentó un informe médico a la UDEEI para reportar el caso de su hijo. Para esta situación, nos centramos en dos documentos para entender la naturaleza de este trastorno porque era la primera vez que se tenía un alumno en esas condiciones. López, Roger, Severiano y García (2005) lo definen como un "trastorno del desarrollo neurológico complejo que afecta gravemente la forma en que los individuos se comunican en interactúan con otros y… los acompaña durante toda la vida" (p. 83). Señalan que los síntomas y características se presentan en diversas combinaciones y grados de severidad. Por otro lado, Coto (2013) nos presenta varias sugerencias para intervenir en el aspecto escolar, por ejemplo, a partir de un diseño individualizado adaptar los contenidos curriculares que estén relacionados con los intereses del alumno o alumna. En el caso del alumno se trazó un perfil individual para identificar su comportamiento ante diferentes profesores, compañeros y situaciones áulicas. Al finalizar el primer ciclo escolar sólo se comunicaba limitadamente con dos docentes y unos cuantos compañeros.

Enseñanza de las matemáticas en condiciones adversas en el aula regular

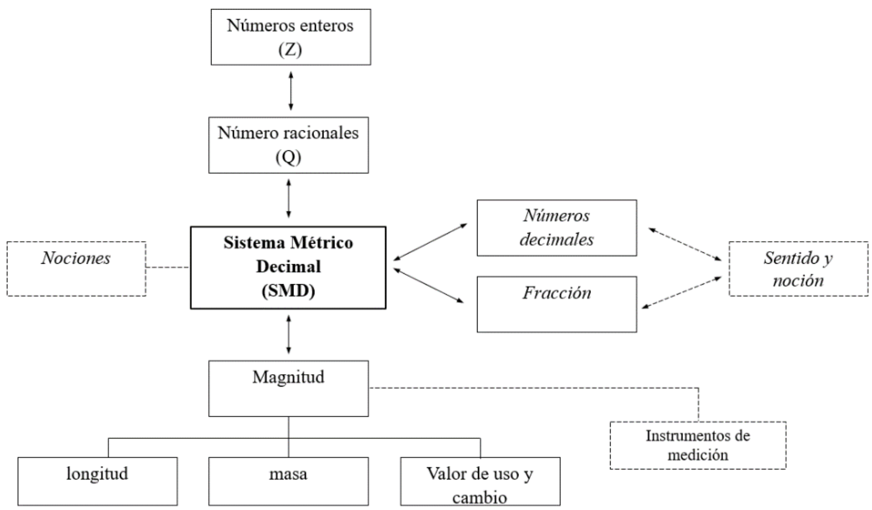
En este aspecto se revisaron dos documentos con relación a este aspecto. Se encontró que Schmidt (2016) investiga sobre las posibles relaciones entre la inclusión, los estudiantes con dificultades matemáticas y el liderazgo en las aulas. La autora rescata dos definiciones: *inclusión* y *estudiantes en dificultades de aprendizaje*. En la primera hace referencia de Ferguson (1995, como se citó en Schmidt, 2016) en los siguientes términos "la inclusión es un proceso de articulación de iniciativas y estrategias de reforma de la escuela general y especial para lograr un sistema unificado de educación pública que incorpore a todos los niños y jóvenes como miembros activos y participantes de la comunidad escolar…" (p. 84). En la segunda definición, aclara que los estudiantes en dificultades de aprendizaje no son los de trastorno de desarrollo sino también algo creado en el contexto social. Para identificar a los estudiantes con dificultades, los profesores de la investigación realizaron un diagnóstico de detección de competencias del alumnado y la actitud que tenían hacia las matemáticas, manifestaron que éstos no se encontraban en otras dificultades más que las de esta materia. A partir de esta situación, Schmidt (2016) presenta tres conjuntos de resultados*: el primero*, si los profesores comprenden las necesidades de aprendizaje de los estudiantes y las formas de utilizar sus conocimientos sobre las emociones de ellos, estas pueden influir en su participación en la enseñanza. *Segundo*, si el profesor genera ambientes de aprendizaje con reglas declaradas ya que intervienen en el comportamiento de la enseñanza. *Tercero*, las estrategias que utilizan los estudiantes con dificultades matemáticas para participar y averiguar en qué son buenos, cómo y cuándo solicitar apoyo a sus compañeros.

Por otro lado, Roos (2015) realizó una investigación en el nivel primaria sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas desde el punto de vista de educación especial. Señala que las *Necesidades Educativas Especiales en Matemáticas* (SEM, por sus siglas en inglés) tiene por lo menos dos enfoques; *pedagógico,* cómo enseñar las matemáticas a estudiantes SEM y *psicológico,* encontrar un diagnóstico (psicológico) de la condición del estudiante. Señala que el concepto de *inclusión* es complejo y tiene diversas implicaciones, sin embargo, es muy utilizado en el contexto educativo. Roos (2015) explica que la *exclusión* ocurre cuando los estudiantes no tienen acceso a las matemáticas en su escuela porque están inmersos a un grupo escolar, pero no pertenecen a éste. Para tratar este ámbito, la autora divide el estudio en tres momentos; *primero*, examinar los casos generales*,* por ejemplo, la función del director de la escuela, y específicos, de qué forma los profesores incluyen a los alumnos en las actividades del aula. *Segundo,* emplea la etnografía como guía para distinguir el proceso de inclusión en las matemáticas desde el punto de vista de los profesores. *Tercero,* utiliza técnicas de análisis para el identificar palabras clave, expresar códigos y formar categorías.

En lo general, se está de acuerdo con lo que plantean las autoras de que los estudiantes no solo son aquellos en dificultades en aprendizaje sino también los que han sido influidos por el contexto social o la importancia de conocer la forma de trabajo de los integrantes de la comunidad escolar para incluir a los estudiantes. La diferencia con esta investigación es que los casos con NEE también presentaron dificultades en las matemáticas de acuerdo con el reporte que proporcionó UDDEI y los resultados de los diagnósticos implementados por la docente al inicio escolar. Una vez más se advierte de la falta de un referente, de una propuesta que oriente a la atención y enseñanza de las matemáticas de estudiantes con características y condiciones similares a esta investigación.

Adquisición de las nociones del sistema métrico decimal (SMD) como estrategia para dar sentido a los números decimales y a la noción de fracción.
Se estructuró el siguiente esquema como propuesta para la adquisición de las nociones anteriores con los cinco casos (véase Figura 1).

Figura 1. *Esquema de organización de contenidos para la adquisición de las nociones del SMD.*



Fuente: elaboración propia

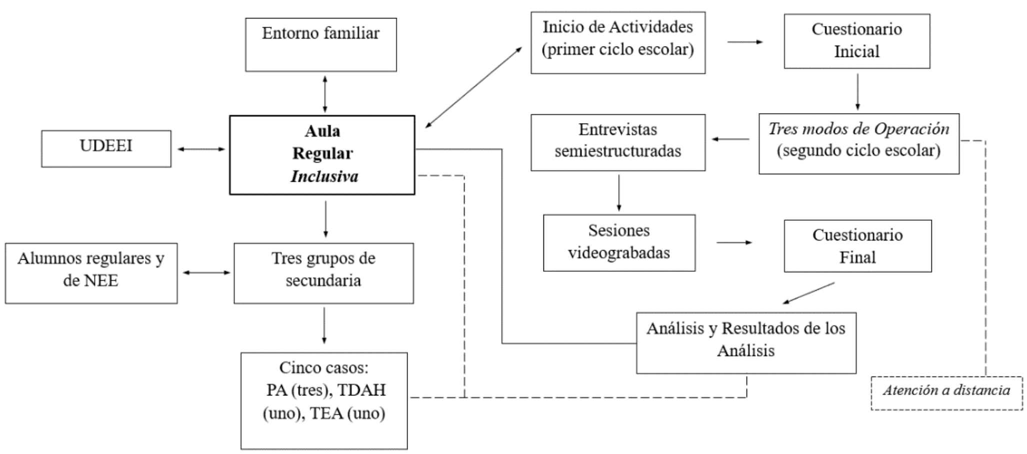
Se prestó atención a las nociones del SMD como producto del resultado de un trabajo amplio en el aula durante el primer ciclo escolar. Estas actividades evidenciaron que los cinco casos presentaron dificultades en: operaciones matemáticas con punto decimal, valor posicional, división de segmentos en *n* partes iguales, ubicación de números racionales *sencillos* en la recta numérica, estimaciones de distancia, relaciones de equivalencia, cálculo del perímetro/área/volumen y otras más. Además, se identificó que los cinco casos en *situaciones problemáticas matemáticas* no hacían diferencia entre cantidad y magnitud. (Grupo Beta, 1990, p. 49) señalan que la *cantidad* “es pues lo que tienen de común todos los elementos iguales entre sí” y la *magnitud* “es la cualidad común a todos los elementos del conjunto”. Chamorro y Belmonte (1991) expresan que la medida de una magnitud no se puede realizar de forma espontánea, se requiere de experiencias en la estimación, clasificación y seriación. Refieren de un contacto temprano con situaciones que le propicien al niño a descubrir las magnitudes físicas de forma directa (atributos o propiedades de colecciones de objetos) e indirecta (apoyo de aparatos). Los autores señalan que el niño tiene que enfrentarse a cuatro estadios para apropiarse de una magnitud dada; *consideración y percepción de una magnitud* (propiedad que posee una colección de objetos), *conservación de una magnitud* (adquisición de la idea de que, al cambiar un objeto de posición, forma o tamaño, permanece constante), *ordenación respecto a una magnitud dada* (ordenar objetos a partir de la magnitud considerada) y *relación entre la magnitud y número.*

Un escenario que se tuvo que atender con emergencia por las condiciones de aprendizajes asimétricas a las del aula regular. Para esto, se propuso el esquema anterior que consistió en delinear una ruta para que los *casos* iniciaran con actividades simples que les facilitara el crecimiento de estas nociones del SMD hasta la apropiación de éste, para dar sentido a los números decimales y a la noción de fracción. Se trazaron tres ejes de tratamiento; *a) longitud,* las actividades consistieron en dividir segmentos en 10, 100 y 1000 partes iguales con el uso de escuadras (sin graduar) y compás para dar sentido a la fracción $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}$, al punto decimal y de esta forma concebir la unidad *metro* y sus equivalencias en centímetros, decímetros y milímetros, Freudenthal (1983) sugiere comenzar con la explicación de que antes del punto decimal están las unidades y después del punto decimal las décimas, centésimas, etc.; *b) masa (peso)*, se diseñaron actividades para que los *casos* a partir de varios productos realizaran particiones en 10 y 100 para concebir la unidad *kilo* y sus relaciones de equivalencia con los gramos y miligramos, con el apoyo de diferentes básculas (romana de 10 kg, granataria y digital) y; *c) valor de uso y cambio,* se diseñaron actividades que hacían uso de monedas y billetes de diferentes denominaciones para que los alumnos concibieran las equivalencias entre ellas, por ejemplo, 100 centavos es equivalente a un peso, con el propósito de dar sentido a las nociones decimales.

Metodología

Para la organización de escenarios, se propuso un modelo que presenta el trabajo que se realizó con los cinco casos en el *aula regular inclusiva* (véase Figura 2).

Figura 2. *Modelo de organización de escenarios durante la investigación en curso.*



Fuente: elaboración propia

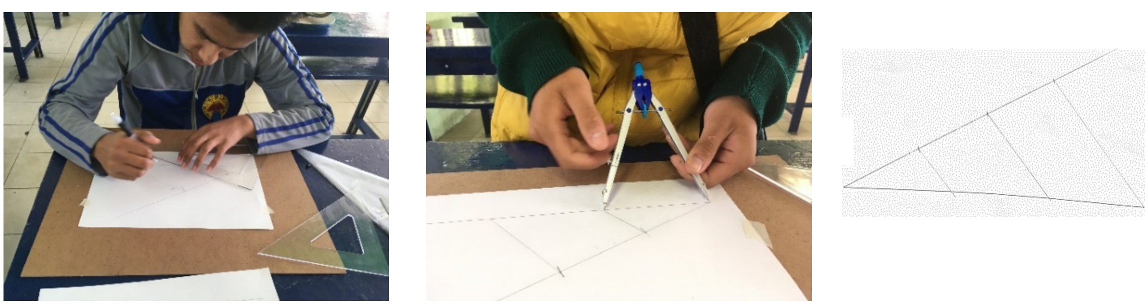
En el *Aula regular inclusiva* — escenario principal del desarrollo de esta investigación — participaron tres grupos de secundaria en el que estaban inscritos alumnos regulares y de NEE, siendo los últimos, cinco casos en condiciones de necesidad específica especial que requerían de una atención diferenciada para la *integración* de los contenidos matemáticos del aula (el informe general de la UDEEI fue esencial para identificar quiénes eran los casos distribuidos en los tres grupos de enseñanza). En este modelo se alcanzó a visualizar la importancia de involucrar a los padres de familia para el fortalecimiento de las actividades que realizaban sus hijos e hijas fuera del aula.

En el primer ciclo escolar se iniciaron con actividades y un cuestionario inicial similares a las del grupo para identificar las dificultades matemáticas, empleando la observación en el aula y la bitácora para el registro de las interacciones áulicas como: ejecución de actividades, trabajo individual, trabajo en equipo y comunicación con sus pares. Esta estrategia propició que en el segundo ciclo escolar se identificaran tres modos de operación en el salón de clases: *a) Actividades cooperativas,* aquellas que implicaba integrar a un caso en un grupo de trabajo para desarrollar una tarea; *b) Actividades diseñadas para la condición de necesidad específica,* a partir de cuestionarios previos y perfiles de su trastorno y cognición se diseñaron tareas específicas con relación a los contenidos matemáticos; y *c) Actividades diseñadas para su realización extra-aula* — se concibe al conjunto de actividades diseñadas para el aula, pero se le asigna un tiempo extra para su tratamiento — se efectuaron fuera del aula debido a las condiciones de temporalidad y de atención individualizada que corresponde como máximo de 5 a 10 minutos por sesión. Para la recopilación de datos en los *modos de operación* se empleó la observación en el aula, la bitácora y las hojas de control. Se realizaron entrevistas individuales semiestructuradas con un alumno regular y con los cinco casos para evidenciar el trabajo en paralelo con el aula regular, se utilizaron guiones de entrevista, el uso de la videograbación y transcripción. En el cuestionario final se logró obtener resultados del aula regular y de la alumna a la que se había entrevistado. Desafortunadamente, no se logró concluir en su totalidad los tres ejes de tratamiento — *longitud, masa, valor de uso y cambio* — del tercer modo de operación, sólo se concluyó con el primer eje *longitud* debido al cierre obligatorio de las escuelas ante la emergencia sanitaria mundial por Covid-19. Pero se abrió la posibilidad de seguir atendiendo los *casos* a distancia con el uso de herramientas digitales como las videollamadas por *Zoom* o *Google Meet*. No obstante, con los datos obtenidos se pudo realizar un análisis preliminar de cómo proceder con la *educación inclusiva* en el aula regular y en condiciones institucionales.

A continuación, se presentan las actividades que se desarrollaron en el tercer modo de operación con los *cinco casos*, específicamente en el eje de *longitud.* Estas actividades se lograron realizar fuera del aula por la aprobación de un acuerdo Académico Colegiado para el desarrollo del seminario: *Docencia-Investigación de Matemática Educativa en la Escuela Secundaria Diurna No. 222 "Tláloc".* El objetivo: analizar e investigar problemas relacionados con la Enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas identificados por lo profesores de la secundaria, mediante el desarrollo de proyectos de investigación educativa.

En este primer eje, se diseñaron actividades en *tres momentos*; el *primero* consistió en dividir segmentos con el uso de escuadras sin graduar y compás mediante el modelo del teorema de Tales debido a que los casos presentaron dificultades para manipular los instrumentos. Repitieron los trazos hasta comprobar que las particiones fueran exactas con apoyo de un compás de dos puntas (véase Figura 3).

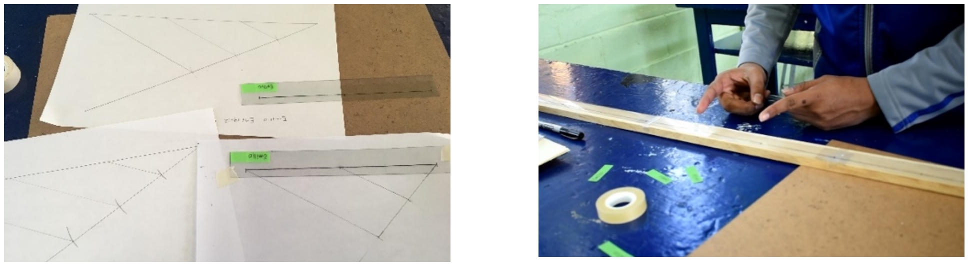
Figura 3. *División de segmentos con el uso de escuadras sin graduar y compás.*



Fuente: trabajo de estudiantes

Después, dividieron una tira de madera en 10 particiones, se apoyaron de los trazos previos que habían realizado en sesiones anteriores y de acetatos para calcar los segmentos y pegarlos en la tira de madera. Los *casos* expresaron verbalmente que en la tira de madera había 10 particiones. El alumno con TEA señaló con sus dedos las divisiones y el conteo de 1 al 10 (véase Figura 4).

Figura 4. *Elementos para construir el metro. Alumno TEA utiliza sus dedos para contar los segmentos.*



Fuente: trabajo de estudiantes

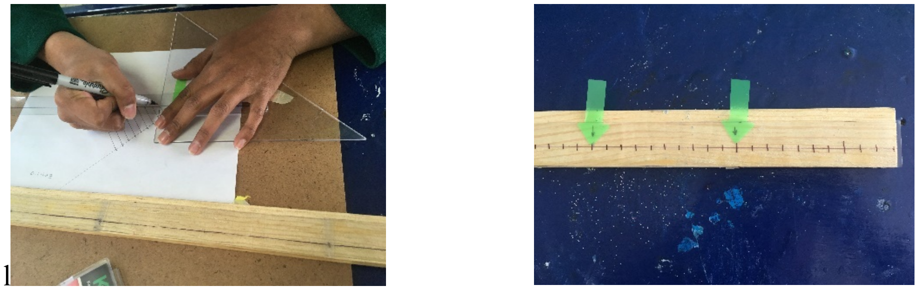
Una vez realizadas las particiones se les indicó que cada segmento correspondía a *un decímetro* y la suma de estos formaban *un metro*, su abreviatura se representaba con la letra *dm y m* respectivamente. Para fortalecer esta adquisición se les solicitó a los *casos* que midieran el largo y ancho de la mesa de laboratorio, ventanas, cajas de cartón, y expresaran los datos encontrados en sus hojas de control (véase Figura 5). Advirtieron que los datos encontrados no eran exactos porque faltaba o se pasaba por *"un cachito, cacho, pedazo, medio, cuartito"*.

Figura 5. *Los casos dividieron su regla en decímetros y la utilizaron para medir algunos objetos.*

Fuente: trabajo de estudiantes

En el *segundo momento* la secuencia fue similar, se les pidió que dividieran un segmento (un decímetro) en 10 particiones para después calcarlo en el acetato y pegarlo en su tira de madera. Previamente se les preguntó, si era posible realizar estas divisiones, los *casos* respondieron que sí. Se les indicó que esas divisiones correspondían a *un centímetro,* su abreviatura *cm* y respondieron a las preguntas; ¿cuántas particiones realizaste en el metro? y ¿cuántos centímetros hay en un metro? Con la ayuda de la docente, los *casos* sumaron de 10 en 10, es decir, 10 centímetros, 20 centímetros, 30 centímetros… hasta llegar a los 100 centímetros que corresponden a *un metro* (véase Figura 6). Para reforzar esta adquisición se les solicitó medir algunos objetos para que dieran cuenta de que algunas medidas eran exactas y otras no, se les preguntó que cómo podían representar estas medidas inexactas. Dos alumnos con PA distinguieron que ya no podían ocupar la expresión *"cacho, algo, poquito"* y se les sugirió utilizar expresiones *"y, con, más"* Por ejemplo, el largo de la ventana mide 2 metros *con* 2 decímetros o 2 metros *con* 20 centímetros. Posteriormente se les precisó que estas expresiones se representan con un *punto* que hace referencia a "algo más", el número antes del *punto* indica las veces que cabe el metro en el objeto a medir y después del *punto* las veces para completar esa longitud en decímetros o centímetros. Los dos alumnos evidenciaron esta adquisición al expresar la medida del largo de la mesa en metros y centímetros en su hoja de control (véase Figura 7).

Figura 6. *División de un decímetro en 10 partes iguales para hallar los centímetros en un metro*



Fuente: trabajo de estudiantes

Figura 7. *División de un decímetro en 10 partes iguales para hallar los centímetros en un metro.*

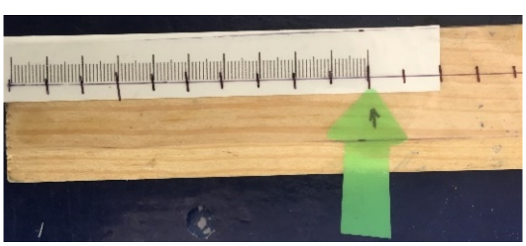
[Los dos alumnos con PA midieron el largo de la mesa y después anotaron los datos en la hoja de control]
D: *Entonces ¿cuánto mide? [me refiero al largo de la mesa]*
A$_1$: *120 centímetros*
A$_2$: *… aquí sería 1 punto 20 ¿no? [anota el dato en la columna de metros]*
D: *¡Exacto! pero estamos utilizando el metro… entonces sería…*
A$_2$: *1 punto 20 metros.*

Objeto	Expresión en metros	Expresión en centímetros
Largo de la mesa del docente	1.20 m	120 cm
Ancho de la mesa del docente	0.6 m	60 cm
Ancho de la puerta de laboratorio	0.75 m	75 cm

Fuente: trabajo de estudiantes

En el *tercer momento,* la secuencia de actividades fue similar a las dos anteriores. Se les preguntó a los *casos* si era posible dividir un centímetro en 10 particiones iguales. Un alumno con *PA* expresó que sí era posible con el uso de las escuadras y el compás, pero que costaría mucho trabajo, los demás *casos* dijeron que no se podía. Para esto, se les apoyó con una imagen para confirmar su respuesta. Tres *casos* lograron distinguir que en 1 centímetro hay 10 milímetros, en 1 decímetro 100 milímetros y en 1 metro 1000 milímetros. Para reforzar esta adquisición se les solicitó que a partir de los objetos que habían medido con anterioridad los expresaran en centímetros, milímetros y metros (véase Figura 8).

Figura 8. *Distinción de los milímetros en un decímetro y su representación en unidades de medida.*



Objeto	Expresar medida en centímetros	Expresar medida en milímetros	Expresar medida en metros
Largo y ancho de la mesa de laboratorio	60 cm	600 mm	0.6 m
Largo y ancho de la caja grande	Largo 50 cm Ancho 36 cm	500 mm	0.5 m

Fuente: trabajo de estudiantes

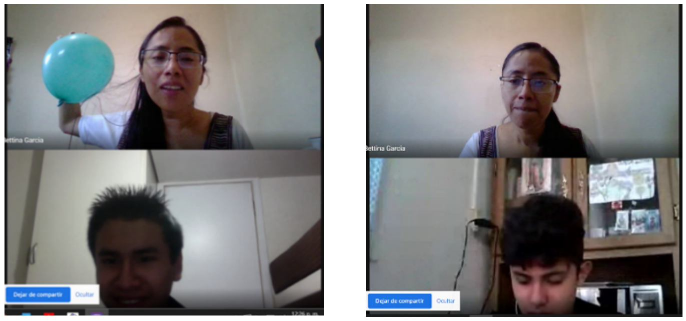
Resultados

A pesar de la emergencia sanitaria mundial por Covid-19 se tienen varios resultados de este proceso de investigación que inició en el ciclo escolar 2018-2019;

- En el primer ciclo escolar se generó un ambiente de confianza con los *cinco casos.* Se consideró importante esta construcción de vínculo entre docente-estudiante en el aula debido a que los *casos* se reservaban para dialogar con la docente, comunicar información y participar. Principalmente con el alumno con *TEA*, porque no permitía que se le acercaran o le dieran alguna instrucción. En el segundo ciclo escolar hubo mejoras en él, logró establecer diálogos cortos con la docente, empezó a tolerar que le revisaran sus actividades e iniciaba a seguir instrucciones de trabajo áulico.
- La docente de matemáticas atendió a los alumnos regulares y de NEE en paralelo con el proceso de investigación. Este trabajo favoreció el diseño de un modelo de organización de escenarios para el tratamiento de la enseñanza en el aula inclusiva.
- Se estableció un acuerdo Académico Colegiado en el plantel educativo que permitió atender a los *casos* en horas extra-clase ya que un docente no puede retirar al alumnado en horas no correspondientes sin la autorización de la dirección escolar.
- Se identificaron las necesidades matemáticas que requerían ser atendidas con los cinco *casos* por lo que se propuso un esquema de organización de contenidos para la adquisición de las nociones del *SMD.*
- Se pretendía que los *casos* participaran en todas las sesiones extra-aula, por causas ajenas a la investigación el alumno con *TDAH* no participó, pero fue un referente clave para orientar las actividades hacia la integración de los contenidos matemáticos. En una actividad con relación a las nociones de probabilidad, el alumno en clase expresó con molestia que él quería hacer las mismas actividades que la de sus compañeros porque las que estaba haciendo eran para niños chiquitos. Por otra parte, los alumnos con *PA* adquirieron las nociones de longitud al reconocer que la tira de madera que habían dividido en particiones de 10, 100, 1000 correspondía a un *metro* y que estas recibían el nombre de decímetros, centímetros y milímetros, podían expresar con sus manos que tanto eran las longitudes de esas unidades. También, distinguieron el punto decimal y daban muestra de ello en su lenguaje oral y escrito; una alumna expresó con satisfacción que ya había entendido porque en una regla (graduada) se tenía que comenzar en 0*, 1, 2, 3 … cm* y no de *1, 2, 3… cm*, explicó que de *0* a *1* hay una partición y el *0* indica ninguna partición, igualmente expresó con alegría que por fin había entendido porque había medidas que colocaban el 0 antes del punto decimal, por ejemplo, 0.8 m “el 0 quiere decir que no es un metro sino menos, 8 decímetros u 80 centímetros”. En el caso del alumno con *TEA* alcanzó a distinguir los decímetros, centímetros y milímetros en un metro al igual que las abreviaturas y sus respectivas equivalencias, midió algunos objetos de manera individual.
- Se llevaron a cabo reuniones con los padres de familia de los *casos* para que participaran en las actividades entorno familiares, con el fin de poner en práctica los conocimientos adquiridos del menor en el aula.

Con relación al seguimiento de los *casos* durante el confinamiento por la emergencia sanitaria, se realizó un esfuerzo por contactar a los padres y madres de familia de los menores debido a que en los siguientes meses ingresarían al nivel medio superior, habían finalizado con su educación secundaria. Se les recordó a las familias del compromiso que ya se había acordado con ellos en una reunión previa antes del cierre de las escuelas. La respuesta de ellos fue favorable con respecto a trabajar con los menores a distancia, sin embrago, por situaciones familiares sólo se estableció comunicación con dos casos, el alumno con TEA y el alumno con TDAH. Con ellos se realizaron videollamadas (véase Figura 9). Se pretende continuar con las actividades suspendidas de la investigación con el propósito de consolidar los conocimientos adquiridos.

Figura 9. *Comunicación a distancia con el alumno con TEA y TDAH mediante la plataforma Google Meet*



Fuente: construcción propia

Conclusiones

Se considera que la *Educación Inclusiva* tiene que ser revisada cuidadosamente por autoridades educativas y correspondientes. El concepto de *inclusión* sigue comprendiéndose de distintas formas, de seguir así, seguiremos con la misma dinámica de "diseñar actividades o adaptar los contenidos curriculares" sin la seguridad de saber si hay un proceso en la adquisición de conocimientos de estudiantes con necesidades educativas especiales específicas en aulas regulares.

Los resultados de esta investigación advierten que la enseñanza en condiciones de secundaria inclusiva es posible mediante un modelo de organización de escenarios que facilite qué ruta se debe seguir para atender los casos específicos sin *excluir* a los demás estudiantes. Para esto, es el docente el que tiene que involucrarse en estos escenarios y al mismo tiempo indagar, reflexionar cuáles son esas dificultades que se tienen que atender, sin duda, se requiere de una preparación enfocada a la investigación para apropiarse de la parte teórica que complemente a la práctica diaria en las aulas. Y de esta forma las propuestas de enseñanza, diseño de actividades tendrán sentido para el docente y los alumnos. Por último, se manifiesta que un diseño específico de modelo de enseñanza posibilita la adquisición de contenidos matemáticos en aquellos alumnos que se encuentren en NEE.

Referencias bibliográficas

Ardila, A., Roselli, M. y Matute, E. (2005). *Neuropsicología de los trastornos del aprendizaje*. México: El Manual Moderno.

Capdevila-Brophy, C., Artigas-Pallarés, J. y Obiols-Llandrich, J. E. (2006). Tempo cognitivo lento: *¿síntomas del trastorno de déficit de atención/hiperactividad predominantemente desatento o una nueva entidad clínica?* Revista de Neurología, 42 (Supl 2). Recuperado de https://www.neurologia.com/articulo/2005820/esp

Chamorro, M. y Belmonte, J. (1991). *El problema de la medida*. Madrid: Síntesis Educación.

Coto, M. (2013). *Síndrome de Asperger: Guía práctica para la intervención en el ámbito escolar.* San Juan de Aznalfarache, Sevilla: Autismo diario.

Diario Oficial de la Federación (2019). Acuerdo por el que se emiten las Reglas de Operación del Programa para la Inclusión y la Equidad Educativa para el ejercicio fiscal 2019, publicado el 04 de febrero de 2019. Recuperado el 25 de agosto de 2020 de https://www.dof.gob.mx/nota_detalle.php?codigo=5551602&fecha=28/02/2019

Forlin, C. I., Chambers, D. J., Loreman, T., Deppler, J., y Sharma, U. (2013). *Inclusive education for students with disability: A review of the best evidence in relation to theory and practice,* 1-67.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Holland: Kluwer Academic Publishers Group. 172-174.

Grupo, Beta (1990). *Proporcionalidad geométrica y semejanza*. Madrid; Editorial Síntesis, 47-62.

López, G. Roger, S. Severiano, D. M. y García A. (2005). *Trastorno del Espectro Autista.* En Álvarez, M., Trápaga, M. Principios de neurociencias para psicólogos. Paidós.

Roos, H. (2015). *Inclusion in mathematics in primary school – what can it be?* [Licentiate thesis in Mathematics Education]. Linnaeus University. Recuperado el 25 de agosto de 2020 de https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:787177/FULLTEXT01.pdf

SEP (2011). *Planes de Estudios 2011. Educación Básica,* Ciudad de México: Secretaría de Educación Pública.

SEP (2015). *UDEEI, Planteamiento técnico operativo, documento de trabajo.* México: Dirección General de Operación de Servicios Educativos, Dirección de Educación Especial.

SEP. (2017). *Aprendizajes claves para la Educación Integral.* Plan y programas de estudio para la educación básica. México: Secretaría de Educación Pública.

Schmidt, M. C. (2016). *Mathematics Difficulties and Classroom Leadership.* En lindenskov l. (ed.). Special needs in mathematics education (pp. 81-107). Denmark: Danish School of Education Aarhus University. Recuperado el 25 de agosto de 2020 de https://edu.au.dk/fileadmin/edu/Cursiv/CURSIV_18_-_Udgivet_version.pdf

UNESCO. (2008). *Inclusive Education: The way of the future.* Recuperado de http://www.ibe.unesco.org/fileadmin/user_upload/Policy_Dialogue/48th_ICE/CONFINTED_48-3_English.pdf

VOL 34, NÚMERO 1, AÑO 2021

CONCEPCIONES ESTADÍSTICAS: UN ESTUDIO DE CASO CON ESTUDIANTES DE SECUNDARIA

STATISTICAL CONCEPTIONS: A CASE STUDY WITH HIGH SCHOOL STUDENTS

Cassio Cristiano Giordano
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP). (Brasil)
ccgiordano@gmail.com

Resumen
Realizamos una investigación cualitativa, en la que buscamos identificar el conocimiento y las concepciones de 86 estudiantes en el último año de secundaria en una escuela pública brasileña sobre estadística descriptiva, movilizados en un intento de resolver problemas, después del desarrollo de proyectos de investigación estadística. Adoptamos, en nuestro marco teórico, el Análisis Exploratorio de Datos (AED) y la Teoría de las Concepciones. En nuestros procedimientos metodológicos, utilizamos los constructos de Análisis Estadístico Implicativo (ASI), los gráficos implicativos, cohesivos y de similitud, elaborados utilizando el software CHIC (Clasificación jerárquica implicativa y cohesiva), para evaluar el nivel de conocimiento de estudiantes, mientras empleamos el modelo ck¢ en el análisis de sus concepciones. Al final de nuestras investigaciones, pudimos identificar algunas concepciones movilizadas, así como un cambio en las concepciones, observadas antes y después del ABP, que en el modelo ck¢ se entiende como un indicador de aprendizaje.

Palabras clave: educación estadística, concepciones, proyectos

Abstract
We carried out a qualitative investigation, in which we sought to identify the knowledge and conceptions on descriptive statistics of eighty-six students in the last year of a Brazilian public high school, mobilized in an attempt to solve problems, after the development of statistics research projects. We adopted, in our theoretical framework, the Exploratory Analysis of Data (EAD) and the Theory of Conceptions. In our methodological procedures, we use the Implicative Statistical Analysis (ISA) constructs, the implicit, cohesive and similarity graphics, elaborated by using the CHIC software (Implicative and Cohesive Hierarchical Classification), to evaluate the level of students' knowledge, and the ck¢ model in the analysis of their conceptions. At the end of our investigations, we could identify some mobilized conceptions, as well as a change in the conceptions, observed before and after the PBL, which, in the ck¢ model, is understood as a learning indicator.

Keywords: statistical education, conceptions, projects

Problemática

Comprender la Estadística es esencial para la educación escolar, para la vida profesional, así como para el ejercicio pleno de la ciudadanía, en el siglo XXI, cuando el ciudadano común recibe, todos los días, un gran volumen de datos de carácter estadístico, habiendo visto el caso de la reciente pandemia de COVID-19. En este sentido, en base en nuestra revisión de la literatura, consideramos que el aprendizaje basado en proyectos (ABP) es un elemento con un amplio potencial para el desarrollo de la alfabetización estadística, en la perspectiva de Gal (2019), por colocar al estudiante en un papel de protagonista en la participación activa en la investigación estadística. Este entendimiento está en línea con la Base de Currículo Nacional Común - BNCC (Brasil, 2018).

La BNCC es un documento que regula cuáles son los aprendizajes esenciales que se trabajarán en las escuelas públicas y privadas brasileñas de educación infantil, educación primaria y educación secundaria, para garantizar el derecho al aprendizaje y el pleno desarrollo de todos los estudiantes. Por esta razón, es un documento importante para la promoción de la igualdad en el sistema educativo, que contribuye a la formación integral y a la construcción de una sociedad más justa, democrática e inclusiva. Con el objetivo de guiar los planes de estudio de los estados y municipios de Brasil desde estas perspectivas, el BNCC implementa lo dispuesto en el artículo nueve de la Ley de Directrices y Bases de la educación brasileña - LDB (Brasil, 1996). Según la LDB, compite al gobierno federal establecer, en colaboración con los estados (provincias), el distrito federal y los municipios, las competencias y directrices para la educación de la primera infancia, la educación primaria y la escuela secundaria, que guiarán los planes de estudio y sus contenidos mínimos para garantizar una formación básica común.

La propuesta curricular vigente en la escuela donde realizamos la investigación, en el momento de la recopilación de datos, preveía la enseñanza de Estadística Descriptiva (la enseñanza de la Estadística Inferencial no estaba prevista en el plan de estudios) solo en el segundo semestre del tercer y último año de la escuela secundaria (de 16 a 19 años). Tenemos en cuenta este hecho, al evaluar el nivel de conocimiento previo de los estudiantes, a través del Análisis Estadístico Implicativo (ASI), antes del inicio del enfoque de Estadística a través de proyectos.

Después de completar los proyectos de estos estudiantes, buscamos identificar las concepciones movilizadas sobre los contenidos curriculares involucrados: variabilidad, medidas de tendencia central, medidas de dispersión y registros de representación (gráficos estadísticos y tablas de distribución de frecuencias - TDF). La pregunta que guió nuestra investigación fue: "¿Qué concepciones movilizan los estudiantes de secundaria cuando intentan resolver problemas relacionados con las estadísticas descriptivas, después del desarrollo de proyectos en esta área?"

Marco teórico

La Análisis Exploratorio de Datos (AED) valora la postura investigativa crítica del estudiante y presupone una propuesta didáctico-pedagógica centrada en la investigación del profesor. Batanero, Estepa y Godino (1991) destacan la posibilidad de generar situaciones de aprendizaje sobre temas de interés para los estudiantes, basándose en representaciones gráficas que favorecen la percepción de variabilidad, a partir de representaciones gráficas que favorecen la percepción de variabilidad, la evaluación de medidas de orden que minimizan cualquier caso inusual, el uso de diferentes escalas y la falta de una teoría matemática completa, con herramientas innecesarias para la etapa de aprendizaje en el campo. Estamos interesados en el desarrollo de proyectos estadísticos por parte de los estudiantes, desde la perspectiva de la AED. Para Batanero y Díaz (2004), los proyectos estadísticos motivan a los estudiantes, diferenciándolos de la simple resolución de largas listas de ejercicios, repetitivos y descontextualizados. Para estos autores, las estadísticas son la ciencia de los datos, y están en los únicos números, números de campana en contexto. Según ellos, en el trabajo del proyecto el énfasis está en áreas realistas.

Batanero y Díaz (2011) enfatizan que el desarrollo de proyectos contribuye a la adquisición de las siguientes habilidades, fundamentales para el estudiante de secundaria: competencia lingüística comunicativa, competencia matemática, competencia para el reconocimiento e interacción con el mundo físico, competencia para el tratamiento de información, competencia digital, competencia social para ejercer la ciudadanía, competencia para "aprender a aprender", competencia para cuestionar críticamente y competencia para lograr autonomía e iniciativa personal. Dichas habilidades son necesarias para el desarrollo de los componentes cognitivos y actitudinales de la alfabetización estadística. Con base en nuestras investigaciones y revisión de literatura, asumimos que trabajar con proyectos puede contribuir a la mejora de estas habilidades, resaltado por Gal (2019):

Figura 1. *Un modelo de alfabetización estadística*

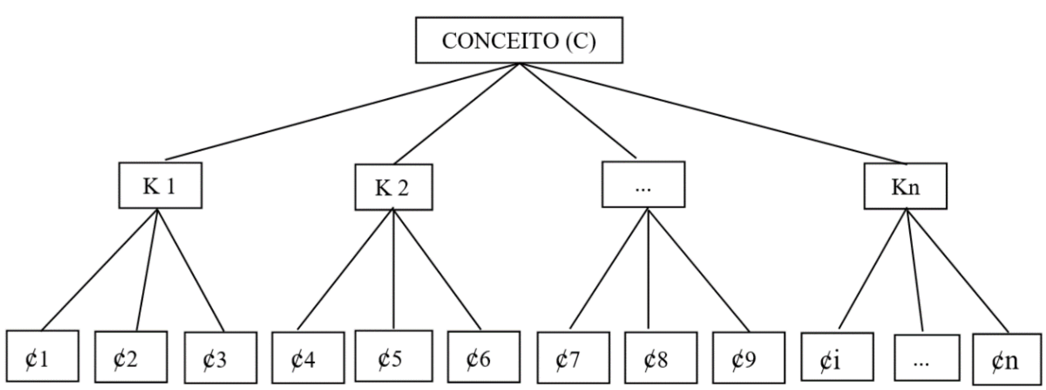
Elementos del conocimiento	Elementos de disposición
Habilidades de conocimiento Conocimiento estadístico Conocimiento matemático Conocimiento del contexto Preguntas críticas	Creencias y actitudes Posición crítica
Conocimiento estadístico	

Extraído de Gal, (2019)

Además, buscamos identificar concepciones y cambios en las concepciones estadísticas de los estudiantes al resolver problemas estadísticos comunes en el desarrollo de proyectos.

Según Balacheff y Gaudin (2002), el conocimiento no puede reducirse totalmente a comportamientos, pero tampoco puede enseñarse en su ausencia. Cada acción moviliza conocimientos, que requieren movilización de concepciones, relacionadas con los problemas. Balacheff (2001) afirma que una concepción no puede ni debe separarse del contexto del que surge el problema, que lo resalta y le da sentido. Las concepciones permiten interpretaciones, predicciones y construcción de modelos y, sobre todo, describen una parte de la estructura cognitiva del alumno. En nuestra investigación, adoptaremos las definiciones de conocimiento, concepción y concepto de la teoría ck¢, basadas en el modelo propuesto por Balacheff (2002). Para él, una concepción es una estructura mental, característica de un sujeto determinado, construido un observador de su comportamiento (en nuestro caso, el investigador). El aprendizaje, a su vez, consiste en pasar de una vieja concepción a una nueva, más compleja e integral. Un concepto se compone de un conjunto de conocimientos, y el conocimiento, a su vez, se compone de un conjunto de conceptos, como se muestra a continuación:

Figura 2. *Esquema de las relaciones entre concepciones, conocimientos y conceptos*



Extraído de Balacheff (2001)

Una concepción, en el modelo ck¢, es un estado de equilibrio de un sistema, sujeto-ambiente, considerando sus limitaciones e imposiciones, es decir, cualquier cosa que influya o interfiera en su funcionamiento. La concepción pertenece al sujeto y, por lo tanto, puede o no ser correcta desde el punto de vista del conocimiento de referencia.

Una concepción implica un cuádruple, simbolizado por las letras P, R, L, Σ, donde P es un conjunto de problemas en los cuales ¢ está operando; R es un conjunto de operadores (herramientas cognitivas, como teoremas en acción o conceptos en acción); L es un sistema de representaciones, que permite la expresión de los elementos de P y R; Σ es una estructura de control que garantiza que el diseño no contradiga ¢. En este cuádruple, un sujeto que enfrenta un problema a resolver puede manifestar varias concepciones sobre el mismo objeto matemático y movilizar uno u otro, de acuerdo con la naturaleza del problema.

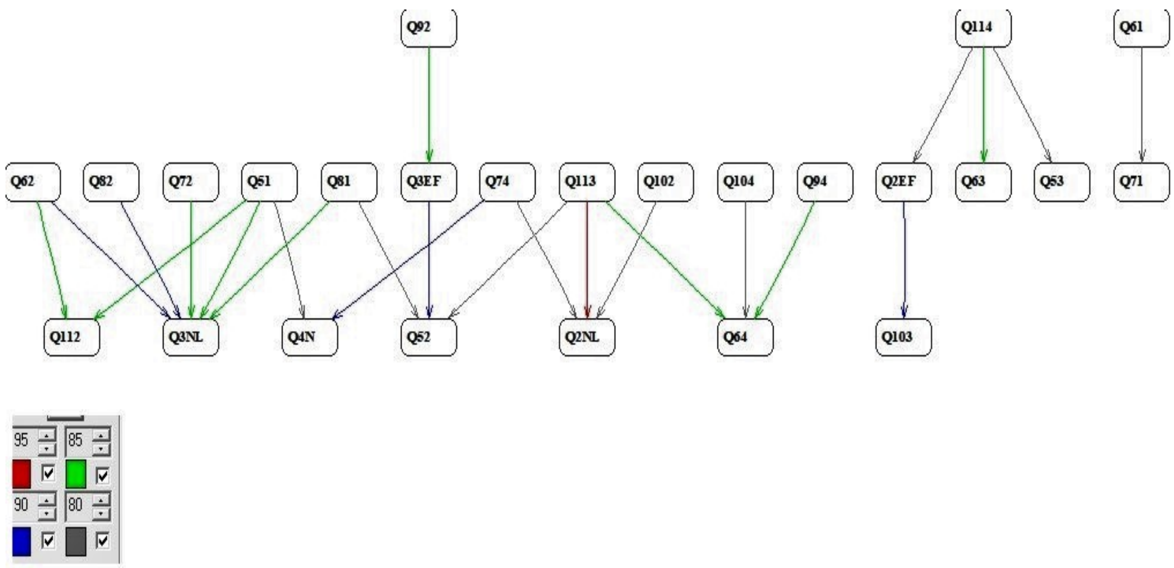
Metodología

Investigamos los conceptos movilizados por los estudiantes para resolver problemas estadísticos, cuando se aborda el tema a través de proyectos, antes y después de su realización, desde la planificación y la recopilación de datos hasta el análisis final y la difusión de los resultados de la investigación. Optamos por el enfoque metodológico de la investigación cualitativa, en la perspectiva de Creswell (2010). Para evaluar el nivel de conocimiento de los estudiantes, antes del desarrollo del proyecto, aplicamos un cuestionario compuesto por preguntas objetivas sobre estadística básica, analizando las respuestas a través del ASI. Los sujetos de investigación fueron 86 estudiantes del último año de secundaria en una escuela pública brasileña, con edades comprendidas entre los dieciséis y los diecinueve años. Respondieron a un cuestionario que constaba de 29 preguntas estadísticas, analizadas con la ayuda del software CHIC (Clasificación jerárquica implicativa y cohesiva). Este software permite extraer información de un conjunto de datos, sujetos y atributos cruzados, reglas de asociación entre variables, indicando el índice de calidad de la asociación y representando una estructuración de estas variables según Couturier y Gras (2005) y Gras et al. (2013). En la segunda etapa de la investigación, cuatro grupos de estudiantes (dos tríos y dos dobles) resolvieron tres problemas relacionados con conceptos básicos de Estadística descriptiva durante un período de una a tres sesiones, con una duración de hasta 100 minutos cada una, en tres días diferentes de un misma semana Esta actividad se grabó a través de la producción escrita y grabaciones de audio de las interacciones entre los estudiantes del grupo, y luego se analizó a la luz de la Teoría de las Concepciones.

Resultados

Así identificó variables y proporcionó explicaciones para evaluar el nivel de conocimiento de los estudiantes, con la ayuda del software CHIC. Realizamos el análisis que relaciona estas variables, interpretando los gráficos implicativos, cohesivos y de similitud, sin embargo, por razones de limitaciones de espacio, en este artículo, no es posible presentarlos. Los resultados obtenidos por nosotros indicaron que el conocimiento previo presentado por los estudiantes necesitaba ser trabajado con más profundidad durante todo el proyecto a desarrollar, en el enfoque de los contenidos estadísticos y probabilísticos durante los siguientes dos meses. ASI demostró ser una buena herramienta para evaluar las respuestas de los estudiantes. Con la ayuda del software CHIC, realizamos el análisis de los gráficos implicativos, cohesivos y de similitud. Sin embargo, por razones de limitación de espacio, en este artículo presentaremos solo el gráfico implicativo, relacionado con la primera fase de la investigación: encuesta de los conocimientos previos de los estudiantes sobre estadística. En la segunda fase, presentaremos algunas concepciones movilizadas por los estudiantes al resolver problemas estadísticos. Construimos nuestro análisis sobre la base de relaciones emergentes a partir del análisis implícito a través de la teoría clásica y la distribución binomial. Un análisis implicativo asocia las variables A y B de acuerdo con una meta-regla en "si ocurre, entonces probablemente ocurra". Con hongos de colores, indicamos el nivel de confianza en segundo lugar, ya que podemos leer asociaciones. No representamos gráficos, ya que los hongos corzinza indican valores menores o iguales a 0.80. En verde, tenemos valores entre 0.81 y 0.85; en azul, una variación entre 0.86 y 0.90 y, finalmente, en rojo, de 0.91 a 0.95. Esta escala se representa, a continuación, en la figura 3. Los resultados del análisis implicativo, junto con los resultados del análisis de similitud y el análisis cohesivo, ya presentados, nos permitieron elaborar un escenario para el conocimiento estadístico de los estudiantes que, siguiendo la fase experimental de nuestra investigación, construyeron su conocimiento y desarrollaron su alfabetización estadística basada en la resolución de problemas, después del desarrollo a través de proyectos.

Figura 3. *Gráfico Implicativo.*



Fuente: El autor.

Identificamos algunas concepciones movilizadas por ellos en la solución de problemas estadísticos. Aquí no es posible presentar los conceptos identificados, debidamente representados por medio de sus cuatro elementos constitutivos por razones de espacio, pero podemos enfatizar, en términos generales, que si bien el trabajo estadístico cooperativo se lleva a cabo en grupos pequeños, la confrontación de ideas, de enfoques, las hipótesis, favorecen el cambio de concepción esperado y el refinamiento del pensamiento estadístico, según lo predicho por Garfield (1993). En nuestro caso, en paralelo con la acción de las estructuras de control individuales, la discusión colectiva permitió verificar hipótesis, revisar respuestas y aproximar los resultados esperados. Subtítulos para esta figura: P113 - No recuerdo si estudiaste Estadística en la escuela primaria. Q2NL - Marcó la alternativa y la pregunta 29 (alternativa incorrecta). P74 - Totalmente de acuerdo en que las estadísticas son importantes para tomar decisiones en su vida diaria. Q102 - No se basa parcialmente en la investigación estadística. Q3NL - No recuerdas si estudiaste estadísticas en la escuela secundaria. Comenzamos nuestro análisis por el camino que tiene una flecha roja, es decir, la que tiene el mayor nivel de confianza: Q113 → Q2NL, lo que significa que estamos de acuerdo con la afirmación "ya sabes cómo se lleva a cabo la investigación estadística", por lo que probablemente no recuerdes si " estudió estadística en educación primaria”. La variable típica de este comportamiento es el hombre, con un riesgo de 0.195.

Dada la presencia masiva de estadísticas en los medios, especialmente considerando el período electoral en el que se realizó la encuesta, podemos inferir que este grupo entendió la información dada en estas encuestas solo de una manera intuitiva. Aquí hay una primera indicación de la necesidad de comenzar a abordar el contenido estadístico sin asumir un conocimiento estable. Siguiendo los caminos que también terminan en Q2NL, pasamos a Q74 → Q2NL (creen que las estadísticas se usan para la toma de decisiones cotidianas) y Q102 → Q2NL (no están de acuerdo en que confíen en la investigación estadística). En ambos, observamos las mismas variables típicas: género femenino con riesgo de 0.246. Este grupo, a pesar de comenzar desde diferentes premisas, no recuerda si estudiaron

Estadística en Educación Primaria (Q2NL). Tales caminos nos han llevado a reforzar la inferencia hecha en el párrafo anterior, sobre las necesidades para el comienzo del enfoque de Estadística con los estudiantes involucrados. Hacemos hincapié en que entre los 86 encuestados, 56 de ellos indicaron la opción que indicaba que no recordaban haber aprendido Estadística en la escuela primaria. Otra variable que también está relacionada con varios caminos implicativos es Q3NL, lo que significa que no recordabas si estudiaste Estadística en la escuela secundaria. Recordamos que los encuestados están en el tercer año de la escuela secundaria y aún no han cumplido los contenidos de Estadística en el plan de estudios del Estado de São Paulo. 41 de los 86 encuestados indicaron esta opción. De acuerdo con este plan de estudios, los estudiantes estudian probabilidad durante el segundo año de la escuela secundaria, lo que nos lleva a inferir que no asocian probabilidad con estadística. Vale la pena recordar que tanto en el Cuaderno del estudiante (São Paulo, 2014) como en los libros de texto (Giordano, 2016) la Estadística descriptiva se presenta de forma aislada. La siguiente tabla muestra las rutas encontradas.

Figura 4. *Caminos implicativos determinados en el análisis de las variables en juego.*

Caminho	Significado del camino del punto de partida
Q62 → Q3NL	No está de acuerdo con que las estadísticas sean importantes para entender las noticias en la radio, la televisión, Internet, los periódicos.
Q82 → Q3NL	No creía que usaría Estadísticas en los cursos superiores que pretendía tomar.
Q72 → Q3NL	No está de acuerdo con que las estadísticas sean importantes para tomar decisiones en su vida diaria.
Q51 → Q3NL	Clasificó su nivel de conocimiento en Estadística (1 - falta de conocimiento)
Q81 → Q3NL	No creía totalmente que usaría Estadísticas en los cursos superiores que desea tomar.

Fuente: El autor.

Los caminos marcados permitieron inferir la poca importancia que los estudiantes parecen atribuir a los conceptos estadísticos en sus vidas, hasta ahora: no creen en su utilidad, ni en su vida diaria ni en su futuro profesional, y afirman tener poco conocimiento estadístico sobre estos conceptos, lo que implica, probablemente, el recuerdo de haber asistido a la asignatura en la escuela secundaria. Dichas inferencias se entienden a un nivel de confianza entre 0,85 y 0,90. No diremos nada acerca de las variables típicas, ya que el riesgo indicado en estas rutas es de alrededor de 0,49, independientemente de la variable indicada. Todo esto nos lleva a inferir la necesidad de un enfoque cuidadoso del contenido estadístico, lo que indica la importancia del desarrollo completo de la alfabetización estadística de los estudiantes, que ciertamente guía las acciones de la fase experimental con la resolución de problemas después del desarrollo de los proyectos, por ellos. Los límites de espacio de este artículo no nos permiten presentar otros gráficos del CHIC, así como tampoco nos permite presentar todas las concepciones movilizadas por los estudiantes. Sin preocuparse por el criterio de corrección, veamos al menos un ejemplo:
25 - (ENEM/2012) La siguiente tabla muestra la evolución de los ingresos brutos anuales en los últimos tres años de cinco microempresas (ME) que están a la venta.

Figura 5. *Ingresos brutos anuales en los últimos tres años de cinco microempresas.*

ME	2009 (em milhares de reais)	2010 (em milhares de reais)	2011 (em milhares de reais)
Alfinetes V	200	220	240
Balas W	200	230	200
Chocolates X	250	210	215
Pizzaria Y	230	230	230
Tecelagem Z	160	210	245

Fuente: datos ficticios

Un inversor quiere comprar dos de las empresas que figuran en la tabla. Para hacer esto, calcula el ingreso bruto anual promedio de los últimos tres años (de 2009 a 2011) y elige las dos compañías con el promedio anual más alto. Las empresas que este inversionista elige comprar son:

a) Balas W y Pizzaria Y. b) Chocolates X y Tecelagem Z. c) Pizzaria Y y Alfinetes V.
d) Pizzaria Y y Chocolates X. e) Tecelagem Z y Alfinetes V.

Pallauta, Gea y Venegas (2019) señalan que las tablas de distribución de frecuencia no reciben la debida atención en los planes de estudio y la enseñanza, tanto de Chile como de Brasil, y agregan que estas tablas están prácticamente ausentes en los libros de texto de matemáticas en ambos países. Sin embargo, están en libros de otras disciplinas, como Geografía, lo que puede justificar el hecho de que el 57% de los estudiantes respondieron bien la pregunta al señalar la alternativa "d". Por otro lado, la opción incorrecta con el mayor número de opciones (19% de estudiantes) fue la alternativa "e", que apunta a las dos compañías cuyos ingresos tuvieron la mayor amplitud total. Este argumento puede reforzarse con la redacción del enunciado de la pregunta, que menciona la "evolución de los ingresos brutos anuales", que podría llevar al alumno a pensar en la mayor variación entre los límites inferior y superior encontrados, respectivamente, en las empresas Z y V Puede haber, detrás de esta respuesta, un diseño ¢ a, caracterizado por los elementos:

• P - campo de problemas: determinación de la media aritmética simple basada en los valores presentados en una tabla de doble entrada.
• R - operadores: ubicación de los valores de ingresos brutos anuales asociados con las respectivas compañías de origen en una tabla de distribución de frecuencia y verificar la diferencia entre ellos.
• L - conjunto de representaciones: representación numérica y representación tabular.
• ∑ - estructura de control: media aritmética simple como un valor directamente proporcional a la variación entre los límites inferior y superior de la muestra (amplitud total).

Por lo tanto, podemos inferir la existencia de una posible concepción ¢, según la cual el valor promedio será mayor, mayor será la diferencia entre los dos extremos en la distribución de frecuencias: el límite inferior y el límite superior de la muestra.

Díaz (2016) destaca que, según los testimonios de los propios estudiantes, el trabajo colaborativo en pequeños grupos reduce la ansiedad, lo que contribuye a una mayor comprensión de las nociones estadísticas y la adquisición de experiencia. Según este autor, las actividades de colaboración son más tranquilizadoras, motivadoras y estimulantes, favorecen la concentración en la tarea y proporcionan el surgimiento de una diversidad de propuestas. El estímulo de la ayuda mutua permite la asimilación de conceptos, el progreso de las actividades, la reducción de la percepción de dificultad de la tarea y la reducción de la ansiedad. La atención colectiva reduce la carga de las dificultades, el intercambio de opiniones y el intercambio de ideas mejoran la autoconfianza y el compromiso colectivo. Percibimos los mismos efectos al observar el trabajo de los estudiantes en grupos, tanto después del diagnóstico de sus conocimientos previos, a través de ASI y durante el desarrollo de proyectos de investigación, y finalmente, al resolver problemas estadísticos en grupos.

Conclusiones

Como se señaló en nuestra revisión de la literatura, hay pocos estudios publicados sobre concepciones desde la perspectiva del modelo ck¢. Casi sin contacto previo con la estadística, en un entorno escolar, los estudiantes participando en nuestra investigación mostraron una comprensión y lectura mínima de tablas y gráficos estadísticos, así como medidas de tendencia central y dispersión.

Uno de los resultados de nuestro trabajo que consideramos más relevantes es que las estructuras de control manifestadas por un estudiante movilizan las estructuras cognitivas de otros, promoviendo la mejora de sus ideas y la revisión de sus propias concepciones. Por ejemplo, compartiendo el esquema de una gráfica estadística con los colegas, revisando los pasos para calcular una medida de dispersión, comparando la determinación de una medida de tendencia central con otra obtenida por el colega, utilizando un método diferente y discutiendo su comprensión dentro del grupo. Respecto a la variabilidad, los estudiantes reafirmaron o revisaron sus concepciones, mostrando cambios que pueden ser considerados como indicadores de aprendizaje, dentro del modelo ck¢ de Balacheff (2002). El conocimiento del contexto, destacado por el modelo de alfabetización estadística de Gal (2019), tuvo también un papel fundamental en la validación de las concepciones.

El abordaje estadístico a través de proyectos puede contribuir al cambio de concepciones de los estudiantes. En cualquier trabajo estadístico cooperativo realizado en pequeños grupos, el choque de ideas, la discusión, la argumentación y la comprobación de hipótesis, favorecen el esperado cambio en las concepciones y el refinamiento de la alfabetización, el razonamiento y el pensamiento estadístico.

Díaz (2016) destaca que, según los estudiantes, el trabajo colaborativo en pequeños grupos reduce la ansiedad, lo que contribuye a una mejor comprensión de las nociones estadísticas y la adquisición de experiencias significativas. Según este autor, las actividades colaborativas son más tranquilizadoras, motivadoras y estimulantes. La observación de los compañeros, trabajando activamente, favorece la concentración en la tarea y la aparición de una mayor diversidad de propuestas. El estímulo de la ayuda mutua permite la asimilación de conceptos, el avance de las actividades, la reducción de la percepción de dificultad de la tarea y la reducción de la ansiedad. La discusión colectiva reduce la carga de las dificultades; intercambiar y compartir ideas mejora la autoconfianza y el compromiso colectivo (Díaz, 2016). Esperamos, por tanto, haber contribuido a ampliar la comprensión de las concepciones estadísticas movilizadas por los estudiantes de secundaria.

Referencias bibliográficas

Balacheff, N. (2001). Les connaissances, pluralité de conceptions. Le cas des mathématiques. *Les Cahiers du Laboratoire Leibniz*, 19, 83-90.

Balacheff, N. (2002). Cadre, registre et conception: note sur les relations entre trois concepts clés de la didactique. *Les Cahiers du laboratoire Leibniz*, *58*, 1-18.

Balacheff, N., y Gaudin, N. (2002). Student conceptions: An introduction to a formal characterization. Les Cahiers du Laboratoire Leibnitz 65, p.1-21.

Batanero, C.; Díaz, C. (2004) El papel de los proyectos en la enseñanza y aprendizaje de la estadística. Em J. P. Royo (Ed.). *Aspectos didácticos de las matemáticas* (pp. 125-164). Zaragoza: ICE.

Batanero, C. y Díaz, C. (2011). *Estadística con proyectos*. Universidad de Granada.

Batanero, C., Estepa, A. y Godino, J. D. (1991). Análisis exploratorio de datos: sus posibilidades en la enseñanza secundaria. *Suma*, 9, 25-31.

Brasil. (1996) *Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional*. Brasília: Ministério da Educação e Cultura.

Brasil. (2018) *Base Nacional Comum Curricular - Educação é a Base:* Ensino Médio. Brasília: Ministério da Educação e Cultura.

Couturier, R. D.; Gras, R. (2005) CHIC: traitement de données avec l'analyse implicative. En C. Ritschard y Djeraba (Eds.), *Journées d'extraction et gestion des connaissances* (EGC'2005) (Vol.2, pp. 679-684).

Creswell, J. W. (2010) *Projeto de pesquisa métodos qualitativo, quantitativo e misto*. Porto Alegre: Artmed.

Diaz, D. (2016). Les facteurs influençant la réussite des activités collaboratives médiées par les TICE dans une situation de formation universitaire à la statistique (Doctoral dissertation, Thèse de doctorat (Dirigée par Jean-Claude Régnier) Lyon 2, Lyon, France, 2016.

Gal, I. (2019) Understanding statistical literacy: About knowledge of contexts and models. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*. Granada, España.

Garfield, J. (1993) Teaching statistics using small-group cooperative learning. *Journal of Statistics Education*, v. 1, n. 1, p. 1-9.

Giordano, C. C. (2016). O desenvolvimento do letramento estatístico por meio de projetos: um estudo com alunos do ensino médio. Dissertação de Mestrado. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

Gras, R.; Régnier, J. C.; Marinica, C. y Guillet, F. (2013) *L'analyse statistique implicative Méthode exploratoire et confirmatoire à la recherche de causalités*. Toulouse: Cépaduès Editions.

Pallauta, J. D.; Gea, M. M. S.; Venegas, A. G. (2019) Las actividades sobre tablas estadísticas en textos escolares chilenos de educación básica. In*: Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*. Granada. Anais.

São Paulo (2014) *Proposta curricular – Ensino Médio*: Matemática, v. 2. IMESP, São Paulo.

Apéndice 1 – Cuestionario

Parte A: En las siguientes declaraciones conteste de acuerdo con su experiencia.

1. ¿Qué son las estadísticas? ¿Es una ciencia exacta o una ciencia social? ¿Es un área de matemáticas?
2. ¿Has estudiado Estadística en la escuela primaria? ¿Qué año?

   ( ) 1º ( ) 2º ( ) 3º ( ) 4º ( ) 5º ( ) 6º ( ) 7º ( ) 8º ( ) 9º ( ) no recuerda ( ) nunca estudió

3. ¿Has estudiado estadística en la secundaria? ¿Qué año?

   ( ) 1º ( ) 2º ( ) 3º ( ) 9º ( ) no recuerda ( ) nunca estudió

4. ¿Has estudiado Estadística en otro curso, fuera de la educación regular?
   ( ) No ( ) Sí, estudié en el curso (s): ____

5. Califica tu nivel de conocimiento en Estadística.
   Falta de conocimiento 1 2 3 4 Dominio perfecto

6. ¿Es importante la estadística para entender las noticias de la radio, la televisión, internet, los periódicos?
   Muy en desacuerdo 1 2 3 4 Yo concuerdo plenamente

7. ¿Estás de acuerdo en que las estadísticas son importantes para tomar decisiones en tu vida diaria?
   Muy en desacuerdo 1 2 3 4 Yo concuerdo plenamente

8. ¿Crees que usarás Estadísticas en los cursos superiores que pretendes tomar?
   No creo 1 2 3 4 Creo totalmente

9. ¿Crees que la estadística es un área de las matemáticas, que lleva una ciencia exacta?
   No creo 1 2 3 4 Creo totalmente

10. ¿Confías en la investigación estadística?
    No confio 1 2 3 4 Confio totalmente

11. ¿Sabes cómo se lleva a cabo la investigación estadística?
    No sé 1 2 3 4 Yo sé muy bien

12. ¿Has estudiado Probabilidad en la escuela primaria? ¿Qué año?
    ( ) 1º ( ) 2º ( ) 3º ( ) 4º ( ) 5º ( ) 6º ( ) 7º ( ) 8º ( ) 9º ( ) no recuerda ( ) nunca estudió
13. ¿Has estudiado Probabilidad en la escuela secundaria? ¿Qué año?
    ( ) 1º ( ) 2º ( ) 3º ( ) 9º ( ) no recuerda ( ) nunca estudió

14. ¿Has estudiado Probabilidad en otro curso, fuera de la educación regular?
    ( ) No ( ) Sí, estudié en el curso (s): ____

15. Califique su nivel de conocimiento de probabilidad:
    Falta de conocimiento 1 2 3 4 Dominio perfecto

Parte B: en las siguientes declaraciones, indique su nivel de acuerdo, siguiendo la escalera a continuación:
1. Totalmente en desacuerdo
2- Parcialmente en desacuerdo
3- Parcialmente de acuerdo
4- Muy de acuerdo

16. En una tirada de dos dados cúbicos comunes, numerados del 1 al 6, no adictos, ¿las posibilidades de obtener la suma de los valores de las dos caras mirando hacia arriba igual a 9 es igual a la suma de 10? _____

17. En un sorteo de Mega-Sena, ¿las posibilidades de que alguien gane con la apuesta: 1, 2, 3, 4, 5, 6 son menores que las posibilidades de ganar con la apuesta: 5, 12, 23, 38, 45, 56? _____

18. En el caso anterior, esta sería una buena apuesta, ya que siendo un resultado inusual, si alguien gana, compartirá el premio con un número menor de apostadores, ¿estaría de acuerdo? _____

19. ¿No cae un rayo dos veces en el mismo lugar? _____

20. ¿Es la posibilidad de que una persona muera cuando salta desde el piso 12 de un edificio directamente al asfalto el doble de posibilidades de morir si salta desde el piso 6? _____

21. Cuando nuestra cola en la caja de un supermercado o en un peaje de carretera es muy lenta, ¿es siempre una buena opción cambiar a la siguiente línea, que es más rápida? _____

22. Barajé las cartas de un mazo tradicional y extraje aleatoriamente una jota de corazones, volviéndolo a colocar en la pila. En un segundo sorteo, ¿la posibilidad de obtener otra jota de corazones es menor que la de robar otras cartas? _____

23. El sábado, en el pronóstico del tiempo, se anunció que la probabilidad de que no lloviera en la ciudad de São Paulo al día siguiente era solo del 90%. Sin embargo, llovió el domingo. ¿Estaba mal el pronóstico del tiempo? _____

24. Valquiria quiere firmar su auto con las iniciales de su nombre y los días de cumpleaños de ella (22) e hija (13), pero se enteró de que la placa de matrícula VAL2213 es rara, esta opción es más difícil que la mayoría de las otras. ¿Estás de acuerdo con esta información? _____

25. (ENEM/2012) La siguiente tabla muestra la evolución de los ingresos brutos anuales en los últimos tres años de cinco microempresas (ME) que están a la venta.

ME	2009 (em milhares de reais)	2010 (em milhares de reais)	2011 (em milhares de reais)
Alfinetes V	200	220	240
Balas W	200	230	200
Chocolates X	250	210	215
Pizzaria Y	230	230	230
Tecelagem Z	160	210	245

Fuente: datos ficticios

Un inversor quiere comprar dos de las empresas que figuran en la tabla. Para hacer esto, calcula el ingreso bruto anual promedio de los últimos tres años (de 2009 a 2011) y elige las dos compañías con el promedio anual más alto. Las empresas que este inversionista elige comprar son:
a) Balas W y Pizzaria Y b) Chocolates X y Tecelagem Z. c) Pizzaria Y y Alfinetes V. d) Pizzaria Y y Chocolates X. e) Tecelagem Z y Alfinetes V.

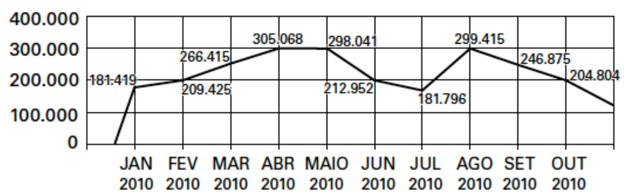
26. (ENEM/2010) La siguiente tabla muestra el desempeño de un equipo de fútbol en la última liga. La columna de la izquierda muestra la cantidad de goles marcados y la columna de la derecha indica cuántos juegos marcó el equipo esa cantidad de goles.
27.

Gols marcados	Quantidade de partidas
0	5
1	3
2	4
3	3
4	2
5	2
7	1

Fuente: datos ficticios

Si X, Y y Z son, respectivamente, la media, la mediana y la moda de esta distribución, entonces:
a) X = Y < Z. b) Z < X = Y. *c*) Y < Z < X d) Z < X < Y. e) Z < Y < X.

28. (ENEM/2012) El gráfico muestra el comportamiento del empleo formal que surgió, según CAGED, de enero de 2010 a octubre de 2010.



Disponível em: www.mte.gov.br. Acesso em: 28 fev. 2012 (adaptado).

Según el gráfico anterior, el valor de la porción mediana completa de los trabajos formales en el período es:
a) 212.952. b) 229.913. c) 240.621. d) 255.496. e) 298.041.

29. (ENEM/2010) Marco y Paulo fueron clasificados en un concurso. Para la clasificación en la competencia, el candidato debe obtener un promedio aritmético en el puntaje igual o mayor a 14. En caso de empate en el promedio, el desempate estaría a favor del puntaje más regular. La siguiente tabla muestra los puntos obtenidos en las pruebas de matemáticas, portugués y conocimientos generales, la media, la mediana y la desviación estándar de los dos candidatos.

Detalles de los candidatos en la competencia.

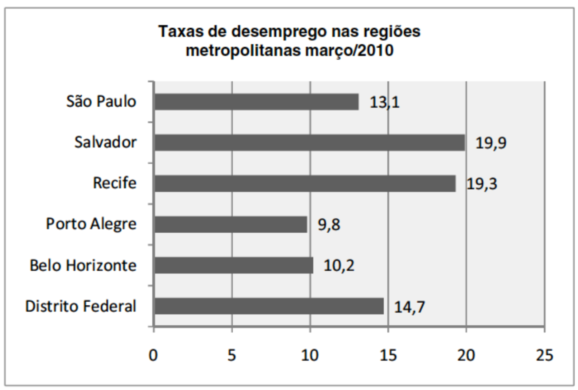
	Matemática	Português	Conhecimentos Gerais	Média	Mediana	Desvio Padrão
Marco	14	15	16	15	15	0,32
Paulo	8	19	18	15	18	4,97

Fuente: datos ficticios

El candidato con el puntaje más regular, por lo tanto, el más alto en la competencia, es:

a) Marco, ya que la media y la mediana son iguales.
b) Marco, ya que obtuvo menos desviación estándar.
c) Paulo, porque obtuvo el puntaje más alto en la tabla, 19 en portugués.
d) Paulo, ya que obtuvo la mediana más alta.
e) Paulo, ya que obtuvo una mayor desviación estándar.

30. (ENEM/2010) Os dados do gráfico seguinte foram gerados a partir de dados colhidos no conjunto de seis regiões metropolitanas pelo Dieese.



Disponível em: http://g1.globo.com. Acesso em: 28 abr. 2010 (adaptado).

Suponiendo que el número total de personas encuestadas en la región metropolitana de Porto Alegre es equivalente a 250,000, el número de desempleados en marzo de 2010, en esa región, fue:

a) 24 500.
b) 25 000.
c) 220 500.
d) 223 000.
e) 227 500

EL PAPEL DE LOS CONOCIMIENTOS DEL CONTEXTO EN LA ALFABETIZACIÓN ESTADÍSTICA Y FINANCIERA

THE ROLE OF CONTEXT KNOWLEDGE IN STATISTICAL AND FINANCIAL LITERACY

Claudia Fernandes Andrade Espirito Santo, Cassio Cristiano Giordano
Universidade Federal do Pará, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. (Brasil)
math0377@hotmail.com, ccgiordano@gmail.com

Resumen
La Educación Básica brasileña atraviesa un momento de transformación debido a la implantación de nuevos currículos escolares basados en la Base Nacional Común Curricular (BNCC). Así, presentamos una investigación cualitativa en el enfoque metodológico del estudio documental bibliográfico, bajo el marco teórico del Análisis de Exploratorio de Datos (AED) y de la Educación Matemática Crítica. Evaluamos el papel del conocimiento no matemático en la Educación Financiera y Educación Estadística, analizando la nueva base curricular y dos disertaciones de maestría recientemente publicadas. El conocimiento del contexto, utilizado en la realización de investigaciones con proyectos y modelización matemática de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), demostró ser fundamental para la alfabetización matemática de los estudiantes.

Palabras clave: educación financiera, educación estadística, modelización matemática, proyectos

Abstract

Brazilian Basic Education is going through a point of transformation due to the introduction of new school curricula based on the National Common Curricular Base (NCCB). Thus, we present a qualitative investigation on the methodological approach of the bibliographic documentary study, under the theoretical framework of Exploratory Data Analysis (EDA) and Critical Mathematical Education. We evaluate the role of non-mathematical knowledge in financial education and statistical education, by analyzing the new curriculum base and two recently published master's thesis. The context knowledge, used in conducting research with projects and mathematical modeling by the Anthropological Theory of the Didactic (ATD), proved to be essential for students' mathematical literacy.

Keywords: financial education, statistical education, mathematical modeling, projects

Introducción

La Base Nacional Común Curricular - BNCC (Brasil, 2018) trajo la Educación Financiera a los currículos del Brasil, presentado en todas las disciplinas, especialmente en Matemáticas. Además, amplió el espacio dedicado a la Estocástica, creando la quinta unidad temática en el currículo de Matemáticas: Probabilidad y Estadística. Teniendo en cuenta la forma en que fomenta la práctica de metodologías activas, como la resolución de problemas, la modelización y el enfoque basado en proyectos, siempre asociados con cuestiones de gran impacto socioeconómico, político, cultural y ambiental, consideramos relevante investigar la importancia del conocimiento contextual en la Educación Financiera y Estadística de los estudiantes. Asumiremos los marcos teóricos de la Educación Matemática Crítica y Análisis de Exploratorio de Datos (AED).

Marco teórico

Campos, Teixeira y Coutinho (2015), desde la perspectiva de la Educación Matemática Crítica, defienden la implementación de una propuesta de Educación Financiera contextualizada dentro de una realidad consistente con la de los estudiantes, enfatizando el papel del profesor y la necesidad de habilitarlo para enfrentar tal desafío. Para eso, proponen como posibles estrategias la resolución de problemas, la modelización matemática de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) y el uso de las Tecnologías Digitales de la Información y la Comunicación (TDIC).

Por otro lado, el Análisis Exploratorio de Datos (AED) valora la postura investigativa crítica del estudiante y presupone una propuesta didáctica centrada en la investigación. Batanero y Díaz (2004, 2011) destacan la posibilidad de generar situaciones de aprendizaje sobre temas de interés para los estudiantes. Por lo tanto, en la confluencia de estos dos marcos teóricos, vemos la posibilidad de una enseñanza de Matemáticas Financieras y Estadística que satisfaga la propuesta del papel del protagonismo estudiante en sus propias investigaciones.

Metodología

Realizamos una investigación cualitativa, desde la perspectiva de Creswell (2010), en el enfoque metodológico del estudio documental bibliográfico**,** analizando la nueva base curricular y dos disertaciones de maestría recientemente publicadas: Giordano (2016) sobre alfabetización estadística, y Santo (2018), sobre modelización matemática en Educación Financiera.

Resultados

En esta sección, presentaremos dos investigaciones que contemplan nuestros objetivos de proporcionar ejemplos de propuestas de metodologías de enseñanza para cumplir con los requisitos de la nueva BNCC (Brasil, 2018). Empezaremos por la Educación Financiera, en el enfoque de la mmodelización matemática.

La modelización en la Educación Financiera

Según Santo (2018) las políticas educativas de la Organización para la Cooperación al Desarrollo - OCDE y el Programa Internacional de Evaluación de Estudiantes - PISA (Brasil, 2012) destacaron la importancia de utilizar el conocimiento matemático difundido en la escuela básica para llevar a cabo la lectura de situaciones en contextos concretos, traducidos en problemas matemáticos, proporcionando la formación de ciudadanos críticos. Sus investigaciones basadas en la modelización matemática, señaló que la falta de dominio sobre el conocimiento no matemático involucrado puede hacer que sea difícil o mismo imposible hacer las tareas que implican la planificación financiera. Ahora veremos el enfoque por proyectos en la Educación Estadística.

La modelización matemática de problemas en contextos es una práctica social con las Matemáticas (Chevallard, 2005) Según el autor, toda actividad humana con las Matemáticas se lleva a cabo en un espacio social dado, con el fin de cumplir diferentes objetivos, principalmente no matemáticos, pero eso solo funciona con la movilización de objetos matemáticos.

Estas prácticas se denominan organizaciones praxeológicas con Matemáticas, o simplemente OPM. Estas praxeologías generalmente se encuentran en física, química, biología, geología, ingeniería, economía, ciencias aplicadas y, más generalmente, en actividades técnicas desarrolladas en fábricas, laboratorios, oficinas, etc.

La modelización matemática de problemas en contextos es un género OPM, ya que mueven objetos matemáticos de acuerdo con intereses e intenciones no matemáticas de una institución o persona. Según Chevallard, Bosch & Gascón (2001), un aspecto esencial de la actividad en las Matemáticas consiste en construir modelos (realistas) de realidades que uno desee estudiar. Quizás es por eso que el uso de modelos matemáticos en las prácticas escolares básicas se encuentra desde la escuela primaria, hasta la escuela secundaria, y alentado por la OCDE (Brasil, 2012) como un medio para interpretar situaciones en un contexto concreto.

Es importante señalar, entonces, que el objeto de estudio con modelos matemáticos (MM) en contextos concretos es la situación con la ayuda de modelos matemáticos que requieren el conocimiento indispensable del contexto considerado en una relación dialéctica con la institución.

No es sencillo reconocer situaciones que pueden conducir a un modelo matemático adecuado en problemas en contextos concretos, ya que esto requiere conocer la situación, ya que solo se reconoce lo que se conoce. Por lo tanto, todo se supone, porque no se puede decir, *a priori*, que los estudiantes, incluido el maestro, podrán reconocer una situación.

Las praxeologías de las ciencias escolares, como las de la enseñanza de la física, por ejemplo, revelan el problema del uso de fórmulas y algoritmos matemáticos cuando estos MM toman representantes exactos de situaciones del mundo real. La construcción de estos MM, llamados fórmulas, no tiene lugar en y con la enseñanza de la física escolar, como consecuencia, impiden que los estudiantes tengan acceso al estudio de las situaciones que generan estos MM, el verdadero objeto de estudio de esta disciplina.

Postulamos que esto evita que el sujeto, estudiante o maestro, haga el uso apropiado de fórmulas en problemas en contextos de Física. En este caso, el estudio del problema en el ámbito teórico de la física es indispensable para encontrar la situación y, con ello, el MM adecuado para enfrentar el problema.

Según esta comprensión, el conocimiento restringido a las praxeologías matemáticas (tareas matemáticas equipadas con una técnica supuestamente respaldada por la teoría de la tecnología matemática) no son suficientes para el uso y la construcción de modelos matemáticos de problemas en contextos, como se anunció previamente por Grandsard (2005).

Esta comprensión lleva a modelización matemática como una organización praxeológica global que involucra diferentes tipos de conocimiento, conocimiento disciplinario teórico y conocimiento no disciplinario, incluido el conocimiento práctico que actúa en acción para engendrar esta organización praxeológica, así como el conocimiento práctico.

A la luz de la TAD podemos entender un modelo matemático sobre una situación en contexto, en la escuela, como una reconstrucción de una praxeología con las Matemáticas escolares, en el sentido de la praxeología que pertenece a campos diferentes de la actividad matemática escolar, pero que solo funciona con Matemáticas.

Las matemáticas financieras y los problemas de la regla de tres ejemplifican lo que queremos decir: para la praxeología matemática escolar. Esta visión se debe a la razón por la que estamos interesados en el estudio de situaciones en contexto con el encuentro de una praxeología matemática asociada.

La alfabetización matemática a través de prácticas matemáticas defendidas por la OCDE (Brasil, 2012) se puede interpretar en la escuela básica como lectura del mundo a través del MM, en el que el conocimiento matemático es suficiente para describir las prácticas humanas, para explicar y predecir fenómenos, así como tomar decisiones conscientemente en el mundo como prueba del ejercicio de una ciudadanía comprometida y constructiva.

La complejidad de este procedimiento nos hace reflexionar sobre la formación docente de aquellos que serán maestros en este nivel escolar, a través de una visión crítica del conocimiento matemático y no matemático involucrado en los modelos que se presentan al público en general y que enfrentan los maestros y estudiantes de educación básica, habitualmente. La dificultad del proceso de modelización matemática está entonces presente en las peculiaridades de espacios sociales específicos a medida que emergen y en la superposición de intenciones e intereses institucionales en un contexto dado en vista de la herencia matemática disponible en ese espacio social.

Bajo este pensamiento, podemos preguntar: ¿Esta complejidad empeora en el uso de modelos matemáticos por aquellos que no tienen conocimiento sobre las situaciones en el contexto considerado?

La respuesta a esta pregunta parece ser afirmativa frente a las observaciones de Grandsard (2005) y conduciría a una comprensión de los posibles fracasos de los profesores de Matemáticas al tratar de modelar contextos inusuales en sus praxeologías. En este sentido, para lograr la capacidad de alfabetización matemática, al usar o construir un MM, es necesario conocer los contextos de las realidades consideradas. En particular, en el uso del MM, la formulación no está presente y, con poca frecuencia, tampoco se recurre objetivamente a conceptos, solo queda encontrar una respuesta como la que puede reconocerse como la de la situación en el contexto considerado. Si no se conoce el contexto, la respuesta del modelo a veces se toma como la situación, incluso si resulta absurdo para el contexto.

De todos modos, postulamos que el conocimiento no matemático, en general, se toma como naturalizado y, por lo tanto, tal vez, no se consideran como objetos de estudio en modelización matemática, y por lo tanto, un tema, entre otros, emerge como nuestro objeto de investigación: ¿Cómo evidenciar el conocimiento no matemático que emerge de una práctica social inherente a un MM? Para responder a esta pregunta, recurrimos a la noción de prácticas sociales con Matemáticas anunciada por Chevallard (2005), dentro del alcance de la Teoría de la Didáctica Antropológica (TAD), utilizando como dispositivo metodológico las nociones propuestas en los Recorridos de Estudio y de Investigación (REI) (Chevallard, 2009).

Entendemos que la TAD (Chevallard, 1999) nos permite construir una respuesta a la pregunta de investigación propuesta, específicamente cuando se trata del modelo praxeológico. De manera diferente, consideramos los llamados modelos matemáticos que viven en las escuelas básicas, como modelos de situaciones en contextos concretos con las Matemáticas, es decir, el conocimiento matemático y no matemático, están intercondicionados para que no se vean como praxeologías matemáticas personalizadas.

El postulado básico de TAD considera que toda actividad humana que se realiza regularmente dentro de un espacio social, que puede ser la familia, la escuela, por ejemplo, y que aquí se llaman instituciones, cuyo propósito es instituir la forma de hacer y pensar una práctica en su interior, puede describirse a partir de un modelo cuya unidad más simple se resume con la palabra praxeología (Chevallard, 1991).

Chevallard (1999) señala que las praxeologías no son dadas por la naturaleza, sino que son "artefactos" u "obras" construidas dentro de las instituciones y que funcionan, por lo tanto, de acuerdo con las condiciones humanas, culturales y sociales impuestas por estas instituciones, que incluyen ellos mismos, para servir a sus intereses e intenciones. Esto muestra a las instituciones como "una verdadera capacidad para la producción de conocimiento para el autoconsumo" (Chevallard, 2009, p.26).

La palabra praxeología indica, por lo tanto, una organización de prácticas sociales aquí entendidas como conjuntos de acciones intencionales y coordinadas, no necesariamente planificadas a priori, por sujetos que comparten un espacio social dado, movilizando objetos reconocidos y siguiendo las normas de la cultura institucionalizada en ese espacio social. El modelo celular de la organización praxeológica consta de dos componentes; praxis y logos. Como se conceptualiza dentro de la propuesta de TAD, la actividad de la modelización matemática puede considerarse como un dispositivo que permite vincular y dar sentido a las Matemáticas escolares, esto se debe a su propia lógica interna de desarrollo. De hecho, la modelización matemática parte de una praxeología (que puede ser adecuada) como una respuesta transitoria a una pregunta problemática, con nuevas preguntas problemáticas que surgen de las cuales la respuesta deberá considerarse como un sistema.

En nuestra investigación, el análisis del uso del MM del impuesto sobre la renta individual mostró la necesidad de conocimiento técnico, matemático y no matemático, lo que permitió guiar el uso de este modelo como una herramienta para satisfacer los intereses e intenciones de los ingresos federales, con un papel dominante del conocimiento no matemático que determina La forma de hacer y pensar sobre el modelo. La modelización matemática se presenta, en general, como un dispositivo para leer fenómenos del mundo concreto a través de las Matemáticas, haciendo que parezca que este conocimiento es suficiente para leer fenómenos con referencias a la realidad.

Ahora veremos el enfoque por proyectos en la Educación Estadística.

El enfoque por proyectos en la Educación Estadística

Según Gal (2002), la alfabetización estadística asocia las prácticas de lectura y escritura con las prácticas sociales. No se limita al conocimiento estrictamente matemático y estadístico, pero también en otros elementos de disposición, como el conocimiento de la alfabetización en su lengua materna, la capacidad de elaborar preguntas críticas y el conocimiento del contexto. El enfoque a través de proyectos proporciona una mayor motivación y participación de los estudiantes, especialmente al elegir temas de su universo de intereses, como lo sugieren Batanero y Díaz (2011).

El estudio de caso hecho por Giordano (2016) mostró la gran importancia del papel del conocimiento del contexto para la efectividad del enfoque estadístico por proyectos, en la misma línea propuesta por Batanero y Díaz (2011).

Para analizar el desarrollo de la alfabetización y los cambios en el contrato didáctico, en un enfoque basado en proyectos, realizamos un estudio de caso. Nuestros sujetos de investigación fueron 43 estudiantes de 17 a 20 años de edad de dos clases de tercer año de secundaria, divididos en nueve grupos de cuatro o cinco miembros. Participaron, durante un período de dos meses, en todo el proceso de desarrollo de la investigación estadística, desde elegir el tema y elaborar la pregunta de investigación hasta analizar y difundir los resultados. Esta investigación fue el resultado de nuestra preocupación con respecto a las dificultades encontradas por los estudiantes de Educación Básica, más específicamente en la escuela secundaria, con respecto a la producción, lectura e interpretación de textos, tablas y gráficos estadísticos, así como en la movilización del conocimiento estadístico para enfrentar problemas cotidianos La pregunta de investigación que guió nuestras investigaciones fue: "¿Qué contribuciones de un enfoque a la Estadística descriptiva a través de proyectos se pueden identificar en el desarrollo de la alfabetización estadística de los estudiantes de secundaria"?

Nuestros objetivos fueron estudiar las posibles contribuciones del enfoque de Estadística Descriptiva a través de proyectos de investigación emprendidos por estudiantes en el tercer año de secundaria para el desarrollo de su alfabetización estadística, según el modelo Gal (2002):

Figura 1 . *Un modelo de alfabetización estadística*

Elementos del conocimiento	Elementos de disposición
Habilidades de conocimiento Conocimiento estadístico Conocimiento matemático Conocimiento del contexto Preguntas críticas	Creencias y actitudes Posición crítica
Conocimiento estadístico	

Tomado de Gal (2002)

Analizar los tipos de incumplimiento del contrato didáctico en el desarrollo del proyecto, así como sus efectos en la construcción de alfabetización estadística. Evaluar los niveles de alfabetización, de acuerdo con Gal (2002), logrados por los estudiantes desde el desarrollo de proyectos de investigación estadística.

Nuestros marcos teóricos fueron el Análisis Exploratorio de Datos (AED) y la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD), un modelo teórico desarrollado en Francia por Guy Brousseau (1986) a partir de la década de 1970, influenciado por la teoría epistemológica genética de Piaget, especialmente con respecto a las contradicciones y desequilibrios constructivistas, naturales de la problematización, que constituyen una referencia sólida para la Educación Matemática.

El estudiante, como sujeto cognitivo, aprende adaptándose a un entorno que genera dificultades, contradicciones, desequilibrios, desarrollando nuevas respuestas, pero, para eso, este entorno debe estar equipado con una intención didáctica. Según Almouloud (2007), desde el marco teórico de la TSD, depende del profesor, como mediador, crear y organizar un entorno en el que se involucre el conocimiento matemático, propicio para la enseñanza y el aprendizaje.

Cuando el profesor solicita trabajo de los estudiantes, debe provocarlos, generando desequilibrios y la consiguiente necesidad de adaptaciones.

Para que el profesor alcance sus metas, depende del retorno, es decir, de la aceptación de los estudiantes. Debería haber un interés en estos para aceptar los desafíos propuestos. Por lo tanto, el estudiante debe querer involucrarse con el problema y aceptar el desafío. La participación deseada será natural si el estudiante elige un problema de su universo de intereses, algo que, aunque requiere un esfuerzo considerable, le da placer. Sin embargo, Brousseau (2007, p. 68) nos recuerda que "la realidad es más difícil de entender que una teoría". Es posible que los estudiantes, aunque estén motivados, se enfrenten a las dificultades de una tarea extensa y compleja. Depende del profesor, en este caso, como responsable de la gestión de los fenómenos didácticos, intervenir.

Una de las ideas centrales de TSD es la existencia del contrato didáctico: un conjunto de reglas, convenciones y prácticas, rara vez explícitas, que gobierna la relación entre profesor y estudiante, como las cláusulas de cualquier contrato formal. Almouloud (2007, p. 89) agrega que el contrato de enseñanza es "un medio para administrar el tiempo de enseñanza en el aula". Para Brousseau (1986), el contrato didáctico es el conjunto de comportamientos docentes esperados por los estudiantes y el conjunto de comportamientos estudiantiles que espera el profesor. Tal contrato es el conjunto de reglas que determinan una pequeña parte, explícita pero sobre todo implícita, de lo que cada socio de la relación didáctica debe gestionar y de lo que, de una forma u otra, tendrá que rendir cuentas al otro. Depende de las estrategias de enseñanza adoptadas y sus contextos. En nuestro país, las clases expositivas aún prevalecen y los datos involucrados en los problemas generalmente se toman del libro de texto. En el caso de la Educación Estadística, en particular, dicho modelo no favorece el desarrollo de la alfabetización estadística.

Así, realizamos una investigación cualitativa, en la concepción de Bogdan y Biklen (1994), del tipo de estudio de caso, en la concepción de Fiorentini & Lorenzato (2007). La situación en estudio involucró a dos clases de estudiantes en el tercer año de secundaria en una escuela estatal en la ciudad de Santo André, SP. Tratamos las dos clases como un caso único, ya que no hubo diferencias significativas que nos motiven a tratarlas por separado.

Los estudiantes recibieron instrucciones de organizarse en pequeños grupos (de cuatro a seis miembros), según lo recomendado por Garfield (1993) para elegir un tema de interés, según lo recomendado. por Batanero y Díaz (2011). El maestro que guio a los estudiantes en su trabajo fue el propio investigador. No se asignaron observadores. Los datos recopilados para el análisis se extrajeron de las producciones de los estudiantes, es decir, de los resultados de la investigación desarrollada por los grupos. Durante la elaboración de los proyectos, los estudiantes pudieron usar el entorno de papel-lápiz, calculadoras científicas, *smartphones*, *tablets*, *notebooks* y *netbooks*. Para su orientación, el maestro ha tenido a su disposición una computadora y un *datashow* instalados en una sala de proyección. Desarrollaron investigación estadística eligiendo un tema, definiendo la pregunta y los objetivos de la investigación, elaborando un instrumento de recopilación de datos, aplicándolo, planteando y probando hipótesis, presentando los datos mediante medidas de resumen, tablas y gráficos, analizando los datos y difundiendo los datos. resultados de su investigación a través de un panel.

En esta investigación buscamos investigar las posibles contribuciones del enfoque a través de proyectos para la alfabetización estadística de estudiantes de secundaria. Creemos que los cambios en el contrato contribuyen a la promoción de la autonomía investigadora del estudiante, tan importante para la Educación Estadística, como lo defienden Batanero y Díaz (2004, 2011), además de ser necesarios para el desarrollo de la alfabetización estadística, especialmente en lo que respecta a los elementos de disposición (creencias, actitudes y cuestionamiento crítico), según lo definido por Gal (2002).

A partir de la elaboración de la investigación, delineamos nuestro objetivo general: estudiar las posibles contribuciones del enfoque de la Estadística descriptiva a través de proyectos de investigación emprendidos por estudiantes de tercer año de secundaria para su alfabetización estadística. Los datos recopilados fueron las producciones de los estudiantes. Tales trabajos, resultantes de la investigación desarrollada por los grupos de estudiantes, resumieron paso a paso la investigación estadística que realizaron, desde la justificación de la elección del tema hasta el análisis de los datos y la discusión de los resultados.

Lamentamos que no obtuvimos un registro audiovisual del panel realizado por los estudiantes. Esta idea surgió en el desarrollo de la investigación, cuando los estudiantes optaron por esta forma de difusión de resultados. Sin embargo, no se sentían cómodos con la idea de ser filmados, y decidimos no insistir, a riesgo de obstaculizar su espontaneidad durante el panel. Nuestro primer paso en la investigación fue realizar la revisión bibliográfica. Supusimos que encontraríamos un vasto material sobre proyectos en Educación Estadística, ya que este tema es ampliamente discutido en las escuelas. Esto, sin embargo, no sucedió. En Brasil, el enfoque a través de proyectos parece ser poco practicado, al menos en la forma propuesta por Batanero y Díaz (2004, 2011).

Luego, llevamos a cabo un estudio sobre el estado actual de la enseñanza de la Estadística, que trata más específicamente con la red del estado de São Paulo. Este estudio tuvo como objetivo justificar la elección del enfoque de la Estadística descriptiva a través de proyectos. Llegamos a la conclusión de que el material didáctico utilizado por los estudiantes no era adecuado para su alfabetización estadística, por lo que era necesario que el maestro hiciera complementos.

Creemos que este trabajo con proyectos no debe ser realizado de manera aislada por el profesor de Matemáticas, ya que los elementos de conocimiento señalados por Gal (2002) trascienden la esfera de las Matemáticas. También creemos que es necesario hacer que el tiempo y el espacio sean más flexibles para el desarrollo de proyectos. Además, es importante para la alfabetización que los estudiantes tengan recursos tecnológicos que optimicen el tiempo y ahorren esfuerzos en el registro, organización y presentación de datos, según lo propuesto por Batanero y

Díaz (2004, 2011). Creemos, sobre todo, que es esencial difundir la investigación realizada por los estudiantes, involucrando a la comunidad escolar.

El incumplimiento del contrato didáctico y la renegociación de un nuevo contrato, en la transición de la clase tradicional, con un enfoque en el resultado final y el apoyo en el libro de texto y el Cuaderno del estudiante, para el trabajo del proyecto, con un enfoque en el proceso y el apoyo en el mismo investigación, demostró ser adecuada para el desarrollo de la autonomía investigativa, para la madurez al asumir las elecciones que tomaron (como la difusión de resultados a través de un panel) y para la producción de investigación en el entorno escolar, en resumen, para proporcionar a los estudiantes los estudiantes condicionan a "aprender a aprender", sin limitarse a la mera reproducción y memorización de conceptos que no son significativos para ellos.

La alfabetización estadística asocia las prácticas de lectura y escritura con las prácticas sociales. No se limita al conocimiento estrictamente matemático, ni siquiera al conocimiento estrictamente estadístico. El enfoque a través de proyectos proporciona una mayor motivación y participación de los estudiantes, especialmente al elegir temas de su universo de intereses, como lo sugieren Batanero y Díaz (2004, 2011). Tal motivación para las tareas está en línea con los elementos de disposición presentes en el modelo de alfabetización de Gal (2002).

No fue posible evaluar el nivel de alfabetización a partir del desarrollo de los proyectos. Este fenómeno es individual y, dada la naturaleza de la producción colectiva presentada a través de los proyectos, dicha evaluación se ha vuelto inviable. Las reflexiones presentadas en este estudio sugieren nuevas preguntas, que pueden ser objeto de investigación en futuras investigaciones en Educación Estadística: ¿los libros de texto, de hecho, contribuyeron a la alfabetización estadística? Si no, ¿cómo debería ser su organización matemática y didáctica? ¿Están preparados los docentes para desarrollar su trabajo a través de proyectos? De no ser así, ¿qué tipo de capacitación, inicial o continua, debería ofrecerse al maestro? ¿Qué concepciones y conocimientos movilizan los profesores y estudiantes de secundaria en la gestión y el desarrollo de un proyecto estadístico utilizado como enfoque de los conceptos de Estadística Descriptiva?

Conclusiones

Los cambios provocados por la implementación de la nueva base curricular brasileña trajeron grandes desafíos a los profesores de Matemáticas. La enseñanza de la Estadística ganó más espacio en los nuevos planes de estudio y la Educación Financiera, que estaba ausente hasta entonces, se introdujo como un tema transversal. Esta base curricular también enfatizó la necesidad de promover prácticas docentes que valoren el rol del estudiante, alentándolo a realizar investigaciones en contextos cercanos a su realidad social, a través de metodologías activas. En esta perspectiva, tomamos como referencia dos tesis de maestría recientemente publicadas, en las que se explora el enfoque del proyecto y la modelización matemática, impulsados por la BNCC (Brasil, 2018). Las investigaciones de Giordano (2016) y Santo (2018) destacan la importancia del docente de Matemáticas para desarrollar investigaciones con sus alumnos, a través de metodologías activas, como la enseñanza de proyectos y la modelización matemática, explorando contenidos no matemáticos que posibiliten una alfabetización financiera estadística y efectiva, previstos en la BNCC (Brasil, 2018). Esperamos haber contribuido a la discusión sobre nuevos caminos en la educación brasileña, desde la reforma curricular, considerando el nuevo rol de la Educación Financiera y Estadística.

Referencias bibliográficas

Almouloud, S. (2007). *Fundamentos da didática da matemática*. Curitiba: Ed. UFPR.
Batanero, C. y Díaz, C. (2004). El papel de los proyectos en la enseñanza y aprendizaje de la estadística. Em J. P. Royo (Ed.). *Aspectos didácticos de las matemáticas*, 125-164. Zaragoza: ICE.
Batanero, C. y Díaz, C. (2011). *Estadística con proyectos*. Universidad de Granada.

Bogdan, R. y Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto Editora.

Brasil. (2012). *Relatório Nacional PISA 2012*: Resultados brasileiros. OCDE.

Brasil. (2018). *Base Nacional Comum Curricular - Educação é a Base*: Ensino Médio. Brasília: Ministério da Educação.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, *7*(2), 33-115.

Brousseau, G. (2007). Os diferentes papéis do professor. In. PARRA, C.; SAIZ, I. En *Didática da matemática: reflexões psicopedagógicas*. Porto Alegre: Artmed, 48-72.

Campos, C. R.; Teixeira, J. Coutinho, C. Q. S. (2015). Reflexões sobre a Educação Financeira e suas interfaces com a Educação Matemática e a Educação Crítica. *Educação Matemática Pesquisa*, 17(3).

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique*. La Pensée Sauvage Editions, Grenoble perspectives.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(2), 221-266.

Chevallard, Y. (2005). *Del sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Aiqué Grupo Editor.

Chevallard, Y. (2009). *La transposición didáctica:* del saber sabio al saber enseñado. Buenos Aires: Aiqué Grupo Editor.

Chevallard, Y.; Bosch, M. & Gascon, J. (2001). *Estudar matemáticas:* o ele perdido entre o ensino e a aprendizagem. Porto Alegre: Artmed.

Creswell, J. W. (2010). *Projeto de pesquisa métodos qualitativo, quantitativo e misto*. Porto Alegre: Artmed.

Fiorientini, D. & Lorenzato, S. (2007). *Investigação em educação matemática*: percursos teóricos e metodológicos. *São Paulo:* Autores associados.

Gal, I. (2002). Adults' statistical literacy: Meanings, components, responsibilities. International statistical review, 70(1), 1-25.

Garfield, J. (1993). Teaching statistics using small-group cooperative learning. *Journal of Statistics Education*, 1(1), 1-9.

Giordano, C. C. (2016). *O desenvolvimento do letramento estatístico por meio de projetos:* um estudo com alunos do Ensino Médio. Dissertação (mestrado). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

Grandsard, F. (2005). *Mathematical modeling and the efficiency of our mathematics*.

Santo, C. A. E. (2018). *O papel dos saberes não matemáticos na Modelagem Matemática*: o estudo do cálculo do Imposto de Renda. Dissertação (mestrado). Belém: Universidade Federal do Pará.

PESQUISAS EM UM GRUPO DE ESTUDOS EM GEOMETRIA

RESEARCHS IN A GROUP OF STUDIES ON GEOMETRY

José Carlos P. Leivas
Universidade Franciscana. (México)
leivasjc@ufn.edu.br; leivasjc@gmail.com

Resumo
Apresenta-se, neste artigo, considerações sobre um grupo de ensino e pesquisa em Geometria, consolidado junto a um Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciência e Matemática, que busca envolver imaginação, intuição e visualização. Tais grupos colaborativos são relevantes para disseminação de pesquisas que visam o ensino e a aprendizagem matemática. Escolheu-se para divulgar trabalhos resultantes de pesquisas que buscaram ilustrar como realizar a Transposição Didática, levando um saber sábio, aquele do matemático, a um saber ensinado, aquele do professor, segundo Chevallard. Assim, ilustrou-se indicativos de aplicações da Banda de Möebius, com criação de recursos materiais e aplicação no Ensino Básico brasileiro, bem como seu emprego em indústria moveleira. Uma segunda pesquisa ilustrada diz respeito a dobraduras para exploração de propriedades de polígonos e regiões poligonais, além de obtenção de cônicas pelo mesmo processo e uma transposição dessa abordagem para Geometria Dinâmica no Geogebra. Como terceira pesquisa relatada consta a adaptação em um jogo denominado Geometria em Ação, o qual explora gestos que podem proporcionar a descoberta de conceitos geométricos de diversos níveis, aliando, pois, um outro recurso, além da linguagem oral no ensino de Geometria. Resultados das pesquisas do grupo têm sido aplicados em diversas ocasiões e gerado produção científica amplamente divulgada na literatura.

Palavras-chave: geometria, topologia, möebius, imaginação, gestos

Abstract
This article presents considerations about a group of teaching and research in Geometry consolidated together in a Postgraduate Program in Science and Mathematics Teaching, which seeks to involve imagination, intuition and visualization. Such collaborative groups are relevant for the dissemination of research aimed at teaching and learning mathematics. It was chosen to publish works resulting from research that sought to illustrate how to carry out the Didactic Transposition, taking a wise knowledge, that of the mathematician, to a taught knowledge, that of the teacher, according to Chevallard. Thus, indications of applications of the Banda de Möebius were illustrated, with the creation of material resources and their application in Brazilian Basic Education as well as their use in the furniture industry. A second illustrated research is concerned with a paper folding to explore properties of polygons and polygonal regions, in addition to obtain conics by the same process and transposing this approach to Dynamic Geometry in Geogebra. As a third research reported, there is an adaptation in a game called Geometry and Action, which explores gestures that can provide the discovery of geometric concepts at different levels, thus combining another resource, in addition to oral language in the teaching of Geometry. Results of the group's researches have been applied on several occasions and generated scientific production widely disseminated in the literature.

Keywords: geometry; topology, möebius, imagination, gestures

Introdução

Grupos de estudos estão sendo alternativas teórico-metodológicas para o ensino, especialmente na Educação Matemática. Neste texto apresenta-se alguns resultados de pesquisas de um Grupo de Estudos e Pesquisas em Geometria, atuando junto a um Programa de Pós-Graduação em uma universidade privada no Sul do Brasil.

O grupo é constituído por alunos de graduação e pós-graduação, bem como professores em ação continuada no exercício profissional. A temática deste grupo está na busca de elementos didáticos/teóricos que possam contribuir para a melhoria do ensino de Geometria e, posteriormente, elaboração de recursos para o ensino. As reuniões são realizadas quintas-feiras durante uma tarde, quando são analisados artigos, distribuídos previamente para leitura; confeccionados materiais que possam contribuir na construção de um novo olhar para esta área do ensino em todos os níveis de escolaridade; elaboração de materiais de pesquisa; investigações em diversos ambientes educacionais, dentre outras ações.

Grupos de estudos e pesquisa estão sendo, atualmente, importantes para o desenvolvimento de pesquisas que podem contribuir para a melhoria do ensino e da aprendizagem em Matemática, em geral. Um desses grupos precursores no Brasil é o denominado GDS - Grupo de Sábado, ligado à Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas. Este grupo reúne-se semanalmente aos sábados pela manhã, quinzenalmente, com o objetivo de estudar, compartilhar, discutir, investigar e escrever sobre a prática pedagógica em Matemática nas escolas em um ambiente de trabalho colaborativo, conforme é explicitado no site do grupo (https://www.cempem.fe.unicamp.br/gds/grupo-de-sabado).

Em outra direção, encontra-se o Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática, Diversidade e Diferença (GEduMaD), tendo este o objetivo um pouco diferenciado do anterior por realizar estudos e pesquisas envolvendo questões sociais, culturais, econômicas, políticas e filosóficas, que sejam atravessadas pelas Filosofias da Diferença ou, ainda, que estejam voltadas para a Formação de Professores ou o processo de ensino e de aprendizagem de grupos minoritários por suas diferenças étnicas, linguísticas, culturais, além do público alvo da Educação Especial. (https://sites.google.com/view/grupogedumat-ufms/p%C3%A1gina-inicial).

Uma terceira linha de estudos e pesquisas localizada é a que envolve um espaço de discussão sobre teorias da linha francesa da Educação Matemática com foco no estudo de: Teoria das Situações Didáticas, Teoria Antropológica do Didático, Teoria dos Campos Conceituais, Teoria de Registros de Representação Semiótica e Didática da Matemática. Este grupo é denominado Grupo de Estudos em Didática da Matemática – DDMat, criado mais recentemente em 2013. (http://grupoddmat.pro.br/index.php/home/).

Quando se faz uma busca com a palavra-chave "Grupo de Estudos e Pesquisas em Geometria", praticamente não encontra- se nenhum específico. Por tal razão, justificou-se a criação do Grupo de Estudos em Pesquisa em Geometria- GEPGEO, em 2016, liderado pelo autor do presente artigo, o qual tem se dedicado há várias décadas ao tema Geometria; seu ensino e sua aprendizagem. Até o presente momento tem-se produzido artigos publicados em periódicos e anais de eventos, dissertação de mestrado e recentemente, duas teses de doutorado, todos esses trabalhos com temas envolvendo Geometria em suas diversas vertentes. Por entender-se da precariedade de resultados nessa área, decorrentes de grupos de estudos e pesquisas, justifica-se o presente trabalho no sentido de comunicar alguns desses, provenientes do referido grupo.

Marco referencial

Em função da área de atuação de seu líder, e autor deste trabalho, ou seja, intuição, imaginação, criatividade e visualização percorrem suas pesquisas e as do grupo, as quais têm sido divulgadas em artigos, conferências e minicursos, em congressos nacionais e internacionais. Essas habilidades são consideradas fundamentais para o desenvolvimento de um pensamento geométrico. Hilbert e Cohn-Vossen(1932), em seu livro *Geometry and Imagination,* já indicavam tais habilidades para a aprendizagem geométrica:

> [...] é nosso objetivo dar uma apresentação da Geometria tal como está hoje, em seus aspectos visual e intuitivo. Com a ajuda da imaginação visual, podemos iluminar a variedade de fatos e problemas da Geometria e, além disso, é possível, em muitos casos, retratar o esboço geométrico dos métodos de investigação e demonstração, sem necessariamente entrar em pormenores relacionados com a estrita definição de conceitos e com cálculos reais (Hilbert e Cohn-Vossen, 1932, p. iii).

Ao abordar sobre a criatividade matemática Ervynck (apud Tall, 2002) indica procedimentos a serem trabalhados para comporem tal habilidade, dos quais destaca-se: intuição da estrutura profunda do sujeito; imaginação e inspiração, os quais, de certa forma, nortearam este trabalho e o grupo de estudo aqui descrito. Para o autor, intuição indica a formação de imagens conceituais suficientemente próximas do conceito formal para permitir a concepção de conjecturas plausíveis. Ela permite que o matemático realize também uma seleção frutífera do que irá criar ou realizar.

No que diz respeito à criatividade, esse autor afirma que seu poder matemático resulta da interação de certos elementos como a compreensão, a qual tem a "capacidade de regenerar os passos da criatividade matemática do(s) autor(res) de um teorema, parte de uma teoria..." (Idem p. 67, tradução livre). A isso reporta-se à denominada 'compreensão relacional' apontada por Skemp (2016), a qual significa saber o que fazer e o porquê de se fazer. Dessa forma, a criatividade matemática traz consigo aprofundamento tanto da compreensão quanto do *insight* de determinados conceitos.

Para Fischbein (1987), intuição também tem o sentido de conhecimento intuitivo, sendo uma forma de cognição, a qual está relacionada às afirmações auto evidentes que vão além dos fatos observados e, portanto, está intimamente ligada à criatividade. Para o autor, o conhecimento intuitivo corresponde a uma certeza direta, sendo produzida, em primeira instância pela auto-evidência. Para ele, "Uma intuição é, então, uma ideia que possui as duas propriedades fundamentais de uma realidade concreta, dada objetivamente; imediatez, isto é, evidência intrínseca e certeza (não certeza formal convencional, mas praticamente significativa, certeza imanente" (*Ibid*, p. 21).

Na medida em que o GEPGEO se dedica à elaboração e aplicação de atividades geométricas envolvendo habilidades criativas, imaginativas e visuais, encontra-se em Fischbein (1987) amparo para explorar intuição, uma vez que, para ele,

> [...] intuição é gerada por experiências e conhecimentos aparentemente auto evidentes e inéditos tais como visualização e a história da matemática e das aquisições científicas têm sido influenciados pela tendência de produzir dispositivos mentais que lhe permitam acreditar na validade de suas concepções mesmo antes de serem demonstradas (conhecimentos auto evidentes, evidências ou intuição) é essencial para o raciocínio produtivo. (p. 21).

Como dito no início desta fundamentação, um pilar das pesquisas do grupo envolve habilidades visuais no desenvolvimento do pensamento geométrico. Essa habilidade já é discutida há longo tempo por renomados pesquisadores, sendo indicada como tema de pesquisa pelo *working group of PME*. Alsina, Aymemí e Gómes (2010) afirmam que "desenvolver o pensamento visual e favorecer as habilidades de visualização são dois objetivos chaves na educação geométrica". (p. 40). Também, indicam que "[...] visualizar significa produzir imagens que ilustrem ou representem determinados conceitos, propriedades ou situações e é a capacidade de realizar certas leituras visuais a partir de determinadas representações". A isso, Leivas (2009) acrescenta "é um processo de formar imagens mentais, com a finalidade de construir e comunicar determinado conceito matemático, com vistas a auxiliar na resolução de problemas analíticos ou geométricos" (Leivas, 2009, p. 22).

Outro aspecto relevante que o GEPGEO aborda diz respeito à elaboração e disseminação de recursos didáticos que possam auxiliar no desenvolvimento do pensamento geométrico nos diversos níveis de ensino. A esse respeito, reporta-se a Chevallard ao caracterizar "la transformación de un contenido del saber preciso en una versión didáctica de ese objeto de saber puede denominar-se más apropiadamente transposición didáctica stricto sensu" (Chevallard, 1991, p. 46). Isso levou o grupo a investigar criações didáticas sobre temas variados em Geometria, de difícil compreensão para os estudantes até mesmo do ensino superior, bem como opções de recursos para o professor realizar seu ensino.

A partir desses pressupostos teóricos, na sequência apresenta-se algumas reflexões sobre atividades realizadas pelo grupo.

Reflexões e implicações

Topologia geométrica é um desses temas de difícil compreensão para os estudantes em formação, os quais não conseguem fazer a Transposição Didática para a escola básica. Piaget e Inhelder (2003) já apontavam que tal geometria é mais natural para a criança do que a euclidiana, uma vez que, ao contrário da última, na topológica suas propriedades independem do conceito de distância. Além desse fato, ela é tida como área dura com aplicações na própria Matemática e poucas práticas, as quais se voltem para a Educação Matemática e, mais especificamente, para a escola básica.

O grupo se propôs a estudar alternativas metodológicas e aplicações dessa área da Geometria. Em artigo publicado em 2019, foram feitas algumas abordagens diversas da Banda de Möebius a partir de busca na literatura. Essa superfície, por exemplo, é empregada na questão do 'jogo de palavras', ou seja, aproximação entre literatura e hipertexto nas obras de Ítalo Calvino, segundo Moreira e Fux (2010). Em sua obra, Calvino mostra a relação entre os personagens e a estrutura geral do livro, como se fora um algoritmo em que "o *looping* contínuo, caracterizado pela mistura das funções de autor e de leitor, pela 'passagem contínua de dentro para fora' é perfeitamente ilustrada com a superfície topológica Faixa de Möebius" (Moreira e Fux, 2010. p. 64). Em suas obras, uma história encontra-se dentro de outra, em processo contínuo e infinito, dentro do mesmo lado da faixa, isto é, apresentam as características de unilateralidade e continuidade, típicas da Faixa de Möebius, ao que Pierre Levy denominou de 'efeito Möebius', segundo o autor. Dito de outra forma, é a passagem continua do interior ao exterior sem atravessar fronteiras.

O exemplo de aplicabilidade na literatura encontra guarida nos Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1998) ao recomendar que o ensino de Matemática deve proporcionar explorações em que a aprendizagem conduza o aluno a resolver problemas de localização e deslocamento no espaço, com o reconhecimento de conceitos como direção e sentido. Aqui se dá uma visão ampla destes dois, aplicados em uma situação em nada convencional no âmbito matemático – a literatura.

Outras aplicações da Faixa de Möebius foram exploradas e publicadas com seu uso na indústria moveleira, como o estofado para sala de estar (Figura 1). Nele, o indivíduo pode ser visualizado a partir de qualquer posição no ambiente.

Figura 1. *Ninho Möebius*

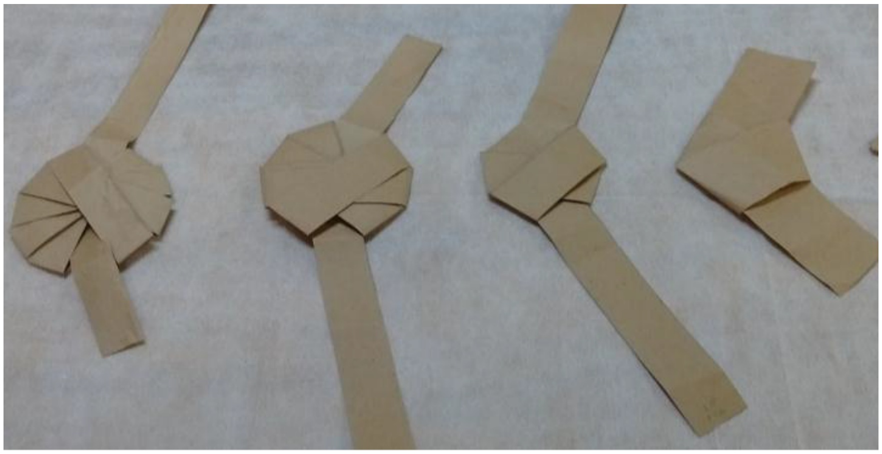
Fonte: http://www.saccaro.com.br/site20122/upload/produtos/8035_g.jpg

Esse exemplo, além de estimular os indivíduos na criação de objetos com formato geométrico, propicia investigações sobre a forma como se encontra o desenvolvimento do pensamento visual, um dos objetivos da educação geométrica indicado por Alsina, Aymemí e Gómes (s.d).

Nos anos de 2017 e 2018, o grupo dedicou-se à exploração de recursos didáticos para o ensino de geometria plana e, para tal, investigou os vários tipos de papeis que possibilitavam o uso de dobraduras para explorar o ensino de polígonos e regiões poligonais, tendo algumas publicações naquele ano e no seguinte. Analisou-se diversas técnicas, as quais proporcionaram investigações no próprio grupo, em escolas da Educação Básica e do Ensino Superior. Foram aplicadas oficinas a respeito em eventos da área de Educação Matemática que contribuíram com o grupo na certeza da descoberta do caminho intuitivo para explorações visuais.

Divulgou-se uma pesquisa envolvendo o papel pardo na construção desses 'polígonos ou regiões poligonais' com uma ou duas faixas (Figura 2).

Figura 2. *Dobraduras com papel pardo*



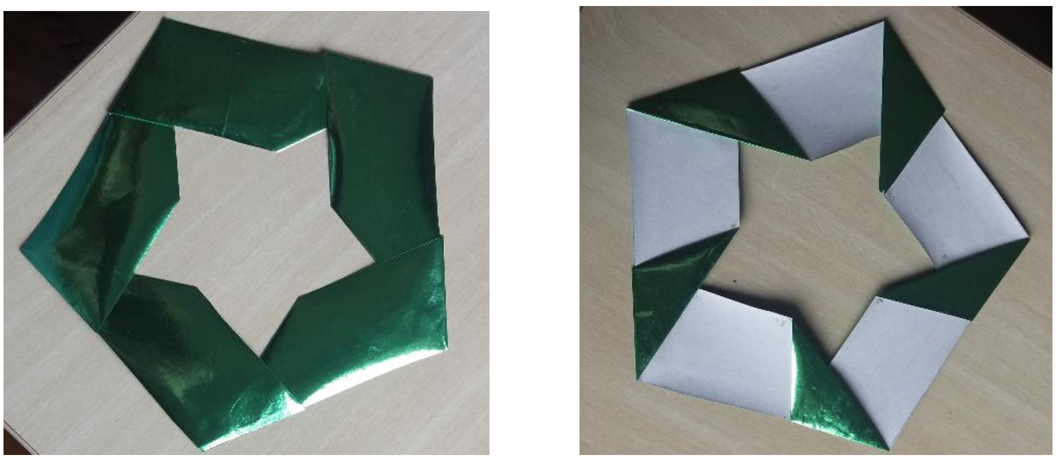
Fonte: dados da pesquisa

A partir desse material, as investigações realizadas exploraram a intuição (Fischbein 1987) na medida em que proporcionavam descobertas e redescobertas sobre propriedades dos polígonos, quanto a lados, ângulos internos etc. Tais investigações comprovaram a importância da compreensão relacional apontada por Skemp (2016), em vez da instrumental, mais frequentemente empregada no âmbito educacional em que o tema é explorado por meio da utilização de fórmulas sem razão de seus porquês, sendo meramente operacionais.

As investigações com esse tipo de papel produziram bons frutos e buscou-se, também, outros materiais para serem explorados com a mesma técnica de dobraduras. Isso conduziu a realizar a Transposição Didática, indicada por Chevallard (1991), a qual leva conteúdo de um saber preciso em una versão didática do objeto polígonos, de modo a que professores e futuros professores atuantes no grupo de estudos e pesquisas possam efetivar sua aplicabilidade no ensino.

Uma das pesquisas com este material produziu artigo científico e apresentação em evento, oriundo de dobraduras com papel laminado colorido (Figura 3)

Figura 3. *Dobraduras com papel laminado frente e verso*



Fonte: dados da pesquisa

Em um evento nacional foi ofertado um minicurso com o objetivo de explorar a construção do pentágono por meio de dobradura no papel laminado, com o uso de transferidor, da régua, do esquadro e do compasso. As pesquisas realizadas pelo grupo mostraram que este tipo de papel se adequa melhor do que o pardo. Também mostraram quais as dimensões das tiras foram as mais apropriadas para uma melhor visualização do objeto, o que depende do número de lados do polígono a ser construído.

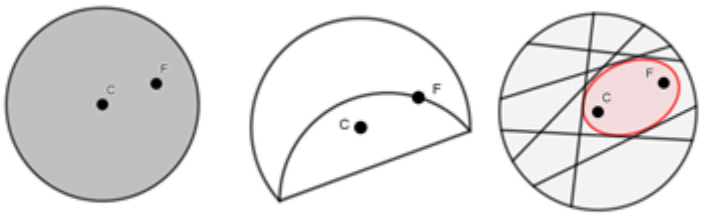
Além da construção e das relações propriamente ditas, foi envolvida a questão de inscrição do pentágono em uma circunferência de modo que se tornou necessário o reconhecimento de mediatrizes, bissetrizes, ângulo central e ângulo inscrito, além de relações trigonométricas envolvidas. A partir disso, os pressupostos da Transposição Didática de Chevallard (1991) propiciaram oportunidades de replicar em sala de aula da Educação Básica, uma vez que os participantes eram todos professores.

Em relação aos recursos didáticos ou manipuláveis, eles se constituíram em meios que devem ser utilizados no ambiente escolar a fim de proporcionar um ensino eficiente de Geometria para uma aprendizagem condizente. Esses constituem-se em apoio ao que deve ser ensinado e para a criação didática (Chevallard, 1991).

Os resultados do minicurso mostraram que é possível explorar intuição, no sentido apontado por Fischbein, de que ela "[...] é gerada por experiências aparentemente auto evidentes e inéditos tais como visualização [...]" (Fischbein,1987, p. 21). Na medida em que foi solicitada a verificação de que o polígono construído é regular, isso remeteu ao que Alsina, Fortuny e Pérez (1997) tratam sobre a demonstração em aulas de Matemática para diferentes níveis, na resolução de um problema matemático e, para o caso, de Geometria.

Ainda a respeito de pesquisas de materiais didáticos para a exploração de dobraduras, reforça-se, pois, o dito por Lorenzato (2006, p. 18) que: “é qualquer instrumento útil ao processo de ensino-aprendizagem”. Nesse sentido, o grupo fez uso do papel vegetal ou manteiga para obtenção de cônicas, tendo apresentado resultados em evento e publicações em revista. A partir de dobras específicas no papel, visualmente ilustrando parábolas, hipérboles e elipses, o desafio foi elaborar uma sequência conectada a tal construção a ser feita em software de Geometria Dinâmica, neste caso, no Geogebra. A Figura 4 ilustra a construção da elipse explorando as dobras no papel.

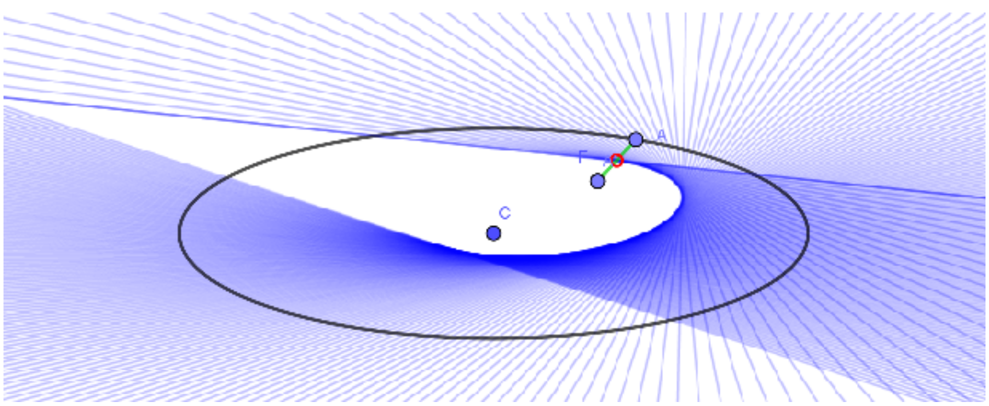
Figura 4. *Obtenção da elipse por dobraduras e n Geogebra*



Fonte: arquivo do pesquisador

Constrói-se uma circunferência de centro C e escolhe-se um ponto distinto de C, denominando-o de F. Marca-se um ponto qualquer P_1 sobre a circunferência e rebate-se esse de modo a coincidir com C. Isso gera uma linha de dobra que, bem demarcada, produz a mediatriz do segmento CP_1. Ao fazer isso para muitos pontos P_i, as linhas de dobra irão demarcando um lugar geométrico. Reproduz-se tal sequência no s*oftwar*e, explora-se o recurso ‘habilitar rastro’ para a reta que representa a linha de dobra e, em seguida, o recurso ‘animar’. O lugar geométrico vai sendo visualizado na tela do computador (Figura 5)

Figura 5. *Construção da elipse no software.*



Fonte: arquivo do pesquisador.

A atividade desenvolvida pelo grupo estabelece conexões entre dois recursos para realizar a Transposição Didática (visualização por dobraduras e por geometria dinâmica) levando o saber sábio do matemático (cônicas) ao saber ensinado (uso da dobradura e do software) gerando formas produtivas de construção de pensamento visual geométrico de um tema que, em geral, é abordado na formação inicial do professor por meio de fórmulas e regras (compreensão instrumental de Skemp). Com isso, acredita-se estar indo ao encontro do preconizado por Hilbert e Cohn-Vossen (1932, iii) a respeito de que a imaginação visual ajuda a “[...] iluminar a variedade de fatos e problemas da Geometria [...]". Além disso, reitera o dito por Ervynck (apud Tall, 2002) sobre a criatividade matemática indicar procedimentos que desenvolvam a intuição das estruturas envolvidas.

Ao abordar o envolvimento da criatividade no ensino e na aprendizagem matemática, Sánchez Segura (2012) posiciona-se quanto ao seu uso na disciplina ao afirmar:

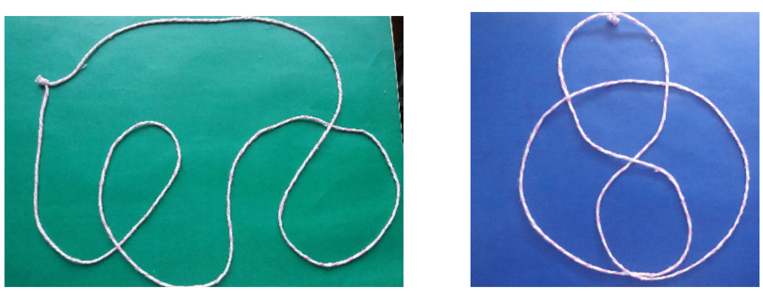
> Pode-se dizer que uma educação é criativa quando o professor que a realiza encoraja e energiza a classe para que todos investiguem e redescubram seus próprios conhecimentos, induz ações participativas dos estudantes, são eles que constroem seus conhecimentos a partir do conhecimento (p. 70).

A compreensão instrumental, indicada por Skemp (2016), aquela que usa fórmulas prontas sem os porquês, vai ao encontro do que Carvajal (1997) aborda sobre a mecanização excessiva nesse uso. Para esse autor, é necessário, também exercitar a imaginação, estimular a atividade mental, reafirmando o que Leivas (2009) caracteriza como visualização.

Partindo desses pressupostos, o grupo de estudos e pesquisas encontrou em Conway *et al* (2010), uma possibilidade de realizar uma Transposição Didática de um tema bastante complexo em Geometria que é a Topologia com os Espaços de Recobrimento e Grupo Fundamental. Esses autores exploraram a Teoria dos Nós associando aos 'laços' obtidos por correias de bicicleta, colares e outros objetos que se 'enredam' quando soltos aleatoriamente. Assim, o grupo se debruçou em realizar atividades correlatas para solucionar alguns dos problemas criativos propostos por Conway *et al* (2010) com o uso de cordões. Isso possibilitou intersecções, por exemplo, com o ensino de Cálculo ao envolver as homotetias por caminhos, no estudo de funções reais contínuas. A proposta dos autores foi considerar um cabo de extensão e conectar uma extremidade a outra, produzindo um laço. Isso levará o indivíduo a imaginar a possibilidade de desatá-lo ou não, sem desconectar ou romper o cabo.

Foram feitos experimentos com cordão de aproximadamente 1m de comprimento, solto aleatoriamente sobre uma mesa, sobrepondo-se. Buscou-se reorganizá-lo de modo que fosse feito o menor número possível de movimentos para eliminar os cruzamentos ocorridos (os nós na Figura 6).

Figura 6. *Cordão solto se auto cruzando*



Fonte: acervo do grupo.

A partir dos aspectos experimentais, intuitivos e visuais ilustrando laços (nós e caminhos), no que segue, formaliza-se o conceito. Munkres (1975, p. 326) define: "Seja X um espaço e x_0 um ponto de X. Um caminho em x_0 que começa e termina em x_0 é denominado um laço com base em x_0".

Um segundo experimento intuitivo sobre o mesmo tema foi feito com o uso de corrente fina (colar para colocar ao redor do pescoço) e solto livremente em uma caixa. Verifica-se que ele fica todo enrolado com nós. Dispõe-se sobre a mesa e busca-se desenrolar sem levantar, ou seja, perder o contato com ela. Na teoria isso representaria uma curva auto interseccionando-se (nos nós).

Na continuação das pesquisas e estudos do grupo, chegou-se aos ‘gestos’, tema que contribui para o desenvolvimento de pensamento visual, segundo alguns resultados preliminares dessa pesquisa em andamento desde o ano de 2019, tendo, inclusive, já originado publicação de resultados obtidos.

Sobre esse tema, McNeill (1992, p. 105) afirma: “[...] Em outras palavras, o gesto é capaz de expressar toda a gama de significados que surgem de quem o transmite. Dessa forma, o grupo de estudos e pesquisas fez uma adaptação do jogo ‘Imagem e Ação’ para ‘Geometria em Ação”, na busca de resgatar conceitos geométricos em vários níveis de escolaridade, bem como produzir novos conceitos para os estudantes.

Confeccionou-se um tabuleiro (Figura 7); cartas (Figura 8) e um dicionário (Figura 9). Em primeira instância o mesmo foi bem explorado no próprio grupo e, posteriormente, foi aplicado em três vertentes: Ensino Médio, Licenciatura em Matemática e uma oficina em um evento acadêmico a fim de testar sua validade. De cada um deles foram coletados dados para aperfeiçoamento, produção técnica e divulgação.

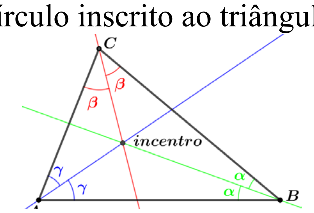
Figura 7. *Abuleiro*

Figura 8. *Carta*

Fonte: dados do grupo

Figura 9. *Dicionário*

Incentro: é o ponto de interseção das bissetrizes dos ângulos internos de um triângulo ou o centro do círculo inscrito ao triângulo.



Fonte: dados do grupo

O jogo consiste de regras bem definidas, a ser disputado entre dois ou mais grupos de participantes, sendo que um elemento de um dos grupos retira uma carta com um conceito sem que os demais membros saibam qual é. Esse indivíduo deve gesticular para o grupo citá-lo verbalmente. Caso o participante que retirar a carta não souber o conceito, pode pedir ajuda a um de dois dicionários, sendo um apenas com conceitos e o outro com conceitos e imagens. Se escolher o primeiro, perde um ponto e caso peça o segundo, dois. Ganha o jogo aquele que primeiro chegar ao final da trilha no tabuleiro.

Resultados de uma das aplicações. com participantes de uma jornada acadêmica envolvendo estudantes de vários semestres de um Curso de Formação de Professores de Matemática, mostraram que a aplicação resgatou conceitos geométricos que eles não lembravam e, até mesmo, desconheciam. Nem sempre o conceito era formalizado corretamente pelo grupo, mesmo após a discussão entre os pares. Por outro lado, os gestos produzidos mostram, em grande parte, que os estudantes são capazes de se comunicarem por outros caminhos, não somente o da escrita e das palavras verbais.

Gestos têm sido investigados em várias áreas e situações de ensino, por exemplo, Roth (2001) indica que eles são fundamentais para o conhecimento humano. Afirma serem necessárias pesquisas que se concentrem no seu papel no conhecimento e na aprendizagem, cuja análise conduza à articulação em questões cruciais relevantes para a pesquisa educacional em termos de conhecimento, aprendizagem e ensino.

Sobre a aplicação com estudantes do Ensino Médio, os resultados ainda se encontram em análise, de forma similar ao aplicado em uma turma específica de um Curso de Formação de Professores de Matemática.

No momento, o grupo está debruçado adaptando uma versão *online* do jogo "Geometria em Ação", já sendo testado internamente no grupo que, em função do isolamento social, está se reunindo *online*. Uma aplicação com um grupo limitado de oito estudantes do Ensino Médio, selecionados espontaneamente, mostrou que tal versão pode ser aplicada a outros grupos maiores e heterogêneos, pois apresenta as condições propícias para tal. Nessa versão o jogo funciona em duas salas abertas em uma plataforma digital, sendo que em uma delas há um árbitro ou controlador que faz o sorteio das cartas e a escolha ou não do participante pelo dicionário. Na outra sala se concentram os outros grupos sem que visualizem o que ocorre na primeira. Após o tempo destinado a imaginar o gesto a ser feito por cada um dos dois, esses se dirigem à segunda sala onde há um árbitro para controlar o tempo e o gesto realizado, todos eles, relembrando, envolvendo conceitos geométricos. Os participantes do grupo devem registrar no chat o significado daquele gesto e, o primeiro que o fizer corretamente, pontua para seu grupo. Por meio de um dado eletrônico obtém o número de avanços a serem feitos no tabuleiro, que é acompanhado visualmente por todos. A Figura 10 ilustra o sorteador eletrônico e uma carta a ser sorteada, a qual remete ao sim, se desejar consultar o dicionário e ao não, em caso contrário, o que retorna ao sorteador novamente para a continuidade do jogo.

Figura 10. *Sorteador eletrônico*

Fonte: autoria própria

A partir dessa estruturação novas aplicações serão feitas e analisadas, inclusive pesquisando o nível de habilidade visual dos participantes.

Conclusões

Este artigo é resultado de uma ampliação de uma comunicação científica apresentada ao RELME 34 e teve por objetivo divulgar alguns estudos e pesquisas que estão sendo desenvolvidas em um grupo de Geometria, liderado pelo autor do artigo, que atua em um programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática na região Sul do Brasil.

Os participantes são estudantes da Licenciatura em Matemática, professores em ação continuada, estudantes de Mestrado e Doutorado e interessados pela área de Geometria. A abordagem envolvendo a Transposição Didática de Chevallard é um dos rumos que o grupo procura seguir uma vez que, em geral, na formação inicial do professor de Matemática conteúdos como a Topologia, as Geometrias Não-Euclidianas, por exemplo, são estudadas de forma muito teórica. Com isso, o grupo tem se ancorado, também, na Teoria de Skemp, a qual aborda um tipo de compreensão denominada relacional, buscando compreender os porquês dos fatos estudados ou ensinados e não em uma compreensão instrumental que se limita a empregar fórmulas prontas e utilizar, basicamente, a memorização.

Nessa direção, apresentou-se aqui duas pequenas aplicações da Topologia, usando a Banda de Möebius em atividades exploratórias práticas na Ensino Fundamental do Brasil e outra com seu emprego na confecção de móveis exóticos, não triviais, por uma indústria na região de abrangência do grupo.

Ilustrou-se também, sem possibilidade de aprofundamento pela limitação de espaço, o emprego de determinados materiais para o uso de dobras no papel para obtenção de elementos da Geometria Plana e de cônicas, na Geometria Analítica, com posterior conexão com exploração em software de Geometria Dinâmica.

Por fim, ilustrou-se a criação de um jogo para exploração dos gestos no ensino e na aprendizagem de geometrias, tanto em forma presencial, com recursos materiais concretos elaborados pelo grupo, quanto sua adaptação ao jogo online, com outras formas metodológicas envolvidas.

Dessa forma, espera-se que o relato aqui descrito possa permitir novos diálogos e contribuições para o engrandecimento da Geometria como área de atuação, especialmente, na Educação Matemática.

Referências bibliográficas

Alsina, C., Aymemi F., Gomez, R.F. (1997) *?Por que geometria? Propuestas didacticas para la ESO*. Sintesis S. A. Madrid, Espana; Unknown Edition,January 1.

Brasil. (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais*: Matemática/ Secretaria de Educação Fundamental. – Brasilia: MEC/SEF. 148p.

Carvajal, J. (1997). La criatividad en el dibujo geométrico. In: *Geometria Criativa*. Colección Master: Monografia de Creativadad Aplicada. Santiago.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica*: del saber sabio al saber ensiñado. Trad. Claudia Gilman. Argentina: Aique Grupo Editor S.A.

Conway, J., Doyle, P., Gilman, J., Thurston , Bill. (2010). *Geometry and the Imagination*. Derived from works Copyright (C) 1991 Version 0.941.

Ervynck, G. (2002). Mathematical Creativity. In: Tall, D. (editor) *Advanced Mathematical Thinking*. New York: Kluwer Academic Publishers, pp. 66-68.

Mcneill, D. (1992). *Hand and Mind: What Gestures Reveal about Though*t. Chicago. The University of Chicago Press.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics*: an educational approach. Dordrecht: Reidel.

Hilbert, D. e Cohn-Vossen, S. (1932). *Geometry and the imagination*. New York: Chelsea Publishing Company, 1932.

Leivas, J. C. P. (2009). *Imaginação, intuição e visualização*: a riqueza de Possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura de matemática. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Federal do Paraná. Curitiba, Brasil, 294p.

Lorenzato, S. (org.). (2006). *O laboratório de ensino de matemática na formação de professores*. Campinas, SP: Autores Associados, pp. 3-38.

Moreira, M.E.R. e Fux, J. (2010). *Letras de Hoje*. Porto Alegre, v. 45, n. 2, p. 62-70, abr./jun.

Munkres, J. R. (1975). *Topology*: a first course. New Jersey: Prentice-Hall, Inc.

Sánchez Segura, M. D.(2012). La influencia de la creatividad en la enseñanza aprendizaje de las matemáticas en educación infantil - *REICE. Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación*, vol. 10, núm. 2, 2012, pp. 68-85. Madrid, España, pp. 1-19

Skemp, R. R. (2016). *Compreensão relacional e compreensão instrumental*. Educação e Matemática. Lisboa, n. 136, pp. 44-48.

Piaget, J. &Inhelder, B. (2003). Trad. Octavio Mendes Cajada. *A psicologia da criança*. Rio de Janeiro: Difel, 144p.

Roth, W.M. (2001). Gestures: their role in teaching and learning. *Review of Review of Educational Research, Fall, Vol. 71, No. 3, pp. 365–392*

Scholz, O. y Montiel, G. (2017). Problematización de la trigonometría en la génesis histórica de la trigonometría. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 30*, pp. 1018-1026.

SECCIÓN 3

ASPECTOS SOCIOEPISTEMOLÓGICOS EN EL ANÁLISIS Y EL REDISEÑO DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR

VOL 34, NÚMERO 1, AÑO 2021

COCINANDO CON NÚMEROS: UNA EXPERIENCIA DE AULA PARA TRABAJO DEL CÁLCULO FUNDAMENTADA EN UN RAZONAMIENTO ABDUCTIVO

COOKING WITH NUMBERS; A CLASSROOM EXPERIENCE FOR CALCULUS WORK, BASED ON ABDUCTIVE REASONING

Paola Alejandra Balda Álvarez
Institución Educativa General Santander. (Colombia)
pbalda20@hotmail.com

Resumen

Se presenta en este artículo, una experiencia con estudiantes de grado 11 de una institución educativa pública en Colombia. Se narran los aspectos centrales de la construcción de la propuesta, cuyo objetivo fue desarrollar temas de introducción al cálculo a través de una metodología que aportara al trabajo en torno al razonamiento abductivo. Las actividades realizadas en este curso que en el marco del currículo colombiano lleva el nombre de cálculo se fundamentan en la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, en la cual se asume que es mediante el desarrollo de prácticas que se significan los objetos matemáticos. Los hallazgos obtenidos en el trabajo implementado ponen en evidencia las múltiples relaciones variacionales que pueden establecerse en escenarios donde la cocina es el contexto situacional, así como las diversas formas de trabajo que aportan a la construcción de un pensamiento y lenguaje variacional a la luz de prácticas como la predicción, comparación, anticipación, entre otros.

Palabras clave: cocina, abducción, pensamiento y lenguaje variacional, cálculo

Abstract

This article presents an experience with eleventh-grade students from a public educational institution in Colombia. It shows the main aspects of the proposal construction, whose objective was to develop topics of introduction to calculus through a methodology that will contribute to the work with respect to abductive reasoning. The activities carried out in this course, which are called calculus within the framework of the Colombian curriculum, are based on the Socio-epistemological Theory of Mathematics Education, which assumes that mathematical objects are signified through the development of practices. The findings obtained in the implemented work show the multiple variational relationships that can be established in settings where cooking is the situational context, as well as the various forms of work that contribute to the construction of variational thinking and language in the light of the practices, such as prediction, comparison, and anticipation, among others.

Key words: cooking, abduction, variational thinking and language, calculus

Introducción

Uno de los tantos objetivos de la enseñanza de las matemáticas radica en lograr que los estudiantes dominen procesos, construyan conceptos matemáticos, desarrollen el sentido crítico y disfruten el aprendizaje. En este sentido, la enseñanza de las matemáticas irá más a allá de una ejecución de procedimientos o una mecanización de algoritmos a una significación de conocimientos mediante su uso, es decir, un a resignificación del saber.

Lo anterior, pone en evidencia la importancia de otorgar a las matemáticas un sentido funcional, contrario a la dinámica utilitaria que rige el discurso Matemático Escolar vigente. Este sentido funcional se encuentra en concordancia con la amplia misión de la enseñanza de las matemáticas en un contexto actual, el cual permite además considerar la construcción de la matemática más allá que una evolución axiomática a una evolución pragmática que confiere a las prácticas sociales un rol de acompañante y normativo de la construcción del conocimiento. Bajo esa premisa y teniendo en cuenta los objetivos de aprendizaje propuestos en el currículo colombiano para estudiantes de grado once en el área de matemáticas, se planteó una secuencia de situaciones de aprendizaje enmarcadas en un escenario de interés como lo es la cocina, en el cual a través de una metodología que busca el uso del razonamiento abductivo buscó más allá del trabajo en torno a una temática particular, un conjugado de acciones que sirvieran de base y sustento al desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional.

Las situaciones de aprendizaje que estructuraron la secuencia didáctica buscaron que el estudiante transitara en cuatro momentos: un momento exploratorio, donde obtenían y organizaban información; un momento procedimental en donde se establecen conjeturas a la luz de la manipulación de la información; un momento de consolidación donde se pusieron a prueba dichas conjeturas y finalmente un momento de autoevaluación del aprendizaje. Las situaciones fueron implementadas en un periodo de tres meses con 140 estudiantes del último grado de bachillerato en una institución pública ubicada en el municipio de Soacha en Cundinamarca-Colombia. La valoración de la implementación se llevó a cabo en cada uno de los momentos en los cuales los estudiantes daban sus percepciones del trabajo realizado, en particular en el momento de autoevaluación donde el ejercicio reflexivo en torno al quehacer no se centró únicamente en el quehacer de los estudiantes, sino en la evaluación de la propuesta didáctica.

Fundamento teórico

El pensamiento y lenguaje variacional (PyLVar) es una línea de investigación desarrollada al interior de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, su objetivo “es el estudio de las formas culturales de apropiación del cambio con fines predictivos”(Cantoral, Caballero y Moreno, p.216) objetivo que se constituye en el eje principal de cualquier curso de cálculo, en particular aquel que busque que los estudiantes construyan unas bases sólidas que les permitan significar y resignificar conocimientos. Bajo esta premisa y teniendo en cuenta los resultados de las diversas investigaciones en torno al pensamiento y lenguaje variacional se reconoce que el trabajo en torno a este pensamiento demanda de un continuo ejercicio reflexivo en torno a la predicción, así como el rico universo de formas gráficas (Cantoral y Farfán 1998; Cantoral et al., 2005), en las cuales el cambio se mide y se expresa.

Es así como el estudio de la variación bajo estas premisas demanda de un ejercicio en el cual se fomente la diversidad de argumentaciones y análisis de estas, un diseño de situaciones de aprendizaje que pongan en juego el saber a la luz de un ejercicio de construcción y verificación de hipótesis, sustentadas bajo un razonamiento abductivo. Este razonamiento implica darse al aprendizaje un estatus de producto emergente de una dialéctica de construcción social del conocimiento, que parte de lo factual, articula a lo procedimental, y se consolida en un nivel simbólico, una total evolución del saber que reconoce su origen y su significación a la luz de un desarrollo de prácticas complejas y estructuradas.

Es así como una propuesta fundamentada bajo estas premisas debe partir de intereses propios del contexto en búsqueda de una creación estructurada que demande un ejercicio reflexivo en torno a aspectos como: la resignificación progresiva, la racionalidad contextualizada, el relativismo socioepistemológico y la funcionalidad del conocimiento, los cuales son considerados como los principios de la Teoría Socioepistemológica (Cantoral, 2013)

Figura 1. *Principios de la Teoría Socioepistemológica para el diseño de Situaciones de Aprendizaje*

Fuente: elaboración propia

Metodología

La metodología empleada para la implementación de la propuesta tuvo dos fases: La metodología para el diseño de la propuesta y La metodología para la implementación de la propuesta.

La metodología para el diseño de la propuesta

El objetivo de la creación de las situaciones de aprendizaje consistió en el desarrollo de escenarios que permitieran cuestionar la matemática escolar, la cual conduce a transitar hacia un saber matemático escolar en contextos situacionales reales y hacia contextos de significancia. Se escogió el contexto de la gastronomía toda vez que uno de los objetivos como docente es lograr un reconocimiento e identidad cultural y esto se logra explorando diversos escenarios culturales como el de la gastronomía el cual además es un escenario cercano y de interés para muchos de los estudiantes.

A través de la propuesta se pretendió organizar el conocimiento a partir de un modelo de prácticas anidadas que parten del hacer (acciones), pasando por una organización de las acciones, hacer mediado a un saber hacer en contexto (prácticas), un hacer reflexivo y aceptado por una comunidad que perdura a través del tiempo y que dota de identidad a quien lo ejecuta (prácticas socialmente compartidas).

Figura 2. *Modelo de prácticas anidadas para el diseño de Situaciones de Aprendizaje*

Fuente: elaboración propia

Así cada una de las situaciones de aprendizaje estuvieron constituidas por 4 momentos inspirados en la propuesta del Marco Nacional para la mejora del Aprendizaje en Matemáticas (2018) implementado en Argentina bajo el marco Socioepistemológico.

Momento exploratorio

Las actividades orientadas en este momento buscaban que lo estudiantes a través de la exploración e interpretación de información organizaran, clasificaran y ordenaran información, argumentando su quehacer.

Momento procedimental

En este momento las tareas propuestas a los estudiantes se centraron en la construcción de argumentos a través de los cuales se estudien los datos organizados en momento exploratorio y se generen hipótesis sustentados a través de métodos y estrategias propias del hacer matemático.

Momento de consolidación

En este momento las tareas propuestas condujeron a los estudiantes a reafirmar o descartar las hipótesis construidas en el momento procedimental a través de una serie de situaciones, en las cuales incluso se propusieron ejercicios de contextos matemáticos para fortalecer los diversos procesos establecidos en los referentes curriculares colombianos como lo son: razonamiento, comunicación, resolución de problemas y ejercitación de procedimientos.

Momento de autoevaluación

En este momento se realizaron discusiones respecto a los hallazgos en la ejecución de las situaciones de aprendizaje, se llegaron a acuerdos, se evaluaron acciones frente a las situaciones y se realizó una reflexión en torno a la metodología de trabajo. Para ello se emplearon rúbricas de evaluación y diálogos no estructurados con los estudiantes.

La metodología para la implementación de la propuesta.

A continuación, se presenta dos ejemplos de las situaciones de aprendizaje propuesta a los estudiantes en el marco de la propuesta didáctica.
estos ejemplos buscaron el desarrollo del pensamiento variacional a la luz de tres tipos de relacionales funcionales.

Situación de aprendizaje 1. Relaciones constantes

Fase exploratoria

Lee con atención la siguiente receta:
Galletas de mantequilla
Ingredientes para 20 unidades:
325g de harina normal.
150g de mantequilla con textura de pomada (mantequilla a temperatura ambiente)
150g de azúcar
dos cucharadas de esencia de vainilla
Un huevo
Una pizca de sal
Nota: Sin importar la cantidad de galletas que hagas la cantidad de sal siempre será una pisca.

¿Cómo hacer galletas de mantequilla?

- Lo primero, ponemos la mantequilla a temperatura ambiente en un bol junto al azúcar y lo mezclamos todo con una varilla o con un tenedor.
- Cuando tengamos una masa homogénea, añadimos el huevo y las dos cucharadas de esencia de vainilla. Volvemos a mezclar todos los ingredientes hasta que nuevamente haya quedado una masa homogénea
- Ahora ponemos la harina y la pizca de sal. Aunque se trate de una elaboración dulce, la sal potenciará el sabor y dejará unas galletas más esponjosas. Mezclamos e integramos todos los ingredientes con la mano. Nos quedará una bola de masa más bien sólida, aunque se pegará un poquito a las manos (esto es bueno)
- Tapamos la masa y la metemos en el frigorífico. Lo bueno de esta receta, es que no es necesario amasar nada. La dejamos en el frigorífico entre una y dos horas. La idea es que la masa se enfríe y se compacte, aunque no demasiado o costará mucho dar la forma de galleta después.
- Pasado el tiempo, colocamos la masa sobre la encimera y con un rodillo, o una botella de cristal si no tienes rodillo, la estiramos sobre la misma encimera. Debe quedar con un dedo de grosor aproximadamente. Hecho esto, hacemos las galletas con los moldes que hayamos elegido. O con un vasito de cristal. Quedarán igual de buenas. Recuerdo que así fue como hice mis primeras galletas de mantequilla caseras (somos tres en casa. No sobró ni una)
- Cuando no quede más espacio en la masa para hacer más galletas, tan simple como recogerla toda y volver a estirarla con el rodillo o la botella de cristal y vuelta a empezar. ¡No quiero ver que tires ni un solo gramo de la masa a la basura!
- Finalmente, cuando estén todas las galletas hechas, las colocamos sobre papel de horno, encima de la misma placa de hornear, con una pequeña separación entre ellas ya que, aunque será muy poco, crecerán algo, y las metemos al horno previamente calentado a 180ºC, arriba y abajo. Mételas en una rendija más bien cercana a la resistencia de arriba del horno, que a la de abajo. Y vigílalas constantemente porque en 10 minutos o menos estarán cocinadas y es muy fácil que se quemen.
- Y ya tendremos nuestras galletas de mantequilla caseras. Te prometo que, si las haces, ¡no sobrará ni una! Estas galletas duran dos o tres días una vez hechas, antes de endurecerse.

Responde las siguientes preguntas

- Afirman los expertos que estos son los ingredientes fundamentales para elaborar unas deliciosas galletas, averigua con un experto qué aporta cada ingrediente y la razón por la cual cada ingrediente es fundamental.
- Elabora la receta en una tabla escribiendo los aportes calóricos de cada porción de ingrediente ¿Las galletas son un alimento saludable? ¿Por qué?
- Elabora las galletas en casas y luego haz un video donde expliques paso a paso cómo hiciste las galletas. En el video debes hacer uso de lenguaje matemático y reportar en tablas o diagramas las relaciones que encuentre en la preparación de las galletas.

Fase procedimental

- Haz cinco tablas en donde relaciones:
  - harina vs sal
  - azúcar vs sal
  - huevos vs sal
  - esencia de vainilla vs sal
- Describe con tus palabras el cómo se comportan las variables de la tabla y en qué se diferencian con las de la elaboración de la limonada realizada en clases pasadas.

Fase de consolidación

- Representa gráficamente las relaciones que se establecen entre los ingredientes de la fase procedimental ¿qué observas?
- ¿Cómo es la gráfica?
- ¿Qué características tienen las relaciones que se establecen en la gráfica?
- ¿En qué otras situaciones de la vida real se logran evidenciar ese tipo de relaciones?
- ¿Cómo representarías mediante lenguaje matemático esta relación?

Fase de Autoevaluación

- Discute con tu grupo cada uno de los puntos propuestos.
- ¿Cuáles fueron los puntos que más te gustaron de la actividad?
- ¿Qué aprendizaje te dejó la actividad?
- Si tuvieras que explicar a alguien lo aprendido cómo lo sintetizarías

Situación de aprendizaje 2. Relaciones Valor Absoluto y parte entera

Fase exploratoria

Un nuevo proyecto de cocina llevado a cabo en el municipio se denomina "Dime cuánto comes y te diré cuánto pagas". Consiste en no pagar por producto consumido sino pagar de acuerdo a un rango de consumo. En la carta del restaurante aparece la siguiente explicación.

> Nuestro restaurante ofrece los mejores productos de la gastronomía del municipio: Garullas, Almojábanas, Buñuelos, Masato, Avena.
> Los productos de panadería vienen todos del mismo tamaño y las bebidas vienen en vasos plásticos. En nuestro restaurante vale la pena comer mucho. No puedes pedir más de dos productos al tiempo y no puedes pedir para llevar.
> Si comes entre uno y cuatro productos pagas 5000
> Si comes entre cinco y nueve productos pagas 15000
> Si comes entre diez y catorce productos pagas 20000
> Si comes entre catorce y dieciocho productos pagas 25000

- ¿Qué opinas de esta idea de negocio?

- ¿Estás de acuerdo con la propuesta?
- ¿Consideras que es rentable montar un negocio con esas características? ¿Por qué?
- De los productos que ofrece el restaurante cuáles con realmente autóctonos de Soacha. Investiga.
- Averigua la receta para hacer una almojábana.
- Ve al lugar de ventas de almojábanas y pregúntale a esa persona qué opina de esta propuesta de negocio. Pregúntale hace cuánto está en el parque y por qué vende ese producto. Pregúntale sobre momentos importantes que su familia ha vivido desde que se dedican a la venta de ese producto. Construye una línea de tiempo de los eventos de la vida de la persona que entrevistaste en el parque.

Fase procedimental

- Haz una representación y tabular y una gráfica de la situación ¿Qué observas?
- ¿Cómo es la gráfica?
- ¿Qué representa cada par ordenado en la gráfica?
- ¿Qué conclusiones puedes obtener de este tipo de relación?

Fase de consolidación

- ¿Qué características tienen las relaciones que se establecen en la gráfica?
- ¿Existen otras situaciones que conozcas donde las relaciones entre variables se asemejen a la presentada?
- Describe con tus palabras este tipo de relación
- Has una descripción haciendo uso de lenguaje matemático de esta relación.
- Realiza los ejercicios propuestos por la docente en el tablero

Fase de autoevaluación

- Discute con tu grupo cada uno de los puntos propuestos.
- ¿Cuáles fueron los puntos que más te gustaron de la actividad?
- ¿Qué aprendizaje te dejó la actividad?
- Si tuvieras que explicar a alguien lo aprendido cómo lo sintetizarías

Resultados e implicaciones

La implementación de la propuesta de aula condujo a un análisis de su implementación a la luz de los principios que la sustentan, los cuales se sintetizan en la siguiente malla de análisis.

Tabla 1. *Tabla de análisis de la ejecución de las fases*

Fase	Análisis
Fase exploratoria (Hacer)	Los estudiantes desarrollan las actividades propuestas basados en las experiencias previas, conocimientos respecto a aprendizajes construidos en otros escenarios y momentos. Al respecto los niños afirman: *“Yo fui donde venden, pero Andrea en cambio saco toda la información de internet”* *“Profe, yo organice por colores que queda más bonito”* (Racionalidad contextualizada)

Fase	Análisis
	"Yo no creo que eso sea bueno para mi negocio, yo le pregunte a mi abuela que vende almojábanas y dijo que así nadie le compraría" (Racionalidad contextualizada)
Fase procedimental (Saber hacer mediado)	En esta fase los estudiantes hacen uso de recursos tecnológicos para complementar sus investigaciones y argumentar sus propuestas iniciales. Las conjeturas que se generan van acompañadas de argumentos que otorgan las herramientas de tipo racional y físico. **Figura 3.** *Fotografías del trabajo realizado en casa por los estudiantes*  Los niños junto con su familia siguieron al pie e la letra la elaboración de las recetas. Ellos reportaron que en el hacer se puso en juego tanto lo que decía la receta como aquello que ellos cocina y sabían eran útil para el proceso de la elaboración. Aquí se puso en juego tanto la racionalidad contextualizada como el relativismo epistemológico, pues la construcción del conocimiento estuvo mediada por el contexto en el cual se llevó a cabo la experiencia. Al respecto los niños afirmaron: *"Mi mamá me dijo que igual que la sal uno siempre debe echarle canela una pisca para que la dulce coja mejor"* (Racionalidad contextualizada-Relativismo epistemológico) *"Para medir usamos un pocillo porque eso es como 100 gramos"* (Funcionalidad de la matemática) *"Entonces la relación que se da con la sal se parece al de la canela, que ella dijo"* (Respecto a la variación constante) *"Yo veo que en esta relación hay algo que cambia y algo que se mantiene igual, mire"* (Respecto a la variación constante) *"Esa relación es como rara, como que se mantiene y al tiempo cambia"* (Respecto a la variación parte entera)

Fase	Análisis
Fase de consolidación (Saber hacer, mediado y aceptado)	En este ejercicio se destaca cómo los estudiantes exploraron en otros escenarios de cocina las relaciones vistas y dieron su informe:

Figura 4. *Trabajo sobre la elaboración de otro producto elaborado por una de las estudiantes*

Los estudiantes plasmaron relaciones en tablas y gráficos antes de hacer generalizaciones:

Fase	Análisis

Figura 5. *Tabla presentada en uno de los trabajos de los estudiantes*

	12p	18p	24p	30p	36p	42p
Crema de Leche	2lb(1000g)	3lb(1500g)	4lb(2000g)	5lb(2500g)	6lg(3000g)	7lb(3500g)
Gelatina sin Sabor	100g	150g	200g	250g	300g	350g
Frutiño de Maracuyá	2	3	4	5	6	7
Maracuyá	2	3	4	5	6	7
Galletas Ducales	4 tacos	6 tacos	8 tacos	10 tacos	12 tacos	14 tacos
Leche	1000ml	1500ml	2000ml	2500ml	3000ml	3500ml
Molde	2	3	4	5	6	7
Valor	$31.300	$46.950	$62.600	$78.250	$93.900	$109.550

Figura 6. *Gráfico presentado por uno de los estudiantes en donde relaciona ingredientes de una receta*

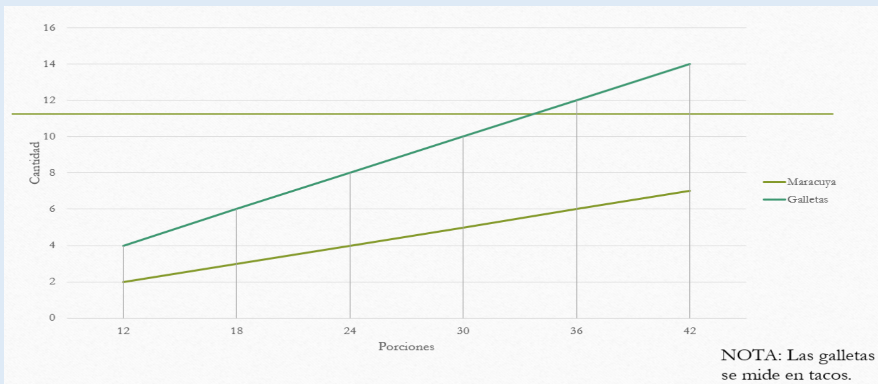
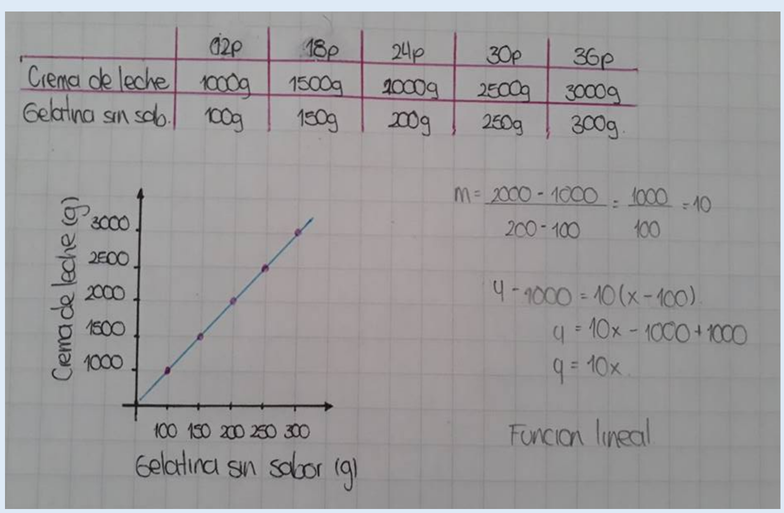
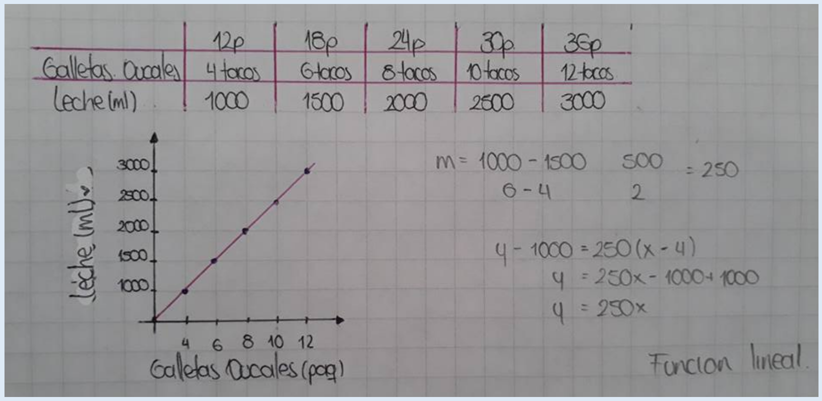


Figura 7. *Gráficos presentados por estudiantes para establecer relaciones entre ingredientes.*



Fase	Análisis
	
Fase de Autoevaluación	Los estudiantes mencionan entre su proceso de autoevaluación un gran aprendizaje diferente y contextualizado (Funcionalidad de las matemáticas). Luego de estos los niños interpretaron con mayor facilidad las expresiones netamente matemáticas que aparecían en sus libros, manifestaron una mayor comprensión del ejercicio y se mostraron satisfechos con los aprendizajes obtenidos. A partir de las discusiones su lenguaje fue más específico y permitió una mayor y mejor comunicación.

Fuente: elaboración propia

Conclusiones

En este artículo mostró la estructura de un curso de cálculo para estudiantes de grado once de una escuela pública de Colombia, cuya intención fue la de favorecer el desarrollo el pensamiento y lenguaje variacional. Para la elaboración de la propuesta se siguió la guía teórica de la Socioepistemología al poner en uso el conocimiento escolar habitual en un contexto de interés: la cocina. Los argumentos que los estudiantes construyeron sobre las relaciones funcionales resultaron elementos de naturaleza transversal que permitieron dar un sentido diferente, un sentido transversal a la matemática que se trabaja en la escuela.

Tal y como se reporta en el Fundamento Teórico de la propuesta, para la Socioepistemología la significación de los objetos matemáticos se da en relación con el desarrollo de las prácticas que le dieron origen al conocimiento, de ahí que la evolución pragmática se ponga en evidencia a la luz de una seria de acciones que evolucionan que parte desde una acción intuitiva hasta llegar a una práctica socialmente compartida en la cual el conocimiento se transforma en un saber.

En este sentido, el ejercicio llevado a cabo resulta relevante toda vez que abandona un quehacer matemático escolar centrado en desarrollo de algoritmos y procesos de mecanización aislados de contextos reales El trabajo llevado a cabo por los estudiantes permitió una construcción consciente, argumentada y lógica de cada uno d ellos proceso llevados a cabo lo cual implicó una relación diferente y más sentida con las matemáticas.

Referencias bibliográficas

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Barcelona, España: Gedisa

Cantoral, R. Caballero, M. y Moreno, G. (2016) El desarrollo de argumentos visuales. Perfiles Educativos. vol. XXXVIII, número especial. IISUE-UNAM.México

Cantoral, R. y Farfán, R. (1998), "Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis", Epsilón, núm. 42, pp. 353-369

Cantoral, R. y Farfán, R. (1998), "Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis", Epsilón, núm. 42, pp. 353-369

Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología Secretaría de Innovación y Calidad Educativa (2018). Marco Nacional para la mejora del Aprendizaje en Matemáticas. Argentina.

REFLEXIONES SOBRE LA ACCIÓN PEDAGÓGICA PARA EL PROGRAMA ETNOMATEMÁTICAS

REFLECTIONS ON THE PEDAGOGICAL ACTION FOR THE ETHNOMATEMATICS PROGRAM

Milton Rosa, Daniel Clark Orey
Universidad Federal de Ouro Preto. (Brasil)
milton.rosa@ufop.edu.br, oreyd@ufop.edu.br

Resumen
Las Matemáticas son constantemente presentadas como una asignatura universal, sin un significado cultural, que posee un lenguaje propio. Las diferencias culturales y lingüísticas asociadas con las diferentes notaciones y procedimientos para la resolución de problemas, enfrentados por alumnos migrantes e inmigrantes, en las salas de clase, es una cuestión educacional que precisa ser estudiada y investigada por medio de las etnomatemáticas .Si estas diferencias no son presentadas y discutidas, serán adicionadas a las dificultades que los alumnos encuentran, en las salas de clase, cuando se mudan a otro país, a otro estado, a otra ciudad, o a otro barrio. Así, en este artículo reflexionaremos sobre una acción pedagógica para el programa de etnomatemática en las escuelas.

Palabras clave: acción pedagógica, etnomatemáticas, programa

Abstract
Mathematics is constantly presented as a universal subject, without a cultural meaning, which has its own language. The cultural and linguistic differences associated with the different notations and procedures for problem solving, faced by migrant and immigrant students in classrooms, are an educational matter that needs to be studied and investigated through ethnomathematics. If these differences are not presented and discussed, they will be added to the difficulties that students face in the classrooms when they move to another country, to another state, to another town, or to another neighborhood. Thus, in this article, we will reflect on a pedagogical action for the ethno-mathematics program in schools.

Keywords: pedagogical action, Ethno-mathematics, program

Consideraciones iniciales

Las Matemáticas son constantemente presentadas como una asignatura universal, sin un significado cultural, que posee un lenguaje propio. De acuerdo con Rosa y Orey (2017), las diferencias culturales y lingüísticas asociadas con las diferentes notaciones y procedimientos para la resolución de problemas matemáticos, enfrentados por alumnos migrantes e inmigrantes, en las salas de clase, es una cuestión educacional que precisa ser estudiada e investigada. Si estas diferencias no son presentadas y discutidas, serán adicionadas a las dificultades que los alumnos encuentran, en las salas de clase, cuando se mudan a otro país, a otro estado, a otra ciudad, o incluso a otro barrio. Sin embargo, la cultura puede interferir en el aprendizaje de conceptos matemáticos, pues las matemáticas fueron creadas y desarrolladas por una determinada cultura para satisfacer sus necesidades educacionales. La interrelación entre la cultura nativa y las ideas matemáticas pueden ser mutuamente reforzadas por la utilización de actividades matemáticas culturalmente sensibles (Rosa, 2010) que ayudan a los alumnos a ver la relevancia de las matemáticas y auxilian a los profesores a utilizar esta conexión para enseñar más matemáticas.

Los profesores y alumnos deben valorizar la diversidad presente en las salas de clase y entender la influencia que la cultura ejerce sobre las matemáticas y, cómo esta influencia resulta en diferentes modos por los cuales las matemáticas son utilizadas y comunicadas. Así, este artículo teórico busca esclarecer las características etnomatemáticas relacionados con la acción pedagógica de las etnomatemáticas en las escuelas. Para Rosa, Orey y Gavarrete (2017), la acción pedagógica del programa etnomatemáticas enriquece los tópicos curriculares para los estudiantes porque muestran como las aplicaciones matemáticas pueden encontrarse, no sólo en muchas áreas de la ciencia, los negocios y la vida cotidiana, sino también muestran que podemos ver las matemáticas en las prácticas culturales en todo el mundo. Consecuentemente, esta acción pedagógica busca promover el desarrollo de aprendizajes matemáticos propios dentro del contexto sociocultural de grupo de los estudiantes.

Programa Etnomatemáticas

Las etnomatemáticas pueden ser consideradas como el estudio de las ideas y prácticas matemáticas, que considera el contexto cultural en el cual las matemáticas emergen. El término etnomatemáticas fue utilizado por D'Ambrosio (1985) para expresar la relación entre las matemáticas y la cultura. Las etnomatemáticas son definidas como las matemáticas que son practicadas por los miembros de grupos culturales identificables como, por ejemplo, sociedades indígenas, grupos de trabajadores, clases profesionales y grupos de niños de una determinada edad. El programa etnomatemáticas propone que los profesores y educadores contextualicen los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, relacionando los contenidos matemáticos a las experiencias socioculturales de sus estudiantes. Para Rosa (2010), la inclusión de los aspectos culturales en un programa de matemáticas tiene a largo plazo beneficios para los logros matemáticos de los alumnos, ya que estos aspectos contribuyen a la percepción de que las matemáticas son parte de nuestra vida cotidiana y permite profundizar la comprensión de su naturaleza mediante la mejora de la capacidad de los alumnos para hacer conexiones significativas.

Desde esta perspectiva, Rosa (2010) afirma que existen muchos investigadores en etnomatemáticas que comenzaron su experiencia como profesores de matemáticas preocupados por encontrar ejemplos en su entorno para usarlos en sus clases; ya que estos ejemplos que involucran conocimientos etnomatemáticos describen nuevas formas de ver la matemática y promueven una mejor comprensión de los conceptos, los procedimientos y los usos de los contenidos curriculares. Uno de los propósitos de esta acción pedagógica es ofrecer algunas sugerencias para aplicar esta visión en las prácticas pedagógicas desarrolladas en la enseñanza y aprendizaje de la matemática en la modalidad a distancia; así como también presentar un abordaje metodológico basado en la perspectiva de las etnomatemáticas, que pueda implicarse en la formación de profesores de matemática para la modalidad de enseñanza y aprendizaje sociocultural (Rosa, Orey, y Gavarrete, 2017).

El programa etnomatemáticas ofrece una visión más amplia de las matemáticas, que abarca las ideas, nociones, procedimientos, procesos, métodos y prácticas arraigadas en entornos políticos, sociales y culturales distintos.

Además, mediante la reflexión sobre estos entornos de las etnomatemáticas, otro aspecto importante de este programa es la posibilidad de que el desarrollo de enfoques innovadores para una sociedad dinámica y *globalizada*. Es importante destacar que a globalización es un abordaje dialógico que estudia la aceleración e intensificación de la interacción e integración entre los miembros de grupos culturales distintos (Rosa y Orey, 2017). Estos aspectos conducen a una mayor evidencia de los procesos cognitivos, capacidades de aprendizaje y actitudes que los procesos de aprendizaje directo que ocurre en las aulas.

Para D'Ambrosio (1990), el programa etnomatemáticas pude ser considerado como la manera por la cual los miembros de grupos culturales específicos (*etno*), desarrollan, a través de la historia, las técnicas y las ideas (*ticas*) para aprender a trabajar con medidas, cálculos, inferencias, comparaciones, clasificaciones, y modos diferentes de modelar el ambiente social y natural en el cual están insertados, para explicar, entender, y comprender los fenómenos que allí ocurren (*matema*). En el caso de la Educación Matemática, D'Ambrosio (2001) afirma que la propuesta de las etnomatemáticas no significa ignorar ni rechazar las matemáticas académicas simbolizadas por Pitágoras, pues no se trata de ignorar ni rechazar el conocimiento y el comportamiento modernos, sino perfeccionarlos para incorporar los valores de humanidad, sintetizados en una ética de respeto, solidaridad y cooperación.

El programa etnomatemáticas privilegia el raciocinio cualitativo y se encaja perfectamente en una concepción multicultural y holística de la educación y raramente se presenta desvinculado de otras manifestaciones culturales como el arte y la religión. Por ejemplo, un enfoque etnomatemático está siempre ligado a una cuestión mayor, de naturaleza ambiental o de producción (Rosa y Orey, 2015). En ese contexto, para Rosa y Orey (2017), este programa es un campo de investigación que puede ser descrito como el estudio de las ideas, procedimientos y prácticas matemáticas que son encontradas en contextos culturales específicos. Así, la esencia de este programa es tener conciencia de que existen diferentes maneras de hacer matemáticas, considerando la apropiación del conocimiento matemático académico por diferentes sectores de la sociedad y los diversos modos por los cuales los miembros de grupos culturales distintos negocian sus prácticas matemáticas.

Entonces, existe la necesidad de que los alumnos tengan contacto con los aspectos culturales de las matemáticas por medio de actividades didáctico-pedagógicas que den condiciones para que conozcan las contribuciones de otras culturas para el desarrollo de las matemáticas porque este es uno de los principales objetivos de las etnomatemáticas. Así, este programa surge para confrontar los tabús de que las matemáticas son un campo de estudio aculturado y universal. El programa etnomatemáticas fue lanzado con el objetivo de buscar entender el *saber* y el *hacer* matemático en el transcurrir de la historia de la humanidad (Rosa y Orey, 2015). Ubiratan D'Ambrosio es considerado como el *Padre* del programa etnomatemáticas (Rosa, 2010).

Este programa propone una epistemología innovadora que busca entender la aventura de la especie humana en la búsqueda de la generación, adquisición, acumulo, transmisión y difusión del conocimiento. Este programa se trata de una asociación de conceptos que están relacionados con los aspectos culturales de las matemáticas y con los aspectos políticos y pedagógicos de carácter progresista fundamentados en los ideales de Paulo Freire (1970). En ese sentido, Rosa y Orey (2017) argumentan que las salas de clase pueden ser vistas como una posibilidad de estudio inspirado en procedimientos y prácticas matemáticas que son desarrolladas en una perspectiva etnomatemática para la acción pedagógica de este programa.

Consecuentemente, es importante reconocer en las etnomatemáticas un programa de investigación que camina juntamente con la práctica escolar (D'Ambrosio, 1990) y que investiga sus influencias en las salas de clase.

Influencias Etnomatemáticas en Salas de Clase

De acuerdo con Rosa y Orey (2017), las influencias etnomatemáticas en salas de clase están relacionadas con cuestiones relacionadas con el lenguaje matemático, contextos culturales, características pedagógicas, visiones diferenciadas sobre los tópicos matemáticos, métodos de trabajo en sala de clase, relaciones que influencian la enseñanza y el aprendizaje en matemáticas y evaluaciones holísticas.

Cuestiones Relacionadas con el Lenguaje Matemático

Estas cuestiones están relacionadas con los diferentes vocabularios (académico y cotidiano) usados para las matemáticas. Por ejemplo, en español y en portugués el significado del volumen de un prisma es diferente del significado del volumen de un radio. En inglés una table es un mueble y una table es también una representación matemática para los datos colectados en una investigación. Es necesario también considerar que algunas culturas no poseen un lenguaje escrito y que diferentes algoritmos son utilizados para la resolución de problemas cotidianos.

Contextos Culturales

Las actividades matemáticas deben ser presentadas en contextos interdisciplinarios y deben conectar el contexto actual con el contexto histórico de los miembros de grupos culturales distintos.

Características Pedagógicas

Es importante que la acción pedagógica de los docentes incluya las características pedagógicas del programa etnomatemáticas como, por ejemplo, la: a) experimentación, b) investigación, c) simulación, d) problematización, e) resolución de problema, f) modelación, h) procedimientos y conceptos diversos, i) raciocinio lógico y j) aplicaciones de las matemáticas como, por ejemplo, las académicas, cotidianas y profesionales.

Visiones Diferenciadas sobre los Tópicos Matemáticos

También es necesario que la acción pedagógica de los docentes incluya las visiones diferenciadas de los tópicos matemáticos del programa etnomatemáticas como, por ejemplo, la: a) historicidad, b) evolución, c) contribuciones culturales, d) aplicaciones de diferentes tópicos en diversas áreas del conocimiento y e) conexiones interdisciplinarias.

Métodos de Trabajo en Sala de Clase

Para el desarrollo de la acción pedagógica del programa etnomatemáticas, es importante que la práctica docente también incluya métodos de trabajo diferenciados en las salas de clase como, por ejemplo, a) el trabajo cooperativo y colaborativo, b) la interdisciplinaridad, c) los temas transversales, d) los proyectos, e) los portafolios y f) los recursos tecnológicos como las ccalculadoras, las computadoras, la internet y los *smartphones*.

Relaciones que Influyen la Enseñanza-aprendizaje en Matemáticas

La comprensión de las relaciones que influyen los procesos de enseñanza y aprendizaje en matemáticas también es importante para el desarrollo de la acción pedagógica del programa etnomatemáticas. Estas relaciones incluyen: a) profesores/alumnos (profesores como orientadores, facilitadores, coordinadores, mediadores y investigadores y alumnos como participantes activos en este proceso y b) alumnos/alumnos (alumnos como colaboradores y investigadores analíticos, críticos y reflexivos.

Evaluaciones Holísticas

En la acción pedagógica del programa etnomatemáticas, las evaluaciones holísticas deben ser continuas y realizadas durante todo el proceso de enseñanza y aprendizaje por medio de: a) entrevistas, b) observaciones, c) informes, d) auto-evaluación, e) discusiones en clase, f) portfolios, g) presentaciones orales, h) demostraciones, i) exhibiciones,

j) simulaciones, k) actividades exploratorias y l) evaluaciones de desempeño. Es importante observar que estas influencias etnomatemáticas en las aulas posibilitan el desarrollo de los procedimientos y de las prácticas matemáticas que buscan comprender el *saber/ hacer* matemático de los alumnos a través de esta acción pedagógica.

Cinco Acciones Pedagógicas Desarrolladas en la Perspectiva Etnomatemática

De acuerdo con las cinco dimensiones de la educación multicultural identificadas por Banks (1994), es posible delinear cinco acciones pedagógicas para el Programa Etnomatemáticas: a) integrar el contenido matemático, b) construcción del conocimiento matemático, c) reducir el prejuicio, d) utilizar una pedagogía igualitaria y e) dinamizar y perfeccionar la cultura escolar. Estas acciones tienen el objetivo de capacitar a los alumnos por medio de actividades curriculares culturalmente relevantes.

Integrar el Contenido Matemático

Esta acción pedagógica identifica las diversas contribuciones culturales para el desarrollo de las matemáticas porque utiliza ejemplos, datos, informaciones, ideas, procedimientos y prácticas matemáticas, que se encuentran en el contexto sociocultural de los miembros de grupos culturales distintos para ilustrar conceptos, principios, generalizaciones y teorías, que están relacionados con un determinado contenido matemático. Por ejemplo, esta acción emplea diferentes métodos para probar el Teorema de Pitágoras como los métodos utilizados en Babilonia, China e India.

Construcción del Conocimiento Matemático

Esta acción pedagógica engloba las estrategias, los procedimientos y los métodos que son utilizados por los miembros de grupos culturales distintos para presentar los contenidos matemáticos y su conexión con los fenómenos sociales, culturales, económicos, ambientales y políticos, que están relacionados con las comunidades locales. Esta acción también auxilia a los alumnos a entender como el conocimiento matemático es construido y adquirido y como este conocimiento es influenciado por diversos factores como las etnias, los géneros y las clases sociales.

Reducir el Prejuicio

Esta acción pedagógica estimula actitudes positivas en relación a los miembros de grupos culturales distintos por medio del estudio de los aspectos sociales y culturales de las matemáticas como, por ejemplo, el desarrollo de: a) proyectos inmiscuyendo la estadística que revelan los mitos que pueden disminuir los efectos de los estereotipos que afectan determinados grupos culturales, b) procesos de enseñanza y aprendizajes cooperativo y colaborativo para los alumnos provenientes de diversas culturas y c) estrategias y metodologías de enseñanza específicas para los diferentes estilos de aprendizaje de los alumnos.

Utilizar una Pedagogía Igualitaria

Esta acción pedagógica se preocupa con la inter-relación entre los profesores y los alumnos. En ese contexto, los profesores:

- Preparan actividades en las cuales los alumnos comparan y analizan críticamente los problemas enfrentados por las comunidades locales con aquellos enfrentados nacional y globalmente.
- Creen que todos los alumnos pueden aprender matemáticas
- Son mediadores y facilitadores del aprendizaje.
- Entienden y aceptan los diferentes estilos de aprendizaje.
- Estimulan a los alumnos a aprender colaborativa y cooperativamente:

- Esperan que los alumnos se enseñen unos a otros.
- Esperan que los alumnos sean responsables unos con los otros.

Sin embargo, para que estas acciones pedagógicas se disparen en las aulas se requiere una relación entre profesores y alumnos que sea humana, igualitaria y se extienda de la sala de clase a la comunidad y que el respeto mútuo entre los miembros de diferentes grupos culturales sea desarrollado en las salas de clase.

Dinamizar y Perfeccionar la Cultura Escolar

Esta acción pedagógica requiere la elaboración de un plan para la implementación de la educación multicultural, en la perspectiva etnomatemáticas, que está relacionada con la cultura escolar y con la estructura social, que están relacionados con: a) el clima social escolar, b) las prácticas de agrupamientos, c) los métodos de evaluación formativos, d) las actividades extracurriculares, d) las aspiraciones de los cuerpos docente y administrativo y e) las respuestas positivas a la diversidad cultural.

En ese contexto, estas acciones posibilitan el desarrollo de caminos que pueden ayudar a la implementación de una acción pedagógica del programa etnomatemáticas.

Caminando para la Acción Pedagógica del Programa Etnomatemáticas

Es importante reconocer en las etnomatemáticas un programa de investigación que camina juntamente con la práctica escolar a través de su acción pedagógica. Una reinterpretación del currículo matemático es esencial para conducir adecuadamente el componente pedagógico de este programa para su implementación en las salas de clase (D'Ambrosio, 1990). El centro de este programa da énfasis al desarrollo de la habilidad y a la aptitud de los alumnos por medio del estudio de ideas, procedimientos y prácticas matemáticas que son extraídas del propio contexto cultural. Para Rosa, Orey y Gavarrete (2017), la aplicación de esta acción pedagógica brinda la oportunidad de examinar los sistemas de conocimientos matemáticos locales y dar una idea de las formas de las matemáticas utilizadas en diversos contextos y grupos culturales diferenciados. Este enfoque pedagógico que conecta esta diversidad de comprensión de las matemáticas está mejor representado por un proceso de traducción y elaboración de los problemas y preguntas tomados de los fenómenos diarios.

Este programa también enfatiza la importancia de la comunidad para la escuela buscando conectar las matemáticas escolares con el contexto cultural de la comunidad (Rosa y Orey, 2006). Para Rosa (2010), es necesaria la utilización del currículo escolar para defender y divulgar los saberes populares de las comunidades que se relacionan en el contexto. Esta perspectiva providencia el equilibrio necesario al currículo escolar, pues al insertar estos componentes en el currículo matemático, concebimos las etnomatemáticas como un programa que está basado en un paradigma que visa la humanización de las matemáticas por medio de un abordaje filosófico y contextualizado del currículo. El trabajo pedagógico así direccionado permite un análisis más amplio del contexto escolar, pues las prácticas pedagógicas transcienden el espacio físico y pasan a acoger los *saberes* y *haceres* presentes en todo contexto sociocultural de los alumnos.

La propuesta para la acción pedagógica del programa etnomatemáticas es hacer de las matemáticas algo vivo, que trabaja con situaciones reales, en el tiempo y en el espacio por medio de análisis, cuestionamientos y críticas sobre los fenómenos presentes en nuestro cotidiano (D'Ambrosio, 2001) porque es en la propia comunidad que la escuela, en su trabajo pedagógico, puede encontrar el contenido de los elementos didácticos que son necesarios para el desarrollo del currículo matemático (Damázio, 2004). Así, las etnomatemáticas crean un puente entre la matemática académica y las ideas, procedimientos y prácticas que son elaboradas por miembros pertenecientes a diferentes grupos culturales (Rosa, 2010). En este contexto, la perspectiva más importante del Programa Etnomatemáticas es alertar a los investigadores, educadores y profesores sobre cuales aspectos culturales oriundos de la comunidad pueden ser considerados y trabajados en la sala de clase (Rosa y Orey, 2007).

Entonces, para delinear un camino para la acción pedagógica del programa etnomatemáticas, existe la necesidad de realizar un trabajo de investigación de campo (etnográfico) para que podamos entender cuáles ideas, procedimientos o prácticas matemáticas, presentes en la comunidad, pueden ser considerados como objetos de estudios pedagógicos, bien como determinar cuál propuesta educacional debe ser considerada para la elaboración de esta acción pedagógica. Delante de estas pretensiones, creemos que, para la acción pedagógica del programa etnomatemáticas, los abordajes que delinearán esta acción pedagógica son aquellos propuestos por Eglash (2002), principalmente los que están relacionados con los sistemas de conocimiento que están profundamente ligados al cotidiano de cada grupo social y que pueden ser *matematizados* y traducidos al lenguaje de las matemáticas académicas.

Matematización en las Culturas

En nuestro entendimiento, el proceso de matematización de determinadas ideas, procedimientos y prácticas matemáticas presentes en el cotidiano de los miembros de diferentes grupos culturales significa trabajar con las etnomatemáticas (Rosa y Orey, 2010). En esta línea de investigación, existe la necesidad de destacar el proceso del etnomodelación por medio de ejemplos de la utilización de *técnicas matematizadoras* desarrolladas por los miembros de grupos culturales distintos y su encuentro natural con las etnomatemáticas. Consecuentemente, la etnomodelación se desarrolla por medio de técnicas matematizadoras usadas por los miembros de grupos culturales distintos.

En este contexto, un grupo de alumnos participando en un curso de especialización, buscaron comprender, entender, y saber cuáles eran las *matemáticas* utilizadas por el Señor Joaquim, en Ijuí, en Rio Grande do Sul, en Brasil, que producía vinos y construía sus propios toneles, utilizando ideas, procedimientos y prácticas matemáticas, que fueron transmitidas por sus antepasados (Bassanezi, 2002). En otras investigaciones, Ríos (2000) también buscó entender y comprender el proceso mental de idealización de *ponchos* (vestimenta utilizada como abrigo o sobretodo) y *aguayos* (vestimenta utilizada como mantilla) que es confeccionado por las campesinas bolivianas. Este estudio describió las prácticas matematizadoras que son utilizadas en la confección de estos tipos de vestimentas y, observó que, durante este trabajo, las campesinas están constantemente evaluando y analizando los resultados, alterándolos, en caso de que el modelo obtenido no esté de acuerdo con las representaciones mentales que fueron previamente concebidas.

Similarmente, Knijnik (2004) también utiliza un abordaje etnomatemático para matematizar el conocimiento de los trabajadores del *Movimiento Sin Tierra*, para evaluar áreas de tierras y calcular el volumen de troncos de árboles. En este proceso, denominado de cubación, esta investigadora elaboró una traducción de este conocimiento para el lenguaje matemático demostrando el valor de ese conocimiento y su utilización para la práctica pedagógica. En esta misma línea de estudio, Gerdes (1997) matematizó los dibujos de arena, denominados Sona, que son elaborados por los nativos de Angola y Zambia, legitimando y valorando el reconocimiento de esta práctica cultural, traduciendo estos conocimientos para el currículo escolar con la utilización de la matemática académica.

Estos estudios revelan que la matematización de la realidad, elaborada por miembros pertenecientes a determinados grupos culturales es vista como siendo representaciones de la propia realidad que son generadas, vía inferencias, con la utilización de representaciones mentales. Estas investigaciones también demuestran que la propuesta etnomatemática puede ser interpretada como una metodología que permite reconocer y presentar las matemáticas presentes en el día a día de los alumnos en situaciones didácticas motivadoras por medio de la etnomodelación.

Etnomodelación

Partiendo del principio de que la matematización es una de las etapas más importantes de la metodología de la modelación matemática, pues en esta etapa sucede la traducción de la situación-problema para el lenguaje matemático, entendemos que la modelación es una de las posibles propuestas para iniciar la acción pedagógica del programa etnomatemáticas. En este sentido, la utilización de las etnomatemáticas que están presentes en el cotidiano de los miembros de los grupos culturales tiene por objetivo la ampliación y el perfeccionamiento de su conocimiento matemático, pues visa el fortalecimiento de la identidad cultural de los individuos, como seres autónomos y capaces (Rosa y Orey, 2010). Así, las prácticas matemáticas se refieren a las relaciones numéricas que se pueden encontrar en la medición, clasificación, cálculo, medición, juegos, adivinación, la navegación, la astronomía, la modelación y una amplia variedad de otros procedimientos matemáticos utilizados en la producción de artefactos culturales. Este contexto permite el desarrollo de una definición de etnomodelación como la traducción de las ideas, los procedimientos y las prácticas matemáticas que se encuentran en las actividades cotidianas a las matemáticas y viceversa. El prefijo etno se refiere al conocimiento matemático específico desarrollado por los miembros de culturas distintas.

Por lo tanto, es necesario comenzar con el contexto social, la realidad y los intereses de los estudiantes y no mediante la aplicación de un conjunto de valores externos que son usados en las escuelas. El aspecto principal del enfoque etnomodelación no es sólo para resolver los problemas, ni para facilitar la comprensión de los sistemas matemáticos alternativos, sino también para que los estudiantes puedan entender más y mejor la importancia y el papel de las prácticas matemáticas en su sociedad y el contexto por medio de la elaboración de modelos (Rosa y Orey, 2017). La elaboración de modelos que representan estos sistemas son representaciones que ayudan a los miembros de estos grupos para entender y apropiarse de la realidad mediante el uso de pequeñas unidades de información, denominadas *etnomodelos*, que vinculan su patrimonio cultural con el desarrollo de sus prácticas matemáticas. La modelación matemática es una de las posibles estrategias de enseñanza que posibilitará aproximar y relacionar los *saberes* y *haceres* escolares y el cotidiano (Rosa y Orey, 2006).

La organización de situaciones didácticas en una perspectiva etnomatemática utiliza la modelación matemática como uno de los posibles caminos para concretizarse un trabajo centrado en una perspectiva cultural en sala de clase. Este aspecto también considera las exploraciones pedagógicas sobre los modos por los cuales podamos conectar la matemática formal al contexto cultural, en el currículo matemático (Orey, 2000). Para Rosa y Orey (2017), la modelación matemática es una metodología científica que tiene como característica la organización de las estrategias de enseñanza en una vertiente pedagógica, que tiene como objetivo la reorganización del currículo matemático, que visa atender las demandas del mundo moderno. Según D'Ambrosio (2001), se espera que la educación matemática posibilite, al educando, la utilización de instrumentos comunicativos, analíticos y materiales, que son esenciales para el ejercicio de los derechos y deberes, que son necesarios a la práctica de la ciudadanía y a la lectura crítica de los fenómenos (etnología) que ocurren en el *mundo globalizado*.

Consideraciones finales

Con la creciente preocupación de la incorporación de la perspectiva etnomatemática en los currículos de matemáticas, existe la necesidad de desarrollar su acción pedagógica en las escuelas. Entonces, existe la necesidad de que los alumnos tengan contacto con los aspectos culturales de las matemáticas por medio de actividades didáctico-pedagógicas que den condiciones para que conozcan las contribuciones de otras culturas para el desarrollo de las matemáticas. Este programa surge para confrontar los tabús de que las matemáticas es un campo de estudio aculturado y universal. También se debe favorecer un cambio en la percepción actual de las conexiones entre cultura y matemáticas, con la finalidad de subrayar en la importancia de hacer trabajo etnomatemático. Desde esta perspectiva, se propicia una mejor comprensión de los aspectos matemáticos de la cultura y se favorece la actividad pedagógica, ilustrando cómo las ideas, procedimientos y prácticas matemáticas tienen un papel vital en el desarrollo de la humidad. El programa etnomatemáticas fue lanzado con el objetivo de buscar entender el saber y el hacer matemático en el transcurrir de la historia de la humanidad (Rosa y Orey, 2015).

Este programa propone una nueva epistemología que busca entender la aventura de la especie humana en la búsqueda de la generación, adquisición, acumulo, transmisión y difusión del conocimiento. Para Rosa, Orey y Gavarrete (2017), esta acción pedagógica favorecer un cambio en la percepción actual de las conexiones entre cultura y matemáticas, con la finalidad de subrayar en la importancia de hacer trabajo etnomatemático. Desde esta perspectiva, se propicia una mejor comprensión de los aspectos matemáticos de la cultura y se favorece la actividad pedagógica, ilustrando cómo las ideas, procedimientos y prácticas matemáticas tienen un papel vital en el desarrollo de la humidad. Esperamos que, de acuerdo con D'Ambrosio (2001), en esta fase de la evolución de nuestra especie, que toda la arrogancia, envidia y gran poder ceda lugar al respeto por los diversos pueblos que, en solidaridad, contribuirán a la preservación del patrimonio común. Entonces, es necesario ampliar la discusión de las posibilidades para la inclusión de las perspectivas Etnomatemáticas que respeten y den voces a la diversidad social y cultural de los miembros de grupos culturales distintos y, de este modo desarrollar una comprensión de sus diferencias a través del diálogo y el respeto en busca de la paz.

Referencias bibliográficas

Banks, J. A. (1994). *An introduction to multicultural education*. Boston, MA: Allyn y Bacon.

Bassanezi, R. C. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*. São Paulo, SP: Editora Contexto, 2002.

Damázio, A. (2004). *Especificidades conceituais de matemática da atividade extrativa do carvão*. Coleção Introdução à Etnomatemática. Natal, RN: Universidade Federal do Rio Grande do Norte.

D'Ambrosio, U. (1985). Ethnomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *5*(1), 44-48.

D'Ambrosio, U. (1990). *Etnomatemática*. São Paulo, SP: Editora Ática, 1990.

D'Ambrosio, U. (2001). *Etnomatemática*: elo entre as tradições e a modernidade. Belo Horizonte, MG: Editora Autêntica.

Eglash, R. (2002). Computation, complexity and coding in native American knowledge systems. In: J. E. Hankes, y G. R. Fast (Eds.), *Changing the faces of mathematics*: perspectives on indigenous people of North America (pp. 251-262). Reston, VA: NCTM.

Freire, P. (1970). *Pedagogia do oprimido*. Rio deJaneiro, RJ: Paz e Terra.

Gerdes, P. (1997). On culture, geometric thinking and mathematics education. In: A. Powell., y M. Frankenstein (Eds), *Challenging eurocentrism in mathematics education* (pp. 223-247). New York, NY: SUNNY.

Knijnik, G. (2004). Itinerários da etnomatemática: questões e desafios sobre o cultural, o social e o político na educação matemática. In: G. Knijnik (Ed.), *Etnomatemática*: currículo e formação de professores (pp. 19-38). Santa Cruz do Sul, RS: EDUNISC.

Orey, D. C. (2000). The ethnomathematics of the Sioux tipi and cone. In: H. Selin, H. (Ed.), *Mathematics across culture*: the history of non-western mathematics (pp. 239-252). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Rios, D. P. (2000). Primero etnogeometria para seguir con etnomatemática. In: M. C. Domite (Ed.), *Anais do Primeiro Congresso Brasileiro de Etnomatematica – CBEm-1* (pp. 367–375). Sao Paulo, SP: FE-USP.

Rosa, M. (2010). *A mixed-methods study to understand the perceptions of high-school leaders about ELL students*: the case of mathematics. Doctorate Dissertation. College of Education. Sacramento, CA: California State University, Sacramento.

Rosa, M., y Orey, D. C. (2006). Abordagens atuais do programa etnomatemática: delineando um caminho para a ação pedagógica. *BOLEMA*, *19*(26), 19-48.

Rosa, M., y Orey, D.C. (2007). Cultural assertions and challenges towards pedagogical action of an ethnomathematics program. *For the Learn of Mathematics*, *27*(1), p. 10-16.

Rosa, M., y Orey, D. C. (2010). Ethnomodelling: an ethnomathematical holistic tool. Special Issue. *Academic Exchange Quarterly*, *14*, 191-195.

Rosa, M., y Orey, D. C. (2012). O campo de pesquisa em etnomodelagem: as abordagens êmica, ética e dialética. *Educação e Pesquisa, 38*(4), 865-879.

Rosa, M., y Orey, D. C. (2015). Three approaches in the research field of ethnomodeling: emic (local), etic (global), and dialogical (glocal). *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *8*(2), 364-380.

Rosa, M. y Orey, D. C. (2017). *Influências etnomatemáticas em salas de aula*: caminando para a ação pedagógica. Curitiba, PR: Appris Editora.

Rosa, M.; Orey, D. C.; y Gavarrete, M. E. (2017). El programa etnomatemáticas: perspectivas actuales y futuras. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *10*(2), 69-87.

SECCIÓN 4

EL PENSAMIENTO DEL PROFESOR, SUS PRÁCTICAS Y ELEMENTOS PARA SU FORMACIÓN PROFESIONAL

VOL34, NÚMERO 1, AÑO 2021

RESIGNIFICACIÓN DE LA PRAXIS PEDAGÓGICA DESDE LOS ELEMENTOS DEL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO DEL CONTENIDO

RESIGNIFICATION OF THE PEDAGOGICAL PRAXIS BASED ON THE ELEMENTS OF THE DIDACTIC KNOWLEDGE OF THE CONTENT

Yudy Alexandra Molina Hurtado, María Martha Molina
Fundación Universitaria Juan de Castellanos, Institución Educativa Técnica Santa Cruz de Motavita. (Colombia)

Resumen
La presente propuesta se sustenta a partir del modelo hexagonal del conocimiento pedagógico para la enseñanza de la ciencia, planteado por Park y Oliver (2007), modelo que connota diferentes componentes importantes a tener a cuenta a la hora de planificar la enseñanza y aprendizaje de cualquier tópico, en este caso particular, se abordó para la enseñanza de las medidas descriptivas a estudiantes de II semestre de Contaduría Pública de la Fundación Universitaria Juan de Castellanos, cuyo objetivo se centró en fortalecer el pensamiento aleatorio y la enculturación estadística desde una mirada constructivista que permitió desarrollar procesos de razonamiento, análisis, interpretación y reflexión sobre situaciones propias del campo de formación del Contador Público. Los resultados permiten establecer que el Conocimiento Didáctico del Contenido (CDC) contribuye la resignificación de la praxis docente y a generar la movilización de saberes situados en las competencias básicas de formación y en el trabajo colaborativo.

Palabras clave: conocimiento didáctico del contenido, ambiente de Aprendizaje, estadística

Abstract
This proposal is based on the hexagonal model of pedagogical knowledge for the teaching of science, proposed by Park y Oliver (2007); a model that highlights different important components to consider when planning the teaching and learning of any topic, in this specific case, it was tackled for the teaching of descriptive measures to Public Accounting second- semester students from Juan de Castellanos University Foundation. It was aimed at strengthening random thinking and statistical enculturation from a constructivist perspective that allowed developing processes of reasoning, analysis, interpretation, and reflection on typical situations of the Public Accountant's field of training. The results allow establishing that Didactic Knowledge of Content contributes to the resignification of teaching praxis and to generate the mobilization of knowledge involved in the basic training competencies and in collaborative work.

Key words: didactic knowledge of content, learning environment, statistics

Introducción

Esta propuesta surge como fruto de la observación y reflexión de acuerdo con las vivencias que se han tenido en el ejercicio profesional, donde se ha constatado que la mayoría de los estudiantes de II semestre de contaduría Pública de la Fundación Universitaria Juan de Castellanos, presentan dificultad a la hora de interpretar y evaluar críticamente la información estadística que circula en su diario vivir.

En la sociedad del conocimiento en la que estamos inmersos se derivan situaciones atípicas que nos invitan a reflexionar sobre la praxis que se ejerce en el aula, indicándonos ciertas pautas que incitan a mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje que se configuran en los distintos ambientes de aprendizaje a través de la interacción entre medios, mediaciones, estudiantes y docente.

El interés hacia el tema de la presente reflexión emerge de la inquietud por conocer lo que acontece en el aula cuando el profesor enseña Estadística, las situaciones problémicas que propone, la manera como transforma el contenido para hacerlo comprensible a los estudiantes, las estrategias de instrucción que utiliza para la enseñanza, elementos que juegan un papel importante dentro del quehacer en el aula.

Desde esta perspectiva, el Conocimiento Didáctico del Contenido aporta elementos valiosos para comprender los procesos de enseñanza y aprendizaje de cualquier área del conocimiento, generando cambios sustanciales en las prácticas pedagógicas, situando al profesor como un sujeto autónomo y unificado, que reflexiona sobre su actuar, a través del constante cuestionamiento sobre lo que debe ser la enseñanza y sus finalidades (Díaz, 2001).

La estadística como campo disciplinar que aporta elementos metodológicos que permiten tomar decisiones adecuadas ante situaciones de incertidumbre y azar, amerita examinar el quehacer del profesor desde una óptica conceptual que vislumbre la manera como se construyen los significados, se transforma y finalmente se presentan en el aula (Pinto y González, 2008), de esta manera, se logra establecer una adecuada conexión entre teoría y praxis, llegando a obtener aprendizajes realmente significativos a través de la interacción teórica y práctica de los contenidos propuestos.

La alternativa que se plantea, es utilizar un ambiente virtual de aprendizaje centrado en el modelo hexagonal de Park y Oliver (2007), el cual incluye elementos esenciales que lleva al docente a repensar su praxis pedagógica, desde una mirada innovadora que le permita salir de su zona de confort y explore nuevos escenarios encaminándolo a involucrar y a pensar en una serie de aspectos que tal vez dentro de su quehacer cotidiano no son tenidos en cuenta, como por ejemplo, las dificultades que pueden presentar los estudiantes cuando se ven enfrentados a un conocimiento que no resulta ser de fácil comprensión y que no logra asimilar y relacionar con situaciones del contexto, llevándolo de esta manera a interiorizar errores conceptuales que en muchos de los casos se agudizan con el pasar del tiempo.

Marco teórico

Diferentes investigaciones en didáctica de la estadística, aluden la incomprensión por parte de los estudiantes tanto a nivel de secundaria como universitario, en la aplicación de algoritmos matemáticos para determinar las diferentes medidas descriptivas, limitando el potencial que emerge de este campo disciplinar, como lo es la interpretación de la información, situando el papel de la enseñanza y aprendizaje de la estadística en aplicaciones que no resultan significativas para el estudiante (Batanero, 2001).

A ello, se suma el quehacer docente desarrollado en el aula, práctica enfocada a la conceptualización, ejemplificación, ejercitación de algoritmos y fórmulas, desprovistas de aplicabilidad en el contexto real de los estudiantes, lo que genera vacíos cognitivos en los estudiantes, puesto que se da prioridad a la memorización, mecanización y sustitución de datos en fórmulas, llegando a una comprensión técnica más no conceptual de lo que realmente representa la estadística. (Estrada, Batanero y Fortuny, 2004).

Entender la enseñanza presupone una comprensión del pensamiento y acción del profesor, reconociéndolo como un sujeto epistémico que busca alternativas de cómo ayudar a sus estudiantes a entender un concepto específico (Shulman L., 1986). Indagar sobre el quehacer del profesor universitario, su conocimiento profesional, su planificación y estrategias utilizadas en su praxis, es un tema que permite explorar y conocer en detalle la manera como se lleva a cabo el proceso de enseñanza aprendizaje a nivel universitario.

El Conocimiento Didáctico del Contenido del profesor juega un papel significativo como fundamento teórico para la formación de profesores, puesto que aporta elementos importantes que ayudan a conocer si los profesores cuentan con el conocimiento y la comprensión suficiente acerca de los conceptos fundamentales de estadística para afrontar su praxis educativa (Sanoja y Ortiz, 2013).

El estudio del CDC cada día adquiere mayor atención entre los investigadores en educación matemática y en las instituciones de formación de profesores, ya que permite al docente comprender cómo aprenden sus estudiantes y reconocer los obstáculos y dificultades que inciden en la calidad del aprendizaje. Así mismo, se convierte en un componente esencial para diagnosticar dificultades de aprendizaje, así como, para valorar la calidad de los materiales de enseñanza (Shulman, 1986).

Es en ese reconocimiento, donde se derivan representaciones, estrategias y criterios que promueven una enseñanza de calidad, mejorando los procesos de formación de los futuros Contadores Públicos.

El interés por el CDC se debe, a que involucra un conjunto de saberes que permite al profesor trasladar a la enseñanza el contenido de un determinado tópico, para este caso, la enseñanza de las medidas de tendencia central, haciendo uso de la transposición didáctica del conocimiento especializado al conocimiento objeto de enseñanza y aprendizaje (Chevallard, 1991), de tal forma que los estudiantes sean capaces de comprender el significado, la importancia y el uso de la estadística en un contexto real.

Al respecto, Marcelo (1993), alude que el conocimiento del contenido que el profesor posea influye en el qué, el cómo y el para qué enseñar, así como en la calidad del discurso en clase, el tipo de preguntas realizadas a los estudiantes y el manejo de los textos.

La intención de esta propuesta es precisamente, comprender la manera como el docente orienta la enseñanza y aprendizaje de las medidas de tendencia central, es decir, cómo transforma el contenido en conocimiento enseñable, aspecto que involucra el conocer las dificultades de los estudiantes y las estrategias de enseñanza.
Según Batanero (2001), cuando se quiere reflexionar sobre la dificultad del aprendizaje que ciertos conceptos tienen para el estudiante, es necesario realizar un análisis epistemológico de su significado, con el fin de salvaguardar errores en el proceso de enseñanza aprendizaje.
Por ende, generar un verdadero conocimiento y aprendizaje de la estadística, requerirá de la adaptación de los conceptos a las capacidades cognitivas de los estudiantes y del diseño de situaciones didácticas que propicien un aprendizaje significativo.

Conceptualización y elementos del CDC

El concepto de “Conocimiento Didáctico del Contenido” (CDC) fue presentado por Shulman (1986), como una respuesta a lo que llamó “paradigma olvidado” en la enseñanza y la formación del profesorado, describiéndolo como:

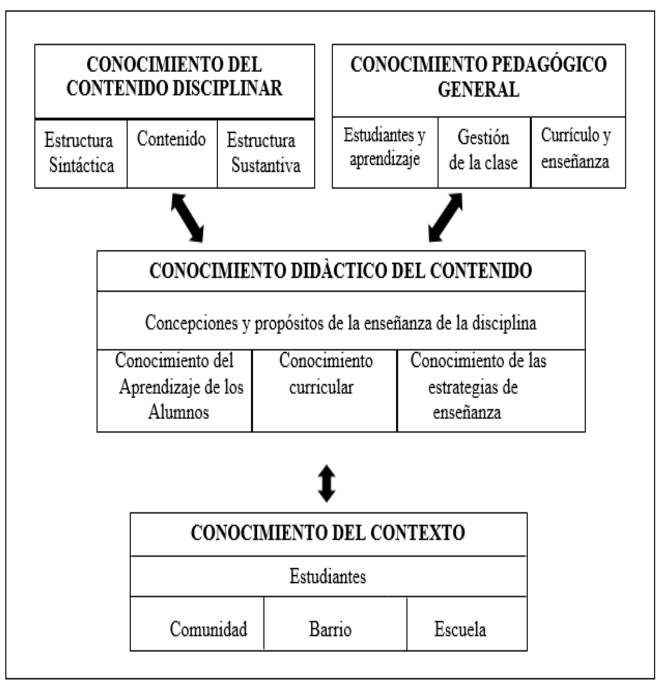
> (…) las formas más útiles para representar las ideas, las analogías, ilustraciones, ejemplos, explicaciones y demostraciones más poderosas, en una palabra, las formas de representar y formular el contenido para hacerlo comprensible a otros. El conocimiento didáctico del contenido también incluye un conocimiento de lo que facilita o dificulta el aprendizaje de temas concretos; las concepciones y preconcepciones que los estudiantes de diferentes edades y procedencia traen consigo cuando aprenden los temas y lecciones más frecuentes enseñadas (Shulman, 1986, pp. 9-10).

Las formas de representación a que hace mención, son formas de "expresar, exponer, escenificar o representar ideas de otra manera, de suerte que los que no saben puedan llegar a saber, los que no entienden puedan comprender y discernir y los inexpertos se conviertan en expertos".

De esta manera, la enseñanza comienza con el hecho de que el profesor necesariamente debe comprender aquello que se ha de aprender y cómo debe ser enseñado; y culmina con una nueva comprensión por parte del maestro y de los estudiantes.

Desde el punto de vista de Grossman (1990), el CDC es el componente que mayor incidencia tiene en las acciones de enseñanza en el aula de clase. Resalta la importancia de conocer las concepciones, dificultades e intereses de los estudiantes para definir y estructurar los contenidos curriculares y las estrategias de enseñanza. En la Figura 1., se ilustra la relación entre los diferentes dominios del conocimiento profesional del profesor.

Figura 1. *Estructura del Conocimiento Profesional del Profesor.*



Adaptado de "The making of a teacher: Teacher Knowledge and teacher education" por Grossman, 1990, p. 5

Por su parte, Magnusson, Krajcik y Borko (1999), conciben el CDC como un constructo que consta de cinco componentes: a) Orientación de la enseñanza de las ciencias (conocimiento de los objetivos y criterios generales para la enseñanza de las ciencias); b) Conocimiento del currículo (criterios nacionales, estatales y las normas del distrito y los planes de estudio); c) Conocimiento de los criterios de evaluación (qué y cómo evaluar a los alumnos);

d) Las estrategias instruccionales para la enseñanza de la ciencia, (representaciones, actividades y métodos); y e) El conocimiento de los estudiantes, (concepciones comunes y áreas de dificultad).

En la manera como se piensa y se lleva a cabo la enseñanza de un tópico disciplinar, se va haciendo evidente el CDC, ayudándole al docente a sacar el mayor potencial y provecho al currículo (Cornbleth, 1989).

Según Bolívar (2005), el CDC "es el conjunto o repertorio de "Construcciones pedagógicas", resultado de la sabiduría de la práctica docente, normalmente con una estructura narrativa, referidas a tópicos específicos…una colección de construcciones didácticas específicas para cada tópico, que puede ser examinada en los diversos componentes que la configuran (conocimiento curricular, del contenido, creencias sobre la enseñanza- aprendizaje, conocimientos y creencias didácticas, conocimientos del contexto y recursos, metas y objetivos)" (p. 9).

Desde esta perspectiva, se puede evidenciar que la enseñanza es un acto complejo que posee diferentes especificidades (epistemologías, lenguaje, tareas, metodologías, estrategias instruccionales, etc.) que recrean la vida en el aula y dan sentido a la profesionalización de la actividad docente.

En concordancia con los planteamientos expuestos por los autores mencionados, cuando las prácticas docentes son transformadas, entonces el verdadero sentido del aprendizaje en el aula recobra su valor, pues el maestro, indagará sobre sus métodos y reflexionará sobre la efectividad de estos. Por consiguiente, aspectos curriculares, contenidos y objetivos serán repensados a fin de generar espacios de saberes sólidos, cristalizando de esta manera una buena práctica pedagógica y por ende un aprendizaje significativo.

Categorías del CDC

De la definición del CDC propuesta por Shulman (1986), se desligan varias proposiciones que se van configurando en categorías y van adquiriendo gran relevancia en el proceso de enseñanza aprendizaje, entre ellas se encuentran:

- El conocimiento del contenido enseñable, es decir, el conocimiento de la materia específica,
- Las formas de representación para la enseñanza de la materia específica (representaciones para la enseñanza de tópicos particulares y posibles actividades que hacen comprensible la materia a otros)
- El conocimiento del aprendizaje del estudiante (cómo los estudiantes comprenden un tópico disciplinar, sus posibles malentendidos y grado de dificultad).

Grossman (1990), propone cinco componentes del CDC enfocados tanto al conocimiento y creencias de:

- Finalidades y objetivos que se pretenden con la enseñanza de las ciencias
- Currículo
- Evaluación
- Comprensión de los temas de ciencias por los estudiantes
- Estrategias de enseñanza

Se puede observar que hay gran similitud con las categorías inicialmente propuestas por Shulman, donde se destaca la importancia de las estrategias utilizada para la enseñanza y la comprensión de los estudiantes.

Por su parte, Magnusson et al., (1999), formulan cinco componentes a saber:

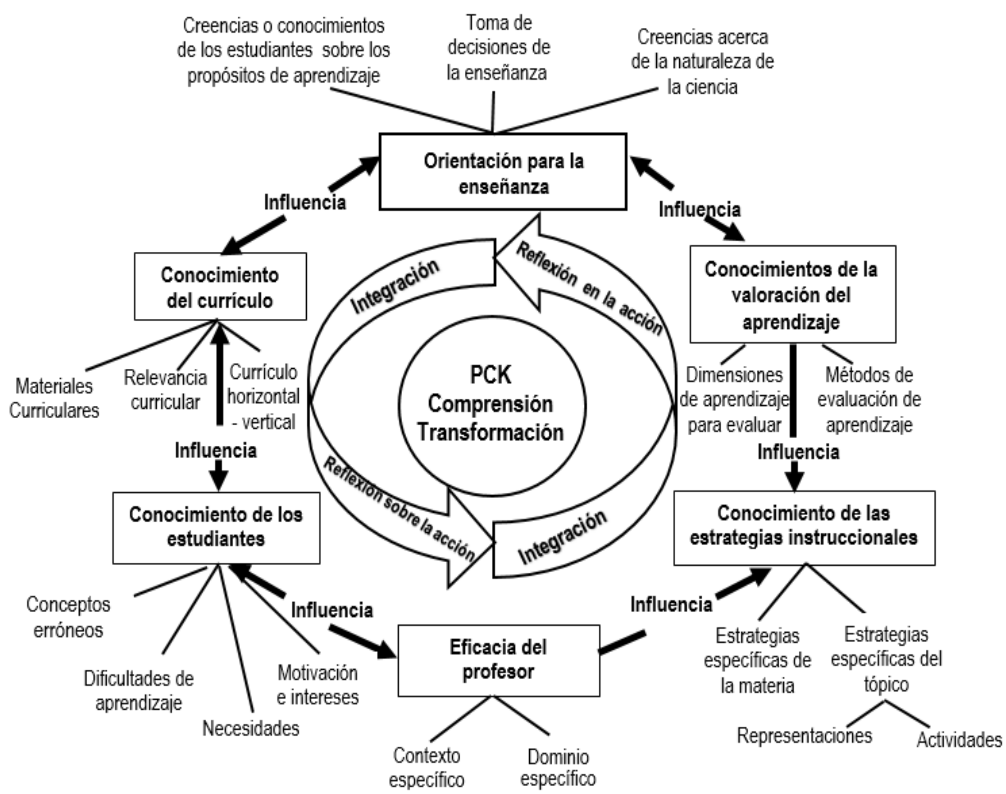
- Orientación de la enseñanza de las ciencias (conocimiento de los objetivos y criterios generales para la enseñanza de las ciencias)
- Conocimiento del currículo (criterios nacionales, estatales y las normas del distrito y los planes de estudio)
- Conocimiento de los criterios de evaluación (qué y cómo evaluar a los alumnos);
- Las estrategias instruccionales para la enseñanza de la ciencia, (representaciones, actividades y métodos)
- Conocimiento de los estudiantes, (concepciones comunes y áreas de dificultad)

De igual manera, Park y Oliver (2007), identifican cuatro componentes del CDC para la enseñanza de la ciencia:

- Orientaciones de la enseñanza de la ciencia
- Conocimiento de los estudiantes,
- Conocimiento de plan de estudios
- Conocimiento de las estrategias y representaciones para la enseñanza de la ciencia
- Conocimiento valorativo del aprendizaje de la ciencia.

En la Figura 2, se presenta el modelo hexagonal del CDC para la enseñanza de la ciencia, donde cada uno de sus componentes se articulan en medio de una dinámica reflexiva en la acción y sobre la acción, permitiéndole al docente visualizar y resignificar el resultado de su praxis pedagógica (Park y Oliver, 2007, p. 278).

Figura 2. *Modelo Hexagonal del Conocimiento Didáctico del Contenido para la Enseñanza de las Ciencias.*



Adaptado de: "Revisiting the conceptualization of pedagogical content knowledge (PCK): PCK a a conceptual tool to understand teachers as professionals" por Park & Oliver, 2007, p. 279.

El modelo reúne la propuesta de Shön (1983), al contemplar la *reflexión en la acción* como punto crucial en la comprensión, adaptación y enseñanza de las diferentes áreas del conocimiento que configuran el currículo escolar. La integración de los componentes se logra a través de una permanente reflexión en la acción y sobre la acción, lo que implica que a medida que un profesor desarrolla el CDC a través de la reflexión, la coherencia entre los componentes se consolida, asumiendo cambios en su actuar dentro del aula y generando ambientes de aprendizaje significativos para los estudiantes. De esta manera, la capacidad de fortalecimiento del modelo no puede ser funcional.

En síntesis, el Conocimiento Didáctico del Contenido aporta elementos valiosos para comprender los procesos de enseñanza y aprendizaje de cualquier área del conocimiento, generando cambios sustanciales en las prácticas pedagógicas, situando al profesor como un sujeto autónomo y unificado, que reflexiona sobre sí mismo, se repiensa, y analiza el lugar que ocupa en el espacio pedagógico y curricular, en el espacio del saber y en el espacio intelectual y discursivo, ejes que orientan la formación del profesorado. Definiendo de esta manera, la naturaleza de su praxis a nivel social, cultural y político, a través del constante cuestionamiento sobre lo que debe ser la enseñanza y sus finalidades (Díaz, 2001).

Metodología

El tipo de investigación que asume esta propuesta es mixto bajo el enfoque exploratorio, metodología que posibilita el acceso a las prácticas de enseñanza y aprendizaje desde la esencia de sus participantes.

La propuesta se desarrollará mediante las siguientes fases: Fase de diagnóstico: de acuerdo con el objetivo planteado, surge la necesidad de conocer la situación actual de los estudiantes respecto a las nociones y conceptos que tienen de estadística, con el fin de establecer falencias y fortalezas. Para lo cual se aplicará un cuestionario, que permitirá establecer el nivel de conocimientos en el cual se ubican los estudiantes. Fase de diseño: donde se realizará la estructura del ambiente virtual de aprendizaje a partir de los lineamientos curriculares emanados por el Ministerio de Educación Nacional. Fase de aplicación: en esta etapa, se hará el montaje del Ambiente virtual de aprendizaje en la plataforma Moodle de la Fundación Universitaria Juan de Castellanos. Fase de evaluación: en este punto, se medirá el impacto que tuvo el proyecto en los estudiantes y las competencias que lograron adquirir en la asignatura.

Para el diseño del ambiente de aprendizaje, en primer lugar se realizó un abordaje histórico de la estadística, haciendo una búsqueda exhaustiva de su origen y evolución, a partir de la consulta realizada por los estudiantes, elaboraron una línea de tiempo y un mapa conceptual teniendo en cuenta aspectos tales como: historia, evolución, definición y aplicaciones; una vez realizada la consulta como actividad previa, se conformaron grupos de trabajo con el fin de contrastar la información encontrada por cada estudiante, espacio en el cual se tuvo la oportunidad de discutir acerca de las diferentes concepciones, propiedades y aplicaciones que asume la Estadística, trabajo que permitió la interacción y discusión, para llegar a su conceptualización.

Teniendo conocimiento acerca de la epistemología de la asignatura a abordar durante el semestre, enseguida se procedió a planear el desarrollo del curso, mediante la realización de un proyecto de aula encaminado a conocer la incidencia de la Pandemia generado por el COVID en la situación económica y financiera de los estudiantes de Contaduría Pública de la Fundación Universitaria Juan de Castellanos, para ello, se asignaron diferentes grupos de trabajo para recopilar la información pertinente que ayudara a plantear el proyecto e ir aplicando los conceptos que se iban tratando en cada una de las sesiones de clase.

Partiendo del modelo hexagonal, enseguida se desglosan cada uno de sus componentes asociados a las actividades desarrolladas en la asignatura:

Orientaciones de la enseñanza de la ciencia: dentro de este componente, se identificaron los siguientes elementos.

- Creencias o conocimientos de los estudiantes sobre los propósitos de aprendizaje: La estadística es la ciencia de los datos, que ayuda a analizar la información y a tomar decisiones acertadas.
- Toma de decisiones de la enseñanza: aquí se enfatiza y resalta la importancia de la Estadística en la formación del Contador Público
- Creencias acerca de la naturaleza de la ciencia: La estadística es considerada una herramienta fundamental en el desarrollo de actividades relacionadas con la organización y análisis de información, así mismo, en la formación social se hace necesario contar con elementos necesarios que permitan ordenar, resumir y clasificar los datos.

Conocimiento de los estudiantes: esta categoría permite evidenciar el proceso de aprendizaje de los estudiantes, por ello, es importante, reconocer cuáles son sus dificultades, intereses, necesidades y conceptos erróneos.

- Dificultades de aprendizaje. Aplicación de las medidas descriptivas para datos agrupados.
- Reconocimiento del comportamiento de un conjunto de datos de acuerdo a las variables objeto de estudio.
- Interés y Motivación: La metodología utilizada despierta el interés, puesto que a partir de trabajo en grupo se conciertan, se exponen diferentes puntos de vista y se llegan a acuerdos.
- Necesidades: Contextualizar la temática, dejando de lado solo el concepto, llevándolo al plano de la aplicación en problemas específicos.
- Conceptos erróneos: la estadística consiste en la aplicación de algoritmos y fórmulas desprovistas de significado.

Conocimientos de la valoración de aprendizaje: este componente permite evidenciar las competencias de los estudiantes a través de su participación en cada una de las situaciones propuestas.

Aquí se tuvo en cuenta los siguientes aspectos:

- Dimensiones de aprendizaje para evaluar:
- Utiliza las herramientas básicas de la estadística para procesar datos y organizarlos en tablas de frecuencias, para luego graficar e interpretar la información de acuerdo al contexto de la situación planteada.
- Comprender y aplica el concepto de medidas descriptivas (tendencia central, dispersión, posición y forma) en el análisis de situaciones propias del Contador Público.
- Métodos de evaluación de aprendizaje: Participación activa durante la clase, trabajo colaborativo y la aprehensión de las competencias propuestas en el microdiseño de la asignatura.

Conocimiento del currículo*:* El conocer los contenidos de la materia a enseñar implica que el profesor no sólo debe comprender a profundidad la materia específica que enseña, sino que debe poseer una amplia formación humanista, que le sirva como marco referencial para el aprendizaje adquirido anteriormente y como un mecanismo que facilita la adquisición de una nueva comprensión; por ende, el profesor tiene un compromiso social y una responsabilidad ética respecto al conocimiento de los contenidos de la asignatura, por ser la principal fuente de la comprensión de la materia para los alumnos.

- Materiales Curriculares: Software estadístico (SPSS), Excel, Situaciones propias del contexto del Contador Público.
- Currículo saliente: Conocer los personajes históricos involucrados en la evolución de la Estadística, apropiación de conceptos y propiedades de las medidas descriptivas y vinculación de la estadística con los procesos investigativos de problemáticas propias del campo de formación del Contador Público.
- Currículo horizontal / vertical: la Estadística es un campo disciplinar transversal con los procesos investigativos en situaciones que emergen en el campo de la Contaduría Pública y provee al estudiante de herramientas que le permiten analizar la información de una manera eficiente.

Conocimiento de las estrategias y representaciones para la enseñanza: Los profesores son los mediadores que transforman la materia en representaciones comprensibles a los alumnos, razón por la cual deben poseer un amplio conocimiento de la didáctica específica para guiar de manera pertinente su práctica como un servicio a otros (Bolívar, 2005). Las diferentes estrategias utilizadas están orientadas a ayudar la comprensión temática por parte de los estudiantes, entre ellas vale la pena mencionar las siguientes:

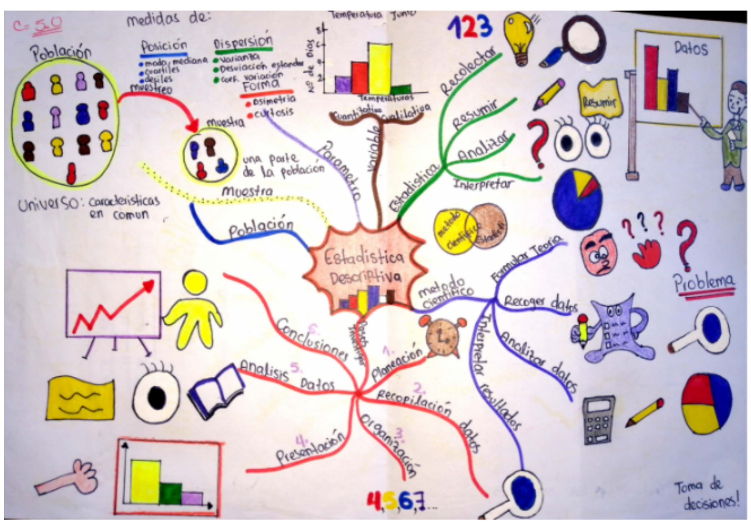
- Analogía: mediante la cual se relacionan situaciones concretas con los conceptos que van a aprender (lo cual generalmente tiene un mayor nivel de abstracción).

- Pregunta: con la cual se busca “auscultar los conceptos previos de los estudiantes” con el fin de clarificar algunos significados y hacerles ver las concepciones erróneas que traen consigo.
- La guía de trabajo independiente: Medio que provee al estudiante orientaciones claras sobre las competencias, actividades, metodología, criterios de evaluación, contenidos y bibliografía. El objetivo de la guía de aprendizaje es facilitar la comprensión de los contenidos abordados durante el periodo académico, dentro de un proceso de estudio que el estudiante adelanta de manera autónoma.
- Definiciones y explicaciones: la exposición como manera de enseñanza para llevar el contenido a sus estudiantes; se comunica y orienta el conocimiento específico, en un ambiente participativo.
- Materiales de apoyo: documentos, libros, videos y páginas web, que atienden a los diferentes estilos de aprendizaje de los estudiantes.
- El aula virtual: ambiente de aprendizaje donde se encuentra el desarrollo temático de la asignatura.

Dentro de los resultados de la fase de diagnóstica, una de las actividades estaba orientada a la apropiación de conceptos relevantes para la comprensión de la estadística como ciencia fundamental en la toma de decisiones. Una de las actividades se orientaba a la construcción de un mapa mental que recopilara los conceptos relevantes que consideraban pertinentes para el desarrollo del contenido temático expuesto en clase.

Uno de los más llamativos, se muestra en la figura 3, donde se puede evidenciar que ese estudiante en particular aborda desde una perspectiva crítica, la importancia de la estadística en el campo de la Contaduría Pública. A ello se suma, la capacidad de síntesis que posee para plasmar de manera coherente los diferentes conceptos que subyacen de la ciencia de los datos.

Figura 3. *Mapa mental presentado por el estudiante E15.*



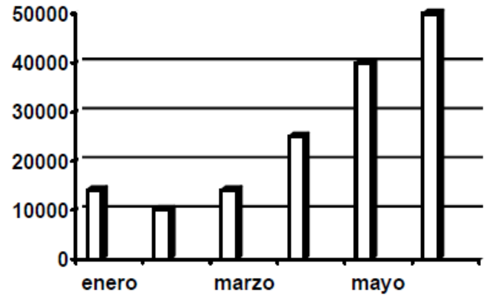
Elaboración propia

De igual manera, se aplicó una prueba diagnóstica orientada a determinar los saberes previos de los estudiantes, allí se planteó diferentes situaciones relacionadas con distribución de frecuencias y medidas descriptivas. Como hallazgos, se pudo identificar los errores y dificultades de los estudiantes para abstraer información, ya sea a partir de una tabla de frecuencias o de un gráfico, también se pudo evidenciar que el desconocimiento y la falta de comprensión de propiedades relacionadas con los conceptos, genera en los estudiantes confusión a la hora de resolver situaciones problema y al analizar resultados que involucran el uso de las medidas descriptivas.

Precisamente, uno de los ítems en el que mayor dificultad presentaron los estudiantes es el mostrado en figura 4.

Figura 4. *Ítem en el que los estudiantes presentaron mayor dificultad*

- Observe el diagrama de barras que muestra las ventas de bocadillos de la empresa Bocatta durante los últimos 6 meses del año pasado:



Fuente: elaboración propia.

8 a De un valor aproximado del número medio de bocadillos que venden al mes.
8. b De un valor aproximado de la mediana del número de bocadillos que se vendieron por mes.

Este ítem básicamente está orientado al cáculo de la media y la mediana a partir de la lectura del gráfico.

Los resultados de la Tabla 1., dejan ver la gran dificultad que tienen los estudiantes para interpretar la información proveniente de gráficos, el nivel de lectura del gráfico es insuficiente puesto que no llegan al nivel de extracción de información que permita hallar el promedio y la mediana.

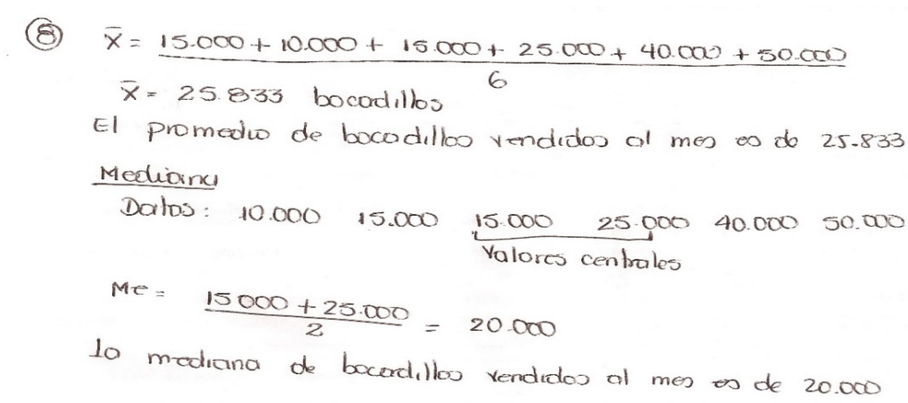
Tabla 1. *Porcentaje de respuestas al ítem 8*

Ítem	Correctas		Incorrectas		No responde	
	Nº Estudiantes	Porcentaje	Nº Estudiantes	Porcentaje	Nº Estudiantes	Porcentaje
8.a	7	21,9	17	53,1	8	25,0
8.b	6	18,8	17	53,1	9	28,1

Fuente: elaboración propia.

Los estudiantes que acertaron, hacen una buena interpretación del gráfico, llegando a traducir correctamente la representación gráfica a valores numéricos para posteriormente aplicar el algoritmo de cálculo tanto de la media como de la mediana. A colación se trae la solución del estudiante E30.

Figura 5. *Respuesta del estudiante, E30 al ítem 8.*


8

$$\bar{x} = \frac{15.000 + 10.000 + 15.000 + 25.000 + 40.000 + 50.000}{6}$$

$\bar{x} = 25.833$ bocadillos

El promedio de bocadillos vendidos al mes es de 25.833

Mediana

Datos: 10.000 15.000 $\underbrace{15.000 \quad 25.000}_{\text{Valores centrales}}$ 40.000 50.000

$$Me = \frac{15\,000 + 25.000}{2} = 20.000$$

la mediana de bocadillos vendidos al mes es de 20.000

Fuente: elaboración propia.

En la Figura 5, se puede apreciar que el estudiante cuando determina el promedio de bocadillos vendidos en el mes hace uso adecuado del símbolo del estimador con sus respectivas unidades, pero cuando halla la mediana, presenta dificultad en la representación simbólica, denotándola como parámetro y dejando de lado la respectiva unidad a que hace referencia el valor obtenido.

La exploración de las nociones de los estudiantes permite determinar las estrategias a utilizar en el desarrollo de la asignatura, con miras a fortalecer la aprehensión de las competencias cognitivas, procedimentales y actitudinales expuestas en el microdiseño curricular de la asignatura.

En la fase de diseño que refiere a la planeación de la estructura del ambiente de aprendizaje, se vinculan elementos desde el trabajo autónomo del estudiante, a través del uso, implementación y aplicación de las herramientas de la tecnología, la información y la comunicación en los procesos sincrónicos y asincrónicos que se derivan del desarrollo del curso. Los pilares que guían el autoaprendizaje del estudiante se centran en actividades que potencian la capacidad de aprender a aprender desde una mira crítica y reflexiva del estudiante a partir de la utilización de las herramientas que ofrece la plataforma Moodle como son: foros, wikis, chats, redes conceptuales, entre otras, que diversifican la interacción entre el saber, el saber hacer y el saber ser, estableciendo de esta manera, mejores prácticas para incrementar el significado y sentido de cada actividad de aprendizaje. En la figura 4, se observa la organización del curso disponible en el aula virtual.

Figura 6. *Estructura del curso en la plataforma Moodle*

Fuente: elaboración propia.

El diseño del PCK obliga al profesor a resignificar su praxis, encaminándolo a involucrar y a pensar en una serie de aspectos que tal vez dentro de su quehacer cotidiano no son tenidos en cuenta, como por ejemplo, las dificultades que pueden presentar los estudiantes cuando se ven enfrentados a un conocimiento que no resulta ser de fácil comprensión y que no logra asimilar y relacionar con situaciones del contexto, llevándolo de esta manera a interiorizar errores conceptuales que en muchos de los casos se agudizan con el pasar del tiempo.

Es este orden de ideas, se puede apreciar que no es suficiente con el conocimiento que se posee acerca de una determinada disciplina, lo primordial es lograr la transformación de ese saber para su enseñanza, valiéndose de diferentes medios que permitan adaptar el contenido a las necesidades de los estudiantes, que es lo que propone Chevallard (1991), cuando habla de la transposición didáctica. En el PCK, dicha transposición se evidenció a partir del compromiso asumido por los estudiantes durante el semestre académico, permitiéndole estableciendo relaciones entre los conceptos, utilizando un lenguaje formal y asequible al estudiante, sin dejar de lado el lenguaje estadístico que subyace para su respectiva representación.

Es así como, los ambientes de aprendizaje diseñados a partir del conocimiento didáctico del contenido obligan al docente a ceder el rol protagónico, invitando al estudiante a ser el actor principal, guiándolo a través de preguntas orientadoras que lo conduzcan a explorar y a conservar su actitud participativa y reflexiva en contraposición con la actitud pasiva que se manifiesta en la clase magistral.

Dentro de los resultados obtenidos de la aplicación de este modelo, se resaltan los siguientes:

- Fortalecimiento del pensamiento aleatorio de los estudiantes, donde han logrado poner en práctica las competencias estadísticas para interpretar, analizar y utilizar los resultados objeto de estudios investigativos acordes a situaciones propias de su campo de formación.
- Contextualización de ambientes de aprendizaje soportados en la construcción colaborativa de conocimiento a través de la negociación social del conocimiento.
- Aprehensión de conceptos y procedimientos estadísticos, apoyado de herramientas tecnológicas que favorezcan la interacción y comunicación.
- Sentido crítico y formación integral, laboral, profesional e intrapersonal del futuro Contador Público.
- Manejo eficiente de medios y mediaciones tecnológicas en la modalidad a distancia fuente de comunicación sincrónica y asincrónica con los actores del proceso de aprendizaje autónomo.
- Uso de software estadístico, el cual permitió simplificar cálculos engorrosos, permitiendo de esta manera, hacer mayor énfasis en la interpretación, discusión y reflexión de los resultados, logrando que el estudiante comprendiera el significado de cada una de las medidas obtenidas.
- Acompañamiento y orientación académica encaminadas a desarrollar en los estudiantes habilidades de análisis y síntesis de la información, además de comprometerlos con su proceso de aprendizaje

Acotaciones finales

El diseño del PCK obliga al profesor a resignificar su praxis, encaminándolo a involucrar y a pensar en una serie de aspectos que tal vez dentro de su quehacer cotidiano no son tenidos en cuenta, como por ejemplo, las dificultades que pueden presentar los estudiantes cuando se ven enfrentados a un conocimiento que no resulta ser de fácil comprensión y que no logra asimilar y relacionar con situaciones del contexto, llevándolo de esta manera a interiorizar errores conceptuales que en muchos de los casos se agudizan con el pasar del tiempo.

Los ambientes de aprendizaje, entendidos como aquellos espacios en los cuales se llevan a cabo los procesos de enseñanza y de aprendizaje, se convierten en el punto de partida de reflexión del papel del docente, permitiéndole

cuestionarse acerca de cómo debe orientar su práctica pedagógica, de tal forma que contribuya significativamente en la formación de personas capaces de enfrentarse a los retos que la sociedad le impone.
El buscar nuevas formas de enseñar es lo que hace grande a un buen profesor, salir de lo tradicional y presentar nuevos escenarios dentro del aula de clase, con el fin de captar el interés y motivación de sus estudiantes.

Referencias bibliográficas

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la Estadística*. Granada: Universidad de Granada.

Bolívar, A. (2005). Conocimiento didáctico del contenido y didácticas específicas. Profesorado. Revista de currículum y formación del profesorado, 9(2), 1-39.

Cornbleth, C. (1989). Knowledge for Teaching History. An Competing Visions of Teacher knowledge; Eats Lansing, National Center for Research on Teacher Education, Conference series, 89(1), 173-181.

Chevallard, Y. (1991). La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado. Madrid: Aique Grupo Editor S.A.

Díaz, M. (2001). Del discurso pedagógico: problemas críticos. Poder, control y discurso pedagógico. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

Estrada, A., Batanero, C., & Fortuny, J. (2004). Un estudio sobre conocimientos de estadística elemental de profesores en formación. Educación Matemática, 16(1), 89-111

Grossman, P. (1990). The making of a teacher. Teacher knowledge and teacher education. (C. University, Ed.) New York: Teacher College Press.

Marcelo, C. (Julio de 1993). Cómo conocen los profesores la materia que enseñan. Algunas contribuciones de la investigación sobre Conocimiento Didáctico del Contenido. En L. Montero y J.M. Vez (eds), Las didácticas específicas en la formación del profesorado". Santiago de Compostela: Tórculo, 151-185.

Magnusson, S., Krajcik, J., & Borko, H. (1999). Examining Pedagogical Content Knowledge: The Construct and Its Implications for Science Education. Science & Technology Education Library, 95-132.

Park, S., & Oliver, J. S. (2007). Revisiting the conceptualization of pedagogical content knowledge (PCK): PCK as a conceptual tool to understand teachers as professionals. (S. Netherlands, Ed.) Research in Science Education, 38(3), 261-284

Pinto, J., & González, M. (2008). El conocimiento didáctico del contenido en el profesor de matemáticas: ¿Una cuestión ignorada? Educación Matemática, 20(3), 83-100.

Sanoja, J., & Ortíz, J. (2013). Conocimiento de contenido estadístico de los maestros. Probabilidad Condicionada: Revista de didáctica de la Estadística, (2), 157-164.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. Educational Researcher., 15(2), 4-14.

Schön, D. (1983). The Reflective Practitioner: How Professionals Thinking in Action (1ª ed.). New York: Basic Books.

VOL34, NÚMERO 1, AÑO 2021

HACIA EL DISEÑO DE UNA METODOLOGÍA SISTÉMICA PARA GENERAR COMUNIDADES PROFESIONALES DE APRENDIZAJE CON DOCENTES UNIVERSITARIOS DE MATEMÁTICAS

TOWARDS THE DESIGN OF A SYSTEMIC METHODOLOGY TO GENERATE PROFESSIONAL LEARNING COMMUNITIES WITH UNIVERSITY MATHEMATICS PROFESSORS

Esthela Salas-Simental, Oswaldo Morales-Matamoros, Ricardo Tejeida-Padilla, Jesús Jaime Moreno-Escobar
Instituto Politécnico Nacional, Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica Zacatenco. (México)
esthela.simental.3@gmail.com, oswmm2001@yahoo.com, rtejeidap@ipn.mx,

Resumen
En este trabajo se establecen las bases teóricas para diseñar una metodología sistémica que permita construir Comunidades Profesionales de Aprendizaje con docentes universitarios de matemáticas. A través de esquemas de codificación sistémico, se propone un refinamiento iterativo entre el análisis de la enseñanza de la matemática y los elementos descritos en la práctica docente. Por ende, se proporciona información sobre los momentos para el aprendizaje productivo y cómo éstos se pueden traducir en cambios que promuevan la calidad enseñanza-aprendizaje de las matemáticas de Nivel Superior.

Palabras clave: metodología sistémica, comunidades profesionales de aprendizaje, práctica docente

Abstract
This work establishes the theoretical bases in order to design a systemic methodology that allows building Professional Learning Communities with mathematics university professors. Through systemic decoding schemes, an iterative refinement between the analysis of mathematics teaching and the elements described in teaching practice is proposed. Therefore, the authors provide information on moments for productive learning and how they can be translated into changes that promote the teaching-learning quality of mathematics at higher education.

Keywords: systemic methodology, professional learning communities, teaching practice

Introducción

Según Fulton y Britton (2011), los países con mejores resultados en las evaluaciones de ciencias y matemáticas proporcionan sistemas de apoyo claros, consistentes y coherentes para los docentes, en gran parte porque en cada escuela trabajan buenos maestros, que ejercen su profesión con liderazgo y cuentan con el apoyo para crear una cultura de aprendizaje entre sus colegas y alumnos. Por lo cual no resulta sorpresivo encontrar diversos casos de éxito cuando estos elementos se conjugan; sin embargo, inmediatamente surgen varias interrogantes al momento de replicar estas propuestas en el día a día de la práctica docente. En aras de profundizar en estas interrogantes, en esta investigación se justifica la aplicación de dos herramientas teóricas: Metodología de Sistemas Suaves (Checkland, 2001) y Comunidades Profesionales de Aprendizaje (Little, 2002), a fin de establecer las bases para el desarrollo de una metodología sistémica que promueva cambios significativos en la práctica docente, a fin de mejorar la calidad de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas de Nivel Superior.

Por una parte, los planteamientos teóricos desarrollados alrededor de las Comunidades Profesionales de Aprendizaje (CPA), definen a éstas como un grupo de personas que comparten y cuestionan críticamente su práctica docente de una manera continua, reflexiva, colaborativa, inclusiva, orientada al aprendizaje y que promueven el crecimiento profesional de todos los involucrados (Stoll, et al., 2006). Según Vescio, et al., (2008), el trabajo colaborativo entre colegas ha tenido muy buenos resultados en diversos sistemas educativos; incluso en matemáticas (Horn, 2010). Asimismo, se ha estudiado el desarrollo y análisis de CPA con maestros de matemáticas de primaria y secundaria (Dooner, et al., 2008; Fulton y Britton, 2011; Horn, 2010; McLaughlin y Talbert, 2007; Scheneider y Kipp, 2015; Vescio, et al., 2008). Pero el desarrollo de CPA con profesores de Nivel Superior de matemáticas ha sido muy marginal, lo que nos ha motivado a fortalecer este campo desde el Paradigma Sistémico, a fin de promover entornos de enseñanza y de aprendizaje que mejoren tanto el rendimiento académico de los estudiantes como la práctica docente.

En las reuniones académicas de colegas, se habla y discuten problemas que se enfrentan en el aula, tales como el bajo rendimiento de los estudiantes en matemáticas, el desinterés en algunas materias de matemáticas y el índice de abandono durante y al final del semestre, así como el alto índice de reprobación reportado al finalizar el curso. Por ende, emerge la siguiente interrogante: ¿Qué elementos, relaciones y características debe tener una CPA de docentes de matemáticas de Nivel Superior en México que permita mejorar el desempeño académico de los estudiantes universitarios que cursan asignaturas de matemáticas?

De acuerdo con Dogan, et al., (2016); Dooner, et al., (2008); Fulton y Britton (2011); Horn (2010); McLaughlin y Talbert (2007); Popp y Goldman (2016); Scheneider y Kipp (2015) el buen establecimiento de una Comunidad Profesional de Aprendizaje tiene el potencial para gestionar el respeto, confianza y trabajo colaborativo entre los docentes, lo cual se traduce en un trabajo más eficiente en el salón de clases. Esto implica un cambio de paradigma acerca de la creencia de cómo enseñar matemáticas y un cambio en la práctica docente (Salas, 2012). Se vuelve un tema de suma importancia que las reuniones de estas comunidades tengan un propósito claro y que se relacionen con temas muy específicos de la disciplina, que no solo sea por coincidir y discutir cualquier tema; por ello, será de suma importancia que las CPA tengan objetivos claros y se expliciten las estrategias que se implementarán para lograrlos.

Por otra parte, Ramírez-Gutiérrez, et al., (2020) afirman que la Metodología de Sistemas Suaves (MSS) es una metodología de la Sistémica que ha sido ampliamente empleada y probada para resolver problemas complejos en organizaciones que involucran diversos sectores. Por ende, en esta investigación también se propone aplicar la MSS para sentar las bases que permitan desarrollar un constructo que enriquezca lo ya propuesto en las investigaciones sobre las Comunidades Profesionales de Aprendizaje, con el fin de mejorar el proceso enseñanza-aprendizaje de las matemáticas de Nivel Superior. Asimismo, con esta investigación se persigue nutrir el estado del arte en este ámbito educativo, así como promover nuevas formas de trabajo colaborativo que abonen a contestar la pregunta anteriormente planteada. Es importante mencionar que la presente investigación se encuentra en curso y que lo aquí expuesto representa los fundamentos teóricos que nos permiten sentar las bases para generar la metodología sistémica que sirva de punto de partida para desarrollar e implementar las CPA con docentes de matemáticas de Nivel Superior, que promuevan el mejoramiento del desempeño académico de los alumnos universitarios.

Marco teórico

Comunidades profesionales de aprendizaje (CPA)

El modelo desarrollado en torno a las Comunidades Profesionales de Aprendizaje (CPA) ha tenido gran auge en los niveles básicos y medio superior y ha ido evolucionando en su implementación; sin embargo, el camino no ha sido fácil. Según DuFour (2004), las intenciones son buenas, se comienza con un excelente entusiasmo que lleva a una confusión fundamental en la ejecución de los conceptos teóricos involucrados, ya que se cree que con solo tener reuniones del gremio docente será suficiente, esto, seguido de una inevitable adopción de problemas asociados a las reformas curriculares inherentes al sistema educativo. Por consiguiente, es necesario tener en consideración las siguientes bases para construir una CPA: 1. Asegurar que los estudiantes aprendan, 2. Construir una cultura de colaboración y 3. Centrarse en los resultados y objetivos. Estas tres ideas requieren de un proceso sistemático en el cual los docentes trabajen en conjunto para analizar y mejorar su práctica docente, y en donde se promueva el aprendizaje significativo y colaborativo entre sus estudiantes mediante estrategias que se adapten a la realidad del salón de clases.

Para construir la cultura de colaboración docente, Little (2002) propone enfocarse en la representación de la práctica, el trabajo colaborativo orientado al aumento de la calidad del aprendizaje y las normas de interacción y de organización.

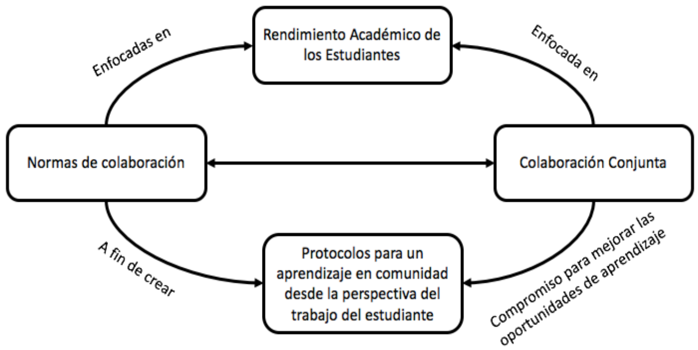
En el caso de la representación de la práctica, Dogan, et al., (2016) hacen referencia a que en el ambiente educativo convencional se requiere que los profesores de ciencias tengan un conocimiento profundo acerca del desarrollo de prácticas específicas de aprendizaje, consistentes en cómo aprenden sus estudiantes, por lo que el cambio en la práctica docente deberá verse afectado por la incorporación de técnicas instruccionales, la integración de nuevos materiales, mejoras en los planes y programas de estudio y perfeccionamientos en el proceso de enseñanza. Además de estas características, estos autores agregan otros dos factores: Conocimiento del Contenido Disciplinar, el cual refiere un grado de especialización de los docentes, y Conocimiento de Estrategias Pedagógicas, las cuales facilitan el aprendizaje de los alumnos.

El trabajo colaborativo se conceptualiza como un proceso en el cual todas las personas involucradas interactúan de manera tal que pueden diferenciar, contrastar y discutir puntos de vista propuestos en el grupo, traduciéndose estas acciones en la construcción de conocimiento.

En lo referente a las normas de interacción y de organización, Popp y Goldman (2016) encontraron cinco tipos de discurso que robustecen el trabajo en conjunto en las CPA; *interrogativo*, donde se explicitan, califican y expanden las ideas de los miembros del grupo; *propositivo*, en el cual las propuestas son necesarias para construir el conocimiento colectivo; *articulación de ideas*, donde se provee de ejemplos de estrategias de enseñanza y de aprendizaje; *de negociación*, en donde se establecen acuerdos con el propósito de dar solución a posibles conflictos que puedan presentarse; y finalmente, donde se *explica el razonamiento,* esto conlleva al escrutinio y análisis de las ideas para lograr consensuar temas complicados. Con base en lo anterior, para DuFour (2004) se vuelve un tema preponderante el que las reuniones de estas Comunidades Profesionales de Aprendizaje tengan un propósito y objetivos claros, que se relacionen con contenidos muy específicos de la disciplina para generar un ambiente de mayor interés entre los participantes, que no solo sea por reunirse y discutir cualquier tema para no caer en las malas concepciones a las que hace referencia.

En la Figura 1 se sintetizan las bases a utilizar para el desarrollo y mejoramiento de la Comunidad Profesional de Aprendizaje, con el propósito de potenciar las oportunidades de aprendizaje de los profesores de matemáticas.

Figura 1. *Desarrollo y mejoramiento de una CPA*



Como se puede apreciar, son varios los factores que se deberán considerar para la creación de Comunidades Profesionales de Aprendizaje desde el punto de vista pedagógico-didáctico. Para alcanzar el propósito de esta investigación y fortalecer este planteamiento teórico se utiliza como andamiaje algunos de los saberes del cuerpo de conocimientos de la Sistémica.

Teoría general de sistemas (TGS)

La Teoría General de Sistemas (TGS) propone soluciones a situaciones complejas en donde el Ser Humano ha tratado de buscar un orden de su realidad. Es una teoría en la cual los sistemas físicos, mentales, cognitivos, sociales y metafísicos son estudiados holísticamente. En la actualidad, el día a día se encuentra organizado a través de instituciones creadas por el Hombre, las cuales en su mayoría evidencian procesos de organización complejos que requieren mecanismos estructurados y bien definidos. Su objetivo es descubrir las dinámicas, restricciones y condiciones de un sistema, así como los principios que puedan ser discernidos y aplicados a los sistemas en cualquier nivel de anidación para lograr finalidad.

Para los fines de esta investigación, consideraremos la siguiente definición de sistema: *"Un Sistema es una reunión o conjunto de elementos relacionados"*, (van Gigch, 2017, pág. 17). Para van Gigch, los elementos de un sistema pueden ser variados dependiendo de lo que se esté estudiando; en nuestra investigación, el sistema se estructura de conceptos, objetos y sujetos interrelacionados con un propósito que conviven en un ambiente muy específico, el escolar. Los problemas que emergen de los sistemas son responsabilidad de los administradores, planificadores, analistas u otras figuras responsables del sistema ya que no son capaces de diferenciar entre mejoramiento de un sistema o el diseño de uno. El mejoramiento, transforma o cambia a un sistema de manera tal que se comporte de forma estandar o normal. En el caso del diseño, éste es un proceso creativo que estudia, interpreta y cuestiona los supuestos en los cuales se ha confeccionado el sistema. Sin embargo, las dificultades no solo recaen en la complejidad de los fenómenos de estudio, sino que todas las entidades involucradas. (Bertalanffy, 2018).

Un sistema está compuesto por diversas partes, por lo cual si conocemos el total de fragmentos y la relación que guardan entre ellos se dice que el comportamiento del problema es derivable a partir del comportamiento de las partes. *"Parece que lo primario es el comportamiento resultante de la interacción dentro del sistema; secundariamente está la determinación de los elementos a acciones que solo dependen de ellos, con lo cual se pasa a un comportamiento sumativo",* (Bertalanffy, 2018, pág. 71).

Jackson (2003) realiza una propuesta matricial que nos ayuda a identificar la relación de los participantes con la toma de decisiones y el tipo de sistema que se implementará para abordar la problemática propuesta (Tabla 1).

Tabla 1. *Matriz Contexto-Problema*

		Participantes		
		Unitario	Pluralista	Coercitivo
SISTEMA	Simple	Simple Unitario	Simple Pluralista	Simple Coercitivo
	Complejo	Complejo Unitario	Complejo Pluralista	Complejo Coercitivo

Extraído de Jackson, 2003.

Un *Sistema Simple* se caracteriza por tener un número reducido de individuos, así como un pequeño número de interacciones entre ellos, por estas causas, este tipo de sistemas se muestran un tanto cerrados a su entorno y por lo regular son estáticos. En el caso del *Sistema Complejo*, se tiene un número considerable de elementos y las interrelaciones son bastas; por lo general este tipo de sistemas interactúan activamente con su entorno y tienden a evolucionar. Respecto a las relaciones que entablan los participantes, éstas se catalogan en tres categorías: *Unitario*, en donde todos los involucrados están de acuerdo con los objetivos, comparten intereses y sus creencias y valores son compatibles; por lo cual en la toma de decisiones todos los individuos participan; *Pluralista*, los participantes tienen valores y creencias distintas, tienen diferentes intereses y objetivos, sin embargo, existen acuerdos que los llevan a lograr sus objetivos. *Coercitivo*, este tipo de relaciones están caracterizadas por el poco interés común entre los participantes, existen conflictos y el único consenso al que se puede llegar es a través del uso de la fuerza y la dominación de uno o varios grupos sobre otros.

La matriz Contexto-Problema generada por Jackson (2003), se robustece con seis tipos de metodologías que fortalecen el estudio del tipo de sistema con la caracterización de los participantes involucrados en la problemática identificada (Tabla 2).

Tabla 2. *Sistema de metodologías de sistemas*

<table>
<tr><td></td><td></td><td colspan="3">Participantes</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Unitario</td><td>Pluralista</td><td>Coercitivo</td></tr>
<tr><td rowspan="2">SISTEMA</td><td>Simple</td><td>Pensamiento de Sistemas Duros</td><td rowspan="2">Sistemas Suaves</td><td>Sistemas Emancipatorios</td></tr>
<tr><td>Complejo</td><td>Dinámica de Sistemas

Teoría de la Complejidad

Cibernética Organizacional</td><td>Sistemas Post-Modernos</td></tr>
</table>

Tomado de Jackson, 2003.

Debido a las características de la población involucrada y a las relaciones e interacciones que se proyectan del trabajo colaborativo, en esta investigación se visualiza un escenario Complejo-Pluralista, por lo cual será necesario ahondar acerca de la Metodología de Sistemas Suaves.

Metodología de sistemas suaves (MSS)

La Metodología de Sistemas Suaves (MSS), desarrollada por Checkland (2001), involucra siete etapas, las cuales se dividen en el Mundo Abstracto (1-4) y en el Mundo Real (4-7). Estas etapas describen una secuencia lógica, pero no necesariamente deben ser desarrolladas en su totalidad y en ese orden; más bien, esto dependerá de la experiencia del investigador sistemista, la naturaleza del sistema en estudio y de lo que se pretenda lograr para el mismo.

En las *dos primeras etapas* se define al problema a estudiar, comenzando por aceptar la existencia del problema, para luego interpretarlo en una forma estructurada, organizada, donde se dan a conocer las actividades e interrelaciones de los elementos que lo conforman. En la *tercera etapa* se describen ampliamente las definiciones raíz de los sistemas relevantes; en esta descripción deberá hacerse explícito el siguiente planteamiento: “un sistema necesario que permita realizar una acción x mediante y, que involucra procesos de transformación, y así llegar al objetivo z”. La construcción de estas definiciones raíz se fundamentan en seis factores: CATWOE, que hacen referencia a: Cliente (C), Actores (A), Transformaciones (T), Cosmovisión (W), Propietario (O) y Medio ambiente (E). *En la cuarta etapa*, se elaboran modelos conceptuales que representan las actividades que se realizarán en el Sistema; por lo cual existirán tantos modelos como definiciones raíz. Por la naturaleza de nuestra propuesta, en la cuarta etapa partiremos del concepto de un Sistema Formal, donde el uso de un modelo general describirá la actividad humana utilizada para verificar que los modelos construidos no sean fundamentalmente deficientes. *En la quinta etapa* se comparan los modelos conceptuales con la realidad, esto es, emergen las diferencias existentes entre lo descrito en los modelos conceptuales y lo que en realidad sucede en el Sistema. En la *sexta etapa* se proponen cambios, con base en las diferencias detectadas en la etapa anterior. Dichos cambios deberán ser evaluados y aprobados por los actores del Sistema, de tal manera que se garantice la viabilidad de dichos cambios. *En la séptima etapa* se ponen en marcha los cambios propuestos, diseñados para lograr el objetivo planteado inicialmente.

De lo anterior, se observa que la MSS nos permite darle estructura a algo que no lo tiene, esto es, sitúa el problema de tal manera que sus elementos internos y externos son identificados y toman relevancia en el Sistema (Ramírez-Gutiérrez, et al., 2020).

Método

Para la conformación de la CPA se requiere la participación de docentes de nivel universitario y que estén impartiendo clases de matemáticas. La organización de sesiones grupales en una primera instancia permitirá realizar un diagnóstico acerca de las creencias y concepciones de los profesores acerca de la enseñanza y del aprendizaje de la matemática, para luego dar pauta a indagar acerca de la cultura de colaboración que ejercen los profesores en sus centros de trabajo, tanto con sus colegas como con las autoridades de la escuela. Todo esto desde el siguiente enfoque metodológico que se muestra en la tabla 3.

Tabla 3. *Enfoque metodológico propuesto*

		Comunidades Profesionales de Aprendizaje			
		Garantizar que el estudiante aprenda	Cultura de colaboración docente	Centrarse en los resultados y objetivos	
Metodología de Sistemas Suaves	Problema no estructurado	No se percibe el bajo rendimiento académico como consecuencia de la práctica docente.	La comunidad docente se reúne solo para tratar asuntos laborales.	Los docentes trabajan de forma aislada, atendiendo a los objetivos del currículo de manera individualizada.	Se concibe a todos los actores del proceso de enseñanza y de aprendizaje un tanto ajenos al quehacer escolar, es por esa razón que no es explícito o evidente la existencia de una problemática en este entorno.
	Problema expresado	Se hace evidente la necesidad de mejorar el rendimiento académico de los estudiantes.	Los docentes comienzan a poner sobre la mesa problemáticas asociadas a su práctica docente y que influyen en la forma en la que imparten sus clases.	El currículo se hace presente. El profesorado explicita los objetivos de cada unidad de aprendizaje y comienzan a surgir propuestas de cómo lograrlas.	Los involucrados en el proceso de enseñanza y de aprendizaje hacen consciente y evidente la existencia de diversas problemáticas que aquejan su desarrollo dentro del ámbito educativo.
	Definiciones raíz	C: Estudiantes A: Docentes y autoridades escolares. T: Se busca transformar las estrategias de enseñanza y de aprendizaje implementadas en el salón de clases. W: Mejoramiento del rendimiento académico de los estudiantes. O: CPA E: Ambiente escolar y extraescolar.	C: Docentes A: Docentes y autoridades escolares. T: Se busca transformar la práctica docente a través del trabajo colaborativo y del crecimiento profesional. W: Mejor servicio profesional por parte de los docentes y oportunidades de crecimiento profesional. O: CPA E: Ambiente escolar y extraescolar.	C: Estudiantes A: Docentes, autoridades escolares y Modelo Educativo vigente. T: Se pretende alcanzar los objetivos planteados en el currículo. W: Mejoramiento del rendimiento académico de los estudiantes, crecimiento profesional docente e infraestructura escolar adecuada. O: CPA E: Ambiente escolar y extraescolar.	Para cada una de las etapas será necesario definir nuestros factores CATWOE. Lo presentado es solo la generalidad del Sistema.
	Modelos conceptuales (MC)	Describirán lo que el Sistema necesita hacer en cada etapa de manera ideal. Cómo es que cada actividad de los actores deberá estar conectada y relacionada unas con otras de manera lógica. Estos modelos mostrarán lo que debe suceder para lograr los objetivos planteados en el punto anterior.			Se establecen a partir de las Definiciones Raíz

<table>
<tr><td></td><td></td><td colspan="3">Comunidades Profesionales de Aprendizaje</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Garantizar que el estudiante aprenda</td><td>Cultura de colaboración docente</td><td>Centrarse en los resultados y objetivos</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Comparación de los MC con la realidad</td><td colspan="3">Cada MC deberá explicitar propósito, funcionamiento, proceso de toma de decisiones, componentes que interactúan y los recursos con los que se cuentan para luego contrastar los resultados con la realidad; si es que los objetivos fueron alcanzados o no. Los integrantes de la CPA tendrán la oportunidad de analizar a profundidad su actuar dentro del salón de clases.</td><td>Para cada etapa de la CPA, deberán analizarse los resultados de las propuestas emitidas de tal manera que permitan identificar áreas de éxito o de oportunidad.</td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td>Diseño de cambios</td><td colspan="3">Con base en los resultados obtenidos de las etapas previas es que se propondrán cambios en caso de ser necesario. Nótese que los miembros de la CPA deberán analizar a profundidad los aciertos y errores de cada una de las propuestas implementadas en el proceso de enseñanza y de aprendizaje.</td><td rowspan="2">La reestructuración de propuestas no será una actividad trivial, es por ello por lo que, en caso de ser necesario, la Comunidad deberá tener extremo cuidado en rediseñar y volver a implementar los cambios sugeridos en los MC.</td></tr>
<tr><td>Implementación de los cambios</td><td colspan="3">En caso de que algún cambio haya sido sugerido y diseñado, éste deberá implementarse en común acuerdo de todos los integrantes de la CPA, para luego volver a contrastar con la realidad, y en caso de requerir nuevamente algún ajuste realizarlo.</td></tr>
</table>

Fuente: elaboración propia.

Derivado de la propuesta anterior, se puede observar que las reuniones detonarán una reflexión sobre la práctica docente; en donde el trabajo colaborativo es el eje rector de la Comunidad, teniendo siempre como objetivo el aumento de la calidad del aprendizaje y las normas de interacción y de organización entre pares. Los datos arrojados de las entrevistas, de las observaciones de las reuniones y del seguimiento de la implementación de los instrumentos para la enseñanza de la matemática propuestos por los docentes permitirán estudiar la viabilidad de los Modelos Conceptuales propuestos en nuestra metodología, o bien, si será necesario realizar cambios o adecuaciones acordes al contexto de cada entorno estudiado.

Las entrevistas y observaciones se interpretarán mediante tres esquemas de codificación: 1) para comprender las respuestas de los participantes en las entrevistas, 2) para examinar las observaciones en su enseñanza y 3) para capturar oportunidades de aprendizaje en las CPA. Dichos esquemas se desarrollarán con él un proceso de refinamiento iterativo entre el análisis y síntesis de la enseñanza de los profesores y los elementos descritos en las reuniones que reflejan un cambio en la práctica docente con base en las etapas 4, 5, 6 y 7 de la MSS propuesta por Checkland (2001).

Conclusiones

Al revisar y estudiar diversas propuestas de investigación acerca de la creación, implementación y estabilización de las Comunidades Profesionales de Aprendizaje (CPA), se ha encontrado que la mayoría de ellas se han enfocado en estudiar este fenómeno en el Nivel Básico y Medio Superior; sin embargo, poco se ha estudiado en educación universitaria también conocida como Nivel Superior. Además, la inclusión del Paradigma Sistémico por medio de la Metodología de Sistemas Suaves (MSS) no ha sido expuesta como tal en este tipo de investigaciones; por ende, las bases teóricas planteadas con anterioridad nos permitirán expandir las propuestas de investigación y con ello incidir en el salón de clases, mejorando y promoviendo la reflexión de la práctica docente como detonante del éxito académico de los alumnos.

El análisis y síntesis de estas corrientes teóricas da pie a la presente investigación, a través de la cual se pretende combinar las teorías y conceptos alrededor de las CPA y de la MSS como elementos complementarios que nos permitirán resolver problemas asociados al entorno educativo del Nivel Superior, en específico, en el área de matemáticas. La forma de trabajo docente deberá cambiar progresivamente, pero de una manera estable, a fin de no crear conflicto entre los participantes. Tal como lo refiere van Gigch (2017), los agentes de cambio deberán ganarse la confianza de los receptores, con el objetivo de que todos los involucrados puedan desempeñar su tarea, por lo cual deberán compartir un sistema de valores y expectativas que aseguren el consentimiento y la aprobación de las propuestas a implementarse.

Retomando lo estudiado por Little (2002), se hace notar que el grado o nivel de reflexión al que lleguen los miembros de la CPA será fundamental para proponer cambios significativos en los modelos conceptuales del Sistema, y con ello se logre una renovación del actuar docente y estudiantil en el aula de clases. El incursionar en una CPA no es un trabajo sencillo, requerirá de compromiso por parte de las autoridades educativas, los docentes y los alumnos, de tal manera que se genere una cultura de cooperación y de organización que propicie el trabajo colegiado y el aprendizaje entre pares.

El desarrollo de una CPA servirá para promover la calidad de la enseñanza, por lo que todos los actores del Sistema deberán ser conscientes de que la responsabilidad del éxito de los estudiantes es compartida y que no solo depende del desempeño del docente. A través de la implementación de este tipo de metodologías podemos hacer mucho por enseñar a nuestros alumnos a convertirse en profesionales excepcionales.

Referencias bibliográficas

Bertalanffy, L. (2018). *Teoría general de los sistemas: fundamentos, desarrollo, aplicaciones.* México: FCE.

Checkland, P. (2001). *Systems Thinking, Systems Practice*. Wiley, Chichester.

Dogan, S., Pringle, R., y Mesa, J. (2016). The impacts of professional learning communities on science teachers´knowlwdge, practice and student learning: a review. *Professional Development in Education, 42*(4), 569-588.

Dooner, A.-M., Mandzuk, D., y Clifton, R. A. (2008). *Stages of collaboration and the realities of professional learning communities*. Teaching and Teacher Education, 564-574.

DuFour, R. (2004). What is a "Professional Learning Community?". *Educational Leadership, 61*(8), 6-11.

Fulton, K., y Britton, T. (2011). *STEM Teachers in Professional Learning Communities.* Washington, DC.: National Commission on Teaching and America´s Future.

Horn, I. S. (2010). *Teaching replays, teaching rehearsals, and re-visions of practice: Learning from colleagues in a mathematics teacher community*. Teachers college Record, 112(1), 225-259.

Jackson, M. (2003). Systems Thinking: Creative Holism for Managers. Chichester: John Wiley & Sons.

Little, J. (2002). *Locating learning in teachers´ communities of practice: Opening up problems of analysis in records of everyday work*. Teacher and teaching Education, 917-946.

McLaughlin, M. W., y Talbert, J. E. (2007). *Building professional communities in high schools: Challenges and promises practices.* In L. Stoll, & K. Seashore Louis, Professional learning communities: Divergence, depth and dilemmas. (pp. 151-165). Berkshire, England: Open University Press.

Popp, J., y Goldman, S. (2016). Knowledge building in teacher professsional learning communities: Focus of meeting matters. *Teaching and Teacher Education, 59*, 347-359.

Ramírez-Gutiérrez, A., Cardoso-Castro, P., y Tejeida-Padilla, R. (2020). A methodological proposal for the complementarity of the SSM and the VSM for the analysis of viability in organizations. *Systemic Practice and Action Research*, https://doi.org/10.1007/s11213-020-09536-7.

Salas, E. (2012). *Un estudio de las creencias e implicaciones de evaluación educativa en matemáticas de secundaria.* CDMX, México: Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.

Scheneider, A., y Kipp, K. H. (2015). *Professional growth through collaboration between kindergarten and elementary school teachers.* Teaching and Teacher Education, 37-46.

Stoll, L., Bolam, R., McMahon, A., Wallace, M., y Thomas, S. (2006). *Professional Learning Communities: A review of the literature*. Journal of Educational Change, 221-258.

van Gigch, J. (2017). *Teoría General de Sistemas.* México: Trillas.

Vescio, V., Ross, D., y Adams, A. (2008). *A review of research on the impact of professional learning communities on teaching practice and student learning*. Teaching and Teacher Education, 80-91.

VOL34, NÚMERO 1, AÑO 2021

FORMACIÓN POSGRADUADA EN EDUCACIÓN ESTADÍSTICA EN LATINOAMÉRICA

GRADUATE PROGRAMS IN STATISTICS EDUCATION IN LATIN AMERICA

Liliana Tauber, Lucía Zapata-Cardona, Blanca Ruiz Hernández, Hugo Alvarado Martínez, Mauren Porciúncula
Universidad Nacional del Litoral. (Argentina), Universidad de Antioquia. (Colombia), Tecnológico de Monterrey. (México), Universidad Católica de la Santísima Concepción. (Chile), Universidad Federal de Río Grande. (Brasil)
estadisticamatematicafhuc@gmail.com, lucia.zapata1@udea.edu.co, bruiz@tec.mx, alvaradomartinez@ucsc.cl, mauren@furg.br

Resumen
En este grupo de discusión se comparte el esfuerzo de docentes, académicos e investigadores para hacer evidente el panorama actual de la formación posgraduada en Educación Estadística. Se busca conocer experiencias de formación, líneas y grupos de investigación, estructuras de programas académicos, y estrategias de financiación. Se comparten experiencias en cinco países latinoamericanos con la finalidad de potenciar la movilidad internacional y el fortalecimiento de la comunidad académica en Educación Estadística. Este grupo es convocado por la Red Latinoamericana de Investigación en Educación Estadística (RELIEE), gestada en la RELME-27 y con presencia en cada RELME a partir de entonces.

Palabras clave: formación posgraduada, investigación colaborativa, educación Estadística

Abstract
In this discussion group, the goal is to share the effort of teachers, scholars and researchers to make evident the current panorama of graduate programs in Statistical Education. The aim is to learn about experiences in graduate programs, lines and research groups, academic program structures, and financing strategies. Experiences are shared in five Latin American countries in order to promote international mobility and the strengthening of the academic community in Statistical Education. This group is convened by the Latin American Research Network in Statistical Education (RELIEE), developed in RELME-27 and with a presence in each RELME thereafter.

Keywords: Graduate programs; Collaborative research; Statistical Education

Introducción

La formación posgraduada en Latinoamérica ha sido considerada una herramienta esencial para consolidar y movilizar la capacidad científica de los países, fortalecer la innovación y dar respuesta a las demandas sociales (Luchilo, 2010). No obstante, en Educación Estadística aún se requieren esfuerzos para fortalecer la comunidad. En este trabajo se busca compartir información sobre distintas dimensiones asociadas a esta problemática e invitar a la discusión de representantes de cinco países de Latinoamérica. En la primera parte se presentan las problemáticas más apremiantes de los posgrados en Educación Estadística, luego se presentan los enfoques teóricos, se hace una descripción de la metodología seguida para producir información y en la última parte se presenta un panorama general de los posgrados en Educación Estadística en cada uno de los países participantes en la discusión. En este sentido, este escrito se constituye en un estado del arte que puede ofrecer a la comunidad académica una importante descripción sobre las condiciones actuales de la Educación Estadística en Latinoamérica.

Planteamiento del Problema

En Colombia la formación posgraduada busca incrementar la capacidad investigativa, científica y tecnológica del país (Anzola Montero, 2011). No obstante, los esfuerzos que se hacen para estimular la formación posgraduada no logran atender las necesidades reales del país. Cuando se compara el número de doctores graduados en Colombia con el número de doctores en otros países de la región la conclusión es que el capital humano de alto nivel del país aún es bajo. En el año 2012, Colombia graduó 5 doctores por millón de habitantes mientras países como Brasil y México graduaron 70 y 42 respectivamente (UNESCO, 2018). Además de la falta de cobertura, los programas de posgrado en Colombia son pocos y costosos, tienen limitadas opciones de financiación y están ubicados en grandes ciudades que reducen cualquier posibilidad de desarrollo para las regiones. Estas limitaciones también son ciertas para los posgrados en Educación Estadística, pues es un campo científico que se encuentra en desarrollo y hereda las problemáticas de la formación posgraduada.

Por otro lado, la Educación Estadística en los distintos niveles educativos de Argentina, es muy incipiente, por lo que, a nivel de carreras de grado, encontramos que la mayoría de los profesorados del país brindan escasa o nula formación en el área (Tauber, 2017). Este mismo panorama se traslada a los posgrados, y así encontramos diversos programas sobre educación matemática, didáctica de la matemática, pedagogía, didáctica de las ciencias, enseñanza de las ciencias, entre otras, muchos de los cuales no tienen ningún curso o seminario sobre Educación Estadística.

Igualmente, hoy en día se observa un interés que crece poco a poco en relación con la Educación Estadística, lo cual parece ser un efecto de la inclusión de la estadística en el diseño curricular del nivel secundario que ha movilizado a los docentes a buscar distintas alternativas de formación. Este movimiento se condice con lo expresado en Aguilar y Lamfri (2016), quienes indican que parte de las demandas de posgraduación en Argentina, se han dado por las necesidades de formación de docentes en el marco de las políticas de educación superior que se empezaron a implementar a partir de 1995. Esta situación ha provocado la inclusión de la Educación Estadística en algunos posgrados, especialmente en aquellos que se desarrollan en universidades donde hay líneas de investigación en el área. Asimismo, aún se observan algunos esfuerzos aislados en los que se brindan cursos de posgrado sobre Educación Estadística que no están insertos en ningún programa de posgrado.

En Chile, la formación posgraduada en la línea de Educación Estadística se ha originado en programas de posgrado de educación matemática y didáctica de la matemática, producto de: a) la necesidad de abordar la problemática sobre las dificultades de enseñar estadística y probabilidad incluso en conceptos básicos, b) la importancia de generar propuestas de enseñanza que propicien la actualización docente y la mejora de la actitud hacia la probabilidad, estadística y su enseñanza, c) la renovación del marco curricular en el sector de matemática, eje de datos y probabilidades. En la educación secundaria no se profundiza en los conceptos, existiendo escasas experimentaciones concretas o simuladas en escenarios de incertidumbre, y en los establecimientos educacionales los profesores de matemática están impartiendo clases en los cursos finales de educación primaria, debido a su formación específica. Además, en la práctica profesional no se enfatiza la importancia de las aplicaciones del razonamiento estadístico en diversos contextos (Alvarado, et al., 2018).

Es así, que predomina el carácter profesionalizante de los posgrados en Chile con un perfil orientado a profesores de matemática y profesores de educación básica, con la gran dificultad de financiamiento de los postulantes. Esto conlleva tensiones académicas en los formadores de profesores pues un académico debe promover el desarrollo de actividades de docencia, gestión, vinculación con el medio y con énfasis en la investigación debido a los compromisos de acreditación institucional.

En el caso de México, los principales problemas de su sistema educativo se pueden clasificar en problemas de cobertura, de calidad, de “gestión inadecuada” y de recursos insuficientes (Ibarrola, 2012). Con relación a los problemas de calidad ya no se mide sólo con estadísticas de reprobación y deserción, sino a partir de pruebas estandarizadas tales como ENLACE, EXANI, EXCALE a nivel nacional o PISA de la OCDE, a nivel internacional, entre otros. Sin embargo, los resultados no han sido muy alentadores, pues México ocupó el último lugar en ciencias, lectura y matemáticas, en 2015, de 34 países que pertenecían a la OCDE (2016). Como una forma de reaccionar ante estos problemas ha sido el aumento creciente de posgrados en educación con el propósito de ofrecer al profesor dominio de contenido, capacidad de leer investigación y algunos posgrados incluso de hacer investigación e innovación. Dentro de estos posgrados se ubican los que incluyen a la didáctica de la estadística. Sin embargo, aún se lucha por un espacio propio de desarrollo. Existe la creencia casi generalizada de que la Educación Estadística puede ser abordada desde los marcos teóricos de la educación en general o bien desde la educación matemática, cuando en realidad la probabilidad y estadística tienen su problemática muy particular con marcos teóricos y metodológicos propios. Por otra parte, el problema también reside en la poca atención que de hecho se le da a la estadística en el sistema escolar mexicano y toda Latinoamérica. Según la UNESCO, aproximadamente, sólo el 16% del tiempo de la enseñanza de las matemáticas se dedica a la estadística y de este tiempo, la mayoría se va sólo en el estudio de tablas y gráficos en detrimento de la probabilidad y de la resolución de problemas usando estadística (Ruiz, 2014).

Enfoques teóricos

En este apartado se presentan los enfoques teóricos que han orientado las tesis de posgrado en los diferentes programas de Educación Estadística de los cinco países que participan en esta discusión. En su orden aparecen Colombia, Argentina, Chile, México y Brasil.

En Colombia se han orientado tesis de especialización, maestría y doctorado en la línea de Educación Estadística atendiendo a diferentes enfoques teóricos. Aunque no hay un enfoque teórico predominante, estos se corresponden con las líneas de trabajo que orientan los diferentes grupos de investigación y con las fortalezas de los investigadores que apoyan dichas líneas de investigación. Entre los enfoques teóricos que aparecen en las tesis dirigidas en la línea de Educación Estadística se encuentran: educación matemática crítica (Skovsmose, 1994/1999), teoría de la práctica social (Lave y Wenger, 1991), constructivismo radical (Glasersfeld, 1995), matemática culturalmente relevante (Gutstein, 2006) y experimentos de enseñanza (Steffe y Thompson, 2000).

En los cursos o seminarios sobre Educación o Didáctica de la Estadística, que se ofrecen en los posgrados argentinos, se desarrollan líneas de investigación que se centran en estudios didácticos de la probabilidad, otros abordan problemáticas asociadas con el razonamiento inferencial informal, con la construcción del sentido estadístico o se centran en el estudio del pensamiento estadístico crítico. Asimismo, los enfoques didácticos más utilizados son la teoría de las situaciones didácticas (Brousseau, 2003), el enfoque ontosemiótico (Godino, 2013) o la educación matemática crítica (Skovsmose, 1994/1999). Estas problemáticas, así como los enfoques didácticos adoptados, están en relación con las líneas de trabajo planteadas en los programas de investigación existentes en el país.

Las tesis derivadas de los programas de posgrado en Chile no presentan un enfoque teórico sobresaliente, algunas han utilizado el enfoque ontosemiótico (Godino, 2013) y la teoría de las situaciones didácticas (Brousseau, 2003). Los marcos de referencia predominante son la formación de profesores, lo siguen los enfoques de la probabilidad en la enseñanza, estudio de clases, ideas fundamentales de la estadística, estadística por proyectos, razonamiento probabilístico, actitudes hacia la probabilidad y su enseñanza, y conocimiento profesional para la enseñanza.

En el caso de México, las investigaciones realizadas por trabajos de tesis de posgrado no tienen un marco teórico único. Sin embargo, predominan los marcos conceptuales de la Educación Estadística, le sigue el enfoque ontosemiótico (Godino, 2013), la teoría de situaciones didácticas (Brousseau, 2003), la teoría antropológica de lo didáctico (Chevallard, 1999) y la teoría Socioepistemológica de la matemática educativa (Cantoral, 2013), entre otros.

En Brasil, las tesis de posgrado se desarrollan predominantemente en programas de educación matemática, educación y educación y ciencias. No es posible generalizar un enfoque teórico y metodológico. No obstante, las tesis y disertaciones producidas en Educación Estadística se pueden categorizar en: metodología, didáctica de la enseñanza de estadística, probabilidad, combinatoria, utilización de TIC, materiales y otros recursos didácticos en la enseñanza-aprendizaje de estadística / probabilidad / combinatoria; cognición y psicología en la Educación Estadística; actuación / formación de profesores que enseñan estadística / probabilidad / combinatoria; concepciones, competencias, percepciones y representaciones; análisis de desempeño, evaluación e instrumentos de evaluación; currículo en la enseñanza de estadística / probabilidad / combinatoria; prácticas movilizadas y constituidas por estudiantes en el aula y / o en actividades educativas; e historia, filosofía, epistemología y revisión de la literatura.

Metodología

Para recoger la información para esta discusión se diseñó un instrumento de indagación que incluía información de los programas de posgrado en Educación Estadística en los cinco países participantes, fuentes de financiación, enfoques teóricos prominentes en los programas, producción académica entre otros. El instrumento fue distribuido a algunos coordinadores de los diferentes programas en los cinco países, en otras ocasiones se hizo entrevista telefónica con los coordinadores de los programas y en otras oportunidades se acudió a la página web del programa y a bases de datos.

Programas de Posgrado en Latinoamérica

Colombia, actualmente, cuenta con múltiples programas de posgrado que apoyan la línea de Educación Estadística a nivel de especializaciones, maestrías y doctorados. Esta línea de investigación se desarrolla dentro de programas con denominaciones tan variadas como educación, psicología, matemáticas, estadística, docencia de las matemáticas, educación matemática, entre otros. Aunque la línea de investigación en Educación Estadística se encuentra en estado germinal, se han orientado tesis en diferentes tópicos tales como: formación de profesores, estadística culturalmente relevante, inferencia, desarrollo de conceptos estadísticos y recursos didácticos (Zapata-Cardona y Marrugo, 2019). Los programas de especialización tienen duración de un año, los de maestría dos años y los de doctorado pueden ir desde tres a cinco años. Como parte de la formación posgraduada se consideran pasantías de investigación que pueden ser de carácter nacional o internacional. Para especialización y maestría las pasantías son opcionales, pero para los doctorados es un requisito de formación.

La financiación para los estudiantes de posgrado proviene de diferentes fuentes a saber: becas del gobierno de Colombia para la formación de alto nivel (COLCIENCIAS), becas de los gobiernos regionales para la formación posgraduada de profesores, comisiones de estudios, becas de las universidades para los estudiantes con excelencia académica, y una gran parte de autofinanciación de los estudiantes a través de créditos educativos del ICETEX (Instituto Colombiano de Crédito Educativo) y Colfuturo.

La formación posgraduada en Educación Estadística en Colombia afronta varios retos. Es necesario generar condiciones para ampliar la oferta en la formación posgraduada que contribuya a solucionar los problemas de acceso, permanencia y cobertura. Además, es necesario mejorar las fuentes de financiación que hasta el momento son muy limitadas (Anzola Montero, 2011). También es necesario fortalecer la internacionalización de los doctorados, la articulación de los programas en redes y alianzas estratégicas (Jaramillo Salazar, 2009) y en ese sentido el apoyo de la comunidad latinoamericana se torna esencial.
En Argentina, los posgrados que incluyen algún espacio curricular sobre Didáctica o Educación Estadística o aquellos que tienen línea de investigación o han desarrollado alguna tesis en el área, reciben diferentes nombres: Maestría en enseñanza de las ciencias naturales y experimentales, Maestría en didácticas específicas, Maestría en enseñanza de la matemática en el nivel superior, Doctorado en pedagogía, Doctorado en educación. Por otra parte, existen especializaciones en Didáctica de la matemática ofrecidas por diversas universidades públicas. Además, se ofrece una especialización interinstitucional, en la que los estudiantes pueden realizar cursos en cualquiera de las sedes de las universidades que acompañan el programa.

Por último, se tiene la especialización en enseñanza de la matemática en el nivel secundario, que se ofreció de manera virtual desde 2014 hasta 2018, en la plataforma *Nuestra Escuela*, dependiente del Instituto Nacional de Formación Docente (INFoD). La misma fue el primer espacio de posgrado dirigido exclusivamente a docentes en ejercicio en el que se incluyó un módulo sobre Educación Estadística (Tauber, 2018). Todas las especializaciones mencionadas ofrecen o han ofrecido espacios curriculares sobre Educación Estadística. En estos casos, los estudiantes deben realizar un trabajo final integrador y actualmente, hay diversos trabajos que se han desarrollado en el marco de la Educación Estadística. En cuanto a la producción de tesis sobre Educación Estadística podemos indicar que, al día de hoy, encontramos tres tesis de maestría culminadas y, cuatro tesis de maestría y dos doctorales en ejecución centradas en distintas temáticas del área.

Por último, las líneas de investigación consolidadas que se desarrollan en algunas de las universidades de Argentina, se centran en el estudio de la dimensión político-social de la estadística, la enseñanza de la estadística en ingeniería y el razonamiento inferencial informal en la educación secundaria y superior. La financiación en estos posgrados es muy variada, en muchos casos, los estudiantes de posgrado solventan su carrera con financiación propia y sólo en aquellos casos que trabajan en las universidades nacionales, disponen de becas propias de cada universidad destinadas al fortalecimiento en la formación de sus propios docentes.

Actualmente, Chile cuenta con tres programas de doctorado y nueve de maestría en Educación Matemática (ocho situados en universidades tradicionales y una privada). Las universidades tradicionales —pertenecientes al Consejo de Rectores de universidades de Chile— son las que realizan investigación y docencia. De los nueve posgrados cinco están ubicados en dependencias de las facultades de educación. Las tres instituciones con doctorado y maestrías en educación matemáticas se ubican en las facultades de ciencias básicas o de ciencias. Además, seis de los posgrados se desarrollan en regiones. En estos programas, la investigación en didáctica de la matemática es un multiproceso de desarrollo continuo en el que intervienen una dimensión interna como disciplina científica y una dimensión externa orientada a la comunidad (Parraguez, 2018).

Los programas de doctorado son los que presentan posibilidad de intercambio académico, otorgando becas tales como: becas de exención de arancel, beca de mantención, beca de manutención para extranjeros, beca de participación en eventos científicos, beca tesistas (proyectos FONDECYT). El carácter de los posgrados de maestría es mayoritariamente profesionalizante, sólo dos de las nueve maestrías son de tipo académico, y se imparte anualmente. La duración del programa de doctorado es de seis a ocho semestres y la de maestría de cuatro a seis semestres, con dedicación semipresencial de los estudiantes. El perfil de los programas se enfoca en diversos niveles y está orientado principalmente a profesores de matemática y profesores de educación básica. Las tesis de Educación

Estadística se enmarcan en líneas de investigación tales como la formación de profesores, didácticas específicas, resolución de problemas y modelación, desarrollo del pensamiento matemático (estocástico).

Una limitación es la dificultad de conformar claustro académico con investigadores en Educación Estadística en los posgrados, de esta manera los desafíos no son menores para los investigadores interesados en este campo científico. Se debe avanzar en producir conexiones de la investigación y docencia en la educación superior, propiciar la vinculación de investigadores con la institución escolar para fomentar la formación en la alfabetización en estadística y probabilidades, y generar redes de jóvenes investigadores en Educación Estadística.

En el caso de México, el 41.7% de los programas de posgrados están catalogados como pertenecientes al área de ciencias sociales, el 24.5% a las humanidades y ciencias de la conducta, y sólo el 18.7% a la educación (Bonilla, 2015). Dentro de estos programas de posgrado, el 8% (150) son especialidades, el 75% (1 405) son maestrías y el 17% (309) son doctorados. Un dato a destacar es que el 70% de estos posgrados son de sostenimiento privado. Se identificaron 43 programas de posgrado cuyos nombres aluden a la educación en matemáticas (es decir, el 2.3% de los posgrados en educación). De estos, tres son especialidades (una en Programa Nacional de Posgrados de Calidad - PNPC), 37 son maestrías (13 en PNPC) y tres son doctorados (2 en PNPC). De los programas de maestría y doctorado en el Programa Nacional de Posgrados de Calidad en educación matemática, diez tienen líneas o sub líneas declaradas en probabilidad y estadística o bien, alguna frase que aluda a la investigación en probabilidad y estadística dentro de sus líneas declaradas.

Particularmente, con relación a Educación Estadística, en México se identificaron sólo siete programas de posgrado que tienen declarada la línea de investigación en Educación Estadística como prioritaria, tres doctorados y cuatro maestrías. Cinco de ellos —dos doctorados y tres maestrías— están clasificados como posgrados de calidad por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología-CONACYT. Cuatro de esos siete programas tienen una alta producción en la línea de probabilidad y estadística y son en los que se concentra la mayor producción en esta línea en México. Sin embargo, se identifican otros 17 programas de posgrado que producen investigación en Educación Estadística eventualmente, sin ser línea de investigación prioritaria, aunque la producción por programa es relativamente baja. La formación posgraduada en Educación Estadística en México es aún incipiente, como lo muestra el poco número de posgrados que la incluye como línea prioritaria de investigación.

En Brasil, hay 16 programas de posgrado donde pueden ser desarrolladas investigaciones en el área de la Educación Estadística. No obstante, los programas reciben múltiples nombres tales como: maestría profesional, educación matemática, y enseñanza de ciencias y matemáticas. Las líneas de investigación son: procesos de enseñanza y aprendizaje en la escuela, en la universidad y en el laboratorio de investigación, las tecnologías educativas en el proceso de aprendizaje; enseñanza de matemáticas en la educación básica; formación de profesores de la educación básica; conceptos, procesos y prácticas de enseñanza y aprendizaje; contenido y experimentación para la enseñanza de matemáticas; tecnologías en la educación en ciencias y matemáticas; enseñanza y aprendizaje en ciencias y matemáticas; enseñanza y aprendizaje en estadística y probabilidad; procesos de enseñanza aprendizaje en educación matemática; enseñanza de matemáticas; metodología de la enseñanza de las matemáticas; procesos de enseñanza y aprendizaje en educación matemática; metodologías y prácticas de enseñanza de ciencias y matemáticas; y enseñanza y aprendizaje de matemáticas y estadística.

Conclusiones

En Latinoamérica existen diversos programas de posgrado que desarrollan la línea de investigación en Educación Estadística, sin embargo, no siempre están declaradas formalmente como tal, lo que provoca un desconocimiento de su existencia por parte de la comunidad interesada. Al mismo tiempo, la introducción de la probabilidad y la estadística en el currículo escolar en diversos países latinoamericanos genera la necesidad de conocimiento derivado de la investigación, así como de investigar los problemas propios de la región en esta área. Es necesario conocer y difundir los diversos programas con los que se cuenta y, a la vez, debatir alrededor de la investigación que se tiene y de aquellas líneas que requieren ser fortalecidas para perfilar los retos y desafíos que se nos plantean como comunidad.

Como característica llamativa de estos programas es la ausencia de una denominación común y muchas veces se encuentran ocultos bajo titulaciones generales dentro de facultades de educación, psicología, ciencias exactas y demás. La comunidad académica tiene el gran reto de visibilizar estos programas y para ello la colaboración, la movilidad y la internalización se tornan estratégicas. Interesante también es resaltar la gran variedad en los enfoques teóricos y metodológicos dentro de los cuales se orientan las tesis en los programas de posgrado en Educación Estadística. Esto sugiere apertura, riqueza y variedad en los académicos que apoyan el fortalecimiento de estos programas. No obstante, un problema crítico en el área está relacionado con la falta de cobertura que es imperioso revisar para hacer el área más accesible a los potenciales interesados. Ampliar la cobertura podría constituirse en un instrumento para el desarrollo de la región.

La discusión en este grupo evidenció que la región latinoamericana tiene desarrollos dispares en términos de formas de financiación para los estudiantes interesados en los programas de formación de alto nivel. Mientras países como México cuentan con una amplia oferta de becas para apoyar la formación posgraduada de los estudiantes, otros países de la región tienen tan limitadas oportunidades de financiación que los estudiantes terminan por auto financiar sus programas. Esta es una situación desventajosa para el desarrollo de la capacidad científica de los países y es necesario explorar estrategias de cooperación para cerrar estas brechas.

Las discusiones de las secciones precedentes revelan que Latinoamérica tiene desarrollos desiguales en la consolidación de la Educación Estadística como campo científico. La colaboración entre académicos latinoamericanos es una posibilidad para fortalecer la formación posgraduada en Educación Estadística y para atender los retos actuales del campo. También se logró mostrar que la formación posgraduada en Educación Estadística en Latinoamérica se encuentra en su estado germinal en comparación con países que llevan el liderazgo en el área tales como Nueva Zelanda, Estados Unidos y España. Es claro que la comunidad académica latinoamericana enfrenta un importante desafío en el fortalecimiento de la formación de alto nivel en Educación Estadística

La investigación en Educación Estadística crece día a día en todo el mundo y nuestra región no es la excepción, pero tanto los resultados obtenidos de proyectos de investigación como de tesis de posgrado en el área, aún tienen poca difusión y por ende poca aplicación en las carreras de posgrado. Esta realidad torna imperioso y de suma relevancia el trabajo conjunto entre los investigadores de distintas regiones y/o países, de tal modo que poco a poco la disciplina vaya siendo reconocida como un campo que tiene sus propias problemáticas, las cuales es necesario conocer para tratar de buscar soluciones que deriven en una mejor formación de los profesionales.

Referencias bibliográficas

Aguilar, L. y Lamfri, N. (2016). *Los posgrados en Argentina, Brasil y Paraguay: aproximaciones comparadas en contextos de evaluación de la calidad de la educación superior*. Córdoba: Encuentro Grupo Editor.

Alvarado, H., Estrella, S., Retamal, L., y Galindo, M. (2018). Intuiciones probabilísticas en estudiantes de ingeniería: implicaciones para la enseñanza de la probabilidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 21*(2), 131–156.

Anzola Montero, G. (2011). Realidad de los posgrados en Colombia y su situación frente a la reforma de la ley 30. *Revista U.D.C.A Actualidad & Divulgación Científica 14*(2) 3–5.

Bonilla, M. (2015). *Diagnóstico del Posgrado en México*. Ciudad de México: Consejo Mexicano de Estudios de Posgrado A. C. (COMEPO).

Brousseau, G. (2003). Recherches sur l'enseignement des probabilités et de la statistique: résumé des travaux de l'IREM de BORDEAUX 1971 à 1974, Francia. Recuperado de: http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2011/03/03-7e-R%C3%A9sum%C3%A9-des-travaux-de-lIREM-de-Bx-stat.pdf.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre la construcción social del conocimiento*. Barcelona, España: Gedisa.

Chevallard Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19* (2), 221–266.

Glasersfeld, E. von (1995). *Radical Constructivism: A way of knowing and learning.* Londres: The Falmer Press.

Godino, J. D. (2013). Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 11*, 111–132.

Gutstein, E. (2006). *Reading and writing the world with mathematics: toward a pedagogy for social justice.* New York: Routledge.

Ibarrola, M. (2012). Los grandes problemas del sistema educativo mexicano. *Perfiles educativos, 34*, 16–28.

Jaramillo Salazar, H. (2009). La formación de posgrado en Colombia: maestrías y doctorados. *Revista Iberoamericana de Ciencia, Tecnología y Sociedad, 13* (5), 131–155.

Lave, J., y Wenger, E. (1991). *Situated learning. Legitimate peripheral participation*. Cambridge: University Press.

Luchilo, L. (2010). *Formación de posgrado en América Latina: políticas de apoyo resultados e impactos.* Buenos Aires: Eudeba.

Organización para la Cooperación y Desarrollo Económicos (OCDE) (2016). Informe de resultados de PISA 2015 - México. Paris: OCDE. Recuperado de: https://www.oecd.org/pisa/PISA-2015-Mexico-ESP.pdf

Parraguez, M. (2018). Posgrado en didáctica de la matemática de la pontificia universidad católica de Valparaíso: un multiproceso en búsqueda de la construcción ciudadana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *21*(3), 239–246.

Ruiz, N. (2014). La enseñanza de la Estadística en la Educación Primaria en América Latina. *Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación, 13*(1), 103-121.

Skovsmose, O. (1994/1999). *Hacia una filosofía de la educación matemática crítica* (Traducción P. Valero). Bogotá: Una empresa docente.

Steffe, L. y Thompson, P.W. (2000). Teaching experiment methodology: underlying principles and essential elements. En Kelly, A.E. y Lesh, R.A. (Eds.). *Handbook of research design in mathematics and science education*, pp. 267–306. Mahwah: NJ: LAE.

Tauber, L. (2017). Alfabetización y cultura estadística de los profesores: ¿un logro o una necesidad? En. C. Cuesta (Presidencia). *Congreso Interamericano de Estadística y 3ª Jornada de Educación Estadística "Marta Bilotti"*. Conferencia llevada a cabo en la Jornada. Sociedad Argentina de Estadística, Rosario.

Tauber, L. (2018) Formación virtual en enseñanza de la Estadística y la Probabilidad para profesores de Matemática en ejercicio de Argentina. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 31*(1), 698-705.

UNESCO (2018). Informe de la UNESCO sobre la ciencia, hacia 2030: informe regional de América Latina y el Caribe. Organización de las Naciones Unidas para la Educación, Ciencia y la Cultura. Ediciones UNESCO https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000265331

Zapata-Cardona, L. & Marrugo, L. (2019). Critical citizenship in Colombian statistics textbooks. En G. Burril & D. Ben-zvi (Eds) *Topics and trends in current statistics education research,* pp. 373–389. Suiza: Springer Publishing Company.

SECCIÓN 5

USO DE RECURSOS TECNOLÓGICOS EN EL PROCESO DE APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

VOL 34, NÚMERO 1, AÑO 2021

ANÁLISIS DEL ESTUDIO DE FUNCIONES ALGEBRAICAS POR MEDIO DE LA MODELACIÓN MATEMÁTICA EN NIVEL MEDIO SUPERIOR DEL IPN

ANALYZING THE STUDY OF ALGEBRAIC FUNCTIONS THROUGH MATHEMATICAL MODELING AT HIGH SCHOOL LEVEL OF THE NPI

Guillermina Ávila García, Liliana Suárez Téllez, Víctor Hugo Luna Acevedo
Instituto Politécnico Nacional, Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos No. 11, Dirección de Formación e Innovación Educativa, Escuela Nacional de Ciencias Biológicas. (México)
gavilag@ipn.mx, lsuarez@ipn.mx, vhluna@ipn.mx

Resumen
Esta investigación presenta un avance del reporte parcial del proyecto de investigación SIP 20201239, que considera como marco teórico a la Modelación Graficación, mediante el análisis de funciones por medio del uso de gráficas con el tema de funciones algebraicas, dentro de la unidad de aprendizaje de Cálculo Diferencial, con estudiantes de nivel medio superior (cuyas edades son de 16 a 18 años). La metodología consistió en análisis de situaciones de movimiento para interpretar el cambio y las variaciones, desde una visión experimental de la graficación con el uso de tecnología como la herramienta Tracker en su versión gratuita, descargable en línea. Los datos se recolectaron a partir del trabajo de un grupo de treinta y cinco estudiantes que utilizaron el Tracker. Los resultados muestran que cuando los estudiantes se involucran en la modelación, logran una comprensión más asequible con respecto al tema de funciones.

Palabras clave: análisis de funciones, graficación, modelación, tecnología

Abstract
This research presents a preview of the SIP 20201239 research project provisional report, which takes into account mathematical modeling as the theoretical framework, by analyzing functions through the use of graphics in the topic of algebraic functions included in the differential calculus learning unit; with high school students aged 16 to 18. The methodology entails making the analysis of movement situations to interpret change and variations, from an experimental view of graphing with the use of technology such as the Tracker tool in its free version, downloadable online. The data were collected from the work of a group of thirty-five students who used the Tracker tool. The results show that when students engage in modeling, they achieve a more accessible understanding regarding the topic of functions.

Key words: function analysis, graphing, modeling, technology

Introducción

De acuerdo con Suárez (2014), "la modelación se ha estudiado en relación con la variedad de representaciones *más accesibles* que se puede proporcionar de un fenómeno es importante … ir más allá" (p.47), concibiendo la modelación como una herramienta que transforma el fenómeno estudiado, más aún "cuando se incorpora el uso de la tecnología para la graficación se genera un *espacio gráfico* que ha sido estudiado" (p.47). En concordancia con la autora, en este reporte de investigación se ilustra una representación de fenómeno físico, que a su vez puede ser modelado por medio de modelo verbal, algebraico y gráfico, éste último analizado a través de herramienta tecnológica para el estudio de funciones.

Diversos autores (Irazoqui, 2015; Nolan y Herbert, 2015) argumentan que un concepto básico y fundamental que debería haberse aprendido en la etapa de secundaria es el concepto de "función", lamentablemente el desconocimiento de dicho concepto y su alcance más inmediato~~s~~ representa una seria dificultad para el aprendizaje del Cálculo, no olvidando que, en buena medida, la matemática no es más que el estudio de las funciones, junto a las relaciones que se pueden establecer con ella.

En México, el caso del Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos No. 11 (CECyT 11) del Instituto Politécnico Nacional (IPN), una de las competencias particulares que deben desarrollar los estudiantes en la materia de Cálculo Diferencial es la resolución de problemas de funciones, en el campo de los números reales, que involucren los conceptos de límite y continuidad en situaciones relacionadas con su entorno académico.

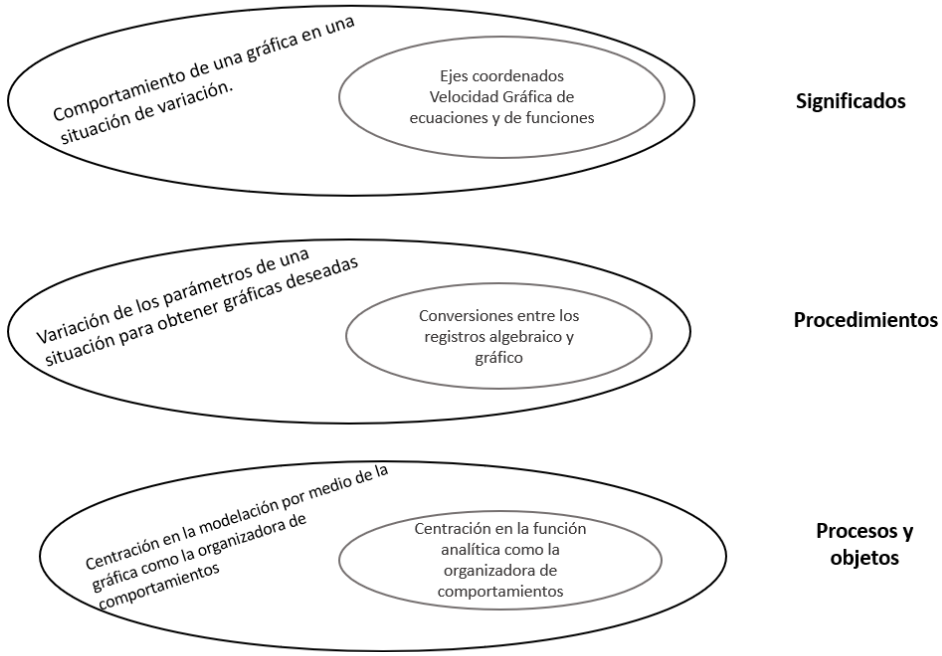
En esa vertiente es que se lleva a cabo la propuesta de integrar herramientas tecnológicas para el análisis de gráficas en el estudio de funciones a través de experimentos que involucran movimiento, surgiendo interrogantes sobre la importancia y aportaciones al aprendizaje del estudiante a través de la modelación matemática con el estudio de funciones, integrando la herramienta Tracker.

Marco teórico

Esta investigación explora la situación de movimiento con gráficas, a partir de ello se distinguen las líneas de razonamiento que coadyuvan al estudiante a un aprendizaje significativo referente al estudio de las funciones, diferenciando también los tipos de funciones. Suárez (2014), enfatiza en la modelación de una situación de cambio y variación por medio de una gráfica, proporciona un eje que hace que surja una argumentación gráfica a partir de la necesidad misma de la modelación y para ello plantea los elementos de resignificación de la modelación-graficación (figura 1).

La forma de graficar ecuaciones o funciones y el cálculo de las velocidades se organizan en nuevos significados que surgen del comportamiento que debe seguir la curva cuando está relacionada con una situación de cambio y variación (conceptos previos al concepto e interpretación de la derivada). Asimismo, Suárez (2014) menciona que "las relaciones desplazan centración en la función analítica para darle un estatus a la *situación de cambio y variación* que rige las características de las gráficas" (p. 28-29), a lo que llama una "resignificación de la variación y tiene como eje a la modelación-graficación." (p. 29).

Figura 1. *Elementos de resignificación de la modelación-graficación*



Tomado de Suárez (2014, p.28).

Por otro lado, Trigueros (2009) señala que, en el proceso de modelación en el aula, no se piensa en construir la matemática para luego establecer un proceso de modelación, sino se construye un conocimiento matemático a partir de la interacción y reflexión del contexto-estudiante; es decir, el docente ofrece al estudiante la posibilidad de tomar decisiones que le permitan construir significados de la situación que se estudia.

Molina-Toro, Villa-Ochoa y Suárez (2018) enfatizan, que la modelación vista desde la experimentación, graficación y el uso de tecnología pueden considerarse como medio para la producción de conocimiento, manifestando que la tecnología no es concebida como una herramienta de apoyo para la actividad de experimentación, más allá de ello, la tecnología se considera como un aspecto constitutivo; es decir, una experimentación sin tecnología no tiene sentido. Por ello, la propuesta va enfocada al análisis de las gráficas generadas a partir de la experimentación y que son interpretadas con Tracker.

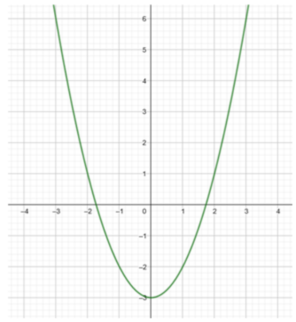
Por otro lado, Torres (2004), menciona que los elementos que sirven de base para la caracterización de usos de gráficas en bachillerato son considerados no sólo en su relación con el concepto de función, sino además con los significados, procedimientos y argumentos que intervienen en las acciones que desarrolla un estudiante ante una actividad de graficación.

El primer uso de las gráficas se refiere a su construcción utilizando una relación de correspondencia entre dos variables, es decir, localizar parejas de puntos ordenados a partir de la relación algebraica, este procedimiento se encuentra con frecuencia en libros de texto del Nivel Medio Superior (figura 2).

Figura 2. *Uso de las gráficas a partir de su expresión algebraica.*

$f(x) = x^2 - 3$

x	y
-3	6
-2	1
-2	-4
0	-3
1	-2
2	1
3	6



Tomado de Suárez (2014, p. 43).

Y finalmente, la descripción del uso de las gráficas en bachillerato (tomado de Torres, 2004), que es un referente en esta investigación, para el análisis de los trabajos expuestos por los estudiantes.

Tabla 1. *Descripción del uso de las gráficas en bachillerato.*

Construcción de representaciones	Gráficas utilizando la relación de correspondencia	Operaciones gráficas	Gráficas a partir de la simulación de un fenómeno físico con tecnología
Significados y sistemas simbólicos	Establecer ejes de coordenadas. Determinar puntos en el eje cartesiano	Transformación de funciones Comportamiento de una función Función derivada y primitiva	Comportamiento de las gráficas de la posición y de la velocidad en relación con la simulación (función primitiva y su derivada)
Procedimientos	Operaciones fundamentales	Variación de la variable y de sus coeficientes	Determinar la escala para el tiempo y la posición. Identificar el tipo de movimiento Relacionar las gráficas con la situación
Procesos y objetos	Variables Función	Forma de la gráfica	Forma de la gráfica para identificar patrones de comportamiento relacionando las gráficas de la posición y de la velocidad.
Argumentos	Relaciones de la función con la gráfica a partir de su expresión algebraica	Comportamiento tendencial de la función	A mayor velocidad mayor valor absoluto de la pendiente en la gráfica de posición. A mayor pendiente en la gráfica de posición, mayor distancia con respecto al eje en la gráfica de velocidad.

Tomado de Torres, A. (En Suárez, 2014, p.45).

El análisis de funciones a partir de graficas generadas de un fenómeno físico en donde interviene el movimiento se considera para este reporte de investigación.

Método

El estudio se llevó a cabo con 35 estudiantes que cursaron la unidad de aprendizaje de Cálculo Diferencial en el segundo año de bachillerato en México (16 a 18 años). Las actividades de conexión entre los fenómenos relacionados con el movimiento y las funciones fueron modeladas en la experiencia propia de los estudiantes al interactuar en equipos de trabajo dentro de la institución educativa.

El diseño de una situación de modelación del movimiento para el estudio de las funciones algebraicas consideró tres momentos que establece Suarez (2014):

Momento 1: Establecimiento de la forma del funcionamiento de las gráficas en el estudio de las funciones.

En este caso el movimiento de una persona que camina de modo "rápido", "lento", "se detiene" y se mantiene "constante".

Este primer momento se llevó a cabo mediante el planteamiento del problema de "Valentina" el cual enuncia lo siguiente:

> *"Valentina llegó temprano a su clase de música. Apunto estaba de sentarse cuando advirtió que había olvidado su cuaderno en su refugio predilecto: la siempre cómoda y acogedora biblioteca.*
>
> *No podía perderse el comienzo de la clase, así que fue a la biblioteca, cogió su cuaderno y regresó a su asiento, a tiempo para comenzar su, probablemente disfrutable, clase de música. Pero en el camino se encontró a su bienamado Juan y se detuvo a intercambiar unas muestras de su muy autentico cariño, lo que le llevó 4 segundos, pero de los largos, lo que le obligó a recuperar estos instantes, también aprovechados, porque cuando salió del salón no previó la epifanía.*
>
> *"La biblioteca está en un punto diametralmente opuesto al salón de música en el patio circular, que tiene 50 metros de diámetro, de la escuela. Valentina tardó en total 9 segundos." Tomado de Torres, 2004.*

Iniciando con la construcción de representaciones que dan sentido a los significados y sistemas simbólicos de la lectura de un problema en lenguaje común, atendiendo solamente la lectura del problema y con ello la realización de una gráfica de acuerdo con las variables que intervienen en la situación.

Momento 2: Construcción de los argumentos en el uso de las gráficas de modelación, donde refieren las funciones algebraicas y los intervalos de las funciones.

Realización de los argumentos que permiten la descripción del comportamiento de una función, donde se inician las primeras indagaciones de la gráfica relacionadas con la posición, velocidad y función, así como la forma de la gráfica.

Momento 3**:** Puesta en marcha del uso de las gráficas en la modelación con tecnología mediante Tracker y el análisis de la función generada.

Para llevar a cabo la puesta en marcha se recurre a una simulación como modelación con tecnología, que de acuerdo con Suárez (2014), la simulación en términos educativos refiere a "una estrategia que permite imitar problemas complejos del mundo real para analizar el comportamiento de los sistemas, así como de su progreso" p. 31.

El software Tracker puede hacer un análisis de videos y ayudar a la construcción de modelos; la modelación a partir del análisis en video con Tracker es una forma de combinar la modelación en computadora

Esta modelación permite crear modelos dinámicos y cinemáticos de partículas de masa puntual y sistemas de dos cuerpos. El procedimiento consistió en realizar un video en tiempo real, grabarlo, para luego proceder a utilizar las herramientas analíticas de Tracker para la generación de datos y tablas; de esta manera los estudiantes tuvieron la posibilidad de obtener representaciones gráficas, tabulares y algebraicas de las cantidades y la razón de cambio.

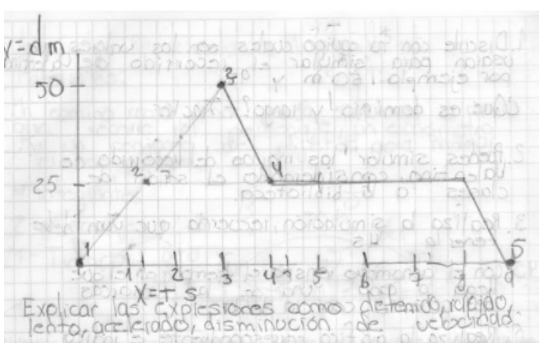
Este reporte de investigación evidencia cómo los estudiantes analizaron una situación de movimiento, explorando el cómo llevar una situación real a la simulación, así como la representación de funciones paso por paso. En este caso, se representó la situación real del Problema de Valentina a la simulación, grabando, estudiando y analizando la representación gráfica obtenida de manera digital.

Resultados

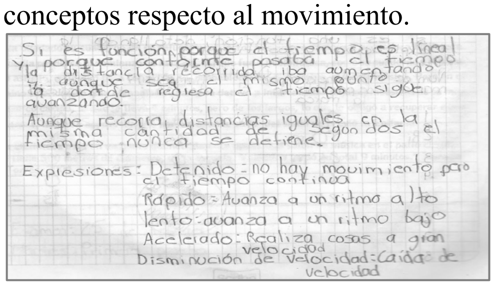
Diseño de la situación de modelación graficación

Se induce a los estudiantes mediante el problema de "Valentina" a relacionar el movimiento del personaje a través de una representación gráfica, de donde se obtuvieron los siguientes resultados:

Figura 3. Representación gráfica del movimiento de "Valentina"



Los estudiantes identifican los siguientes conceptos respecto al movimiento.



Recuperado del trabajo de los estudiantes.

Los estudiantes construyen los primeros argumentos de la función generada a partir de la situación que se plantea, en las primeras indagaciones se puede observar que los estudiantes identifican y relacionan los conceptos de función, lo que conlleva a la representación de la situación cuando aumenta, disminuye o permanece constante.

Después de que los estudiantes llevaron a cabo la solución en forma gráfica la situación de "Valentina", inician con la simulación de la situación considerando la situación-simulación, de donde se espera que el estudiante construya argumentos y que conciban la resignificación de los objetos asociados a la situación del cambio y variación, con relación a una función.

Posteriormente, los estudiantes realizaron la simulación de la situación de “Valentina”, donde se consideró la siguiente secuencia:

Tabla 2. Cuadro comparativo entre actuaciones del docente y estudiante

Profesora	Estudiantes
- Organización en equipos de cuatro o cinco integrantes.	- En equipo de trabajo realizan aportaciones sobre la gráfica generada del problema de “Valentina”.
- Indica la forma de trabajo para la elaboración del reporte del análisis con Tracker.	- Participación con sugerencias para llevar la situación de “Valentina” para poder realizar la grabación.
- Regulación de las participaciones de los equipos de trabajo.	- Elaboran el reporte escrito con las evidencias de trabajo, representaciones y el análisis con respecto a función.
- Atención a posibles dudas y preguntas sobre el trabajo encomendado a los estudiantes.	
- Moderación de la exposición de los equipos.	- Exposición del producto obtenido y aprendizajes alcanzados con respecto al tema de función.

Fuente: elaboración propia

El trabajo en equipo, la discusión y la puesta en escena de la simulación fue en modalidad presencial, durante la sesión de clase con duración de ciento veinte minutos, de los cuales fueron asignados veinte minutos para las aportaciones de los integrantes del equipo, media hora para llevar a cabo la simulación con la grabación del movimiento y posteriormente cada equipo trabajo realizó el análisis en Tracker (60 minutos).

Para la elaboración del reporte final, los estudiantes se pusieron de acuerdo para la redacción e igualmente para la exposición de los resultados.
Cada equipo realizó la exposición del trabajo con el fin de que el resto del grupo hiciera observaciones y de esa forma ir validando la solución y sobre todo aportaciones del tema de funciones como:

- La posición, los cambios de posición con respecto a la velocidad, rapidez y aceleración.
- La relación entre características el modelo verbal, gráfico y algebraico.
- Las variables que intervienen en la situación.
- Intervalo de funciones: creciente y decreciente

Simulación de la situación de “Valentina”

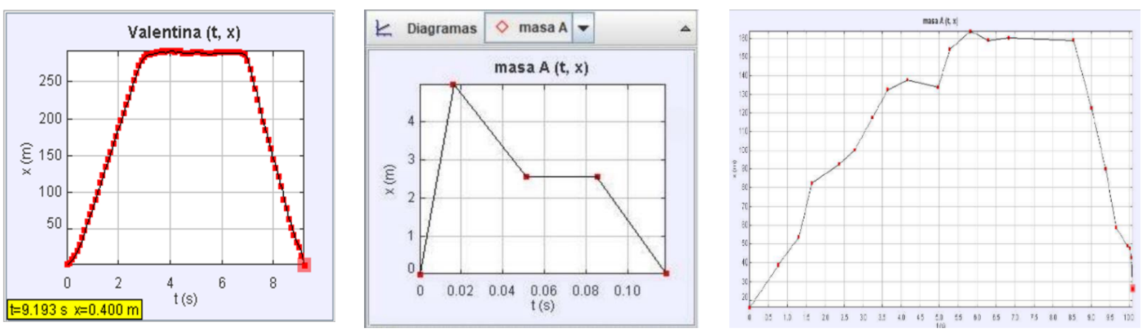
Figura 4. *Representación experimental del movimiento de "Valentina"*

La simulación la llevaron a cabo en el patio escolar considerando los movimientos de la situación de Valentina considerando la grabación por medio del celular, en la figura 4, se muestra el sistema de referencia que dio inicio al análisis con Tracker.

Recuperado del trabajo de los estudiantes.

En esta simulación los estudiantes realizaron los comparativos sobre los movimientos de "lento", "rápido" y "detenido" en forma experimental y que además interpretan al momento en que se genera la gráfica y tablas en Tracker que a continuación se muestra en la figura 5, se muestran las gráficas que se obtienen que son muy semejantes y que demuestran argumentos de parte de los estudiantes que se describen en la siguiente sección.

Figura 5. *Gráficas generadas a partir del uso de la herramienta Tracker.*



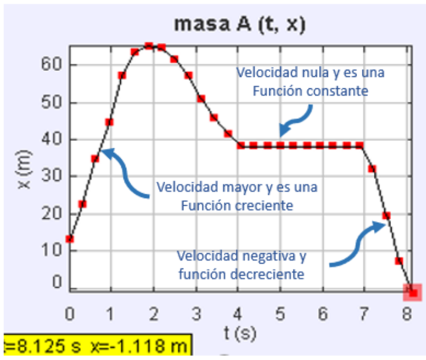
Recuperado del trabajo de los alumnos.

La gráfica de la derecha indujo a preguntas entre los estudiantes como: ¿porqué hay tanta variación?, ¿Es una función a pesar de las protuberancias?

El equipo de trabajo menciona que realizaron la experiencia 5 veces y que fue la mejor gráfica obtenida, los estudiantes argumentan que puede ser por el celular, debido a que se movía mucho cuando grabaron el video. También respondieron que la gráfica obtenida si cumple con el concepto de función.

De las gráficas generadas, se integran los hallazgos más representativos que los estudiantes identificaron, además de dar sentido a una función.

Figura 6. *Gráficas con hallazgos representativos de parte de los estudiantes.*



Los estudiantes también llevan los resultados a la identificación de los intervalos en donde la función es creciente, decreciente y constante.
Expresan durante la exposición de equipos de trabajo la importancia del modelo verbal que en este caso es la situación de "Valentina", modelo algebraico y el modelo gráfico a partir de lo que realizaron con la herramienta tecnológica.

Los elementos de resignificación de la modelación-graficación de acuerdo con los modelos: verbal, algebraico y gráfico.

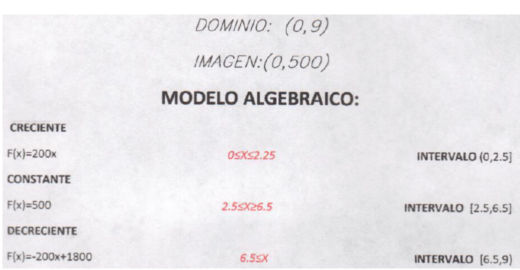
En primer lugar; los estudiantes identifican los ejes coordenados con apoyo de la herramienta Tracker y lo que concluyen es:

> *[…] En la gráfica que representamos, estamos hablando de una función ya que cada calor del eje "x" le corresponde uno y sólo un valor de "y, además es importante señalar que tenemos "tiempo" en el eje "x" y el tiempo no regresa […]*
>
> *[…] El modelo gráfico es bastante descriptivo pues a partir de observarlo puedes identificar en qué momento iba de prisa la persona, en qué momento se detuvo y cómo no se dio cuenta del tiempo que había transcurrido y emprendió el regreso […]*
>
> *[…] La gráfica es muy visual para saber cuándo la gráfica es creciente, decreciente y constante […]*

Por otro lado, en el caso del registro algebraico, los estudiantes consideran que es importante tener la gráfica que dio como resultado el experimento porque a partir de esta observación pueden definir los intervalos en dónde una función es creciente, decreciente o constante.

En total 30 estudiantes consideraron los datos reales del problema, por ello la coincidencia en los intervalos no varía, en el caso de un equipo es semejante el resultado, pero con un intervalo diferente. En el caso de un equipo conformado por 5 estudiantes variaron sólo en el intervalo que consideraron en la simulación del fenómeno físico.

Figura 7. *Intervalos de simulación del fenómeno físico.*



Los datos fueron extraídos con base a la gráfica generada. Consideran los estudiantes que en modo concreto es más útil usar herramientas tecnológicas para describir con mayor precisión los intervalos, además de que también consideran que al medir el tiempo se cometen errores de medición.

Recuperado del trabajo de los estudiantes

En cuanto al modelo numérico que representan los estudiantes con base a la centración de la función de analítica, en la figura 8 se muestran las tablas generadas a partir de la experiencia.

Figura 8. *Tablas de funciones generadas a partir de la experiencia*

FUNCION CRECIENTE:

F(x)= 200x	
X	Y
0.5	100
1	200
2	400

FUNCION CONSTANTE:

F(x)= -200X+1800	
X	500
3	500
4	500
5	500

FUNCION DECRECIENTE:

F(x)= 200x+1800	
X	Y
7	400
8	200
9	0

Durante las exposiciones de los estudiantes se concretaron al análisis de la experiencia simulada de "Valentina" argumentando que la gráfica con la serie de modelos que la respaldan representan una buena herramienta de análisis, manifestando la comprensión del comportamiento de un fenómeno físico, que permite desde la observación hasta un análisis más profundo, pero también estudiar el fenómeno físico desde la perspectiva del Cálculo, distinguen también que es importante tener una calidad de movimiento que sea visible dando un significado más cerca a lo que se observa.

Conclusiones

La modelación con respecto al movimiento se sustenta en la epistemología de la modelación-graficación, que propicia una resignificación de la variación. Las gráficas de las funciones son herramientas para modelar una variación con respecto al movimiento que involucra la velocidad y la aceleración que se muestra en el trabajo presentado por los estudiantes.

Además el estudio de las gráficas de funciones propician el desarrollo analítico en el concepto de función caracterizado por los intervalos en donde la función crece o decrece, en este contexto, las aportaciones recopiladas a través de los trabajos de los estudiantes, explican los aspectos estructurados que construye la función en un curso de Cálculo Diferencial a partir de la simulación, permitiendo la argumentación en una situación de aprendizaje a través de gráficas de funciones de se genera a partir de un fenómeno físico en movimiento lo que contribuye a establecer relaciones y argumentos a partir de los resultados.

Uno de los principales resultados es el razonamiento de los estudiantes a través de la experiencia en la modelación de un fenómeno físico y que al llevar el análisis mediante el uso de un software se vuelve una discusión enriquecida por los conceptos propios de Cálculo Diferencial y las relaciones entre la función, caracterizando el modelo gráfico, algebraico mediante el lenguaje común, donde dan cuenta de una mayor solidez en los conceptos.

Esta combinación entre el uso de los modelos y la tecnología permitió la posibilidad de trabajo colaborativo, análisis y reflexión que brinda una oportunidad para que los estudiantes desarrollen sus habilidades en Cálculo Diferencial, cabe resaltar la importancia del diseño de la secuencia que favorece el aprendizaje de los estudiantes.

Agradecimientos

Al Instituto Politécnico Nacional por el apoyo otorgado a través del proyecto de investigación SIP-20201239. y a la Red de los Seminarios Repensar con registro DES/RED/003/2015.

Referencias bibliográficas

Irazoqui, E. (2015). *El aprendizaje del cálculo diferencial: una propuesta basada en la modularización* (Doctoral dissertation, UNED. Universidad Nacional de Educación a Distancia (España)).

Molina-Toro, J. F., Villa-Ochoa, J., & Suárez Téllez, L. (2018). La modelación en el aula como un ambiente de experimentación-con-graficación-y-tecnología. Un estudio con funciones trigonométricas. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática: Perspectivas Socioculturales de la Educación Matemática*, *11*(1), 87-115.

Nolan C. & Herbert S. (2015). Introducing linear functions: an alternative statistical approach. *Mathematics Education Research Journal*, *27*(4), 401-421. https://doi.org/10.1007/s13394-015-0147-x

Posada, F. A., & Villa-Ochoa, J. (2006). *El razonamiento algebraico y la modelación matemática.* Universidad de Antioquia

Suárez, L. (2014). *Modelación-graficación para la matemática escolar*. México: Ediciones Díaz de Santos.

Tigueros, M. (2009). El uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas. *Innovación educativa*, *9*(46), 75-87.

Torres, A. (2004). *La modelación y las gráficas en situaciones de movimiento con tecnología*. Tesis no publicada del Programa de Maestría del CICATA-IPN.

EL PROBLEMA DE LOS CÍRCULOS TANGENTES COMO ILUSTRACIÓN DEL POTENCIAL DEL SGD PARA LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA

THE TANGENT CIRCLE PROBLEM AS ILLUSTRATION OF THE DYNAMIC GEOMETRY SOTFWARE POTENTIAL FOR GEOMETRY TEACHING

Luis Ángel Pérez Fernández, Adriana Galeano Reyes, Marcos Chacón Castro,
Universidad Industrial de Santander. (Colombia)
nanisitagale@gmail.com, laperezf@saber.uis.edu.co, lcmar@outlook.es

Resumen
En las últimas décadas, la geometría sintética ha recuperado importante espacio en el currículo, principalmente por la aparición del software de geometría dinámica (SGD), que ha ofrecido a los profesores la posibilidad de una nueva práctica de la enseñanza de la geometría. Sin embargo, los profesores padecen serias dificultades a la hora de integrarlo en el aula, incluso aquellos que cuentan con infraestructuras adecuadas. El propósito de este artículo es aportar, desde el punto de vista de la *geometría experimental*, una secuencia que muestre el potencial del SGD para el desarrollo del razonamiento geométrico, a partir del histórico problema de los tres círculos. Este clásico de la geometría se puede descomponer en una secuencia de problemas que permiten ejemplificar y caracterizar diferentes usos del SGD, en particular de DGPad-Colombia, que incorpora el arrastre, la traza de puntos y la posibilidad de crear macro construcciones; herramientas que diversifican las posibilidades didácticas.

Palabras clave: geometría experimental, geometría dinámica, construcciones

Abstract
In recent decades, synthetic geometry has regained important space in the curriculum, mainly due to the appearance of dynamic geometry software (DGS), which has offered teachers the possibility of a new geometry teaching practice. However, teachers suffer serious difficulties when it comes to integrating it into the classroom, even those who have adequate infrastructures. The purpose of this article is to provide, from the point of view of *experimental geometry*, a sequence that shows the potential of the DGS for geometric reasoning development, based on the historical problem of the three circles. This classic of geometry can be decomposed into a sequence of problems that allow exemplifying and characterizing different uses of the DGS, in particular of Colombia- DGPad, which incorporates dragging, trace of points and the possibility of creating macro constructions; tools that diversify the didactic possibilities.

Key words: experimental geometry, dynamic geometry, constructions

Introducción

A pesar de que el SGD fue creado para enseñar geometría y que además se han desarrollado numerosas investigaciones concernientes a sus roles y efectos en la enseñanza y el aprendizaje, su uso efectivo en el aula sigue siendo problemático para los profesores (Drijvers, et al., 2009; Pierce y Stacey, 2013). En este sentido, se requiere reflexionar no solo sobre la enseñanza con geometría dinámica, sino también sobre la necesidad hacer matemáticas utilizando la geometría dinámica y por ende del desarrollo de nuevas prácticas y estrategias didácticas entre las que se encuentra la geometría experimental (Acosta, 2005).
En este documento ejemplificamos, desde el punto de vista de la geometría experimental, algunas estrategias y prácticas con SGD, particularmente con DGPad-Colombia (DGPA, s.f.), que puede ejecutarse en línea. Esta versión es una adaptación del software original DGPad, desarrollado en Francia por Eric Hackenholz, el cual tiene todas las características fundamentales del software de geometría dinámica: el arrastre, traza de puntos, macro construcciones y la posibilidad de crear otras. Consideramos que el SGD permite construir un puente entre la percepción y la formalización, dado que los objetos en la pantalla responden a propiedades matemáticas que se perciben al arrastrar (Laborde, 2003).

Mediante la técnica de análisis, donde "se asume como cierto aquello que hay que probar y se razona con base en esta asunción hasta llegar a algo que forma parte de los principios" (González, 2007, p. 213), el problema de los círculos tangentes se puede descomponer sistemáticamente en otros cada vez más elementales, que condensan propiedades de semejanza y relaciones entre ángulos en los círculos, que se estudian comúnmente en los cursos de geometría euclidiana a nivel universitario. Esta descomposición del problema la usaremos para ilustrar cómo el software de geometría dinámica ofrece herramientas para desarrollar una práctica geométrica basada en la observación y manipulación de los objetos en la pantalla, con el fin de desarrollar razonamiento geométrico (Sandoval, 2009). Por ejemplo: elaborar dibujos que no resisten la prueba del arrastre, pero que ofrecen la posibilidad desarrollar la técnica del análisis, a partir del ajuste perceptivo de los objetos en la pantalla. Además, las macro construcciones que permiten simplificar los dibujos, ocultando los objetos intermedios de un proceso de construcción, condensan fragmentos de razonamiento deductivo, que permiten desarrollar otros procesos más complejos y enriquecer el pensamiento geométrico. También, el arrastre favorece el reconocimiento de propiedades invariantes, convirtiendo el dibujo en una fuente para conjeturar y desarrollar estrategias de solución de problemas de construcción y demostración.

Geometría experimental

Acosta (2005) resalta la necesidad de una nueva práctica matemática y didáctica que atienda, entre otras, a las siguientes cuestiones: ¿Cuáles son las consecuencias de la utilización de las nuevas representaciones de los objetos geométricos que ofrecen los SGD? ¿Qué estrategias y técnicas tanto matemáticas como didácticas se pueden usar para justificar el uso de los SGD, no solo para enseñar sino también para hacer matemáticas? Para atender a estos interrogantes, propone y define la geometría experimental como:

> […] Una práctica geométrica que privilegia la observación y manipulación de los objetos geométricos en la pantalla de la computadora, con la intención de emitir conjeturas sobre las propiedades geométricas de dichos objetos, conjeturas que se ponen a prueba mediante el arrastre, la medición y la construcción de objetos auxiliares. La invalidación de una conjetura en geometría experimental puede considerarse equivalente a una demostración de su falsedad por medio de un contraejemplo. Las conjeturas que no sean invalidadas por la experiencia se consideran verdaderas, en espera de una demostración formal. Aunque una figura dinámica no puede constituir una demostración de la validez de una conjetura, sí puede contribuir a la construcción de una demostración formal, pues permite encontrar relaciones que pueden constituir encadenamientos lógicos de dicha demostración. (p. 124)

La geometría experimental legitima entonces, el uso del SGD para elaborar procesos de experimentación que permitan conjeturar, a partir de la percepción visual y buscar estrategias para formalizar y argumentar las relaciones establecidas perceptivamente. Es este sentido, el software funge como un laboratorio donde la experimentación y la visualización son protagonistas.

Como ejemplos de experimentos que se pueden desarrollar con el SGD, tenemos: producir construcciones en las que un punto u otros objetos se puedan ajustar mediante el arrastre, para que cumpla una condición y a partir de ese dibujo elaborar un análisis, en el sentido de González (2007), que permita desarrollar estrategias de solución. También la posibilidad de activar la traza de un punto que describe una trayectoria al arrastrar otro del cual depende. Es decir, explicitar un lugar geométrico a partir del registro del movimiento de un punto en la pantalla, mediante la opción traza.

A continuación, contextualizaremos el problema de los tres círculos tangentes y expondremos de manera sucinta el proceso de análisis que nos permitirá descomponerlo en problemas más simples, de los que extraeremos los elementos para desarrollar nuestras reflexiones didácticas y de esta manera, ejemplificar las ideas expuestas en los párrafos precedentes.

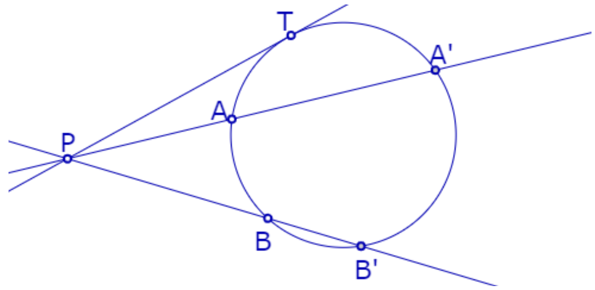
El problema de los tres círculos tangentes

Las ideas de la teoría geométrica que expondremos a continuación, aunque no son completamente fieles, se sustentan en el trabajo de Rabu-Boyé (2009), que expone el análisis hecho por Vieta en el siglo XVII del problema de los tres círculos tangentes, que se encuentra en el *Tratado de los Contactos* de Apolonio, basándose en los ejemplos propuestos por Papo de Alejandría en el siglo IV d.C., quien redujo el problema a partir de otros diez que enunciaremos de manera general como sigue: dados tres objetos (puntos, rectas o círculos) construir un círculo tangente a las rectas y a los círculos dados, que pase por los puntos dados. El más elemental de todos es: dados tres puntos, construir un círculo que pase por ellos; cuya solución es el circuncírculo. El más complejo: dados tres círculos construir un círculo tangente a ellos.

Nuestro interés no es hacer una revisión exhaustiva de cada uno de estos diez problemas, tampoco exponerlos de manera general uno a uno; simplemente usaremos un caso particular del último, el de los tres círculos, y otros intermedios, con el propósito de desarrollar el análisis con el que pretendemos ejemplificar algunos usos del SGD para resolver problemas de construcción no rutinarios, aunque en general, los problemas de construcción no lo son per sé. Enunciaremos cada problema exponiendo los tres objetos dados (puntos, rectas o círculos), entendiendo que se debe construir un círculo, como se mencionó antes; y para facilitar la interpretación de las figuras, se mostrarán los objetos dados en color verde, en color rojo el círculo que se desea construir como objeto final y en color azul los objetos intermedios.

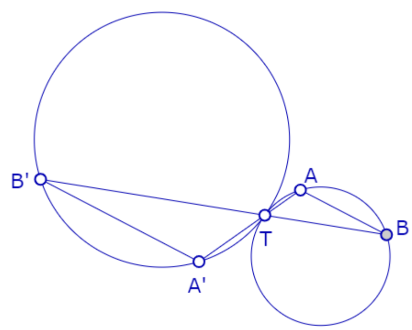
Antes de empezar a exponer los problemas, expondremos tres teoremas que consideraremos para desarrollar el análisis y en algunos casos simplificar pasos de construcción.
Teorema 1: potencia de un punto respecto a un círculo. Si desde un punto P exterior a un círculo se trazan una tangente en T y dos secantes PA y PB, que cortan al círculo nuevamente en A' y B' respectivamente, entonces $PA \cdot PA' = PB \cdot PB'$. Ver Figura 1. Llamamos potencia de P respecto al círculo al producto $PA \cdot PA'$, el cual no depende de la secante trazada desde P. Es decir, es invariante.

Figura 1. *Potencia de un punto respecto a un círculo.*



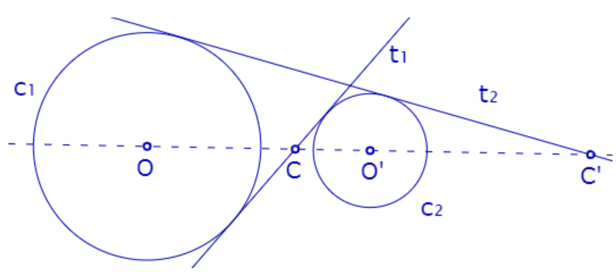
Teorema 2: circuncírculos de triángulos en posición de similitud. Diremos que dos *triángulos están en posición de similitud* si son semejantes, comparten un vértice y los lados opuestos a este son paralelos. Ahora, si dos triángulos están en posición de similitud, entonces sus circuncírculos son tangentes en el vértice común. En la Figura 2, se ilustran dos triángulos (ΔABT y $\Delta A'B'T$) en posición de similitud con sus circuncírculos respectivos tangentes.

Figura 2. *Triángulos en posición de similitud.*



*Teorema 3: centros de similitud de dos círculos exteriores***.** Para todo par de círculos exteriores, existen dos puntos alineados con los centros de estos, que llamaremos *centros de similitud* de los dos círculos, desde los cuales se pueden trazar cuatro rectas tangentes a ambos; dos desde cada centro de similitud. En la
Figura 3, se muestran dos círculos c_1 y c_2 con centros respectivos O y O', con sus centros de similitud C y C' alineados con O y O'.

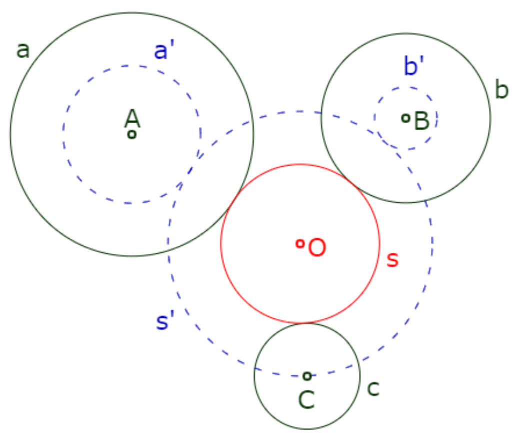
Figura 3. *Centros de similitud de dos círculos*



A continuación, ilustraremos cómo se agota sistemáticamente el problema de los tres círculos a otros más básicos. Estrategia que llamamos análisis, cuya efectividad se fortalece gracias a las herramientas del SGD, como mostraremos más adelante.

Problema 1: dados tres círculos. Sean a, b y c los círculos dados, con A, B y C sus respectivos centros. Consideraremos además el caso particular donde los círculos son exteriores y tienen radios, de mayor a menor, en el orden enunciado, como se observa en la Figura 4.

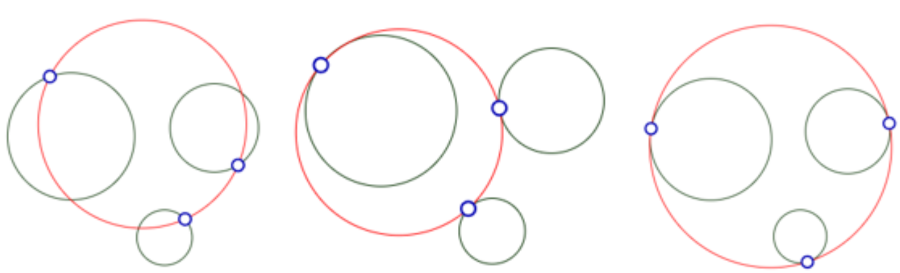
Figura 4. *Dados tres círculos*



En la Figura 4, se constata perceptivamente, que para obtener una solución (círculo s), basta construir un círculo s' concéntrico con s, que pase por C y sea tangente a los dos círculos a' y b', concéntricos con a y b respectivamente. Es decir, el problema se reduce a construir un círculo tangente a dos círculos y que pase por un punto.

Consideraciones didácticas problema.. En este primer problema podemos proponer una primera exploración a los estudiantes, que consiste en construir un punto en cada círculo dado, luego un círculo que pase por eso tres puntos y ajustarlos hasta que se cumpla la condición de tangencia. La Figura 5 ilustra la exploración que se propone.

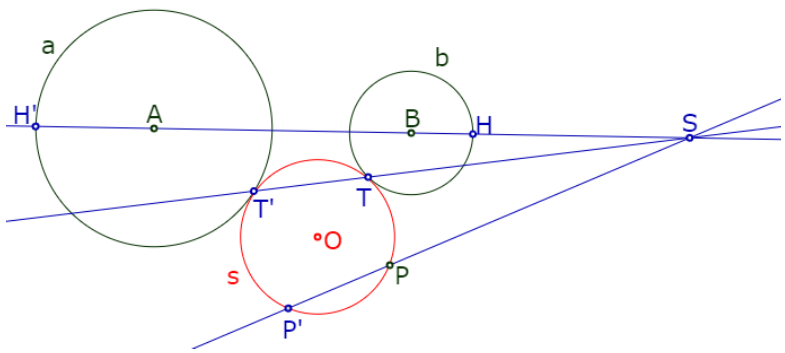
Figura 5. *Exploración para el problema 1*



Poder arrastrar los puntos sobre los círculos, ajustándolos hasta lograr percibir la tangencia ofrece elementos para conjeturar que en este caso particular existen ocho soluciones. Además, que, si fijamos uno de los puntos en una posición arbitraria de uno de los círculos, no existe un círculo que sea tangente a los tres, con un punto de tangencia el punto fijado.

Problema 2: dados dos círculos y un punto. Sean a, b y P los dos círculos y el punto dados, con A y B los respectivos centros. Veamos la Figura 6, donde se considera un caso particular, el problema se imagina resuelto y se dibuja un círculo solución como se hizo en el anterior problema. La recta determinada por los puntos de tangencia T y T' pasa por el centro de similitud exterior de los dos círculos dados.

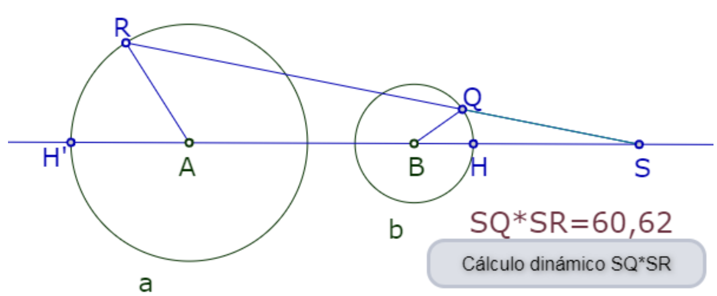
Figura 6. *Dados dos círculos y un punto.*



Usando el teorema 1 expuesto previamente, podemos concluir que $SP \cdot SP' = ST \cdot ST'$. Con otros pocos cálculos extra, que $ST \cdot ST' = SH \cdot SH'$, por lo tanto $SP \cdot SP' = SH \cdot SH'$. Luego, los puntos H, H', P y P' están en un círculo. Este razonamiento permite construir un segundo punto P' del círculo buscado, que se encuentra en la recta SP; trazando un círculo que pase por los puntos P, H y H'. Así, el problema se reduce a: dados dos puntos (P y P') y un círculo (a o b), construir un círculo tangente al círculo que pase por los dos puntos.

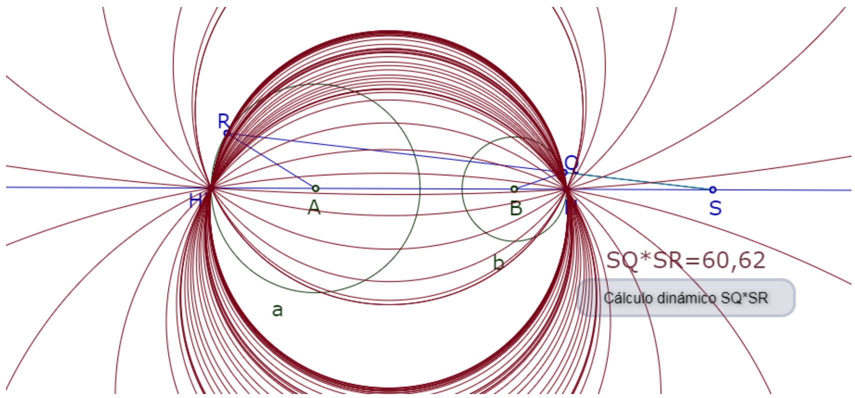
Consideraciones didácticas problema. Nuevamente hay muchas posibilidades de crear experimentos que permitan elaborar conjeturas en dirección del análisis propuesto previamente. Por ejemplo, si se cambia la posición del punto P relativa a los círculos y se construye el centro de similitud, se puede apreciar la alineación de los puntos T, T' y S, en diferentes dibujos ajustados perceptivamente. Además, la posibilidad de hacer cálculos dinámicos (que cambian conforme los objetos involucrados se mueven), ofrece elementos para conjeturar que si se traza una secante SQ al círculo b desde el centro de similitud S, corta al círculo a en un punto R que deja el producto $SQ \cdot SR$ constante. Ver Figura 7.

Figura 7. *Exploración 1 problema 2.*



En ese sentido, el círculo determinado por los puntos H, Q y R, pasa por H'; sin importar la posición de la secante SQ. Para esto se puede proponer a los alumnos construir dicho círculo, activarle el rastro y cambiar la posición de la recta secante. Este hecho fundamental del SGD, que permite percibir propiedades invariantes a partir de la traza de un punto y el movimiento de otros, se ilustra a continuación en la Figura 8.

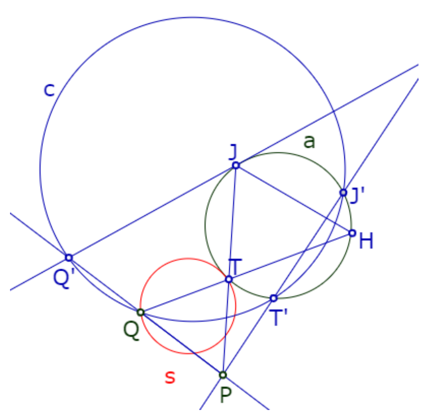
Figura 8. *Exploración 2 problema 2*.



Se observa cómo la familia de círculos que pasa por H, Q y R tiene un segundo punto fijo H'. Hecho que permite comprobar experimentalmente, que los puntos T y T' están en un círculo de esa familia, al igual que los puntos P y P', de modo que para obtener P', basta construir el círculo que pase por P, Q y R.

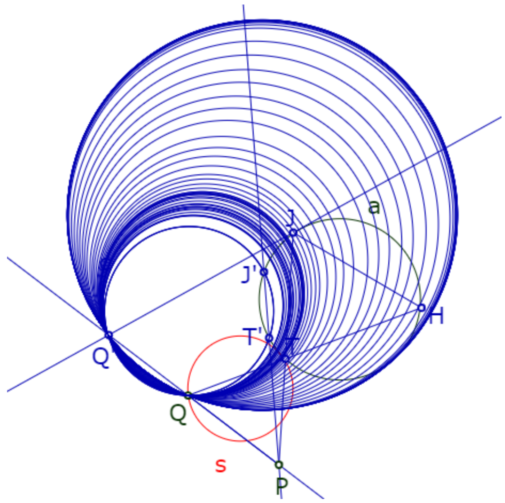
*Problema 3: dados un círculo y dos puntos***.** Consideremos la Figura 9. Sean a, P y Q el círculo y los dos puntos dados respectivamente. Imaginando el problema resuelto, dibujamos el círculo s, para obtener una figura que no resiste el arrastre, pero que como en los anteriores casos permite hacer el análisis a partir de la identificación de propiedades en él. Considerando T al punto de tangencia de los dos círculos y trazando las rectas PT y QT, constatamos que los cortes con el círculo a, determinan dos triángulos en posición de similitud (ΔPQT y ΔHJT). De acuerdo con el teorema 2, esto último es suficiente para que los círculos sean tangentes. Si consideramos además, cualquier otra secante al círculo a trazada desde P, que corte en los puntos P' y J', se deduce que P tiene igual potencia respecto a a y respecto a cualquier otro círculo c que pase por J' y T', en particular aquel que pasa por Q. Por lo tanto, el punto Q', de intersección de c y la recta PQ, es un punto invariante al movimiento de la secante PT', obteniendo de esta manera, la recta JQ', la cual es tangente a a en J. De esta manera se concreta la construcción obteniendo Q' a partir de cualquier secante PT' y luego J como punto de tangencia desde el punto Q', luego la recta JP determina el punto de tangencia T y el problema se reduce a construir el círculo que pasa por los puntos P, Q y T.

Figura 9. Dados dos puntos y un círculo.



Consideraciones didácticas problema. Al igual que en los anteriores casos, las posibilidades de experimentación en este problema, son diversas. Por ejemplo, podemos sugerir a los estudiantes, que construyan la secante PT' que corta al círculo en J', luego que construyan el círculo que pasa por J', T' y Q y activen la traza de este. Al hacer esto se obtiene el dibujo que se muestra en la Figura 10.

Figura 10. *Exploración problema 3.*



Se percibe nuevamente, que el punto Q' es invariante, hecho que se puede justificar mediante el teorema de la potencia del punto respecto al círculo, dado que P tiene potencia respecto a a, la misma que respecto a cualquier círculo que pase por J' y T', por lo tanto si Q permanece fijo, Q' debe permanecer también para que $PQ \cdot PQ'$ sea constante.

También se puede sugerir a los alumnos medir algunos ángulos y observar que a partir de la tangencia de $Q'J$ y a se pueden establecer relaciones entre el ángulo formado por una tangente y una cuerda, los ángulos inscritos en arcos opuestos de un círculo, con el propósito de garantizar el paralelismo de PQ y HJ.

Podríamos realizar muchos más experimentos para enriquecer la práctica experimental, robustecer las conjeturas propuestas y formalizar las demostraciones de estas, aprovechando los mismos experimentos. Sin embargo, por cuestiones de espacio, proponemos solo estas exploraciones básicas con el objetivo de exponer el potencial del SGD para el desarrollo de una práctica matemática y didáctica sustentada en la geometría experimental.

Para concretar la construcción del problema de los tres círculos en el SGD, al menos en algunos casos particulares, sugerimos elaborar macro construcciones para obtener los centros de similitud de dos círculos y una recta tangente a un círculo desde un punto exterior además de las correspondientes a los problemas 2 y 3. Esto favorece no solo la simplificación del dibujo, sino que permite al alumno enfrentar problemas más elaborados, a partir de la consolidación de herramientas más potentes. Así como los teoremas, que condensan propiedades más básicas, las macros condensan pedazos de razonamiento deductivo que favorecen la aparición de estrategias de solución de problemas de construcción sintéticos.

Conclusiones

Consideramos que enseñar matemáticas con software de geometría dinámica requiere la determinación y empleo de nuevas técnicas que hagan uso de estas herramientas, no solo para enseñar, sino para hacer matemáticas. Es decir, que la geometría dinámica no solo pone en evidencia la necesidad de nuevas formas de enseñanza, sino también, nuevas formas de hacer matemáticas.

Hemos expuesto algunas estrategias de solución de problemas de construcción, que son propias de la geometría dinámica, basadas en la exploración, medición y conjeturación, mediante el desarrollo de una práctica de geometría experimental, como un ejemplo de praxeología matemática, sentándonos en los términos de Acosta (2005). Por ejemplo, los dibujos blandos, aquellos que soportan el arrastre parcialmente, junto con el dinamismo de los objetos en el SGD, favorecen la consolidación del análisis como una técnica genuina para la resolución de problemas tanto de construcción como de demostración.

Con este artículo pretendemos aportar ideas para el fomento de la geometría sintética, la de las construcciones, no en el sentido estricto de los griegos, sino en el sentido que debemos replantear nosotros los educadores, en términos de estas nuevas herramientas de representación de objetos dinámicos, que, así como ofrecen oportunidades para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, proponen muchos interrogantes para la comunidad científica.

Referencias bibliográficas

Acosta, M. (2005). Geometría experimental con Cabri: una nueva praxeología matemática. *Educación Matemática*, 17(3), pp. 121-140.

Rabu-Boyé, A. (2009). *El Apollonius Gallus y el problema de los tres círculos como defensa e ilustración de la geometría sintética*. Ediciones Universidad Industrial de Santander.

Drijvers, P., Kieran, C., Mariotti, M. A., Ainley, J., Andresen, M., Chan, Y., Dana-Picard, T., Gueudet, G., Kidron, I., & Meagher, M. (2009). Integrating technology into mathematics education: Theoretical perspectives. En *Mathematics education and technology-rethinking the terrain* (pp. 89-132). Springer, Boston, MA.

González, P. (2007). Raíces históricas y trascendencia de la geometría analítica. *Sigma: revista de matemáticas matematika aldizkaria*, (30), 205-236.

Laborde, C. (2003). Technology used as a tool for mediating knowledge in the teaching of mathematics: the case of Cabri-geometry. In *Plenary speech delivered at the Asian Technology Conference in Mathematics*.

Pierce, R., & Stacey, K. (2013). Teaching with new technology: four 'early majority'teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 16(5), 323-347.

Sandoval, I. (2009). La geometría dinámica como una herramienta de mediación entre el conocimiento perceptivo y el geométrico. *Educación matemática*, 21(1), 5-27.

VOL 34, NÚMERO 1, AÑO 2021

FOROS DE DISCUSIÓN VIRTUALES EN LA PROFESIONALIZACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

VIRTUAL DISCUSSION FORUMS ASSESSMENT IN MATH TEACHER TRAINING PROPOSALS

Adriana Gómez Reyes, Guillermina Ávila García, Liliana Suárez Téllez y Víctor Hugo Luna Acevedo
Universidad Nacional Autónoma de México, Instituto Politécnico Nacional. (México)
orodelsilencio@yahoo.com.mx, gavilag@ipn.mx, lsuarez@ipn.mx, vhluna@ipn.mx

Resumen
El *seminario repensar las matemáticas,* contribuye a la profesionalización del profesor de matemáticas, y cuenta, como espacio para la reflexión, con un foro asincrónico, para propiciar interacciones entre los investigadores en matemática educativa y los docentes. Desde esta perspectiva se expone el presente estudio descriptivo que revisa la evolución de las formas de evaluación realizadas, describiendo la estructura del seminario y del taller adjunto, así como sus características, hasta formular un instrumento que ayude a sistematizar los momentos de la metodología de los seminarios *repensar*, como oferta para mejorar las intervenciones e interacciones en los foros.

Palabras clave: Formación de profesores, evaluación, investigación educativa, foros de discusión

Abstrac
The seminar s*eminario repensar las matemáticas*, contributes to the professionalization of the mathematics teacher, and dispose as a space for reflection, with an asynchronous forum, to promote interactions between researchers in educational mathematics and teachers. From this perspective, the present descriptive study reviews the evolution of the assessment forms carried out, describing the structure of the seminar and the attached workshop, as well as their characteristics, until formulating an instrument that helps to systematize the moments of the *repensar* seminars´ methodology as offer to improve the interventions and interactions in the forums.

Keywords: Teacher training, assessment, educational research, discussion forums

Introducción

Las nuevas formas de comunicación apoyadas por la tecnología que nos ayudan a trascender tiempo y espacio se han ido incorporando en espacios escolares y en la formación de profesores. En el ICMI 25, estudio dedicado al aprendizaje y el trabajo de los profesores de matemáticas trabajando en colaboración (Borko y Potari, 2020), se reporta el uso de foros de discusión, por ejemplo, White (2020) en formación de profesores lo usan para compartir ideas y contenidos para construir un banco de materiales de manera colaborativa, Hreinsdóttir (2020) en el trabajo colaborativo en una comunidad Geogebra donde los maestros consideran los foros como una herramienta para compartir y resolver las dudas sobre el planteamiento de las actividades matemáticas.

Esta revisión bibliográfica dejan ver que los foros de discusión se constituyen un elemento importante para la colaboración y el aprendizaje de los profesores, sin embargo, no hay información sobre el cómo se usa la información que se reúne en estos espacios y cómo se retroalimenta esta participación, es por eso que nos planteamos como el objetivo de este estudio el analizar la evolución de los foros de discusión a más de una década en la formación de profesores de matemáticas en el Seminario Repensar las Matemáticas (SRM) para proponer una mejora a través de instrumentos de evaluación. Abordamos esta problemática con un estudio descriptivo con enfoque cualitativo.

En el primer apartado se describe el SRM y el taller, en el segundo apartado hablamos del importante papel que desempeñan los foros de discusión para la construcción colaborativa de conocimiento entre profesores e investigadores en el área de la Matemática Educativa. El tercer apartado se enfoca en la evaluación de los foros y los participantes y en el último se ofrece una propuesta de instrumentos para la autoevaluación del participante en los foros de discusión.

El Seminario Repensar las Matemáticas y su propuesta de vincular la investigación con la práctica docente

En palabras de Ruiz y Suárez (2015), el Instituto Politécnico Nacional (IPN) es la sede principal del Seminario Repensar las Matemáticas (SRM), una acción de profesionalización docente que vincula la investigación en matemática educativa con la docencia a través del uso de las tecnologías de la información y la comunicación.

Por otro lado; Ruiz, Suárez, Villa-Ochoa y Luna (2020), indican que ese uso de las tecnologías de la información y la comunicación favorece la interacción síncrona, asíncrona, la cooperación virtual, así como la creación de un repositorio de materiales. El modelo también contempla la creación de sitios, grupos de profesores dentro de la misma escuela que tienen una interacción cara a cara, que es paralela a la interacción virtual con otros sitios, y comunidades dentro del seminario.

Asimismo, Ruiz, Suárez, Villa-Ochoa y Luna (2020) enfatizan que la organización del seminario gira en torno a un producto de investigación (tesis, artículo, informe, capítulo de un libro o libro) que es proporcionado por el investigador-autor a los participantes. Estos participantes establecen diferentes interacciones con respecto a este producto de la investigación, concretando el diálogo como la interacción establecida entre profesores e investigadores en tres puntos:

- ✓ El primero se establece entre el investigador y uno o dos profesores invitados a hablar directamente con el investigador.
- ✓ El segundo tiene lugar cuando el diálogo está abierto a la participación de diferentes profesores que siguen la difusión de la presentación a través de una teleconferencia o en Internet. En este punto, la interacción es

simultánea o casi simultánea, los maestros que están presentes a través de la teleconferencia hacen preguntas oralmente, y los que la siguen en Internet, compartiendo sus pensamientos en un foro de discusión.

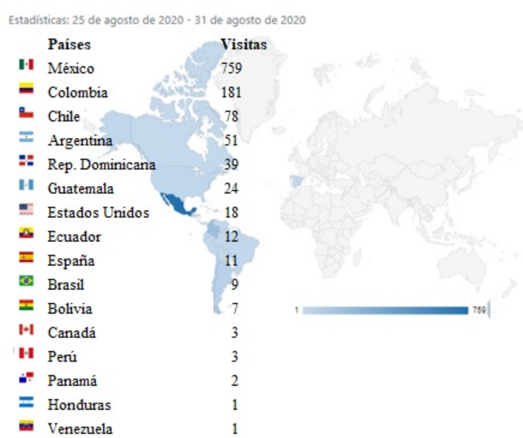
- ✓ La tercera es la interacción asincrónica a través de un foro de discusión general (Ruiz y Suárez, 2015). Este tercer punto ofrece una interacción no sólo entre profesores e investigadores, sino también entre profesores.

Previamente los participantes requieren de la lectura propuesta por el investigador de donde surgen inquietudes o preguntas que son expuestas mediante el foro y se van enriqueciendo con la colaboración de todos los participantes en la interacción con el investigador o entre los profesores de diversas instituciones educativas. En el ciclo 15 están participando profesores e investigadores de instituciones educativa de diferentes países, tales como: Argentina, Brasil, Colombia, Chile, España, Estados Unidos, México y Venezuela. Para un informe más completo, véase Figura 1.

En el sitio del SRM (http://repensarlasmatematicaswordpress.com) se encuentra la descripción del proyecto, la información de los 15 ciclos del seminario organizados por cada sesión: documentos de referencia y complementarios, semblanzas de los investigadores y dialogantes invitados, video de la sesión, galería de imágenes y los Foros de discusión.
En relación con el SRM, se implementó el Taller Repensar la enseñanza de las Matemáticas desde la Investigación Educativa (REMIE), con el propósito diseñar y argumentar una propuesta de intervención a través de la aplicación de conceptos, herramientas y metodologías de la investigación educativa para repensar su docencia e innovar la enseñanza de las matemáticas. Se sigue esta metodología, y se retoman las sesiones que están en proceso o por iniciar de acuerdo con el ciclo correspondiente, donde los profesores participantes realizan la lectura del documento de referencia, llevan a cabo un control de lectura, posteriormente realizan la participación en foro con la orientación y seguimiento de los instructores, y son evaluados la lista de cotejo que conocían previamente.

Una vez realizada la participación en el foro con una pregunta, inicia la interacción con el resto de los participantes comentando las participaciones de otros profesores y también del investigador.

Figura 1. *Estadística de visitas al sitio del SRM del 25 de agosto de 2020 - 31 de agosto de 2020*



Editado a partir de imagen tomada de la administración del blog.

La importancia del taller radica en que, una vez realizado todo el proceso, la lectura, el análisis del contenido, participación en los foros, comentarios reflexivos acerca de la lectura; se busca que el profesor diseñe una propuesta de intervención didáctica, tomando en cuenta alguna sesión del SRM y considerando el plan y programa de estudios de la unidad de aprendizaje que imparte, para su puesta en escena en la clase con los estudiantes.

Importancia de los Foros en el SRM y en el taller REMIE

La evaluación permite recopilar información sobre el desarrollo del proceso a evaluar, para buscar su mejora. Visto así, no evaluamos solamente el desempeño del participante, también debemos considerar la evaluación de los materiales y los procesos utilizados. (Flores y Gómez, 2009; Loredo, 2007) En el caso del SRM y del taller REMIE, los foros pueden observarse desde dos perspectivas: como instrumento de trabajo y la evaluación de su funcionamiento, lo cual permite que sea una fuente de información para evaluar otros elementos del proceso, el desempeño de los participantes, los documentos de referencia o dialogo de la videoconferencia, por ejemplo.

Ramírez, Zenteno, García y Suárez (2014) indican que “los foros generados en cada una de las sesiones de los SR [Seminario Repensar] nos permiten analizar su contenido y las formas de relación que establecen los participantes” con lo que los identifican como una excelente herramienta para la evaluación del SRM y del Taller que estudia, como un proceso completo. Ramírez (2013, citado en Ramírez et al. 2014) describe una serie de aspectos cuantitativos a considerar:

- Dimensión interactiva: Preguntas, comentarios, afirmaciones y argumentos
- Dimensión cognitiva: Pensamiento reflexivo, búsqueda de evidencias, construcción de inferencias.
- Fases de evolución de la comunidad de práctica: motivación, socialización, intercambio, construcción y trascendencia.

Metodología

Para exponer la situación actual del seguimiento a los participantes y los foros de discusión en este estudio descriptivo con enforque cualitativo se presenta primero la rúbrica con la que se evalúan las interacciones de cada participante en los foros. Como segundo aspecto se presenta una selección de foros de discusión en 2004, 2011 y 2020 para analizar una evaluación en el comportamiento de los foros de discusión.

Seguimiento de los participantes

Para la concreción de los propósitos del SRM, las actividades de lectura y de diálogo que los participantes tienen que hacer en el taller REMIE están acompañadas de un seguimiento por parte de los instructores que hacen una valoración del control de la lectura y la interacción en foros de los profesores participantes. Este doble seguimiento se concentra en una rúbrica que considera seis aspectos: Contenidos, ortografía y redacción, otros referentes, invita al intercambio, requerimientos cuantitativos e identificación y referencia al tema. En la Figura 2 se muestra un segmento de la rúbrica donde se observan algunos de estos aspectos (en los renglones), con la descripción de sus alcances y la valoración en cada columna. El revisor indica sombreando los alcances logrados y puede poner comentarios en la última columna.

Figura 2. *Segmento de la rúbrica para valorar lectura y participación en foros.*

Otros referentes	La mayoría de los comentarios del participante NO hacen referencia a su experiencia docente, ni emiten una opinión o citan otras lecturas relacionadas 0 puntos	La mayoría de los comentarios del participante hacen referencia a su experiencia docente, pero NO a conocimiento previo o documentos adicionales 13.33 puntos	Todos los comentarios del participante reflejan su experiencia docente y aprovechan conocimientos previos o dan otras referencias 16.67 puntos	De acuerdo, al menos hace uso del doc.
Invita al intercambio	La mayoría de los comentarios del participante NO reflejan una lectura de otros comentarios, incluso puede ser repetitivo con comentarios previos de otros participantes 0 puntos	La mayoría de los comentarios del participante NO son repetitivos, pero tampoco fomentan la interacción con otros participantes. Pueden fomentar la interacción, pero parecen cortar el dialogo 13.33 puntos	La mayoría de los comentarios del participante hacen referencia, responden o complementan otras participaciones. Dan una opinión respetuosa, dejan preguntas abiertas o invitan a la discusión. Hay comentarios en tercero o cuarto nivel de diálogo 16.66 puntos	Si
Requerimiento cuantitativo	NO hay comentarios del participante o hay un solo comentario aislado de los otros 0 puntos	Hay un comentario y una réplica del participante que invita poco a la interacción con otros participantes 13.33 puntos	Hay un comentario que abre diálogo y tres réplicas del participante, mostrando comprensión y respeto por otras opiniones 16.66 puntos	Hay reflexión e interacción.

Tomado de la plataforma Moodle del taller REMIE.

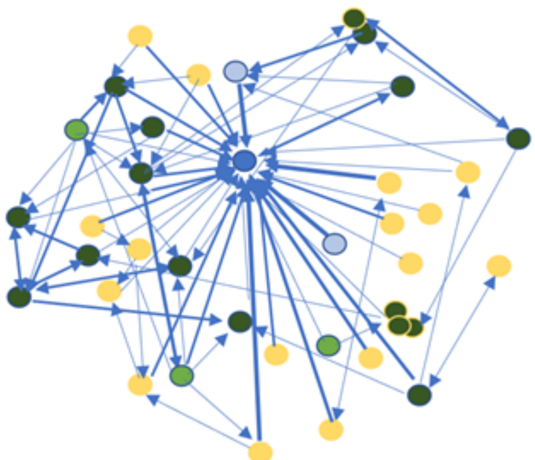
Como el foro de discusión es el medio de comunicación de estas dos acciones: Taller y diálogo en SRM, es importante analizar su contenido y dar una propuesta para retroalimentar la participación de los profesores que contribuya a su mejora.

Evaluación general del foro

Para realizar el análisis se tomarán como datos las interacciones entre los profesores participantes, los dialogantes y el invitado en el Foro de discusión de la sesión 116 (S116) del Seminario Repensar las Matemáticas. Para tener un medio de triangulación de este análisis se considera la participación en los foros de un profesor de cada uno de los tres grupos que se abrieron para trabajar en las distintas sedes del taller REMIE, lo que nos permitirá establecer una relación de la acción conjunta del seminario y el taller.

En el diagrama de la Figura 3 se muestra cómo se relacionan cada una de las participaciones del foro de la S116. Una de las características especiales de esta sesión es que los profesores del taller tenían como parte de sus actividades participar en esta sesión. El punto en azul más obscuro es el investigador invitado, el recibió la mayoría de los comentarios y contestó algunos, los azules claro son los dos dialogantes que prepararon la sesión con el investigador. Los puntos verdes son los participantes en el taller, los más claros son los coordinadores, mientras que los amarillos son los participantes del SRM sin inscripción al taller.

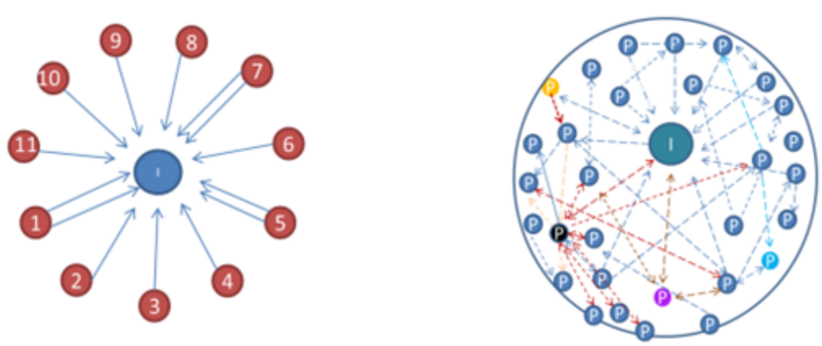
Figura 3. *Análisis de interacciones entre los participantes S116.*



Elaboración propia

Algunos de los participantes realizaron un pequeño dialogo en parejas o grupos pequeños, por lo que las líneas tienen punta de flecha en ambos sentidos y las líneas más gruesas implican que varios mensajes se intercambiaron entre los participantes, las más delgadas implican solo un mensaje. Si se compara este diagrama con los presentados en Ramírez et al. (2014), Figura 4, se puede observar que la interacción entre los participantes se ha ido volviendo más complicada. Se han multiplicado las intervenciones y se encuentran respuestas y comentarios entre los participantes, en forma independiente del invitado y de los coordinadores.

Figura 4. *Análisis de interacciones entre los participantes sesiones previas.*



Tomado de Ramírez, Zenteno, García y Suárez (2014)

El primer diagrama de la Figura 4 corresponde a una de las primeras sesiones, donde observamos pocos participantes y todos se dirigen al invitado, conforme el tiempo pasó, en el segundo diagrama se observa un aumento en el número de participantes y también se ha generado la interacción con las intervenciones de cada uno de ellos, no solo con el invitado. En la Figura 3, no solo han aumentado los participantes y el intercambio entre estos, sino que se pueden incluso observar pequeños grupos entre los que la discusión es más o menos nutrida y algunos participantes en quienes se concentra la dirección de los comentarios, todos ellos participantes del taller, por lo que podemos suponer que el intercambio realizado en las sesiones del taller REMIE fomentó este tipo de intercambio en el Foro del SRM y más aún generó algunos liderazgos sin que haya esa intencionalidad.

Cabe recordar que el análisis de los foros planteado por Ramírez, et al. (2014) considera otros factores, no solo la cantidad y dirección de las interacciones. Por eso, en la Figura 3 se observa cómo se dan los intercambios entre los distintos participantes, donde comentan sobre el documento, dan distintas opiniones, y no es necesario que estén en un mismo momento (asincrónico), lo que da libertad a los participantes, pero también da oportunidad de madurar las ideas, tal como se observa en este caso.

Figura 5. *Extractos del Foro S116. Interacciones entre los participantes.*

31 julio, 2020 a las 12:49

Normas y metanormas.

En lo que respecta a la dimensión meta didáctico-matemática del modelo CDM se consideran las normas y metanormas, ¿se refiere esto a lo que en el salón de clase llega a ser considerado como válido o adecuado desde el punto de vista de la matemática, o tiene otra connotación?

Prof. M.
CECyT 4, IPN. México.
Responder

7 agosto, 2020 a las 20:51

Hola *M*, respondiendo a tu pregunta, yo entiendo que la dimensión Meta Didáctico-Matemática del CDM tiene que ver con conocer el contexto de la institución educativa y el entorno social y cultural del estudiante, pues es claro que, las condiciones institucionales, las normas y metanormas establecidas, regulan el ejercicio profesional del propio docente.
Prof. A
CECyT 1 del I.P.N.

Responder

23 agosto, 2020 a las 23:00

Hola *A*.
Sí, de acuerdo, leyendo el documento con más detalle, coincido contigo, se trata de lo que institucionalmente está definido y previsto respecto a lo que se espera del profesor y de su desempeño docente. Creo que aquí el currículo que la institución establece es lo que, a fin de cuentas, determina las posibilidades de vincular los contenidos con el contexto más amplio del entorno político, social y cultural en el que se produce la enseñanza y la formación de los estudiantes.
Saludos.
Prof. M. CECyT 4, IPN.

Tomado del foro de discusión de la S116 del SRM (https://repensarlasmatematicas.wordpress.com/15ciclo/sesion-s116/)

En estos extractos se puede observar cómo los participantes leyeron el documento y dan sus opiniones al respecto, además aprovechan la cualidad asincrónica para volver a leer el documento y madurar sus propias ideas. Hasta este momento, el análisis está concentrado en las evidencias en el foro de discusión, pero es importante reconocer el trabajo individual de los participantes, para lo cual tenemos una propuesta.

Propuesta de instrumentos para la autoevaluación del participante

La presente propuesta está fundamentada en los *tres momentos* que caracterizan la sesión de un seminario repensar, el antes, el durante y el después.
El momento *antes* de una sesión de un seminario consiste en realizar la lectura del documento de referencia que ofrece el investigador invitado, aunque en ocasiones pueden ser más de uno, realizada la lectura se recomienda a los participantes a publicar una primera intervención relacionada con alguna idea primigenia sobre dudas, observaciones, comentarios o ideas para llevar a un momento analógico la reflexión.

Tabla 1. *Instrumento auxiliar para el momento* ***antes*** *de una sesión del seminario repensar.*

Lectura literal	Lectura inferencial	Lectura analógica	Observaciones Registro bibliográfico para el ensayo Autoevaluación		
Observación	Clasificación	Interpretación	1	Nula	
			2	Media	
			3	Buena	
Comparación	Codificación	Relaciones analógicas	1	Nula	
			2	Media	
			3	Buena	
Relación	Palabras clave	Juicios de valor	1	Nula	
			2	Media	
			3	Buena	

Elaboración propia

El instrumento auxiliar para el momento denominado antes de una sesión permite al participante contar con una guía para realizar la lectura del documento de referencia ofrecido por el investigador. Los niveles de lectura le ayudan a 1) observar, comparar y encontrar relaciones con su actividad académica, 2) lograr clasificar, codificar y encontrar palabras clave en el documento y 3) hacer una interpretación para determinar relaciones analógicas y emitir un primer juicio de valor.

Los elementos que encuentra a partir de los niveles de lectura pueden observar y hacer una autoevaluación del nivel de logro alcanzado para empezar el trabajo de escritura que es el requisito que el seminario repensar solicita para acreditar.

El momento *durante* de un seminario repensar consiste en una sesión por videoconferencia. Esta sesión transmitida por Internet o Videoconferencia escenifica un diálogo con el investigador invitado.

Una vez realizada la primera intervención en el foro de discusión a partir de los tres niveles de lectura, se participa en la videoconferencia para conocer de viva voz, la interpretación del trabajo de investigación por parte del mismo investigador y por los dialogantes.

Existen dos maneras de participar en este momento, por la videoconferencia de viva voz o por el foro del seminario, donde los dialogantes están al pendiente para mencionar las preguntas al invitado. En estos momentos debido a la contingencia sanitaria, la intervención de viva voz se realiza por Zoom y se puede registrar la intervención escrita en el Chat de YouTube o directamente en el foro del seminario en WordPress.

Tabla 2. *Instrumento para auxiliar al participante en el momento denominado* ***durante*** *la sesión de videoconferencia.*

	Nivel				Notas para el ensayo	
	Nulo	Bajo	Medio	Alto	Registro de la participación	
Comunicación entre pares						
Intercambio de ideas						
Entendimiento de los significados						
Conexión con las ideas del investigador						
Respeto por las ideas						
Ambiente de respeto y confianza						

Elaboración propia

Este instrumento le permitirá al participante darse una idea sobre el tipo de comunicación que se realiza con el investigador que al ser un puente reflexivo se vislumbra el intercambio de ideas para entender los significados.

A manera de autoevaluación es auxiliar para determinar el nivel de a) comunicación entre pares académicos con el investigador, b) el intercambio de ideas relacionadas con el tema, c) el entendimiento de los significados, d) conexión con las ideas del referente, e) el respeto a las ideas y finalmente, f) que se perciba el respeto y la confianza entre pares académicos.

El momento posterior o *después* de la sesión se encuentra enmarcado en un espacio virtual donde las ideas se amalgaman a partir de la reflexión. El investigador invitado participa en el foro del seminario aclarando dudas, ampliando las intervenciones que por cuestiones de tiempo no fue posible abordar durante la sesión de videoconferencia, enriquece la reflexión entre los pares académicos.

Tabla 3. *Instrumento para auxiliar para el momento denominado* ***después*** *del seminario.*

	Cotejo				Verificación
	Si	No	No sé	N/A	
Definición de ensayo					Redacción de ideas
Características del ensayo					Argumento organizado
Partes del ensayo					Resumen, introducción, conclusiones
Citación correcta					Formato APA actualizado
Sesión más significativa					Razones
Analogía en el aula o laboratorio					Evidencias y descripciones
Mejoras en la práctica docente					Aprendizaje significativo
Recomendaciones al seminario					Propuestas temáticas

Elaboración propia

Este instrumento permitirá al participante auxiliarse para que de manera sistematizada estructure la evidencia final denominada ensayo. A partir de la definición de qué es un ensayo, cuáles son sus características, cómo está conformado, cuál es la forma de hacer citas, puede realizar el trabajo de escritura. El participante ya determinó la sesión o las sesiones que le resultaron más significativas, logró hacer la analogía con su trabajo académico, formuló ideas que le van a ayudar a mejorar su actividad y logra hacer recomendaciones para quienes se encuentren en circunstancias similares a la suya en su cotidiano académico o nuevos temas.

Conclusiones

A manera de conclusión, se puede señalar que la participación en los foros de discusión del seminario repensar las matemáticas forman una red de hilos de ideas que pueden ser entretejidas para fortalecer el diálogo entre los resultados de las investigaciones educativas desempeñando el papel de la característica síncrona y asíncrona. Este hilo de comunicación puede ser medible a partir de la distancia temporal, el manejo de las ideas y el seguimiento, tanto del seminario repensar como desde una acción formativa ligada como es el taller repensar la enseñanza de las matemáticas a partir de la investigación educativa.

La evidencia que se genera a partir de los usos de los instrumentos de evaluación, la retroalimentación por parte del investigador y la comunicación entre pares académicos señala que existe un efecto de evolución en la participación de los profesores y la interacción con los investigadores invitados.

Las interacciones registradas son vistas con diferentes criterios como los ortográficos, gramaticales, generación de ideas, intercambio de experiencias, así como también el manejo de los contenidos vinculados de manera literal hasta la analógica. Los instrumentos que se plantean como auxiliares para sistematizar la participación dan una imagen a manera de guía para que la reflexión académica deje de ser un supuesto y más un objeto que pueda ser sujeto de estudio en un futuro.

Ante la necesidad de fortalecer la participación en el seminario repensar se formuló el taller repensar la enseñanza de las matemáticas, dando como resultado que los instrumentos de la evaluación de los participantes se conjuntaran para que sean un instrumento de retroalimentación en ambos escenarios, con un juicio de valor no punitivo (SRM) pero sí de crecimiento y formación académica (taller REMIE).

Las actividades del taller están íntimamente vinculadas al seminario, sin embargo, el tratamiento de la evidencia final (ensayo para el SRM) y actividad integradora (para el taller REMIE) es distinto en ambos escenarios.

Las gráficas que se realizaron para representar los hilos de comunicación representan estos hilos de comunicación y la interacción entre investigador y participante, sin embargo, se percibe que no todos cuentan con respuesta bidireccional, las razones no se logran visualizar con los instrumentos de evaluación actuales. La metodología de participación que los coordinadores del seminario repensar las matemáticas establecieron con el tiempo, ayuda a sistematizar la colaboración asíncrona con el objetivo de propiciar la reflexión.

Agradecimientos

Los autores agradecen al Instituto Politécnico Nacional en México por el apoyo brindado por la Red de los Seminarios Repensar (DES/RED/003/2015) y los proyectos de investigación con registro SIP 20200061 y 20201239 de la Secretaria de Investigación y Posgrado.

Referencias

Borko, H. y Potari, D. (2020). *Conference Proceedings of the The Twenty-Fifth ICMI Study Teachers of Mathematics Working and Learning in Collaborative Groups*. University of Lisbon. http://icmistudy25.ie.ulisboa.pt/wp-content/uploads/2020/05/ICMIStudy25Proceedings.pdf

Flores, A. H., y Gómez, A. (2009). Aprender Matemática, Haciendo Matemática: la evaluación en el aula. *Educación Matemática*, *21*(2), 117-142.

Hreinsdóttir, F. (2020). Teachers' learning through participation in conferences and Network meetings – the nordic and baltic geogebra network. In H. Borko and D. Potari (Eds.) *Conference Proceedings of the The Twenty-Fifth ICMI Study Teachers of Mathematics Working and Learning in Collaborative Groups.* Lisbon: University of Lisbon. (pp. 340-347).

Loredo, J. (2007, septiembre). *Evaluación comprensiva, una alternativa para recuperar la evaluación del aprendizaje*. Ponencia presentada en el Congreso Nacional de Evaluación Educativa. Universidad Autónoma de Tlaxcala. Facultad de Ciencias de la Educación. Recuperado de http://posgradoeducacionuatx.org/congreso/?page_id=98

Ramírez, M.E., Zenteno, M.G., García, R. y Suárez, L. (2014). Los seminarios repensar espacio para el desarrollo de comunidades de práctica profesional. *Memorias del III Congreso Internacional EDO 2014. 1-18.* Recuperado de: https://repensarlasmatematicas.files.wordpress.com/2014/05/xx_4.pdf

Ruíz, B., Suárez, L., Villa-Ochoa, J., Luna, V. (2020). Seminar on Re-Thinking Mathematics: A Collaborative Environment, Which Offers Resources for Mathematics Teachers and Researchers. In *ICMI Study Conference: Teachers of Mathematics Working and Learning in Collaborative Groups* (pp. 427-434).

Ruiz, B., y Suárez, L. (2015). Una propuesta de diálogo entre investigación y docencia: Seminario repensar las matemáticas. *Opción: Revista de Ciencias Humanas y Sociales*, (5), 833-855.

White, J. (2020). A move towards teacher collaboration among Irisch matematics teachers –is it feasible for all? In H. Borko and D. Potari (Eds.) *Conference Proceedings of the The Twenty-Fifth ICMI Study Teachers of Mathematics Working and Learning in Collaborative Groups.* Lisbon: University of Lisbon. (pp. 213-220).

DESARROLLO DE HABILIDADES CON EL USO DE INSTRUMENTOS TECNOLÓGICOS Y LA VARIACIÓN

DEVELOPMENT OF SKILLS WITH THE USE OF TECHNOLOGICAL INSTRUMENTS AND THE VARIATION

Jemima del Eden Gutiérrez Salce, Evelia Reséndiz Balderas
Universidad Autónoma de Tamaulipas. (México)
jemimapaloma94@gmail.com, erbalderas@docentes.uat.edu.mx

Resumen
Este trabajo se llevó a cabo en Ciudad Victoria, Tamaulipas, México. El objetivo consistió en desarrollar habilidades en los estudiantes de 1° de secundaria, a través de instrumentos tecnológicos, para interpretar la variación de situaciones de movimiento, graficarlas y aplicarlo a contextos de la vida cotidiana. Para ello se realizó un cuadernillo de actividades donde estudiantes debían interpretar y graficar situaciones de movimiento, apoyando a ello el uso de imágenes con animación de movimiento y el uso de un sensor de movimiento que graficaba en pantalla. Los resultados de este trabajo fueron favorables logrando en cierta medida el objetivo planteado.

Palabras clave: habilidades, instrumentos tecnológicos, variación, movimiento

Abstract
This work was carried out in Victoria City, Tamaulipas, Mexico. It was aimed at developing high school first-year students' skills, through technological tools, to interpret the variation of movement situations; to graph them and to apply it to everyday life contexts. So, a booklet of activities was draw up, where students had to interpret and graph motion situations, supported by the use of images with motion animation and the use of a motion sensor that graphed on the screen. This work has successful results, achieving the proposed objective to a certain extent.

Key words: skills, technological tools, variation, movement

Introducción

En análisis a pruebas que se aplican a los estudiantes tamaulipecos, como en otros estados, se ha encontrado bajo desempeño en educación básica en matemáticas, prueba de ello es PLANEA (2018-2019) de una escuela secundaria ubicada en Ciudad Victoria, Tamaulipas. Los resultados no son alentadores y muestran la necesidad de intervenir en ello, ya que la mayoría de los alumnos se encuentran en el nivel I, que es el más bajo (los estudiantes muestran una menor cantidad de aprendizajes). Los alumnos que se encuentran en ese nivel, no han logrado adquirir la habilidad para: traducir al lenguaje algebraico una situación que se modela con una ecuación lineal, para resolver problemas que implican comparar el volumen de cilindros de manera visual, resolver problemas que implican estrategias de conteo básicas (representación gráfica). Por otra parte, se ha encontrado en educación secundaria y bachillerato que los jóvenes presentan problema al interpretar las gráficas y al usarlas (Saucedo, 2014). Así como, la interpretación gráfica del movimiento con las variables distancias/tiempo, son leídas como trayectorias de movimiento y no así, como una relación de dos variables (Briceño y Cordero, 2012).

En el Programa de estudios (SEP, 2017) de educación secundaria en Matemáticas, en 1° grado en el tema de funciones; sus aprendizajes esperados son (refiriéndose al alumno): analiza y compara situaciones de variación lineal a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica. Interpreta y resuelve problemas que se modelan con estos tipos de variación; lo cual con este trabajo, se espera favorecer.

Por ello el objetivo de este trabajo es desarrollar habilidades en los estudiantes de 1° de secundaria, a través de instrumentos tecnológicos, para interpretar la variación de situaciones de movimiento, graficarlas y aplicarlo a situaciones de la vida cotidiana. El trabajo se realiza con estudiantes de 1° de la Escuela Secundaria Federalizada N°1 “Dr. Norberto Treviño Zapata”; ubicada en Ciudad Victoria Tamaulipas.

Marco teórico

La teoría que sustenta este trabajo es la teoría socioepistemológica, ya que para este trabajo se pretende los alumnos desarrollen habilidades a través de instrumentos tecnológicos para interpretar la variación de situaciones de movimiento, graficarlas y aplicarlo a situaciones de la vida cotidiana, se pretende los estudiantes puedan ver que la matemática se encuentra en todas partes y la usamos constantemente. Como menciona Cantoral (2016) sobre la socioepistemología:

> Postula que para atender la complejidad de la naturaleza del saber y su funcionamiento al nivel cognitivo, didáctico, epistemológico y social en la vida de los seres humanos, deberá de problematizar al saber […] situándolo en el entorno de la vida del aprendiz (individual o colectivo) […] (p.51).

Por ello, en este trabajo se pretende abordar el tema de variación, plantear diversas situaciones de movimiento a los estudiantes, de actividades que realizan cotidianamente, como son; el caminar, ya sea lento o rápido, ir y regresar a un lugar a distinta velocidad, entre otros, y graficar su movimiento.

Uno de los enfoques teóricos en investigación para la integración de la tecnología digital en la educación matemática es la aproximación instrumental, la cual señala, todo aprendizaje con noción matemática esta mediado por instrumentos, esto ocurre con el saber matemático, las acciones del profesor, el conocimiento construido por el alumno, la organización de la clase y el uso didáctico del instrumento (Santacruz, 2009). En otras palabras, el enfoque de aproximación instrumental, se preocupa por los aspectos instrumentales de la actividad de uso de una herramienta tecnológica por parte de un sujeto en un contexto educativo, se encarga de formar artefactos en instrumentos de actividad matemática.

En el sustento teórico de este trabajo, se retoma a la visualización, en su perspectiva cognitiva, pues es aquella que busca crear representaciones visuales para apoyar actividades, comprender un contexto en particular y hacer uso del conocimiento adquirido. Su perspectiva tecnológica con el uso de representaciones visuales, didácticas, entre otros, por medio de una computadora para ampliar la cognición (Torres, 2009).

Metodología

Como estrategia fundamental para este proyecto de intervención se establece la siguiente: Desarrollo de habilidades para interpretar y graficar situaciones de movimiento en el grupo de 1°C de secundaria. Para el logro y realización de esta estrategia, se implementa una serie de actividades que estimulan a los estudiantes en el desarrollo de habilidades para la interpretación gráfica de situaciones de movimiento en hoja de papel y a través del uso de la Tecnología Educativa, en un salón de primer año de la Escuela Secundaria Federalizada N°1 "Dr. Norberto Treviño Zapata" turno matutino, ciudad Victoria Tamaulipas, en clase de matemáticas. Se realiza un informe de selección y cambios, rediseño de actividades del Capítulo 1: "Conozca al señor movimiento" de los autores Briseño y Cordero, en el libro; La Ciencia desde el niño(a) (Cordero, 2015). En donde se presentan diversas situaciones de movimiento. Se crea un cuadernillo de trabajo con 10 actividades, una vez seleccionadas y rediseñadas las actividades, sobre el tema de variación, para 41 alumnos. También se incluye un trival (diapositivas de power point) con 10 actividades animadas con imágenes clasificadas, que sirvan como apoyo a las situaciones de movimiento que se presentan en los cuadernillos de trabajo. También se cuenta con los siguientes recursos; un tripié para colocar el sensor de movimiento, un sensor de movimiento, una calculadora CASIO con los respectivos cables y elementos para realizar los gráficos y pasar estos de la calculadora a una laptop en aplicación Screen Receiver y de la laptop a proyección en pantalla mediante un proyector.

En este proyecto se cree, la tecnología es un factor clave para la enseñanza de las matemáticas, como mencionan en Correa, Reséndiz, Salazar y Sánchez (2016), respecto a la tecnología "influye no sólo en la forma que se enseñan y aprenden las matemáticas, también desempeña un papel importante respecto a qué se enseña y cuándo aparece un tema en el currículo" (p.21). Por ello en este trabajo, al implementar la tecnología en el salón de clases en materia de matemáticas, no solo hace más atractiva la clase sino que puede provocar ese aprendizaje que se desea los estudiantes obtengan.

Análisis de los resultados

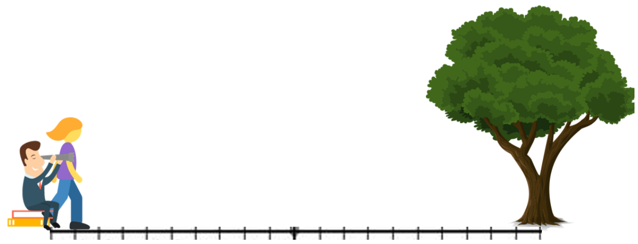
A continuación, se presentan algunas respuestas de los alumnos de 1°C en sus cuadernillos de trabajo. Relacionado con la actividad 1:

Victoria y el observador

En la siguiente imagen se muestra un personaje que llamaremos *el Observador* y que representará el origen del sistema cartesiano. El observador se toma como punto inicial, a partir del cual se calcula la distancia de Victoria (una joven como tú) al desplazarse hacia un árbol en un tiempo transcurrido. Para estas actividades el Observador es el padre de Victoria: quien representará el inicio del recorrido que ella realiza. El recorrido se lleva a cabo en un campo que se encuentra cerca de la casa de los abuelos de Victoria.

Actividad 1

Figura 1. *Imagen de Victoria y el Observador que aparece en el cuadernillo de trabajo.*

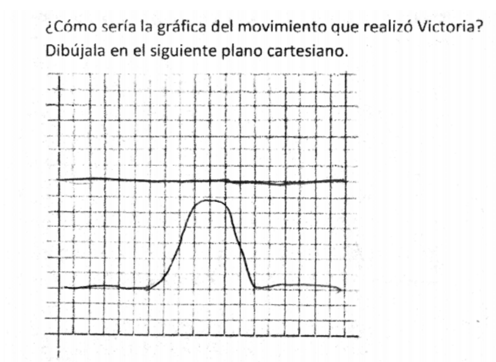


En la actividad 1, Victoria hace un recorrido partiendo desde el observador, va caminando a una velocidad considerable hasta llegar al árbol, se da la vuelta y regresa hacia el observador con la misma velocidad con la que llegó.

*Mira la siguiente diapositiva que muestra (con animación de movimiento), cómo fue el recorrido de Victoria.

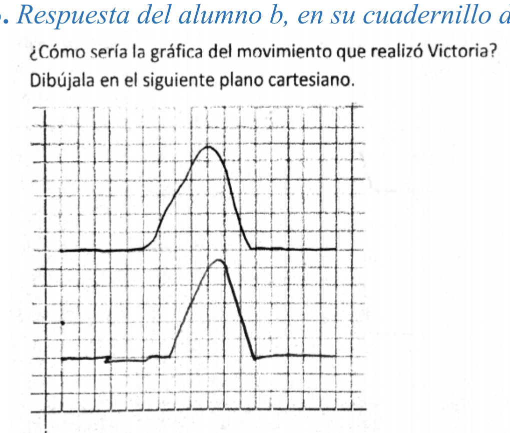
¿Cómo sería la gráfica del movimiento que realizó Victoria? Dibújala en el siguiente plano cartesiano.

Figura 2. *Respuesta del alumno a, en su cuadernillo de trabajo.*



Esta gráfica (alumno a) representa a la mayoría de los estudiantes, ya que hicieron una gráfica en forma de línea recta, en un primer momento, pero después al utilizar el sensor de movimiento pudieron observar que la gráfica queda en forma de montaña, y así la graficaron después.

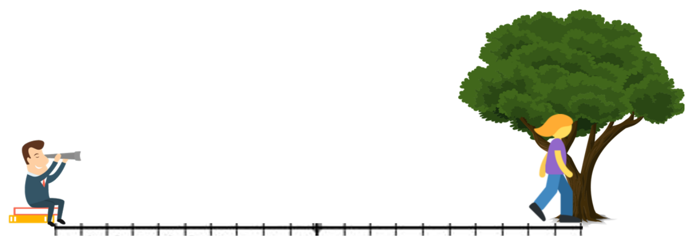
Figura 3. *Respuesta del alumno b, en su cuadernillo de trabajo.*



Solo algunos cuantos alumnos (como es el caso del alumno b), pudieron graficar en un primer momento el movimiento de Victoria en forma de montaña, en plano aparecen dos gráficas ya que una fue hecha por ellos antes de utilizar el sensor, y otra después de hacerlo.

En esta actividad, se busca los alumnos representen en una gráfica el movimiento visto previamente en las diapositivas de Power Point; ya que, en la teoría de visualización, las tareas requieren que los alumnos puedan ver o imaginar objetos para realizar determinadas operaciones o transformaciones con ello (Godino, et al., 2012).

Figura 4. *Imagen de Victoria y el Observador que aparece en el cuadernillo de trabajo.*



En la actividad 2, Victoria hace un recorrido partiendo desde el observador, va caminando a una velocidad considerable hasta llegar al árbol, se detiene un tiempo ahí para tomar un poco de sombra y regresa hacia el observador con la misma velocidad con la que llegó.
*Mira la siguiente diapositiva que muestra (con animación de movimiento), cómo fue el recorrido de Victoria.

Realiza la gráfica que crees corresponde a la situación o actividad que realizó Victoria:

Figura 5. *Respuesta del alumno a, en su cuadernillo de trabajo.*

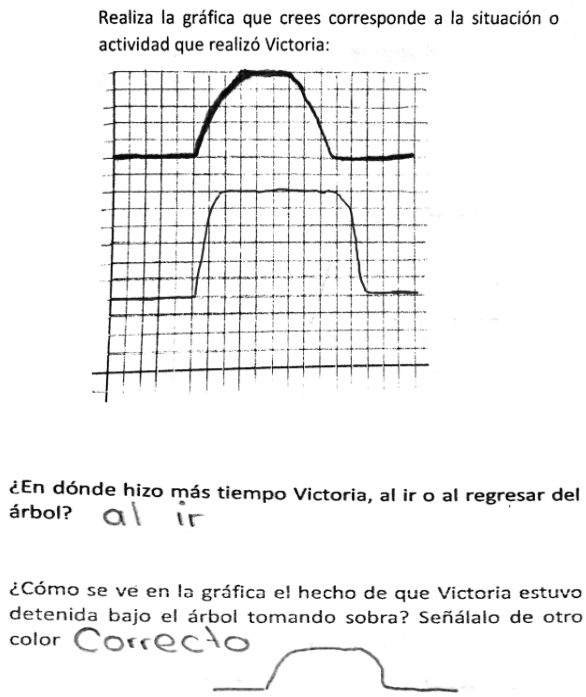
Realiza la gráfica que crees corresponde a la situación o actividad que realizó Victoria:

Fig. 13. Respuesta del alumno a, en su cuadernillo de trabajo.

¿En dónde hizo más tiempo Victoria, al ir o al regresar del árbol? Recorio el mismo tiempo

¿Cómo se ve en la gráfica el hecho de que Victoria estuvo detenida bajo el árbol tomando sobra? Señálalo de otro color recto.

Figura 6. *Respuesta del alumno b, en su cuadernillo de trabajo.*



El alumno a, al principio presenta cierta confusión al graficar, podría ser que al decir, Victoria se detuvo en cierta parte de su recorrido, generó esta duda, pero al mismo tiempo tiene algo de sentido su primera gráfica, ya que dibujó dos montañas y la parte baja tiene inferior central, marca donde estuvo detenida Victoria, aunque la gráfica no es la conveniente para este recorrido, presenta cierta lógica para el alumno. En contraste al alumno b, se puede observar que ha entendido cómo se forma la gráfica al hacer este recorrido de la actividad 2, tiene el conocimiento que cuando en el recorrido Victoria se detiene, se forma una línea de el tiempo que estuvo sin moverse, es por ello que en la parte superior del plano cartesiano, dibuja una línea casi recta.

Tanto en esta actividad como en las demás, se pretende que el uso de instrumentos tecnológicos aporte al aprendizaje de los estudiantes, ya que como se menciona en el enfoque teórico de aproximación instrumental, toda noción matemática esta mediada por instrumentos, el saber, las acciones del profesor, el conocimiento construido por el alumno, la organización de la clase y el uso didáctico del instrumento (Santacruz, 2009).

Los resultados obtenidos confirman que, al hacer uso de instrumentos tecnológicos apropiados, estos sirven como apoyo en clase de matemáticas para la enseñanza de algunos temas, ya que ello provoca que exista en los estudiantes un atractivo interés por aprender el conocimiento que se imparta y curiosidad por utilizar los instrumentos, y esto por ende trae en la mayoría de los casos una mejor comprensión del tema.

Consideraciones finales

Los resultados obtenidos confirman que, al hacer uso de instrumentos tecnológicos apropiados en clase de matemáticas, no solo existe motivación de los estudiantes por aprender e utilizar los instrumentos, sino que en verdad se logra una mejor comprensión del tema. En su trabajo titulado, Reflexión didáctico-matemática de profesores en formación inicial a través del diseño de tareas matemáticas; cuyo objetivo es mostrar el diseño y el análisis de una actividad didáctica que promueve el desarrollo de conocimientos didáctico-matemáticos en futuros profesores de secundaria de matemáticas sobre el tema variación lineal. En sus resultados se revela la necesidad de plantear este tipo de tareas para favorecer conocimientos didáctico-matemáticos en futuros profesores (Herrera y Dávila, 2020).

En el caso de esta intervención, al hacer uso de instrumentos tecnológicos estos eran los pasos en el cuadernillo de trabajo; se daba lectura a la actividad o situación que se presentaba de un trayecto de una persona, posteriormente se veía esa representación por medio de diapositivas en Power Point donde mostraba con animación de movimiento los trayectos, por ejemplo, una imagen de una niña caminando de manera rápida hacia un árbol y regresar al inicio de su recorrido caminando lento, los alumnos tenían que graficar ese movimiento y posteriormente con el uso del sensor, participaba uno de los alumnos, se posicionaba frente a él e imitaba el trayecto de la niña de la actividad presentada. Así, al usar varias veces el sensor, y continuar con las actividades del cuadernillo, los estudiantes podían graficar antes de utilizar el sensor y decir cómo quedaría la gráfica, eso mostró un desarrollo es sus habilidades para interpretar las situaciones de movimiento y poder graficarlas.

Las limitantes de este proyecto es que solo se lleva a cabo con alumnos de 1° de secundaria, los cuales cuentan con poco conocimiento sobre el tema, por ello se recomienda implementarse también con alumnos de 2° y 3° para ver cuál es su aprendizaje en situaciones como esta y pueda servirles en tiempo posterior.

Referencias bibliográficas

Briseño y Cordero (2015). Conozca al señor movimiento en Cordero (2015). *La ciencia desde el niño(a): porque el conocimiento también se siente*. Barcelona: Gedisa. Recuperado de: https://www.researchgate.net/publication/301493968_Conozca_al_Sr_Movimiento_Actividades_de_interpretacion_grafica_de_movimiento

Cantoral R. (2001) en Cantoral (2016). *Teoría Socioepistemológica de la matemática educativa: estudios sobre la construcción social del conocimiento.* México: Gedisa.

Cordero Osorio, F. (2015). *La ciencia desde el niño(a): porque el conocimiento también se siente.* Barcelona: Gedisa. Recuperado de: https://www.researchgate.net/publication/301493968_Conozca_al_Sr_Movimiento_Actividades_de_interpretacion_grafica_de_movimiento

Correa Gutiérrez, S., Reséndiz Balderas, E., Salazar Blanco, M., y Sánchez Gutiérrez J. (2016). Diseño de objetos de aprendizaje de matemáticas básicas (Geometría). México: Pearson.

Godino, J., Gonzato, M., Cajaraville, J., y Fernández, T. (2012). Una aproximación ontosemiótica en educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias*, *(30)* 2, Pp. 109-130.

Herrera García, K., y Dávila Araiza, M. (2020) Reflexión didáctico-matemática de profesores en formación inicial a través del diseño de tareas matemáticas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol. 33* (1), pp.580-590. Recuperado de: https://www.clame.org.mx/documentos/alme33_1.pdf

Plan de estudios 2016. *Matemáticas. Educación secundaria*. México: Secretaría de Educación Pública.

Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes PLANEA (2019). *Resultados ciclo escolar 2018-2019*. México: Secretaría de Educación Pública.

Programa de estudio 2011. *Guía para el maestro*. México: Secretaría de Educación Pública.

Programa de estudios 2017. Matemáticas. Educación secundaria. México: Secretaría de Educación Pública

Santacruz Rodríguez, M. (2009). La gestión del profesor desde la perspectiva de la mediación instrumental. *10° Encuentro Colombiano de matemática educativa.* Recuperado de: https://core.ac.uk/download/pdf/12341336.pdf

Torres Ponjuán, D. (2009). Aproximaciones a la visualización como disciplina científica. Ciudad de La Habana: ACIMED. Recuperado de: http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1024943520090012000005

Principios:

La revista Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (en lo sucesivo ALME), es uno de los proyectos académicos del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa – CLAME, en el que se conjuga el respeto a la pluralidad de formaciones, tradiciones y acercamientos educativos, concebida y desarrollada con la función de difundir la Matemática Educativa en un marco en el que pueden relacionarse autores que comparten este interés común, además de nuclear investigadores y profesores de Latinoamérica, y a partir de su divulgación, promover acciones que fomenten la investigación, la actualización, el perfeccionamiento y la profesionalización para el desarrollo científico y social de la región.

La revista ALME se configura como el instrumento de la CLAME para la difusión de trabajos de carácter científico, experiencias, convocatorias e información bibliográfica, dentro del ámbito de la enseñanza/aprendizaje en matemática educativa en sus diferentes formulaciones y presentaciones.

La revista ALME es una revista científica arbitrada por pares y que se atiene a los estándares internacionales de calidad propios de las publicaciones científicas de prestigio.

Misión y objetivos:

La misión de la revista ALME es la difusión de la investigación relativa a la Matemática Educativa, persiguiendo los siguientes objetivos:

- ✓ Difundir, preferentemente en lenguas española y portuguesa, relevantes y rigurosos trabajos de carácter científico, en el ámbito de la matemática educativa.
- ✓ Ofrecer experiencias innovadoras, siempre relativas al ámbito de la matemática educativa.
- ✓ Potenciar la accesibilidad y visibilidad del conocimiento, favoreciendo el entorno de acceso abierto a la literatura científica en matemática educativa.

Política editorial:

- ✓ *Idioma de los trabajos*. Podrán presentarse trabajos en lengua española, portuguesa e inglesa.
- ✓ *Trabajo original*. Los trabajos enviados a ALME para su publicación deberán constituir una colaboración original no publicada previamente en soporte alguno, ni encontrarse en proceso de publicación o valoración en cualquiera otra revista o proyecto editorial.
- ✓ *Normas de redacción y presentación*. Los trabajos deberán atenerse a las normas de redacción y presentación de carácter formal de ALME. Las colaboraciones enviadas a ALME que no se ajusten a ellas serán desestimadas.

- ✓ *Recepción de originales*. Los editores de ALME acusarán la recepción del manuscrito enviado por el autor/es. El Comité editorial revisará el artículo enviado informando al autor/es, en caso necesario, si se adecua al campo temático de la revista y al cumplimiento de las normas y requisitos formales de redacción y presentación. En el caso de que todos los aspectos sean favorables, se procederá a la revisión del artículo.
- ✓ *Proceso de revisión.* Los artículos propuestos serán evaluados en forma "ciega" por dos integrantes del comité de científico. En el proceso de evaluación se garantizará tanto el anonimato de los autores, así como de los evaluadores.
- ✓ *Información*. Los editores de ALME informarán a los autores de la decisión de aceptación, modificación o rechazo de cada uno de los artículos.
- ✓ *Política de privacidad*. Se mantendrá y preservará en todos los casos y circunstancias el anonimato de los autores y el contenido de los artículos desde la recepción del manuscrito hasta su publicación. La información obtenida en el proceso de revisión y evaluación tendrá carácter confidencial.
- ✓ *Fuentes*. Los autores citarán debidamente las fuentes de extracción de datos, figuras e información de manera explícita y tangible tanto en la bibliografía, como en las referencias. Si el incumplimiento se detectase durante el proceso de revisión o evaluación se desestimará automáticamente la publicación del artículo.
- ✓ *Responsabilidad*. ALME no se hará responsable de las ideas y opiniones expresadas en los trabajos publicados. La responsabilidad plena será de los autores de los mismos.
- ✓ *Formatos*. ALME se presentará en dos formatos, electrónico y CD, que contendrán idénticos contenidos en cada número. El formato electrónico se ofrece desde la página oficial de Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (https://clame.org.mx/actas.html) y será de acceso libre y gratuito.
- ✓ *Periodicidad.* ALME tendrá una periodicidad semestral.
- ✓ *Secciones:* Las secciones de la revista ALME son las siguientes:
    1. Análisis del discurso matemático escolar
    2. Propuesta para la enseñanza de las matemáticas
    3. Aspectos socioepistemológicos en el análisis y el rediseño del discurso matemático escolar
    4. El pensamiento del profesor, sus prácticas y elementos para su formación profesional
    5. Uso de recursos tecnológicos en el proceso de aprendizaje de las matemáticas

Directrices generales para los autores:

1. El trabajo correspondiente debe haber sido aceptado para presentarse durante RELME 34. Es por ello que se solicita **enviar certificado de aprobación de la ponencia**.
2. Todo trabajo debe ser inédito y no estar en proceso de evaluación de ninguna otra revista u órgano editorial.

3. Todos los artículos deberán estar escritos en procesador de texto Microsoft Office Word 2007 o superior, tipo de letra Times New Roman, tamaño 12, interlineado sencillo márgenes superior: 2,5 cm; inferior: 2,5 cm; izquierdo: 3,5 cm; derecho: 2,5 cm. Para las expresiones matemáticas debe usarse el **editor de ecuaciones**.
4. Extensión: máximo 12 cuartillas en hoja tamaño carta. Las páginas deben estar **sin numerar**.
5. Las referencias (deben aparecer bajo ese título, por orden alfabético) habrán de colocarse en estilo APA, 6ª edición (American Psychological Association).
6. Las figuras, tablas e imágenes que se incluyan en el artículo deben ser claras, legibles e incluir epígrafes con fuente Times New Roman tamaño 10 que indiquen referencia de las mismas.
7. La estructura base del artículo debe dar cuenta de: Un planteamiento del problema, revisión de literatura de Matemática Educativa, indicaciones generales sobre la estructura teórica (marco teórico o conceptual o fundamentos teóricos), metodología implementada, desarrollo de algunos ejemplos, análisis de los resultados, conclusiones y referencias bibliográficas. Cabe aclarar, que si lo que se está reportando es una investigación en curso, se debe hacer explícito en el escrito para que esto sea considerado en el momento de hacer la evaluación del documento.
8. También se podrán publicar artículos que no son productos de investigaciones, como puede ser: reporte de experiencia en aula, curso corto, taller, grupo de discusión o de laboratorio. Para los casos anteriores la estructura del escrito debería de reportar mínimamente: introducción, desarrollo del tema en donde se hará mención del planteamiento de un problema, así como los fundamentos teóricos y las conclusiones. El artículo deberá mostrar evidencia de revisión de referencias bibliográficas de Matemática Educativa.
9. Cada uno de los manuscritos recibidos, pasa por una evaluación doblemente ciega (se retiran los nombres y datos de filiación de los autores de los documentos) y se envía a dos árbitros de nuestra comunidad, cuyos resultados, de manera anónima, son devueltos a los autores. En caso haya controversia entre los dos árbitros, se dará la propuesta a un tercer árbitro. La decisión de los árbitros es inapelable. Las evaluaciones pueden tener tres resultados posibles: Aceptado, Aceptado condicionado a modificaciones o Rechazado.

Normas para la publicación del artículo:

- ✓ Primer renglón: Título del trabajo en mayúscula en español o portugués (**sin punto al final**).
- ✓ Segundo renglón: Nombre de los autores separados por comas si hay más de un autor
- ✓ (**Nombre y Apellido** en ese orden, **sin títulos de grado**).
- ✓ Tercer renglón: Nombre de la institución y país al que pertenecen. **(No se considera válido el uso exclusivo de siglas).**
- ✓ Cuarto renglón: Dirección electrónica de los autores, separados por coma si hay más de uno y **sin hipervínculos**.
- ✓ Quinto renglón: Resumen de no más de 10 renglones de extensión en fuente Times New Roman, tamaño 10.
- ✓ Sexto renglón: palabras clave (a lo sumo cinco). Si son frases, verificar de no extenderse de las cinco palabras.
- ✓ Séptimo renglón: Abstract en inglés, en fuente Times New Roman tamaño 10.
- ✓ Octavo renglón: key words, traducción al inglés de las palabras clave.

- ✓ Noveno primer renglón: Inicia la primera sección del documento.
- ✓ Consideración para citaciones:

Citas dentro del texto. Las referencias a artículos o libros figurarán en el texto entre paréntesis, indicando el apellido del autor y el año, separados por una coma (Peters, 2001). En el caso de que en una misma referencia se incluyan varios libros o artículos, se citarán uno a continuación del otro por orden alfabético y separados por un punto y coma (García Aretio, 2002; Sarramona, 2001). Si en la referencia se incluyen varios trabajos de un mismo autor bastará poner el apellido y los años de los diferentes trabajos separados por comas, distinguiendo por letras (a, b, etc.) aquellos trabajos que haya publicado el mismo año (Casas Armengol, 1990, 1995, 2000a, 2000b, 2002, 2004). Si el nombre del autor forma parte del texto sólo irá entre paréntesis el año de publicación [Keegan (1992) afirmó que...].

Citas textuales. Las citas textuales con una extensión menor de 40 palabras irán entrecomilladas y, a continuación y entre paréntesis, se indicará el apellido del autor del texto, el año y la página o páginas de la que se ha extraído dicho texto. Ejemplo: "por educación a distancia entendemos [...] contacto ocasional con otros estudiantes" (Blanco, 1986, p. 16). Si el nombre del autor forma parte del texto, sería así: Como Martínez Sanz (2001, p. 102) señalaba "...". Las citas de 40 o más palabras deberán aparecer en un bloque de texto independiente, sin comillas y ajustado a la misma altura que la primera línea de un nuevo párrafo. Al final se indicará entre paréntesis, el autor, año y página/s.

- ✓ Consideración para referencias:

Únicamente se incluirán aquellas que se citan en el texto y deberán ordenarse por orden alfabético en un solo listado, tanto las de formato impreso como electrónico.

El formato será el siguiente:

- *Libro:* Apellidos del autor/es, Iniciales. (Año). Título del libro. Lugar de publicación: Editorial.

  Brzezinski, Z. (1970). La era tecnotrónica. Buenos Aires: Paidós.

- *Revistas:* Apellidos del autor/es, Iniciales. (Año). Título del artículo. Nombre de la Revista, número o volumen (número), páginas que comprende el artículo dentro de la revista, si es que existen.

  García Aretio, L. (1999). Historia de la educación a distancia. RIED. Revista Iberoamericana de Educación a Distancia, 2 (1), 11-40.

- *Capítulo o artículo en libro*: Apellidos del autor, Iniciales. (Año). Título del artículo o capítulo. En Iniciales. Apellidos del autor/es, (Ed. o Coord., si es el caso), Título del libro. (páginas que comprende el artículo o capítulo dentro del libro). Ciudad: Editorial.

  Oettinger, A. G. (1971). Compunications in the national decision-making process. En M. Greenberger, (Ed.), Computers, communication, and the public interest (73-114). Baltimore: Johns Hopkins Press.

Referencias de formatos electrónicos:

- *Documentos electrónicos:* autor/es (fecha publicación). Título [tipo de medio]. Lugar de publicación: editor. Recuperado de: especifique URL.

    Martín, S. (2011). Educación Aumentada: Realidad o Ficción. Blog CUED. Recuperado de http://goo.gl/w46mpA.

- *Artículos en publicaciones periódicas electrónicas* (Revistas electrónicas)

    Apellidos del autor/es, Iniciales. (Año). Título del artículo. *Nombre de la Revista*, número o volumen y (número), páginas que comprende el artículo dentro de la revista. DOI o en su defecto, recuperado de URL

✓ La información actualizada sobre la forma de citación puede ser consultada en la página de APA (American Psycological Association).

✓ Los esquemas, gráficos, tablas y fotografías deberán ser claros y se presentarán titulados, numerados e insertos en el cuerpo del texto.

Clame Comite Latinoamericano de Matematica Educativa