Clame Comite Latinoamericano de Matematica Educativa

Acta Latinoamericana de Matemática Educativa

VOLUMEN 34 » NÚMERO 2 » AÑO 2021 » ISSN 2448-6469

ALME 34

ACTA LATINOAMERICANA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA, Volumen 34, Número 2, agosto 2021, es una publicación semestral editada por el Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, Av. Universidad 1900, Oxtopulco Universidad, Delegación Coyoacán, C.P. 04460, Ciudad de México, www.clame.org.mx, articulos.alme@gmail.com. Reserva de Derechos al Uso Exclusivo 04-2015-082710244200-203, otorgado por el Instituto Nacional del Derecho de Autor, ISSN: 2448-6469. Se autoriza la reproducción total o parcial, previa cita a la fuente:

Autor(es) (2021). Nombre del artículo. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 34 (2)*. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Comité Científico de Evaluación

ARGENTINA

Ana Rosa Corica Caponio
Cecilia Rita Crespo Crespo
Elisa Silvia Oliva Díaz
Laura Sonia Oliva
Lidia Beatriz Esper
Marcela Evangelina Götte Salin
María Angélica Pérez Monges
María Julia Améndola
Rodolfo Eliseo D´Andrea

BRASIL

Aline Silva De Bona
Ângela Maria Dos Santos
José Ronaldo Alves Araújo
Juliana Silva de Andrade

CHILE

Patricia Vásquez Saldías

COLOMBIA

Maria Denis Vanegas Vasco
Sandra Liliana Castillo Vallejo
William Andrey Suárez Moya

CUBA

Ivonne Burguet Lago
Niurys Lázaro Alvarez
Olga Lidia Pérez González
Ortelio Nilo Quero Méndez
Valentina Badía Albanés

ESPAÑA

Carmen López Esteban

MÉXICO

Adriana Gómez Reyes
Aida María Torres Alfonso
Alfonso Escorza Morales
Angie Damian Mojica
Carlos Daniel Prado Pérez
Carlos Oropeza Legorreta
Daniela Pagés Rostán
Diana Patricia Sureda Figueroa
Edgar Ponciano Bustos
Elena Nesterova
Enrique Javier Gómez Otero
Evelia Reséndiz Balderas
Gisela Montiel Espinosa
Gloria Angélica Moreno Durazo
José Luis Soto Munguía
José Rafael Couoh Noh
Jesús Eduardo Hinojos Ramos
Jesús Enrique Hernández Zavaleta
Karla Liliana Puga Nathal
Lidia Aurora Hernández Rebollar
Lorena Trejo Guerrero
Lorenzo Contreras Garduño
Luis Manuel Aguayo Rendón
María del Carmen Fajardo Araujo
María de la Luz Huerta Ramírez
María Graciela Treviño Garza
María Isabel Segura Gortáres
María Patricia Colín Uribe
Miriam Estela Lemus
Rafael Pantoja Rangel
Reyna Arcelia Brito Páez
Saúl Ezequiel Ramos Cancino
Silvia Guadalupe Maffey García
Sandy Díaz Ramos
Silvia Ibarra Olmos
Víctor Hugo Luna Acevedo
Víctor Larios Osorio
Vivian Libeth Uzuriaga López
Yaneth Josefina Ríos García

PERÚ

Cintya Gonzales Hernández
Daysi Julissa García-Cuéllar
Isela Patricia Borja Rueda

PORTUGAL

Ana Elisa Esteves Santiago

URUGUAY

Mariela Rey Cabrera
Teresa Cristina Ochoviet Filgueiras

VENEZUELA

Angélica María Martínez de López
Carlos Daniel Prado Pérez
Ivonne Coromoto Sanchez Sanchez
Luis Andrés Castillo Brachoz

PRESENTACIÓN

Para este número el Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (ALME) continúa como publicación semestral editada por un equipo editorial conformado por investigadoras e investigadores en Matemática Educativa procedentes de distintos países latinoamericanos que trabajan arduamente por visibilizar las acciones y la producción académica de la comunidad.

Las consecuencias ocasionadas por la COVID-19 en diferentes esferas, dejan ver en el campo una preocupación por fortalecer los procesos de enseñanza y aprendizaje con la implementación de diversos recursos metodológicos. Para ALME estas consecuencias han pesado en tanto se han afectado los ritmos y tiempos requeridos para la producción académica entre los miembros de la Comunidad Latinoamericana de Matemática Educativa, y en el número de contribuciones recibidas por el inevitable aplazamiento de la XXXIV Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa.

En el ALME número 2 del volumen 34 presentamos 59 artículos de diversas posturas metodológicas y teóricas, agrupados en temáticas relacionadas con el análisis del discurso matemático escolar, las propuestas para la enseñanza de las Matemáticas, los aspectos socioepistemológicos para el análisis y el rediseño del discurso matemático escolar, el pensamiento del profesor, sus prácticas y su formación profesional, y el uso de recursos tecnológicos en el proceso de aprendizaje de la Matemática.

Este número es fruto del trabajo arduo que realizaron las autoras y los autores y el equipo editorial para contribuir a la profesionalización de la Comunidad Latinoamericana de Matemática Educativa, y al fortalecimiento del desarrollo del pensamiento matemático en un contexto de retos e incertidumbres que la pandemia dejó..

Pérez

Olga Lidia Pérez González
Presidenta del Consejo Directivo
CLAME (2016-2021)

TABLA DE CONTENIDOS

SECCIÓN 1:
ANÁLISIS DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR

TABLA DE CONTENIDOS

SECCIÓN 2:
PROPUESTAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

TABLA DE CONTENIDOS

SECCIÓN 3

ASPECTOS SOCIOEPISTEMOLÓGICOS EN EL ANÁLISIS Y EL REDISEÑO DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR

SECCIÓN 4:

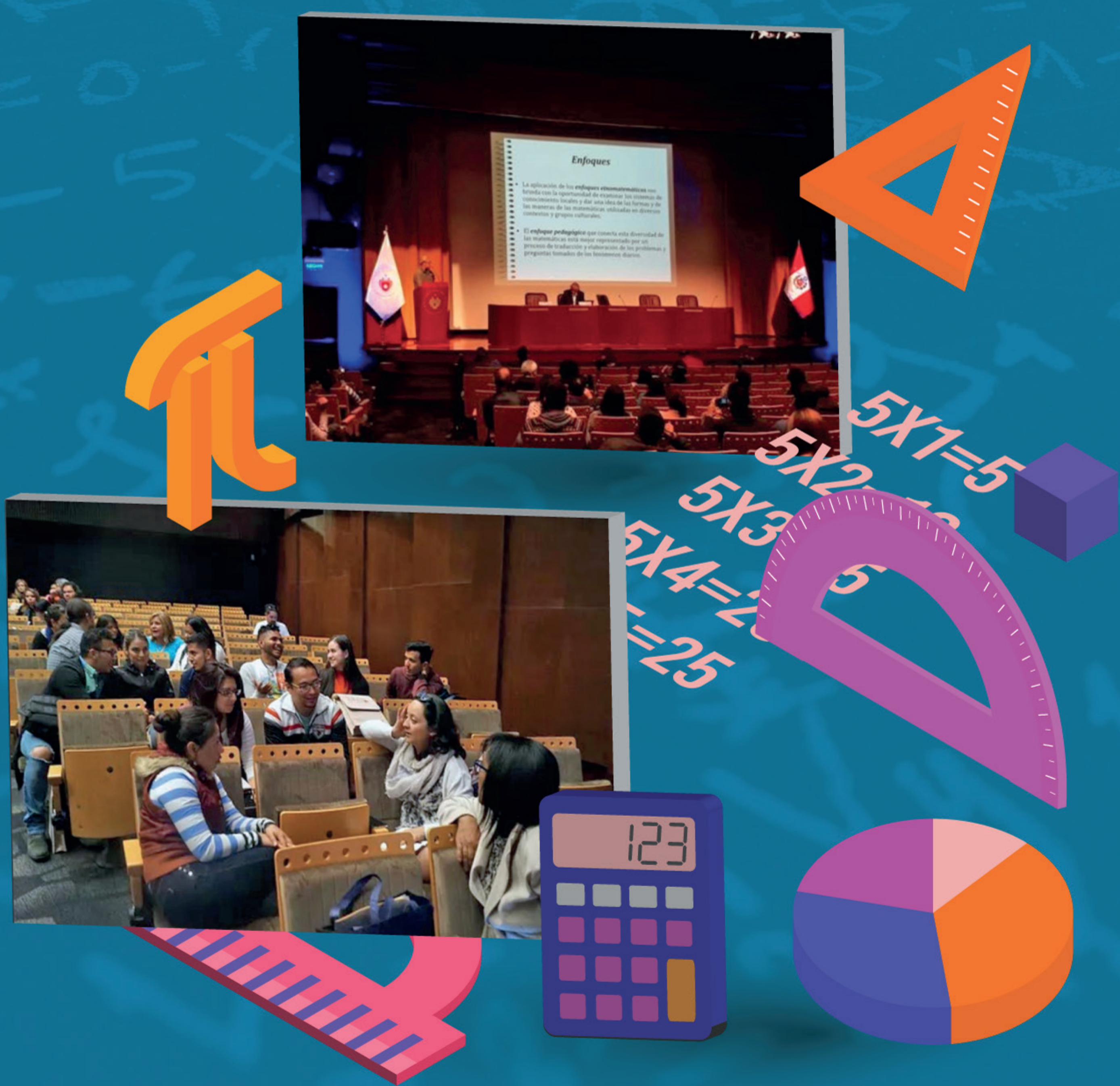
EL PENSAMIENTO DEL PROFESOR, SUS PRÁCTICAS Y ELEMENTOS PARA SU FORMACIÓN PROFESIONAL

SECCIÓN 5:

USO DE LOS RECURSOS TECNOLÓGICOS EN EL PROCESO DE APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

SECCIÓN 1

ANÁLISIS DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR



SITUACIONES PROBLEMA LIGADAS AL ESTUDIO DE LAS TABLAS ESTADÍSTICAS EN LIBROS DE TEXTO CHILENOS

PROBLEM SITUATIONS RELATED TO THE STUDY OF STATISTICAL TABLES IN CHILEAN TEXTBOOKS

Jocelyn Díaz-Pallauta, María M. Gea, Nuria Begué
Universidad de Granada (España). Universidad de Zaragoza.
jocelyndiaz@correo.ugr.es, mmgea@ugr.es, nbegue@unizar.es

Resumen
El objetivo del trabajo es analizar las situaciones problema que dan sentido a las tablas estadísticas en una muestra de 12 textos escolares chilenos de 5º a 8º curso de educación básica (10 a 13 años). Tomamos la idea de campo de problema del enfoque ontosemiótico (Godino, Batanero y Font, 2019), pues los objetos matemáticos surgen de las prácticas realizadas al resolver situaciones problemas. Los resultados del análisis de contenido, muestran una amplia presencia de situaciones problemas ligadas a procesos de traducción, seguido de la construcción de tablas de distribución de una variable.

Palabras clave: tablas estadísticas, situaciones problemas, libros de texto

Abstract
The aim of this paper is to analyze the problem situations that make sense to statistical tables in a sample of twelve Chilean school textbooks from 5th to 8th basic education course (10 to 13 years old). We took the idea of problem field from the onto-semiotic approach (Godino, Batanero, & Font, 2019), because mathematical objects emerge from the practices performed when solving problem situations. The results of the content analysis show a considerable amount of problem situations related to translation processes, followed by the construction of single-variable distribution tables.

Key words: statistical tables, problem situations, textbooks

Introducción

En este trabajo nos centramos en el análisis de las tablas estadísticas, por su importancia resaltada en el área de investigación (Estrella, 2014), además de que su comprensión forma parte de la cultura estadística (Gould, 2017). Esta importancia se ve reflejada en que diferentes países incorporan esta temática en sus lineamientos curriculares a partir de los primeros cursos escolares (CCSSI, 2010; MECD, 2014; NTCM, 2014).

Varios investigadores han analizado la actividad ligada a las tablas estadísticas (Estrella, 2014; Lahanier-Reuter, 2003). En este aspecto, la literatura ha reportado que no se presta suficiente atención a este objeto matemático en la escuela (Martí, 2009), a pesar de su relevancia en el estudio de la estadística, así como de otros temas.

Algunas líneas investigativas, han profundizado en el análisis de las tablas estadísticas presentes en los libros de texto, estudiando diferentes variables que caracterizan a este objeto matemático como su tipología y la actividad requerida al estudiante (Amorin y Silva, 2016), nivel de lectura y contexto (Díaz-Levicoy, Morales y López-Martín, 2015), además de su nivel de su complejidad semiótica (García-García, Díaz-Levicoy, Vidal, y Arredondo, 2019). En Pallauta, Gea y Batanero (2020), se analizan los diferentes tipos de tabla junto con su nivel de complejidad semiótica, además de la presencia de diferentes objetos matemáticos ligados a las tablas estadísticas en textos escolares chilenos, y su evolución según nivel educativo.

En el presente trabajo, abordamos el libro de texto, por su relevancia en la concreción de las directrices curriculares en el aula (Valverde et al., 2002), además del incremento de investigaciones en educación matemática que analizan una variedad de aspectos sobre este recurso educativo (Pepin y Gueudet, 2020). El libro de texto es un recurso educativo ampliamente utilizado, tanto por los estudiantes en su proceso de enseñanza aprendizaje, como por los profesores, pues en ocasiones se conforma en una guía para el diseño del proceso de instrucción (Alkhateeb, 2019). De allí la importancia de que el docente cuente con conocimientos que le permitan tomar una mejor decisión en la selección de un texto para la enseñanza de un determinado tema en la asignatura de matemáticas (Qi, Zhang y Huang, 2018).

El objetivo del presente trabajo es analizar las situaciones problemas que dan sentido a las tablas estadísticas en una muestra de 12 textos escolares chilenos de 5º a 8º curso de educación básica (10 a 13 años). Para ello, utilizamos la idea de campo de problema del enfoque ontosemiótico (Godino, Batanero y Font, 2007; 2019), pues desde este marco los objetos matemáticos surgen de las prácticas realizadas al resolver campos de problemas, lo que nos permitirá caracterizar cada tipología de situación problema propuesta al estudiante, y determinar su presencia en los textos estudiados.

Marco teórico

Nuestro trabajo se basa en el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS), este sistema teórico se basa en supuestos antropológicos semióticos de las matemáticas, además integra fundamentos didácticos socio-constructivista e interaccionista para el estudio del proceso de enseñanza y aprendizaje. (Godino *et al*, 2007; 2019).

En el EOS, cobra especial relevancia las situaciones problema, pues, como indica Godino (2002), son las que promueven y contextualizan la actividad matemática, junto con las acciones, que constituyen el componente práctico de las matemáticas. De este modo, los objetos matemáticos emergen de las prácticas, personales o institucionales, al resolver cualquier tarea, ejercicio o actividad. Godino *et al* (2007; 2019) conciben el significado de un objeto matemático como el sistema de prácticas que realiza una persona (significado personal) o se realizan en una institución (significado institucional) para resolver las situaciones-problema de las que emerge el objeto (en nuestro caso la tabla estadística). Las prácticas matemáticas pueden ser tanto operativas (cuando producen resultados o nuevos objetos matemáticos; por ejemplo, al calcular el total en una columna de una tabla estadística) como discursivas (cuando se reflexiona sobre un proceso matemático llevado a cabo o pretendido, por ejemplo, al describir los pasos de construcción de una tabla) (Font, Godino y Gallardo, 2013).

Cuando se llevan a cabo las prácticas intervienen seis tipos de objetos primarios: problemas (aplicaciones extra-matemáticas o intra-matemáticas, ejercicios, etc.); lenguaje (términos, expresiones, notaciones, gráficos, etc.); conceptos, dados por su definición o descripción; proposiciones o propiedades (enunciados sobre conceptos); procedimientos (operaciones, algoritmos, técnicas); y argumentos o razonamientos empleados en la justificación de las proposiciones y procedimientos (deductivo, inductivo, etc.). Estos objetos se relacionan entre sí formando *configuraciones,* que pueden ser *epistémicas*, cuando nos referimos al significado institucional o *cognitivas*, si se trata del significado personal (Font *et al*, 2013).

Además, Godino *et al* (2007; 2019) diferencian varios tipos de significado institucional*: referencial* (que sería el significado más amplio del tema en la propia matemática), *pretendido* (planificado en un proceso de instrucción; por ejemplo, en las directrices curriculares o en los libros de texto); *implementado* por el profesor en el aula y *evaluado* en los procesos de evaluación.

En nuestro trabajo se analizan las diferentes situaciones problemas que dan sentido a la tabla estadística, pues en la resolución de dichas situaciones surgen diferentes objetos matemáticos, se implementan procesos, e intervienen una diversidad de variables que permiten su estudio en un determinado nivel educativo. Por tanto, es importante que el profesor tenga conocimientos que le faciliten realizar una adecuada selección de libros de texto (Burgos, Castillo y Godino, 2020) con el objeto de ofrecer a sus estudiantes situaciones que atiendan a diversos aspectos cognitivos, y le den sentido a la actividad matemática realizada en el aula.

Metodología

La investigación es descriptiva, pues se centra en analizar y describir las situaciones problemas ligadas a las tablas estadísticas en los textos que conforman la muestra.
La muestra es intencional y se compone de 12 textos escolares dirigidos a los cursos 5º a 8º de educación básica de Chile (10 a 13 años), los cuales son detallados en el apéndice, y que siguen el marco curricular (MINEDUC, 2015; 2018). Se trata de tres libros por cada nivel educativo (libro del estudiante, cuaderno de ejercicios y guía didáctica del profesor), estos son distribuidos de manera gratuita por el Ministerio de Educación tanto a estudiantes como profesores del sistema público y concertado, por tanto, hablamos de un recurso educativo que es ampliamente utilizado en Chile.

En la Tabla 1 se presenta un resumen de la distribución de situaciones problemas analizadas en los textos por nivel educativo. Los textos escolares pertenecen a dos editoriales (Santillana y SM), en las cuales se revisó un número importante de actividades (n=990), donde la mayor cantidad de situaciones se concentra en 7º curso (42,2%), seguido de 8º básico (32,1%).

Tabla 1. Frecuencia (y porcentaje) de situaciones problemas analizadas, según nivel educativo

Santillana		SM		Total
5º	6º	7º	8º	
139(14)	115(11,6)	418(42,2)	318(32,1)	990 (100)

Fuente: Elaboración propia

Se empleó un análisis de contenido (Neuendorf, 2016), pues permite profundizar en la naturaleza del discurso, a través de documentos escritos, en este caso el libro de texto, y para ello se siguieron etapas sistemáticas. El primer paso del análisis fue identificar en el tema correspondiente a la unidad de *estadística y probabilidad*, los párrafos que contuvieran las situaciones problemas en donde se hiciera uso de la tabla estadística, bien como fin u objeto de estudio en sí misma, o como herramienta para responder a otro tipo de cuestiones. A través de un proceso cíclico e inductivo, se examinaron en el contenido de dichos párrafos las variables de análisis para confeccionar un listado de categorías para cada variable, y describir con ejemplos cada una de ellas. La fiabilidad de la codificación se asegura a través de continuas revisiones de los textos por parte de los autores y discusión de los casos discordantes hasta llegar a un acuerdo. Se finaliza con la elaboración de tablas para resumir los resultados y facilitar la obtención de conclusiones.

Resultados de situaciones problemas ligadas al trabajo con las tablas estadísticas

El análisis de las bases curriculares chilenas (MINEDUC, 2015; 2018), complementado con directrices internacionales (NCTM, 2014) y la revisión de los antecedentes, junto con los textos escolares chilenos abordados, nos permite clasificar, teóricamente, las principales situaciones problemas en que se enmarca el estudio de la tabla estadística, para los niveles educativos señalados anteriormente.

Las situaciones problemas identificadas tienen como propósito, no sólo la interpretación o construcción de la tabla estadística, sino que también se conforman en un medio para el estudio de diferentes objetos matemáticos, como las medidas de centralización o posición.
Hemos distinguido cuatro grupos de tipos de problemas, algunos de los cuales han sido subdivididos, y se detallan a continuación, junto con los resultados encontrados.

SP1. Organización de los datos

La organización de la información es el primer paso en el estudio de los datos, y conlleva el registro de los mismos. Se produce cuando se recogen datos con algún propósito y es necesario organizarlos para interpretarlos. Estrella (2014) señala que el uso de tablas para registrar datos es una práctica muy antigua y que se ha encontrado en diferentes civilizaciones.

Batanero y Godino (2002), señalan que existen distintas técnicas para recolectar datos, y por tanto estos pueden pertenecer a diferentes escalas de medida, como a tipos de variables estadísticas. Por ejemplo, en la Figura 1 el estudiante, debe recolectar datos relativos al medio de transporte que utilizan sus compañeros de clase para llegar al colegio, para posteriormente, resumir esta información y obtener conclusiones.

Figura 1. Ejemplo de situación problema SP1

Junto con un compañero o una compañera pregunten a sus compañeros en qué medio de transporte llegan al colegio. Registren sus respuestas en la siguiente tabla de conteo.

¿Cómo llegas al colegio?	
Medio de transporte	Conteo
Caminando	
Transporte público	
Automóvil	
Bicicleta	

Fuente: Kheong, Soon, y Ramakrishnan, 2017a, p. 281

SP2. Construcción de la distribución de una variable estadística

Este tipo de situación problema obedece a la necesidad de resumir un listado de datos, e implica la acción de organizar un conjunto de datos. Generalmente, están asociados a una variable estadística unidimensional y se resumen por medio de una tabla en que se representan una o varios tipos de frecuencias (ordinarias o acumuladas).

En ocasiones, dependiendo de la extensión del listado de datos, es necesario distribuir las modalidades de la variable en intervalos de clase. En el ejemplo presentado en la Figura 2, el estudiante de 7º básico (12 años), debe construir una tabla de frecuencias a partir de un listado de datos, se le solicita también evaluar la pertinencia de distribuir la variable (altura de árbol) en intervalos de clase.

Figura 2. Ejemplo de situación problema SP2

Los siguientes datos corresponden a la altura de los árboles, en metros, de una parcela.

2	2	9	5	9	10	3	2	8	5	7
5	8	3	7	7	4	1	2	5	5	5
4	7	5	3	4	2	8	5	5	7	7
4	3	6	6	4	4	4	8	7	8	8
6	4	9	6	3	5	2	8	3	5	3
9	6	5	3	3	6	2	6	8	5	2
8	8	2	3	9	2	8	3	6	6	6
6	5	3	4	8	5	2	9	3	8	6

- Organiza los datos en una tabla de frecuencia, ¿conviene una tabla con intervalos?

Fuente: Santis, 2016, p. 133

SP3. Traducción entre representaciones

Una parte importante de la comprensión estadística, implica la capacidad de traducir entre diferentes tipos de representaciones en las que intervienen procesos de transnumeración, descritos por Wild y Pfannkuch (1999). Esta actividad se encuentra presente en los análisis estadísticos, y se genera cuando se cambia la forma de presentar los datos, con el objeto de obtener un nuevo significado.

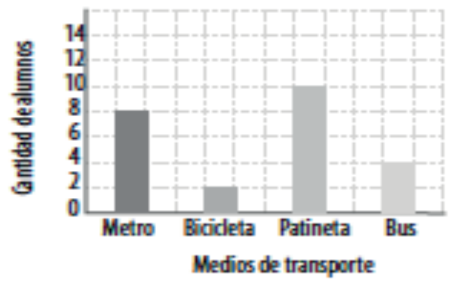
La trasnumeración, es un proceso dinámico que implica el cambio de representaciones, por medio del surgimiento de nuevas variables que son representadas como una nueva entidad, o bien de la determinación de resúmenes estadísticos. Esta transformación promueve una comprensión profunda de los datos, por lo que se conforma en una componente esencial del razonamiento estadístico (Chick, Pfannkuch y Watson, 2005).
Este tipo de situación problema lo dividimos en cuatro categorías, para diferenciar cada uno de los procesos de traducción vinculados a la tabla estadística.

SP3.1. De tabla a gráfico o viceversa. Este proceso implica la representación de la información expuesta en un gráfico de diferente tipo (barras, circular, diagramas de cajas o tallo y hojas) en una tabla estadística, o realizar el proceso inverso.

Figura 3. Ejemplo de situación problema SP3.1

2. Construye una tabla para los datos de cada gráfico en tu cuaderno.

a. En este gráfico se representan los medios de transporte que utilizan los alumnos de 7.° básico para ir al colegio.



Fuente: Santis, 2016, p. 128

La Figura 3 presenta un ejemplo en que el estudiante debe traducir la información presentada en un gráfico de barras a una tabla de frecuencias. Esta tarea requiere un conocimiento tanto del gráfico que se trate como de la tabla, pues es necesario conocer la estructura de ambas representaciones. Además, implica una lectura del gráfico con los diferentes elementos que lo componen, algunos de ellos compartidos con la tabla, como el título, las etiquetas y el cuerpo de datos (Pallauta y Arteaga, 2021).

SP3.2. De tabla a tabla. Este tipo de traducción consiste en llevar la información presentada en un tipo de tabla a otro. Por ejemplo, de una tabla de datos a una de frecuencias, o bien a viceversa, a partir de una tabla de distribución de frecuencias de una variable unidimensional o bidimensional a otra, o bien de frecuencias no agrupadas a otra con frecuencias agrupadas. En consecuencia, requiere la aplicación de procesos de clasificación de datos, ordenación, agrupamiento y recuento. En el ejemplo de la Figura 4 se debe pasar la información de una tabla de contingencia a una de datos, con el propósito de facilitar el cálculo de probabilidades de diferentes sucesos.

Figura 4. Ejemplo de situación problema SP3.2

5. Resuelve los siguientes problemas.

a. La tabla resume la edad y el sexo de las personas que trabajan en una oficina. Si se decide realizar el experimento aleatorio de "elegir al azar una persona de la oficina", ¿cuál sería el espacio muestral del experimento?

Personal de una oficina			
Sexo	Edad (años)		
	25 o menos	Entre 26 y 32	32 o más
Femenino	2	3	2
Masculino	1	4	5

- Para el experimento se definieron los siguientes sucesos:

Suceso A	Casos favorables
Elegir una mujer	
Elegir un hombre de menos de 26 años	
Elegir una persona entre 26 y 32 años	
Elegir un hombre de 32 años o más.	

Completa la tabla con los casos favorables a cada suceso.

Fuente: Santis, 2016, p. 149

SP3.3. De tabla a texto o viceversa. Esta traducción, implica llevar la información ofrecida de modo verbal a una tabla de frecuencias con el propósito de facilitar cálculos y el análisis de los datos presentados a modo de texto. Por ejemplo, la Figura 5 presenta un párrafo acompañado de cuestiones; en la tarea se sugiere la confección de una tabla para simplificar los cálculos, y la obtención de conclusiones que permitan responder a cada una de las preguntas planteadas.

Figura 5. Ejemplo de situación problema SP3.3

Estrategia: Hacer una tabla

Para resolver problemas que tienen varios datos, se puede organizar la información en una tabla con el propósito de facilitar los cálculos y el análisis de los resultados.

c. Un instituto de recreación indagó sobre las edades de los niños que asisten a sus programas, y estableció que hay 20 niños de 5 años, 17 de 6, 13 de 8, 15 de 10 y 20 de 12 años. ¿De qué edad asisten la mayor cantidad de niños? ¿Qué porcentaje de niños asisten de 10 años de edad? ¿Qué porcentaje de niños que asisten tiene la mayor edad? ¿Cuántos niños asisten hasta los 10 años de edad?

Fuente: Santis, 2016, p.134

SP3.4 *De tabla a estadístico (cálculo) o viceversa*, consideramos esta situación problema cuando se pide realizar cálculos estadísticos, o bien determinar el porcentaje de alguna modalidad de la variable. Este subtipo de situación problema, involucra tareas como: calcular algún porcentaje a partir de la información entregada en una tabla estadística, determinar la probabilidad de algún suceso en un experimento aleatorio, calcular medidas de tendencia central (media, mediana y moda), dispersión (rango), o de posición como los percentiles.

SP4. Realizar una clasificación cruzada de dos variables

Esta situación problema se enmarca en la organización o resumen de los datos de una variable estadística bidimensional, generalmente, para estudiar la posible asociación entre las mismas. Se utiliza una tabla de contingencia, porque permite organizar la distribución de frecuencias de una variable estadística bidimensional, mediante tantas filas y columnas como modalidades presenten las variables que la conforman. En cada cruce de modalidades de las respectivas variables, se representa la frecuencia conjunta (absoluta, relativa o porcentual) de un valor de cada variable. Nos basamos en Gea, Batanero, Fernandes y Gómez (2014) para realizar una subclasificación de este tipo de situación problema en tres tipos:

SP4.1. Organización de la información de un conjunto de datos bivariados. Este tipo de organización de los datos, se puede utilizar para comparar la distribución de dos variables estadísticas relacionadas entre sí, como el ejemplo presentado en la Figura 6, el tratar con tablas de contingencia facilita el estudio posterior de temas como la probabilidad, correlación y regresión (Gea *et al*, 2014).

Figura 6. Ejemplo de situación problema SP4.1

Se realizó una encuesta a personas para conocer su nivel de estudios. Los resultados fueron los siguientes:

Nivel de estudios		
Nivel	Hombres	Mujeres
Básico	15	10
Medio	80	96
Universitario	75	79
Postgrado	15	12

- De las personas con estudios de nivel universitario, los hombres son más que las mujeres. ¿Es cierta esta afirmación? Justifica.

Fuente: Santis, 2016, p.129

SP4.2. Análisis de las variables que conforman la variable estadística bidimensional. Cuando se analiza la variable estadística bidimensional es necesario delimitar cada una de las variables que la conforman. En esta categoría, se considera el análisis descriptivo de cada variable, los pasos requeridos para completar una tabla de doble entrada conocidas las medias marginales, así como el análisis de la dependencia funcional o estadística de las variables, su intensidad y sentido (Gea *et al*, 2014).

SP4.3. Estudio de la asociación entre las variables que conforman la tabla. Se aborda el estudio de la dependencia de las variables y, en el caso de que exista una dependencia intensa y la variable fuese numérica, obtener un modelo de ajuste con fin predictivo (Gea *et al*, 2014). Dado el nivel educativo al que se dirige nuestro estudio, no fue posible encontrar este tipo de situación problema en los textos escolares analizados.

En la Tabla 2 se resumen los resultados obtenidos en el análisis realizado de las situaciones problemas por nivel educativo. La situación SP3, ligada a la traducción entre diferentes representaciones aparece con mayor fuerza (57,3%), específicamente SP3.4 que implica la obtención de estadísticos a partir de la información entregada por medio de una tabla, es la que presenta un mayor porcentaje (39,7%), le sigue SP3.1 (15,5%) traducción que lleva la información de un gráfico de diferente tipo, a una tabla, o viceversa.

Otro tipo de situación que tiene una amplia presencia, es SP2 (23%) asociada a la construcción de tablas de frecuencias de variable estadística unidimensional, aunque el peso preferente es en 6º y 7º curso.

Tabla 2. Frecuencia (y porcentaje) de las situaciones problemas por nivel educativo

		Santillana		SM		
Situaciones problemas		5º EB	6º EB	7º EB	8º EB	Total
SP1		20(14,4)	8(7)	39(9,3)	54(17)	121(12,2)
SP2		16(11,5)	35(31,4)	121(28,9)	56(17,6)	228(23)
SP3	SP3.1	19(13,7)	25(21,6)	41(9,8)	68(21,4)	153(15,5)
	SP3.2	4(2,9)		2(0,5)	1(0,3)	7(0,7)
	SP3.3			12(2,9)	2(0,6)	14(1,4)
	SP3.4	42(30,2)	41(35,6)	186(44,5)	124(39)	393(39,7)
SP4	SP4.1	37(26,6)	5(4,5)	14(3,3)	13(4,1)	69(7)
	SP4.2	1(0,7)	1(0,9)	3(0,7)		5(0,5)
Total		139	115	418	318	990

Fuente: Elaboración propia

Por otra parte, detectamos escasas situaciones problemas del tipo SP4 (7,5%), excepto en 5º curso (27,3%), éstas son las que requieren el estudio de la tabla de contingencia. Por otro lado, hacemos notamos en 8º curso la ausencia de SP4.2, es un tipo de situación que analiza las variables unidimensionales que componen la variable bidimensional. En este sentido, llama la atención que fue posible encontrar algunas de estas situaciones en los cursos inferiores.

Podemos apreciar, también, la escasa o nula presencia de algunos tipos de traducción como SP3.2 (tabla de un tipo a otro) y SP3.3 (tabla a texto) en los textos escolares que abarcan los niveles de 5º y 6º curso, mientras que en los niveles superiores aparecen algo más, aunque de manera muy limitada.

Respecto a las situaciones problemas del tipo SP1(12,2%), enmarcadas en el primer paso de un estudio estadístico, como lo es la recolección de los datos, no se observa un comportamiento claro, pues aparece en mayor medida en

8º curso (17%), seguido de 5º curso (14,4%). Este tipo de situación problema se le asigna un importante rol en los lineamientos internacionales (NCTM, 2014), donde además se espera que la recogida de los datos sea, en lo posible, de interés para los estudiante.

Conclusiones

El análisis realizado caracteriza la variedad de situaciones problemas presentes en los textos escolares chilenos en los cursos finales de educación básica. Es importante conocer dichas situaciones, pues éstas favorecen y le otorgan sentido a las prácticas matemáticas (Godino, 2002) que se llevan a cabo en el aula.

Nuestro trabajo caracteriza las situaciones problemas ligadas al estudio de las tablas estadísticas en los textos escolares chilenos dirigidos a los cursos finales de educación básica. Pudimos evidenciar una escasa atención a las situaciones problemas asociadas a las tablas de contingencia, al igual que Díaz-Levicoy *et al* (2015). En concreto, identificamos que de manera paradójica disminuyen conforme se progresa de curso. Pensamos que este debiera ser un tema que se podría mejorar en los libros, teniendo en cuenta la dificultad en su comprensión (Batanero, Cañadas, Contreras y Gea, 2015; Martí, 2009) y su relevancia en el estudio de otros temas como la probabilidad junto con la regresión.

A diferencia de otros trabajos (García-García *et al*, 2019), las situaciones que requieren procesos de traducción aparecen con fuerza en los libros analizados, hecho que consideramos positivo, en el sentido de que esta transformación promueve una comprensión profunda de los datos, y además es una componente importante en el razonamiento estadístico (Chick *et al*, 2005).

Pensamos que el análisis de las situaciones problemas, y que en este caso dan sentido al estudio de las tablas estadísticas, es una temática que ha sido escasamente abordada en la investigación didáctica. El estudio presentado también entrega información relevante para los profesores quienes son los encargados de diseñar el proceso de enseñanza, pues permite identificar diversos aspectos cognitivos implicados el estudio de las tablas estadísticas, lo que en consecuencia facilita la adaptación de su enseñanza al contexto o nivel educativo al que se dirija el proceso de instrucción.

Agradecimientos

Proyecto PID2019-105601GB-I00 / AEI / 10.13039/501100011033, Grupo FQM126 (Junta de Andalucía) y Beca ANID Folio: 72190280.

Referencias bibliográficas

Alkhateeb, M. (2019). The language used in the 8th grade mathematics textbook. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 15*(7), 3-13. https://doi.org/10.29333/ejmste/106111.

Amorim, N. y Silva, R. (2016). Apresentação e utilização de tabelas em livros didáticos de matemática do 4º e 5º anos do ensino fundamental. *Em Teia - Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana, 7*(1), 1-21.

Batanero, C., Cañadas, G., Contreras, J.M. y Gea, M.M. (2015). Understanding of contingency tables: a synthesis of educational research. *Boletín de Estadística e Investigación Operativa*, *31*(3), 299-315.

Batanero, C. y Godino, J.D. (2002). *Estocástica y su didáctica para mestros*. Granada: Departamento de Didática de la Matemática. Universidad de Granada.

Burgos, M., Castillo, M. y Godino, J. (2020). Formación de profesores de matemáticas en el análisis de libros de texto. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *33*(1), 534-546.

CCSSI (2010). *Common Core State Standards for Mathematics*. Washington, DC: National Governors Association for Best Practices and the Council of Chief State School Officers.

Chick, H., Pfannkuch, M. y Watson, J. (2005). Transnumerative thinking: Finding and telling stories within data. *Curriculum Matters, 1*, 86-107. https://doi.org/10.18296/cm.0063.

Díaz-Levicoy, D., Morales, R. y López-Martín, M. (2015). Tablas estadísticas en libros de texto chilenos de 1º y 2º año de educación primaria. *Revista Paranaense de Educação Matemática*, *4*(7), 10-39.

Estrella, S. (2014). El formato tabular: una revisión de literatura. *Actualidades Investigativas en Educación*, *14*(2), 1-23.

Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics, 82(*1), 97-124. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9411-0.

García-García, J., Díaz-Levicoy, D., Vidal, H. y Arredondo, E. (2019). La tabla estadística en libros de texto de educación primaria en México. *Revista Paradigma*, *40*(2), 153-175.

Gea, M. M., Batanero, C., Fernandes, J. A. y Gómez, E. (2014). La distribución de datos bidimensionales en los libros de textos de matemáticas de Bachillerato*. Quadrante, 23*(2), 147-172.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques, 22*(2-3), 237-284.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM, 39*(1-2), 127-135.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2019). The onto-semiotic approach: implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics*, *39*(1), 38-43.

Gould, R. (2017). Data literacy is statistical literacy. *Statistics Education Research Journal*, *16*(1), 22-25.

Lahanier-Reuter, D. (2003). Différents types de tableaux dans l'enseignement des statistiques. *Spirale-Revue de recherches en éducation*, *32*(32), 143-154.

Martí, E. (2009) Tables as cognitive tools in primary education. En C. Andersen, N. Scheuer, M. P. Pérez Echeverría y E. Teubal (Eds.): *Representational systems and practices as learning tools in different fields of learning* (pp. 133–148). Rotterdam: Sense.

MECD (2014). *Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la educación primaria.* Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deportes.

MINEDUC (2015). *Bases curriculares 7º Básico a 2° Medio*. Santiago, Chile: Unidad de currículum y evaluación.

MINEDUC (2018). *Bases Curriculares Primero a Sexto Básico*. Santiago, Chile: Unidad de currículum y evaluación.

NCTM (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Neuendorf, K. (2016). *The content analysis guidebook*. Londres: Sage.

Pallauta, J.D. y Arteaga, P. (2021). Niveles de complejidad semiótica en gráficos y tablas estadísticas. *Números, 106*, 13-22.

Pallauta, J. D., Gea, M. M. y Batanero, C. (2020). Un análisis semiótico del objeto tabla estadística en libros de texto chilenos. *Zetetiké*, *18*, 1-18. https://doi.org/10.20396/zet.v28i0.8656257

Pepin, B. y Gueudet, G. (2020). Curriculum resources and textbooks in mathematics education. *Encyclopedia of mathematics education*. Springer.

Qi, C., Zhang, X. y Huang, D. (2018). Textbook Use by Teachers in Junior High School in Relation to Their Role. In *Research on Mathematics Textbooks and Teachers' Resources* (pp. 29-51). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-73253-4_2

Valverde, G., Bianchi, L., Wolfe, R., Schmidt, W. y Houang, R. (2002). *According to the book: Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice through the world of textbooks.* Netherlands: Springer.

Wild, C. y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, *67*(3), 223-248.

Apéndice: Muestra de libros de texto analizados

Curso	Referencia
5º EB	Kheong, F. H., Soon, G. K. y Ramakrishnan, C. (2017a). *Texto del estudiante Matemática 5º básico*. Santiago: Marshall Cavendish Education.
	Kheong, F. H., Soon, G. K. y Ramakrishnan, C. (2017b). *Cuaderno de ejercicios Matemática 5º básico.* Santiago: Marshall Cavendish Education.
	Kheong, F. H., Soon, G. K. y Ramakrishnan, C. (2017c). *Guía didáctica del docente – Tomo 2 Matemática 5º básico*. Santiago: Marshall Cavendish Education.
6º EB	Maldonado, L. y Castro, C. (2017). *Texto del estudiante Matemática 6º básico*. Santiago: Grupo Santillana de ediciones.
	Castro, C. (2017). *Cuaderno de ejercicios Matemática 6º básico*. Santiago: Grupo Santillana de ediciones.
	Juillet, I. y Martínez, M. (2017). *Guía didáctica del docente – Tomo 2 Matemática 6º básico*. Santiago: Grupo Santillana de ediciones.
7º EB	Merino, R., Muñoz, V., Pérez, B. y Rupin, P. (2016). *Texto del estudiante Matemática 7º básico*. Santiago: Ediciones SM.
	Santis, M. (2016*). Cuaderno de ejercicios Matemática 7º básico*. Santiago: Ediciones SM.
	Raydoret del Valle, J. (2016). *Guía didáctica del docente Matemática 7º básico*. Santiago: Ediciones SM.
8º EB	Catalán, D., Pérez, B., Prieto, C. y Rupin, P. (2016). *Texto del estudiante Matemática 8º básico*. Santiago: Ediciones SM.
	Muñoz, V. y Chacón, A. (2016). *Cuaderno de ejercicios Matemática 8º básico.* Santiago: Ediciones SM.
	Muñoz, V. y Manosalva, C. (2016). *Guía didáctica del docente Matemática 8º básico.* Santiago: Ediciones SM.

O QUE REVELAM OS RESULTADOS DO PROGRAMA DE AVALIAÇÃO TRIMESTRAL DA EDUCAÇÃO BÁSICA DO ESPÍRITO SANTO SOBRE A APRENDIZAGEM DE TRIGONOMETRIA

WHAT THE PROGRAM IN EVALUATION QUARTELY TO BASIC EDUCATION OF ESPÍRITO SANTO RESULTS REVEAL ON TRIGONOMETRIC LEARNING

Leonardo Martins, Nielce Meneguelo Lobo da Costa
Universidade Anhanguera de São Paulo (Brasil)
professor@leomartins.net, nielce.lobo@anhanguera.com

Resumo

Neste estudo o objetivo foi analisar os resultados do Programa de Avaliação Trimestral da Educação Básica do Espírito Santo (PAEBES TRI) de uma escola estadual de Linhares/ES, quanto ao desempenho dos estudantes do Ensino Médio em trigonometria. Foram analisadas as últimas duas avaliações de larga escala, dos anos de 2018 e 2019. Em 2020, devido a pandemia da COVID-19, não houve aplicação do Programa. A metodologia da pesquisa foi a quantitativa, do tipo documental, com dados coletados no site do PAEBES TRI e disponibilizados publicamente. Foram analisados os percentuais de acertos por questão nessas avaliações e utilizada análise estatística de frequências para identificar dificuldades dos estudantes em aprendizagem de trigonometria. Os resultados revelaram 23,81% de acerto nas questões de trigonometria. O mapa da complexidade pedagógica em relação ao grau de domínio dos estudantes apontou para baixo grau de domínio dos estudantes nos conceitos de trigonométricos em todos os níveis de complexidade das questões.

Palavras-Chave: Trigonometria, Avaliação Externa, PAEBES TRI, Ensino Médio, Educação Matemática.

Abstract

This study aimed to analyze the results of the Quarterly Evaluation Program of Basic Education in Espírito Santo (PAEBES TRI) –from a state school in Linares, regarding the performance of high school students in trigonometry. The last two large-scale assessments of the academic years 2018 and 2019 were analyzed. In 2020, due to the COVID-19 pandemic, the Program was not applied. The research methodology was quantitative, of documentary type, with data collected on the PAEBES TRI website publicly available. The percentages of correct answers per question were analyzed, using the statistical analysis of frequency to identify trigonometric learning difficulties. The results revealed 23.81% of correct answers in trigonometry questions. The map of pedagogical complexity by degree of students' mastery pointed to a low degree of student mastery in trigonometry at all levels of complexity of the questions.

Key words: Trigonometry, external evaluation, PAEBES TRI, high school, Mathematics Education.

Introdução

As avaliações de larga escala têm sido aplicadas em vários estados e escolas, de modo a aferir o desempenho da Educação no Brasil. Segundo Manfio (2013) é inquestionável a importância dessas avaliações dado o mapeamento que proporcionam. Além disso, seus resultados subsidiam a escola e, também, podem servir para orientar as políticas públicas para os diversos segmentos educacionais.

O Plano Nacional de Educação (PNE), promulgado em 25 de junho 2014, pela Lei nº 13.005, enfatiza a importância as avaliações de larga escala em todos os níveis de ensino brasileiro, tendo como propostas prioritárias: aprimorar a gestão escolar, melhorar o ensino e a difusão dos dados (Brasil, 2014). Destaca-se ainda, nesse documento, a indicação de que estados e municípios desenvolvam seus próprios sistemas complementares.

"fortalecer, com a colaboração técnica e financeira da União, em articulação com o sistema nacional de avaliação, os sistemas estaduais de avaliação da educação básica, com participação, por adesão, das redes municipais de ensino, para orientar as políticas públicas e as práticas pedagógicas, com o fornecimento das informações às escolas e à sociedade" (Brasil, 2014).

Na Educação Básica, para o Ensino Médio o "[...] PNE destaca que é essencial para o acompanhamento de resultados e correção de equívocos [...] e os demais sistemas estatísticos são importantes mecanismos para promover a eficiência e a igualdade no Ensino Médio [...]" (Werle, 2011, p. 778). Corroborando nessa perspectiva, para Tavares (2012) as avaliações de larga escala são aplicadas em toda uma rede de ensino, com objetivo de identificar e monitorar o desempenho dos estudantes nos componentes curriculares.

Cumpre destacar que pesquisadores, tais como Amaro (2016), Afonso (2007) e Viega-Netto (2012), apresentam críticas sobre as avaliações externas tratando como sendo obsessão e delírios o modo de imputar responsabilidade aos professores e às escolas por resultados negativos de alunos e pelas lacunas identificadas por meio de avaliações sistêmicas. Para Amaro (2016, p. 475) "a avaliação de escolas provoca tensões e sentimentos negativos. A pressão sofrida pelos docentes para alcançar metas e resultados [...] pode culminar em desmotivação, stress, descontentamento, acúmulo de funções o que provoca sobrecarga de trabalho [...]". Entretanto, são as avaliações externas que, mesmo com falhas, fornecem dados complementares para leitura do desempenho dos estudantes.

No Brasil tem sido crescente a aplicação das avaliações externas no âmbito escolar, nas diversas esferas federativas. Como exemplos é possível destacar: Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM); Provinha Brasil; Prova Brasil; Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (SARESP); Sistema Permanente de Avaliação da Educação Básica do Ceará (SPAECE); o Sistema Municipal de Avaliação de Rendimento Escolar de Curitiba (SIMARE), dentre outros sistemas de avaliação educacional.

No caso do estado brasileiro do Espírito Santo, a pesquisadora Pereira (2015) destaca que a partir de 2000 foi criado o Programa de Avaliação da Educação Básica do Espírito Santo (PAEBES), tendo como premissa o diagnóstico do desempenho individual do estudante em todos os níveis da escolaridade básica nas diferentes áreas de conhecimento. O PAEBES é realizado no último trimestre e participam os alunos de final de fase de ensino, ou seja: o 5º Ano do Ensino Fundamental Anos Iniciais, o 9º Ano do Ensino Fundamental Anos Finais e a 3ª Série do Ensino Médio.

Atualmente, nas escolas estaduais do Espírito Santo além da aplicação do PAEBES, ocorre também uma avaliação externa trimestral para todos os alunos do Ensino Médio, por meio do Programa de Avaliação Trimestral do Espírito Santo (PAEBES TRI) e seus resultados viabilizam aos professores e à equipe gestora o acompanhamento das aprendizagens dos estudantes ao final de cada trimestre e não apenas ao final do ano letivo.

Neste artigo discutimos os resultados de uma pesquisa documental, na qual o objetivo foi identificar o desempenho dos estudantes de uma escola de Linhares/ES em relação a conceitos de trigonometria avaliados no PAEBES TRI de 2018 e de 2019. Essas foram as últimas avaliações de larga escala aplicadas no estado do Espírito Santo, uma vez que, devido à pandemia da COVID-19 houve adequação de calendário e do modo de funcionamento das escolas de Educação Básica, com suspensão de avaliação externa em 2020.

O Programa de Avaliação Trimestral do Espírito Santo - PAEBES TRI

A Secretaria do Estado da Educação do Espírito Santo (SEDU), a partir de 2009 passou a realizar o seu programa de avaliação com o apoio do Centro de Políticas Públicas e Avaliação da Educação da Universidade Federal de Juiz de Fora (CAEd/UFJF). Com o estabelecimento dessa cooperação foi acrescentado ao PAEBES, uma nova proposta avaliativa denominada Programa de Avaliação Trimestral do Espírito Santo (PAEBES TRI) com a intenção de promover o acompanhamento das aprendizagens dos alunos matriculados no Ensino Médio nas escolas públicas estaduais. No caso do PAEBES TRI são avaliadas as aprendizagens dos estudantes nas disciplinas de Língua Portuguesa e Matemática. (Espírito Santo, 2019).

Como documento orientador da Avaliação de Matemática, o PAEBES TRI tem Matrizes de Referência de Matemática, que indicam os descritores a serem avaliados por ano/série do Ensino Médio. Essas matrizes foram sendo ajustadas ao longo do tempo para se adequar à implementação das inovações curriculares no estado do Espírito Santo, as últimas atualizações foram: Matriz de Referência para de 2017-2018 e a Matriz de Referência 2019 em diante. Trata-se de um documento orientador, composto por descritores que indicam as habilidades esperadas dos alunos em Matemática, relativas a quatro temas: Números e Operações; Álgebra e Funções; Geometria, Grandeza e Medidas; Estatística e Probabilidade. A Figura 1 ilustra um recorte feito em uma dessas matrizes, a de 2019.

Figura 1: Recorte da Matriz de Referência do PAEBES TRI de 2019

MATRIZ DE REFERÊNCIA
MATEMÁTICA - ENSINO MÉDIO

	DESCRITORES	1° ANO			2° ANO			3° ANO		
		Trimestre			Trimestre			Trimestre		
		1° Tri	2° Tri	3° Tri	1° Tri	2° Tri	3° Tri	1° Tri	2° Tri	3° Tri
I. NÚMEROS E OPERAÇÕES										
D01	Corresponder, no contexto social, diferentes representações dos números e operações.	x								
D02	Corresponder números reais a pontos da reta numérica.	x								
D03	Utilizar a realação que descreve o número de elementos da reunião de conjuntos na resolução de problemas.	x								
D04	Utilizar conhecimentos aritméticos na resolução de problemas.	x								x
D05	Utilizar proporcionalidade entre grandezas interdependentes na resolução de problemas.	x								x

Fonte: Adaptado de CAEd/UFJF (2018).

Observa-se na figura 1 que na Matriz de Referência são identificados em cada tema, os descritores numerados (D01, D02, D03, ...), a série do Ensino Médio e o trimestre em que a habilidade é avaliada.

A Matriz de Referência do PAEBES TRI é alinhada às habilidades da Base Comum Curricular (Brasil, 2018), destacamos a habilidade relacionada à trigonometria

"Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria (Brasil, 2018, p. 536).

Os resultados do PAEBES TRI chegam às escolas por meio virtual, pelo site http://educacaoemfoco.sedu.es.gov.br. Os dados ficam disponíveis para professores, pedagogos e diretores, cadastrados na plataforma virtual, cuja interface está apresentada na figura 2.

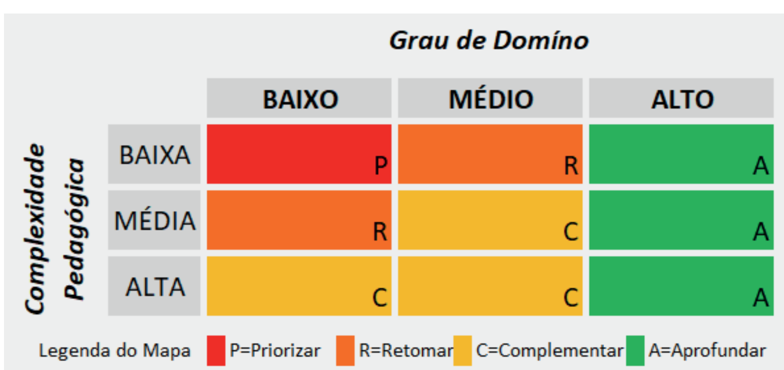
Figura 2: Interface da plataforma de divulgação do resultado do PAEBES TRI

Fonte: Portal Educação em Foco (2021).

Conforme ilustrado na Figura 2, nessa plataforma é indicado o resultado da turma, comparando-a com as demais turmas da escola e mensurada a participação dos estudantes. Pode-se acessar outras funcionalidades, tais como: acertos por aluno em cada questão e análise por questão. São disponibilizados diversos filtros, dando opções de escolher o ano de realização, o período trimestral, a turma, as disciplinas e identificar os descritores.

Por sua vez, para os alunos da 3ª Série do Ensino Médio, é utilizado um mapa relacionando a complexidade pedagógica de um determinado descritor com o grau de domínio dos estudantes. A figura 3, ilustra essa relação complexidade pedagógica X grau de domínio, que pode ser adaptada e utilizada para qualquer outra série ou ano.

Figura 3: Modelo de mapa relacionando a complexidade pedagógica com o grau de domínio do discente e as indicações de ações didáticas a implementar



Fonte: Adaptado do Portal Educação em Foco (2021).

Aa figura 3 apresenta três classificações referentes à complexidade pedagógica: (distribuídas nas linhas) e três graus de domínio: baixo, médio ou alto (expostas nas colunas). A classificação da complexidade pedagógica do descritor é definida a partir do item ou questão proposta na avaliação, como: baixa, média e alta. Quanto ao grau de domínio do estudante no descritor avaliado, ele é classificado em baixo, médio ou alto, conforme o percentual de acertos das questões que envolvem uma determinada habilidade matemática, sendo: acertos de 0% a 50% grau baixo; acertos de 51% a 65%, grau médio e acertos de 66% a 100% grau de domínio alto.

Mesmo após o professor já ter discutido com seu grupo de estudante sobre um determinado conteúdo, após a essa avaliação externa e a tabulação dos dados, o mapa ilustrado na figura 4 é organizado e servirá de orientações para que os professores tenham a possibilidade de tomar decisões quanto a priorizar (P), retomar (R), complementar (C) ou aprofundar (A) as habilidades avaliadas na Matriz de Referência e descritas no mapa.

O mapa é divulgado na plataforma de resultados com a complexidade pedagógica do descritor na referida avaliação e o grau de domínio do estudante. Vale ressaltar que a complexidade pedagógica está ligada à dificuldade da questão, ou seja, às características intrínsecas do item, enquanto o grau de domínio está ligado à habilidade do estudante. Uma questão, embora seja de baixa complexidade, ao ser aplicada pode identificar baixo domínio do estudante naquele descritor.

Método

A pesquisa mista (qualitativa e quantitativa) neste estudo é do tipo exploratória e caracterizada como documental (Gil, 2008), possibilitando dados fidedignos com a reprodução das informações encontradas. No sentido de atingir o objetivo - qual seja, o de identificar as aprendizagens de conceitos nos quais os estudantes tiveram dificuldades de acerto das situações postas na avaliação – apresentamos os procedimentos metodológicos do estudo.

Inicialmente foram identificados os descritores relativos aos conceitos de trigonometria nas Matrizes de referência de 2019, a figura 4 ilustra o recorte desse instrumento normativo.

Figura 4: Recorte da Matriz de Referência do PAEBES TRI de 2019 com os descritores de trigonometria

MATRIZ DE REFERÊNCIA
MATEMÁTICA - ENSINO MÉDIO

DESCRITORES		1° ANO			2° ANO			3° ANO		
		Trimestre			Trimestre			Trimestre		
		1° Tri	2° Tri	3° Tri	1° Tri	2° Tri	3° Tri	1° Tri	2° Tri	3° Tri
II. ÁLGEBRA E FUNÇÕES										
D28	Corresponder uma função trigonométrica a seu gráfico								X	
D29	Determinar o conjunto solução de uma equação trigonométrica									X
II. ÁLGEBRA E FUNÇÕES										
D39	Utilizar razões trigonométricas em um triângulo retângulo na resolução de problemas					X			X	
D40	Utilizar a lei dos senos ou a lei dos cossenos na resolução de problemas.					X				

Fonte: Adaptado de CAEd/UFJF (2018).

Observa-se na Matriz de Referência do ano de 2019, ilustrada na Figura 4, que foram definidos quatro descritores relativos à trigonometria. Comparando-se com a matriz anterior nota-se a exclusão de um descritor, no caso o descritor de código D33, ligado à habilidade de “utilizar funções trigonométricas na resolução de problemas”.

Por meio dessa Matriz identificamos os anos escolares eleitos para análise, que foram as Segundas e Terceiras Séries do Ensino Médio, pois nelas são objeto de estudo e de avaliação a trigonometria no triângulo (retângulo e qualquer), o ciclo trigonométrico, assim como as funções trigonométricas.

A coleta de dados foi realizada por meio da plataforma de resultados do PAEBES TRI, disponibilizada pelo CAEd/UFJF (http://educacaoemfoco.sedu.es.gov.br), em março de 2021. Delimitamos o espaço temporal de aplicação aos dados dos anos 2018 e 2019.

Foram identificadas e agrupadas as questões afins do PAEBES TRI, em seguida, tabulados e calculados os percentuais de acertos e erros por questão e, por fim, obtidas as médias percentuais de acertos por descritor trigonométrico avaliado.

Assim, observando as Matrizes de Referência do PAEBES TRI, foi acessada a plataforma de resultados e, no item “análise de questão”, foram utilizados os filtros por descritor e série que contempla o objeto matemático dessa pesquisa. Para cada descritor sobre conceitos trigonométricos: realizou-se os *downloads* das questões; na sequência elas foram organizadas por descritor; e os percentuais de acertos e erros foram tabulados. As informações coletadas foram organizadas em planilha eletrônica do Microsoft Office Excel 365.

Por fim, relacionou-se as classificações dos níveis de complexidade pedagógica (que são atribuídas pelo CAEd/UFJF) com o grau de domínio (percentual de acertos das questões) dos estudantes.

Para este estudo o método se limita aos resultados estatísticos disponíveis e organizados conforme as metodologias do próprio sistema de ensino.

Resultados

Os dados coletados e organizados nos permitiram obter o número de itens propostos na avaliação do PAEBES TRI envolvendo os descritores selecionados para esse estudo. O Quadro 1 sintetiza os descritores relativos aos conceitos trigonométricos e a quantidade de questões nas avaliações de 2018 e 2019:

Quadro 1: Número de questões envolvendo trigonometria no PAEBES TRI (2018 e 2019)

Descritores sobre conceitos trigonométricos na Matriz de Referência no PAEBES TRI	Código do descritor	Número de questões por descritor
Utilizar razões trigonométricas em um triângulo retângulo na resolução de problemas	D39	17
Utilizar a lei dos senos ou a lei dos cossenos na resolução de problemas	D40	08
Corresponder uma função trigonométrica a seu gráfico.	D28	08
Determinar o conjunto solução de uma equação trigonométrica	D29	03
Utilizar funções trigonométricas na resolução de problemas	D33	00
Total		36

Fonte: Elaborado pelos autores.

Nota-se, pelo quadro 1, a ênfase dada às razões trigonométricas no triângulo retângulo e no triângulo qualquer, com 25 das 36 questões de trigonometria (69,4%). As demais 11 questões são relativas a equações e às funções trigonométricas.

Ao observar, no quadro 1, os descritores que envolvem as habilidades trigonométricas, nota-se que o descritor D33, embora presente na Matriz de Referência de 2018, não foi abordado em qualquer questão das avaliações.

Ao todo trinta e seis (36) questões sobre trigonometria foram identificadas nas avaliações do PAEBES TRI em 2018 e 2019. Tais questões estão distribuídas nos três níveis de complexidade pedagógica. A Tabela 1 explora o quantitativo de questões em cada nível do CAEd/UFJF.

Tabela 1: Total de questões de trigonometria por complexidade pedagógica nas avaliações pesquisadas

Complexidade Pedagógica	2ª Série	3ª Série	Total
Baixa	04	02	06
Média	11	08	19
Alta	02	09	11
	17	19	36

Fonte: Elaborado pelos autores

Os dados apresentados na Tabela 1 evidenciam que na 2ª Série do Ensino Médio as questões de complexidade pedagógica média são predominantes com 64,70%. Por sua vez, observa-se que na 3ª Série do Ensino Médio há equilíbrio entre os níveis médio e alto de complexidade pedagógica com 42,11% e 47,37%, respectivamente. No total de questões envolvendo habilidades de trigonometria observa-se que foram explorados os três níveis de complexidade pedagógica, sendo: 16,67%, para baixa complexidade; 52,78%, para média complexidade e 30,55% para alta complexidade.

Quanto à relação entre o nível de complexidade e os descritores das trinta e seis (36) questões, ela está sintetizada na Tabela 2.

Tabela 2: Complexidade pedagógica das questões do PAEBES TRI por descritor trigonométrico

Código do descritor	Baixa Complexidade Pedagógica	MédiaComplexidade Pedagógica	Alta Complexidade Pedagógica	TOTAL
D39	05	11	01	17
D40	01	05	02	08
D28	00	03	05	08
D29	00	00	03	03
D33	00	00	00	00
	06	19	11	36

Fonte: Elaborado pelos autores

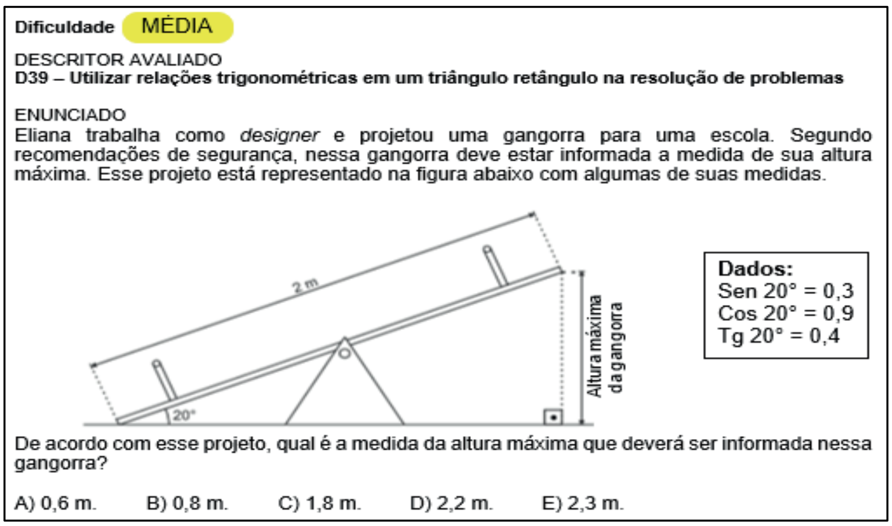
Os dados expressos na Tabela 2 nos permitem concluir que os descritores de trigonometria no triângulo (D39) e triângulo quaisquer (D40) foram os mais frequentemente avaliados, tendo 69,44% quando comparado aos demais.

Além disso se distribuem pelos três níveis de complexidade, porém a maioria das questões são de média complexidade pedagógica, correspondendo à 64% dessas questões.

Sobre as questões envolvendo habilidades de trigonometria no triângulo retângulo e de trigonometria no triângulo qualquer, nota-se que todas apresentam a estrutura, identificada por Andrade (2011), qual seja: um enunciado envolvendo um contexto doméstico, da vida urbana, de tecnologias e sociais; uma imagem de suporte; o comando da questão e as alternativas com gabarito e distratores.

A figura 5 ilustra uma questão que compôs a avaliação referente ao segundo trimestre da Segunda Série do Ensino Médio do ano de 2019.

Figura 5: Exemplo de questão do PAEBES TRI (2019) de trigonometria no triângulo retângulo


Dificuldade MÉDIA

DESCRITOR AVALIADO
D39 – Utilizar relações trigonométricas em um triângulo retângulo na resolução de problemas

ENUNCIADO
Eliana trabalha como *designer* e projetou uma gangorra para uma escola. Segundo recomendações de segurança, nessa gangorra deve estar informada a medida de sua altura máxima. Esse projeto está representado na figura abaixo com algumas de suas medidas.

De acordo com esse projeto, qual é a medida da altura máxima que deverá ser informada nessa gangorra?

A) 0,6 m. B) 0,8 m. C) 1,8 m. D) 2,2 m. E) 2,3 m.

Fonte: Adaptado do Portal Educação em Foco (2021).

A figura 5 exemplifica uma questão envolvendo habilidade de trigonometria no triângulo retângulo referente ao descritor D39, que foi considerada no *PAEBES TRI* como de nível médio de complexidade pedagógica. A questão apresenta um enunciado e uma figura de suporte, na qual há também os valores aproximados das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente do ângulo de 20º. Para encontrar a alternativa correta deve-se aplicar a relação $sen20° = \frac{h}{2}$, sendo h a altura máxima da gangorra.

Essa questão foi respondida por 218 alunos da escola pesquisada, desses 22,48% assinalaram a alternativa correta. Os resultados apontaram a existência de dificuldades dos alunos em todos os descritores avaliados, ou seja, tanto em questões envolvendo triângulos, quanto as no ciclo trigonométrico e nas funções, indicando insatisfatório desenvolvimento das habilidades em trigonometria. Assim, a análise dos dados revelou que os estudantes da Segunda Série do Ensino Médio têm média de 28,56% de aproveitamento de trigonometria no triângulo retângulo (D39) e 27,42% no triângulo quaisquer (D40). Por sua vez, os estudantes da Terceira Série do Ensino Médio, obtiveram proficiência de 29,83% nas utilizações das razões trigonométricas (D39) e não foram avaliados sobre os triângulos quaisquer (D40). As questões envolvendo esses descritores atribuíam os conceitos das razões trigonométrica seno, cosseno e tangente para D39 e as leis dos senos e cossenos para D40.

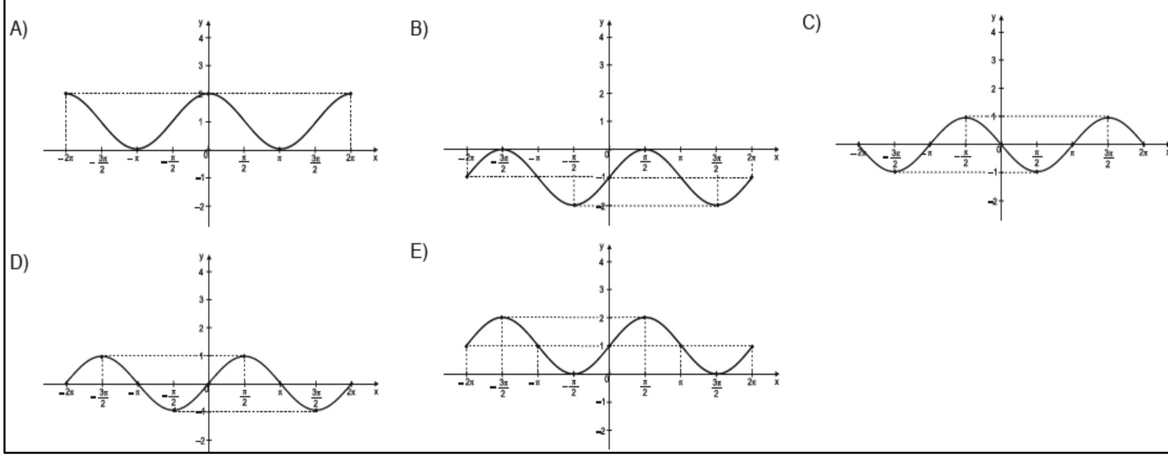
Nas avaliações analisadas do PAEBES TRI as questões também envolveram conceitos de trigonometria no círculo, funções e gráficos trigonométricos. A constituição de cada questão difere um pouco da ilustrada na figura 4, sendo estruturada (Andrade, 2011) da seguinte forma: um enunciado envolvendo o contexto escolar, buscando a formalização de conceitos; equações ou gráficos de suporte; o comando da questão; e as alternativas com gabaritos e distratores, a figura 6 ilustra uma questão que fez parte da avaliação referente ao terceiro trimestres da Terceira Série do Ensino Médio do ano de 2018.

Figura 6: Exemplo de questão de funções trigonométricas e gráficos do PAEBES TRI (2018)

Dificuldade DIFÍCIL

DESCRITOR AVALIADO
D28 – Corresponder uma função trigonométrica a

ENUNCIADO
Considere a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = 2.sen\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$. O Gráfico dessa função no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$ está representando em



Fonte: Adaptado do Portal Educação em Foco (2018).

A Figura 5 exemplifica uma questão referente à habilidade do estudante em corresponder uma função trigonométrica ao seu gráfico. Para que os estudantes encontrem a alternativa correta estarão em ação conhecimentos, tais como: saber que o domínio informado no comando da questão $[-2\pi, 2\pi]$ está indicado no eixo x, mas todos os gráficos foram ilustrados neste domínio; ter conhecimento de que o eixo central é 0, com isso a alternativa B é um distrator; compreender que a amplitude é 2, então o valor máximo da função é 2 e mínimo é -2, o que permite excluir as alternativas C e D. Por fim, diferenciar as opções restantes A e E, por exemplo considerando que na expressão algébrica da função dada, o valor $-\frac{\pi}{2}$ define o deslocamento horizontal do gráfico da função em relação à função f(x)=sen x , por esse valor ser negativo o gráfico se desloca à direita, concluindo que o gráfico que representa a função é dado pela alternativa E.

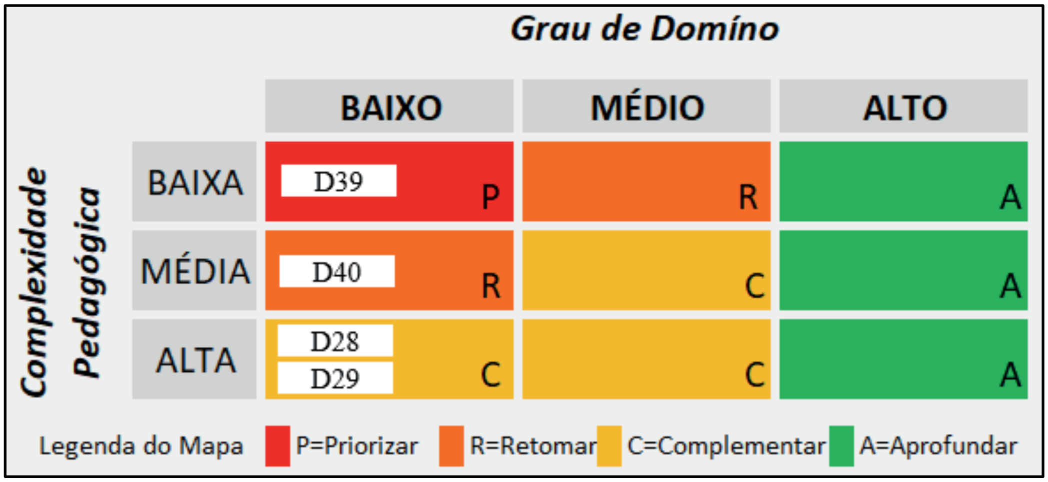
Outra estratégia de identificação do gráfico correto pode ser o de atribuir diversos valores para x no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$ e calcular o valor correspondente de f(x), de modo a identificar pontos do gráfico e determinar a alternativa verdadeira.

Essa questão foi respondida por 74 estudantes da escola estadual, cujos resultados do PAEBES TRI foram investigados, e 20% desses alunos acertaram a solução do item, o que é um índice baixo de acertos.

De forma global, os estudantes da Terceira Série do Ensino Médio dessa escola estadual obtiveram proficiência de 22,88% de acertos ao corresponder uma função trigonométrica ao gráfico (D28) e tiveram 10,38% de assertividade em determinar o conjunto solução de uma equação trigonométrica (D29).

A análise dos dados permitiu esboçar um mapa relacionando a complexidade pedagógica das questões de trigonometria com o grau de domínio para os estudantes da escola. A Figura 7 ilustra esse mapa.

Figura 7: Mapa relacionando a complexidade pedagógica com o grau de domínio dos conceitos trigonométricos do PAEBES TRI



Fonte: Elaborado pelos autores

Assim, pelo mapa ilustrado na Figura 7, percebe-se que as questões relacionadas aos descritores D39 e D40 foram de baixa e média complexidade pedagógica e D28 e D29 de complexidade alta. O desempenho dos estudantes nesses descritores evidencia que, em média, o grau de domínio dos estudantes dessa escola é baixo, ou seja, a assertividade desses estudantes sobre essas questões está abaixo dos 50%.

Conclusão

As avaliações externas auxiliam a identificar e monitorar o desempenho dos estudantes, viabilizam o planejamento das aulas pelos professores conforme a realidade do seu grupo de estudantes. Além disso, apresenta indicações, como o mapa utilizado neste estudo, para acompanhamento do desempenho dos estudantes.

Considerando os resultados obtidos na pesquisa e, seguindo as orientações constantes na plataforma de resultados do PAEBES, os resultados das avaliações tanto de 2018 quanto de 2019 indicam que é possível: priorizar o ensino da trigonometria no triângulo retângulo; retomar o da trigonometria no triângulo quaisquer; e complementar a aprendizagem sobre solução de uma equação trigonométrica e complementar a aprendizagem sobre a correspondência da função trigonométricas e seu gráfico.

Evidenciamos uma descontinuidade no desenvolvimento dos conceitos de trigonometria, tendo em vista que na trajetória pelo triângulo retângulo, triângulo qualquer e circunferência o desempenho é declinante. Os alunos da escola tiveram, de modo geral, dificuldades em desenvolver todos os problemas que relacionam os conceitos de trigonometria, tendo maior dificuldade em obter a solução das equações trigonométricas.

Apoio e fomento

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Referências Bibliográficas

Afonso, A. J. (2007). Estado, políticas educacionais e obsessão avaliativa. *Contrapontos.* Nº1, 7 (1), 01-22. Disponível em: https://siaiap32.univali.br/seer/index.php/rc/article/view/888.

Amaro, I. (2016). Avaliação em larga escala e qualidade: dos enquadres regulatórios aos caminhos alternativos. *Linhas Críticas*. Nº 48, 22 (2), 462-479. Disponível em: https://www.redalyc.org/pdf/1935/193549765012.pdf.

Andrade, W. M. (2011). *Oficina de elaboração de itens de matemática para avaliações externas*. Disponível em: http://www.matematicauva.org/semana2011/palestras/wendel_o ficina1.pdf

Brasil. (2014). Lei nº. 13.005, de 25 de junho de 2014. Aprova o Plano Nacional de Educação e dá outras providências. *Diário Oficial [da] República Federativa do Brasil*, Brasília, DF, 26 jun. 2014. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2011-2014/2014/lei/l13005.htm.

Brasil. (2018). *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília.

CAEd/UFJF. (2021). *Matriz de Referência do PAEBES TRI. Disponível em:* http://paebestri.caedufjf.net/wp-content/uploads/2015/05/Matriz-de-Refer%C3%AAncia-Paebes-Trimestral-MT_Para-publica%C3%A7%C3%A3o_final-C01.pdf

Espírito Santo. (2019). PAEBES. *Secretaria de Estado da Educação*. Disponível em: https://sedu.es.gov.br/paebes.

Gil, A. C. (2008). *Métodos e Técnicas de Pesquisa Social* (6a ed.). São Paulo: Atlas.

Manfio, A. (2013). Avaliação em larga escala e qualidade de envio: análise de produção em periódicos qualificados (1995-2012). *XI Congresso Nacional de Educação – Educere.*

Pereira, S. L. A. (2015). *PABES: modos, formas e diálogos a partir do uso dos resultados em Língua Portuguesa da avaliação externa estadual no município de Cariacica-ES.* Vitória. Dissertação. Disponível em: https://repositorio.ufes.br/bitstream/10/8635/1/tese_9233_DISSERTA%C3%87%C3%83O%20SELMA%20%20FINAL.pdf

Portal Educação em Foco. (2021). *Educação em Foco.* Disponível em: http://educacaoemfoco.sedu.es.gov.br.

Tavares, A. V. (2012). *Avaliação de Larga Escala: resultados e tomada de decisão* (Dissertação de mestrado). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC-SP, São Paulo, SP, Brasil.

Viega-Netto. A. (2012). Currículo: um desvio à direita ou delírios avaliatórios. *X Colóquio sobre Questões Curriculares e VI Colóquio Luso-Brasileiro de Currículo*. Disponível em: http://www.fe.unicamp.br/TEMPORARIOS/veiga-neto-curriculos-delirios-avaliatorios.pdf.

Werle, F. O. C. (2011). Políticas de avaliação em larga escala na educação básica: do controle de resultados à intervenção nos processos de operacionalização do Ensino. *Ensaio.* Nº 73, 19 (4). Disponível em: https://www.scielo.br/pdf/ensaio/v19n73/03.pdf.

VETORES E TRIGONOMETRIA NO ENSINO MÉDIO: UM OLHAR À LUZ DOS TRÊS MUNDOS DA MATEMÁTICA

VECTORS AND TRIGONOMETRY IN MIDDLE EDUCATION: A LOOK IN THE LIGHT OF THREE MATHEMATICS WORLDS

Wagner Gomes Barroso Abrantes, Maria Elisa Lopes Esteves Galvão
Universidade Anhanguera de São Paulo (Brasil), Universidade de São Paulo (Brasil)
wagnercn@hotmail.com, elisa.gal.meg@gmail.com

Resumo
Esta pesquisa é um recorte de uma pesquisa mais ampla e teve o objetivo de verificar os "já-encontrados" referentes à trigonometria e aos vetores e suas representações em alunos do Ensino Médio. Seguiu-se a orientação metodológica do Design Experiments, contendo três fases: a fase prospectiva, na qual se organizou um proceso de aprendizagem hipotético; a fase reflexiva, com aplicação de uma atividade diagnóstica e atividades contextualizadas; e a fase retrospectiva, na qual houve a análise dos protocolos a partir do aporte teórico dos Três Mundos da Matemática. Ficou evidenciado que os alunos não apresentaram dificuldades com as razões trigonométricas e o teorema de Pitágoras. Contudo, apresentaram dificuldades no tratamento da velocidade como grandeza vetorial. Concluímos que os alunos conseguiram iniciar seus percursos pelos mundos da matemática quanto aos conceitos da trigonometria e que as dificuldades apresentadas na corporificação do vetor como velocidade têm origem nos "já-encontrados" oriundos da disciplina de Física.

Palavras-Chave: Três Mundos da Matemática, Vetor, Trigonometria

Abstract
This paper presents an excerpt from a broader research which is aimed at verifying the "already-found" regarding trigonometry and vectors and their representations, in high school students. It followed the methodological guidance of Experiment Design, comprising three phases: the prospective phase, in which a hypothetical learning process was organized; the reflective phase, with the application of a diagnostic activity and contextualized activities; and the retrospective phase, in which the protocols were analyzed based on the theoretical contribution of the Three Worlds of Mathematics. It was evident that the students did not have difficulties with trigonometric ratios and Pythagoras' theorem. However, they had difficulties in treating velocity as a vector. We conclude that the students managed to start their journey through the worlds of mathematics regarding the concepts of trigonometry, and that the difficulties presented in the embodiment of the vector as velocity originate from the "already-found" coming from the discipline of Physics.

Key words: three worlds of Mathematics, vector, trigonometry

Introdução

Ao longo do seu desenvolvimento, a partir do nascimento, o indivíduo apresenta habilidades que os diferenciam de outras espécies animais. Algumas dessas habilidades são natas enquanto outras são adquiridas no transcurso de nossas vidas, a partir das experiências vividas. Tall (2013, p. 21) cita esses dois tipos de habilidades e as classifica como os atributos que todos nós compartilhamos e os atributos construídos com as nossas experiências, respectivamente.

Dentre os atributos que todos nós compartilhamos, fundamentais para a construção do pensamento matemático em longo prazo, Tall (2013, p. 21) destaca três: reconhecimento, repetição e linguagem. O primeiro está ligado à capacidade sensorial e nos possibilita reconhecer padrões, semelhanças e distinções entre objetos, nos permitindo identificá-los e diferenciá-los por suas características próprias. O segundo se conecta à nossa capacidade motora que nos permite realizar uma sequência de ações repetidas vezes até que possamos executá-la naturalmente, de maneira automática. O terceiro corresponde a uma habilidade própria da espécie humana, que é fundamental para a descrição e discussão de fenômenos e nos leva a construir estruturas complexas de conhecimentos a respeito deles.

Em relação àqueles atributos que são adquiridos a partir das experiências vividas, Tall (2013, p. 22) afirma que o desenvolvimento intelectual depende de como nós usamos nossas experiências para lidar com novas situações, de forma que aquilo que aprendemos em um determinado estágio irá influenciar a nossa maneira de pensar no próximo estágio. Esses conhecimentos mobilizados e influenciadores foram abordados por Tall (2013, pág. 23) e traduzidos por Lima (2007, p. 86) como "já-encontrados", definidos formalmente como uma estrutura que temos no nosso cérebro em um determinado momento como resultado de experiências que vivenciamos anteriormente.

Nesse sentido, cada experiência vivida irá gerar um estimulo que vai interagir com os estímulos oriundos de experiências pregressas. Essa interação, caso aconteça de forma harmônica, irá proporcionar a evolução do indivíduo. Caso contrário, poderá colocá-lo em conflito. Moreira e David (2016, p. 32) afirmam que esse é um processo de construção dialética que se estabelece entre o conhecimento "novo" e o "antigo", no desenvolvimento da aprendizagem.

A partir deste contexto, é importante ressaltar que esta pesquisa consiste em parte de uma avaliação diagnóstica realizada com alunos do primeiro ano do Ensino Médio de uma escola particular no Rio de Janeiro, com o objetivo de conhecer os "já-encontrados" desses alunos a respeito dos objetos matemáticos trigonometria e vetor.

Fundamentação Teórica: os Três Mundos da Matemática

Os Três Mundos da Matemática estão relacionados às experiências referentes ao desenvolvimento do conhecimento e construção do conceito matemático em longo prazo. Tall (2013, p. 16) associa a aprendizagem da matemática a três distintos, porém interligados, mundos da matemática: o mundo conceitual corporificado, o proceitual simbólico e o axiomático formal.

O mundo conceitual corporificado, ou apenas corporificado, é dos objetos corporificados, tais como de gráficos, tabelas, construções geométricas, entre outros, e que podem ser fisicamente manipulados ou concebidos mentalmente.

O mundo proceitual simbólico, ou apenas simbólico, é aquele que utiliza os símbolos para cálculos e manipulações na álgebra e na aritmética, por exemplo, inter-relacionando processos e conceitos. Esse mundo leva em consideração os proceitos, caracterizado por Tall (2013) como símbolos que representam, ao mesmo tempo, um processo e um conceito.

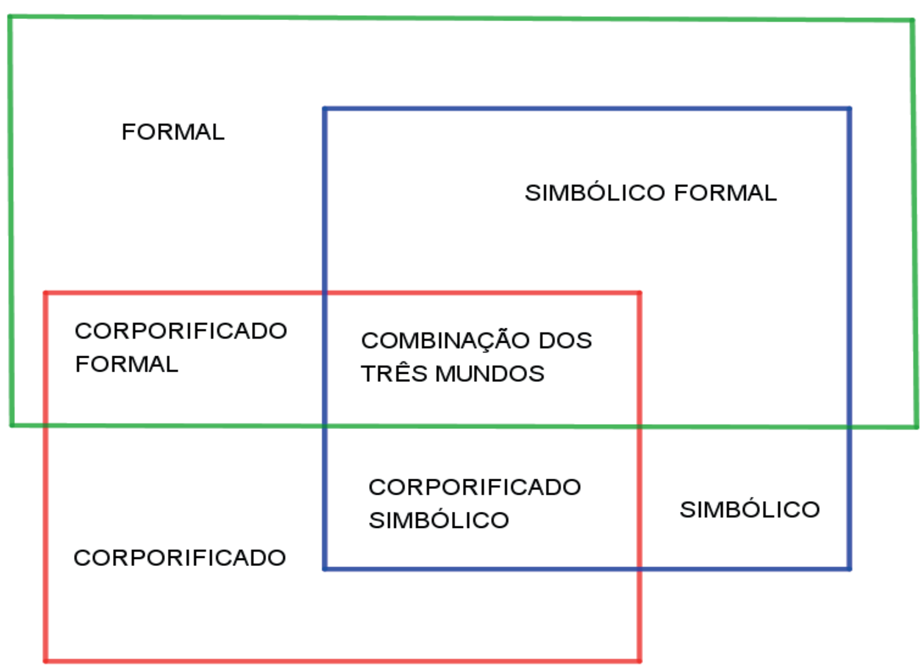
O mundo axiomático formal, ou apenas formal, é composto pelos axiomas, teoremas, propriedades, definições que formam o sistema axiomático com o qual se desenvolve a matemática formal.

É importante destacar que os três mundos são independentes, isto é, não existe uma hierarquia entre esses mundos. Além disso, a trajetória percorrida ao longo dos três mundos varia de pessoa para pessoa. Tall (2004) afirma que:

À medida que um indivíduo viaja através de cada mundo, vários obstáculos que ocorrem no caminho exigem que ideias anteriores sejam reconsideradas e reconstruídas de modo que a jornada não é a mesma para cada viajante. Pelo contrário, indivíduos diferentes lidam com os vários obstáculos de maneiras diferentes, que levam a uma variedade de desenvolvimentos pessoais, alguns dos quais permitem ao indivíduo progredir através do aumento da sofisticação de um modo significativo, enquanto outros vão em direção às concepções alternativas, ou mesmo falhas (Tall, 2004, p.286, tradução nossa).

Apesar de serem independentes, na medida em que o indivíduo percorre os três mundos no desenvolvimento de um dado objeto matemático, os mundos vão interagindo entre si (Figura 1). Segundo Tall (2013), na interação "*corporificado simbólico"* é onde as ações corporificadas dão origem às operações simbólicas e o simbolismo corporifica representações. Na interação "*corporificado formal*" o corporificado dá suporte às definições e deduções formais. Na interação "*simbólico formal*" a estrutura simbólica é deduzida e definida de maneira formal.

Figura 1. Interação entre os Três Mundos da Matemática



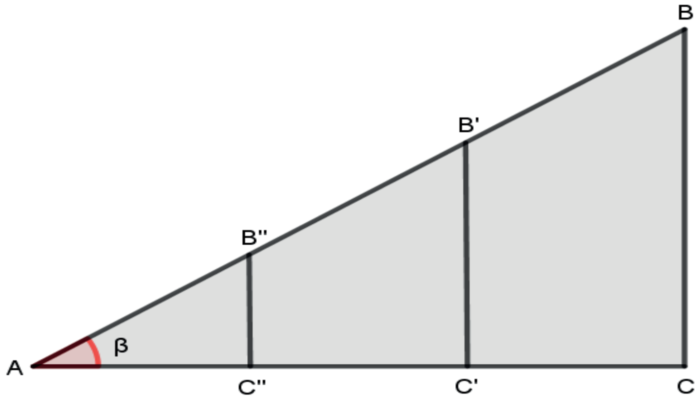
Fonte: Tall (2013, tradução e adaptação nossas)

Sobre a validação nos diferentes mundos da matemática, o artigo de Watson, Spyrou e Tall (2003) traz que, mesmo com o mundo formal se manifestando nos mundos corporificado e simbólico, cada um desses mundos tem uma distinta noção de validação. No mundo corporificado, a validação se dá pela percepção e pelo experimento. Já no mundo simbólico, a verdade pode ser testada pela manipulação ou uso de algoritmos. Já no mundo formal, há a necessidade de axiomas para provar a veracidade de uma afirmação.

A trigonometria no contexto dos três mundos da matemática

Para entendermos os três mundos da matemática no âmbito da trigonometria, temos de buscar alguns conceitos e propriedades da geometria plana. Nesse sentido, no mundo corporificado, ao se construir um triângulo ABC, retângulo em C, e alterar as medidas de seus catetos (Figura 2), mantendo fixo o ângulo β, obtém-se os triângulos retângulos AB'C' e AB''C'' semelhantes entre si e semelhantes ao triângulo ABC.

Figura 2. Semelhanças dos triângulos retângulos



Fonte: Autor

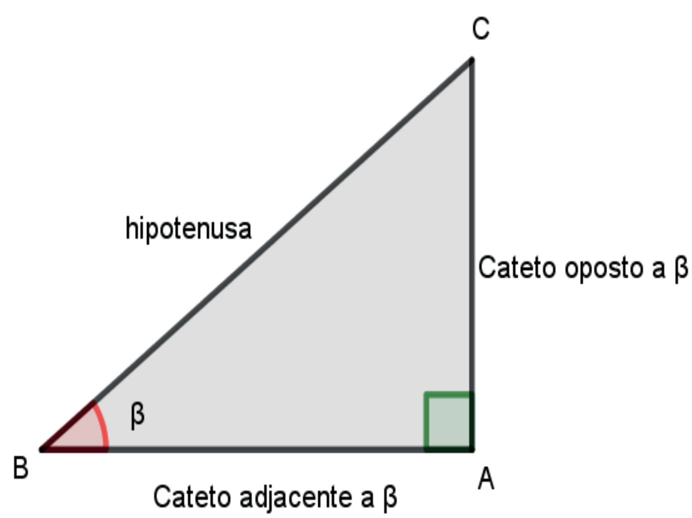
Por serem semelhantes, as razões entre os lados que formam os ângulos retos (catetos) serão sempre iguais, isto é, a razão entre BC e AC é igual à razão entre B'C' e AC' que, por sua vez, é igual à razão entre B''C'' e AC''. Nesse contexto, agora no mundo simbólico, surge a ideia de se construir tabelas com as razões entre os lados de um triângulo retângulo, para os diversos ângulos agudos β, cuja invariância dá origem às razões trigonométricas, passando às definições no mundo formal (Figura 3).

Figura 3. Razões trigonométricas no triângulo retângulo

$$\text{seno de } \beta = \frac{cateto\ oposto\ a\ \beta}{hipotenusa}$$

$$\text{cosseno de } \beta = \frac{cateto\ adjacente\ a\ \beta}{hipotenusa}$$

$$\text{tangente de } \beta = \frac{cateto\ oposto\ a\ \beta}{cateto\ adjacente\ a\ \beta}$$



Fonte: Autor

Nesse sentido, Tall (2013) afirma que o percurso nos três mundos da matemática se inicia com as definições de seno, cosseno e tangente como razões dos lados de um triângulo retângulo ABC e, com isso, entendemos que essas definições, baseadas no caminho corporificado-simbólico-formal acima descrito, marcam o início desse percurso a partir do mundo corporificado e dão subsídios para a interação com o mundo simbólico, ao se configurarem, dentro de um pensamento proceitual, como "fórmulas" que viabilizarão as relações com a aritmética e a álgebra.

O vetor no contexto dos três mundos da matemática

Segundo Watson, Spyrou e Tall (2003), a corporificação dos vetores está na Física e na Mecânica, na representação como força, transformação, velocidade, aceleração ou como qualquer outro objeto caracterizado pela magnitude e direção. O mundo simbólico é constatado a partir da translação (em n dimensões), na representação do vetor como uma matriz coluna (ou a representação em coordenadas) e das operações algébricas oriundas dessas representações. Já o mundo formal é caracterizado e definido pela estrutura de espaço vetorial subjacente ao conjunto formado por todos esses elementos.

A preocupação de Watson, Spyrou e Tall (2003) está em como os estudantes serão apresentados a esse tema complexo. Eles acreditam que a abordagem no âmbito da Física tem uma complexidade adicional, pois as experiências físicas podem ocasionar diferentes significados sensoriais. Isso pode levar a uma gama de crenças conscientes e inconscientes que são capazes de produzir obstáculos na aprendizagem. Os pesquisadores exemplificam que a corporificação do vetor como uma rota leva ao uso da lei do triângulo na soma de vetores, enquanto que a corporificação do vetor como força leva ao uso da lei do paralelogramo, podendo causar equívocos significantes na mecânica.

Watson e Tall (2002) apresentaram a visão de um aluno ao trabalhar a corporificação do vetor no contexto da translação de objetos. Esse aluno verificou que sucessivas translações teriam o mesmo efeito que apenas uma única translação, desde que essas sucessivas translações tivessem o mesmo ponto de origem e o mesmo ponto de chegada que a translação composta por um único movimento. Nesse contexto, o aluno, por analogia, percebeu que a soma dos vetores corporificados pelas sucessivas translações corresponderia ao vetor corporificado por esse único movimento de translação.

Watson, Spyrou e Tall (2003) argumentam que o conceito matemático de vetor, no Ensino Médio, está muito ligado aos mundos corporificado e simbólico. Sendo assim, a sugestão seria introduzir esse conceito a partir da translação de um objeto geométrico no plano, enquanto experiência corporificada. Os pontos positivos ressaltados pelos autores seriam o sentido de movimento dinâmico e o conceito de flecha como um objeto, como propusemos em nossa pesquisa. Da mesma forma, a representação simbólica para os vetores no plano, por meio dos componentes x, y em uma matriz coluna ou um par ordenado pode oferecer a ideia de quantidade, tendo um duplo significado de processo e conceito.

Metodologia

Apresentaremos um recorte da parte diagnóstica de uma pesquisa aprovada pelo Comitê de Ética da Universidade Anhanguera de São Paulo por meio do parecer 2.687.784, cuja coleta de dados já foi concluída e seguiu as orientações metodológicas do *Design Experiment*, de Cobb *et al* (2003), que conferiu à pesquisa três fases: a fase prospectiva, a fase reflexiva e a fase retrospectiva.

A fase prospectiva contou com a organização de um processo de aprendizagem hipotético que contemplou a análise dos componentes didáticos já trabalhados pelos alunos e dos recursos didáticos disponíveis, a seleção dos conteúdos a serem abordados, o planejamento da sequência de abordagem do conteúdo e a elaboração das atividades e do material necessário para que os alunos possam resolvê-las.

A fase reflexiva foi subdividida em duas partes. A primeira fase foi idealizada para a aplicação de uma atividade diagnóstica com o objetivo de identificar os já-encontrados referentes aos objetos que poderiam ocasionar alguma dificuldade aos alunos ao longo das intervenções. A segunda parte da intervenção consistiu na aplicação de onze atividades de intervenção sobre os conceitos básicos de vetores abordados no Ensino Médio. Ao longo de toda a fase reflexiva, houve uma análise preliminar dos dados com o intuito de verificar a viabilidade do processo de aprendizagem hipotético organizado na fase anterior.

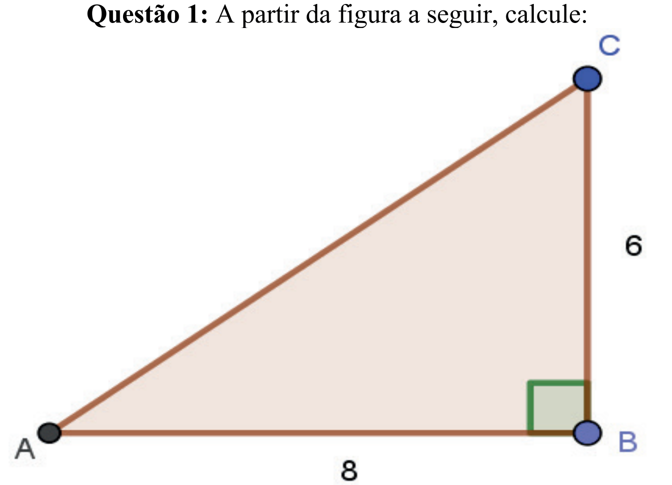
A fase retrospectiva consistiu na análise dos protocolos obtidos e na produção da síntese dos resultados obtidos.

As atividades apresentadas neste recorte fazem parte da atividade diagnóstica aplicada aos alunos e, para fazer a análise dos "já-encontrados" em relação aos conceitos básicos de trigonometria e vetor, foram aplicadas duas atividades, realizadas individualmente pelos alunos voluntários. Participaram do diagnóstico quatorze alunos do primeiro ano do Ensino Médio de uma escola particular, que se voluntariaram a participar da pesquisa. Atribuímos, à listagem dos nomes em ordem alfabética, os códigos A1, A2,..., A14, respectivamente.

A primeira questão (Quadro 1) teve como objetivo verificar se os alunos compreendem os conceitos iniciais da corporificação da trigonometria que, segundo Tall (2013), está contida na definição das relações trigonométricas no triângulo retângulo, enquanto relações no mundo simbólico, além de possibilitar a passagem formal para a relação com os conceitos de geometria plana, a partir da utilização do teorema de Pitágoras como ferramenta estratégica que viabilizará os cálculos das razões trigonométricas.

Quadro 1. Enunciado da primeira questão

Questão 1: A partir da figura a seguir, calcule:



a) o comprimento da hipotenusa do triângulo.
b) o seno e o cosseno do ângulo relativo ao vértice A.

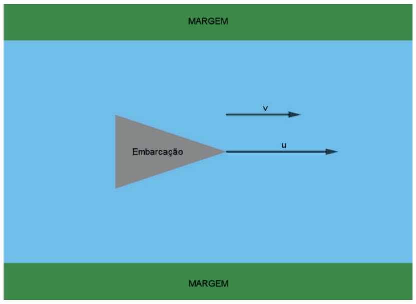
Fonte: Acervo de pesquisa

A segunda questão (Quadro 2) teve como objetivo investigar se os alunos estão aptos a corporificarem o vetor como velocidade, a partir da percepção de que ela é uma grandeza que pode ser representada por um vetor como segmento de reta orientado. Alguns conceitos, como soma de vetores na mesma direção e uso da regra do paralelogramo para soma de vetores perpendiculares, são explorados nessa questão.

Quadro 2. Enunciado da segunda questão

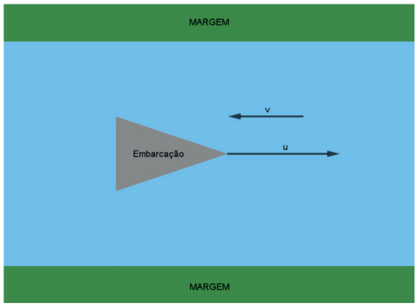
Questão 2: Uma embarcação possui velocidade em relação à água (proporcionada pelos seus motores) igual a 9 m/s , representada pelo vetor u nas figuras a seguir. Essa embarcação navega em um rio cuja correnteza tem uma velocidade igual a 6 m/s, representada pelo vetor v, nas figuras a seguir. Portanto, ela se movimentará (em relação à terra) com uma velocidade w, resultante de u e v. (Adaptado do livro Física: contexto & aplicações - Volume 1)

a) Calcule a velocidade **w** da embarcação quando ela está navegando a favor da correnteza, conforme figura ao lado.



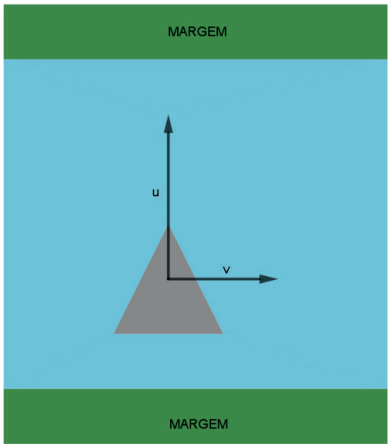
Embarcação navegando a favor da correnteza

b) Calcule a velocidade **w** da embarcação, quando ela está navegando contra a correnteza, conforme figura ao lado.



Embarcação navegando contra a correnteza

c) Calcule a velocidade **w** da embarcação, quando ele está navegando de uma margem à outra, perpendicularmente à correnteza, conforme figura ao lado.



Embarcação navegando perpendicular à correnteza

Fonte: Acervo de pesquisa

Análise dos protocolos

A análise dos protocolos referentes às duas questões citadas nos quadros 1 e 23 se dará por questão e será quantitativa e qualitativa.

Análise dos dados obtidos na primeira questão

Iniciaremos essa análise apresentando, em números, o desempenho dos alunos (Tabela 1). Em seguida, faremos uma análise mais minuciosa dos protocolos dos alunos.

Tabela 1: Análise quantitativa da primeira questão

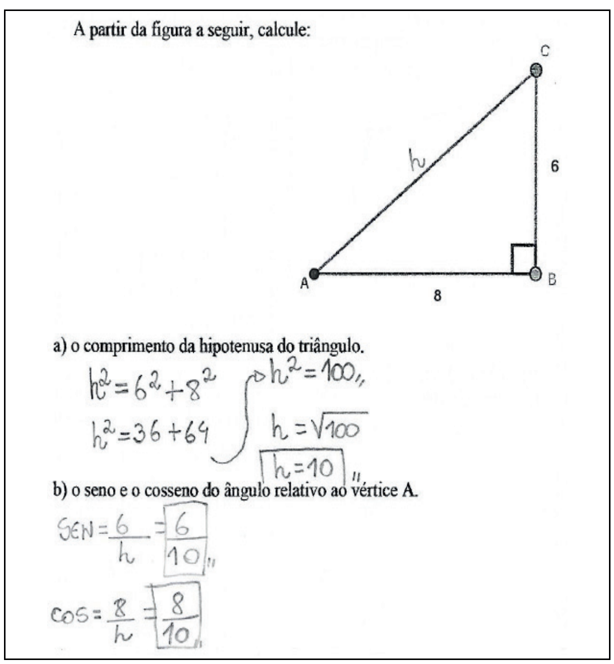
	Integralmente correta	Parcialmente correta	Incorreta	Em branco
1ª questão	13	00	00	01
Análise da primeira questão por itens				
Item a	13	00	00	01
Item b	13	00	00	01

Fonte: autor

Como dito anteriormente, o teorema de Pitágoras é uma importante ferramenta utilizada para viabilizar o cálculo das razões trigonométricas quando se tem apenas as medidas de dois lados do triângulo retângulo. Nesse sentido, foi possível verificar que a maioria dos alunos foi capaz de lançar mão dessa ferramenta para o cálculo da medida da hipotenusa.

A partir desse "já-encontrado" da geometria plana, a maioria dos alunos foi capaz de iniciar o percurso pelo mundo corporificado da trigonometria, ao conseguir compreender as definições das razões trigonométricas, e interagir com o mundo simbólico da trigonometria ao realizar os cálculos corretamente dessas razões. A solução do aluno A1 (Quadro 3) exemplifica a análise feita.

Quadro 3: Solução do aluno A1



Fonte: Acervo de pesquisa

Apenas um aluno apresentou dificuldade em relação aos "já-encontrados" da geometria plana ao não compreender a aplicação do teorema de Pitágoras. Por este motivo, esse aluno não teve subsídios para o cálculo das razões trigonométricas.

Análise dos dados obtidos na segunda questão

Ao iniciarmos a análise dos protocolos referente à segunda questão, apresentaremos o desempenho dos alunos de forma quantitativa (Tabela 2) e, em seguida, daremos início a uma análise mais apurada dos dados obtidos.

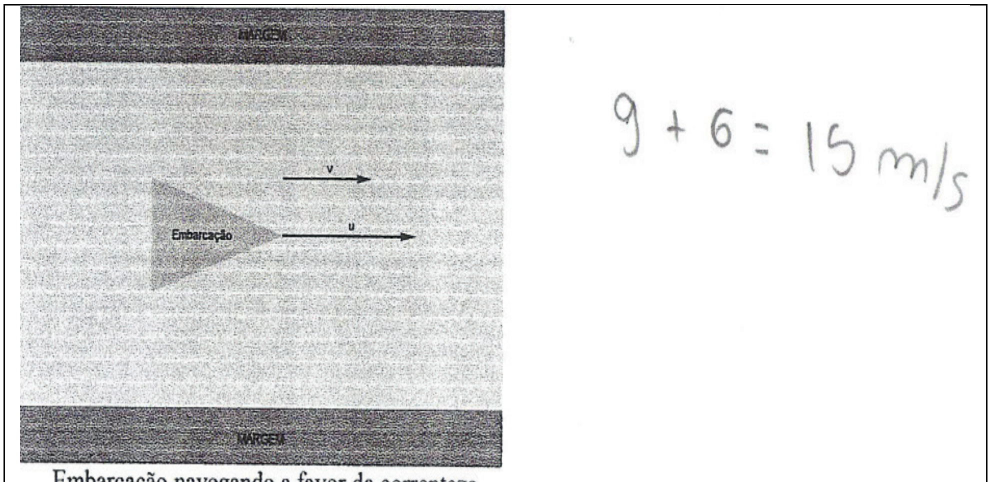
Tabela 2: Análise quantitativa de acertos da segunda questão

	Integralmente correta	Parcialmente correta	Incorreta	Em branco
2ª questão	00	10	00	04
Análise da segunda questão por itens				
Item a	00	10	00	04
Item b	00	10	00	04
Item c	00	08	01	05

Fonte: autor

No item **a**, com os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ na mesma direção e mesmo sentido, dez alunos realizaram a operação $\vec{u} + \vec{v}$ de maneira escalar, somando os módulos desses vetores, conforme mostra a solução do aluno A11 (Quadro 4). Apesar de esses alunos terem encontrado o valor correto do módulo da velocidade resultante, não foi dado um tratamento vetorial ao cálculo da velocidade, já que não apresentaram a direção e o sentido da velocidade resultante, ou seja, não se passou à corporificação na representação.

Quadro 4: Solução do aluno A11 (Item **a** da segunda questão)

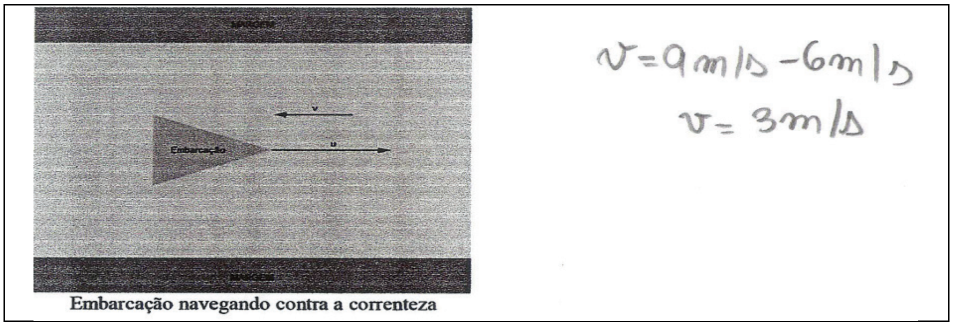


Embarcação navegando a favor da correnteza

Fonte: Acervo de pesquisa

No item **b**, com os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ na mesma direção e sentidos opostos, os mesmos dez alunos realizaram a operação $\vec{u} - \vec{v}$ de forma análoga ao item anterior, isto é, de maneira escalar, subtraindo os módulos dos vetores, conforme mostra a solução do aluno A7 (Quadro 5). Assim como ocorreu no item anterior, esses alunos encontraram o valor correto do módulo da velocidade resultante, mas tampouco deram o tratamento vetorial para o cálculo, pois não apresentaram a direção e o sentido da velocidade resultante, novamente, falhando na representação.

Quadro 5: Solução do aluno A7 (Item **b** da segunda questão)



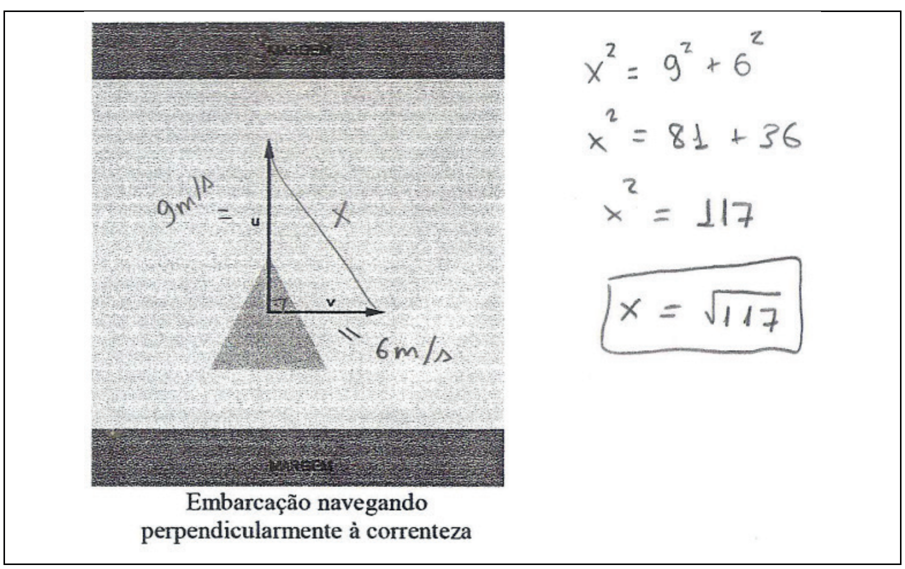
Fonte: Acervo de pesquisa

As análises dos dados obtidos nos itens **a** e **b** evidenciam o comprometimento da corporificação do vetor como velocidade, haja vista que nenhum aluno deu o tratamento vetorial à velocidade. Os alunos não relacionam a velocidade a uma grandeza com módulo, direção e sentido. Essa dificuldade de corporificação do vetor à velocidade fica ainda mais evidente nos protocolos dos quatro alunos que deixaram esses itens em branco.

No item **c**, em que os dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ estavam perpendiculares entre si, dividiremos as soluções em três grupos:

- Oito alunos ligaram a origem do vetor $\vec{u}$ à extremidade do vetor $\vec{v}$ por meio de um segmento de reta não orientado, chegaram ao triângulo retângulo e calcularam o valor da medida da hipotenusa utilizando o Teorema de Pitágoras, conforme mostra as soluções do aluno A3 (Quadro 6). Mesmo que os alunos tenham encontrado o valor correto do módulo do vetor da velocidade resultante, eles não se preocuparam em apresentar a direção e o sentido do vetor. Isso evidencia a dificuldade de corporificação do vetor como velocidade, com módulo, direção e sentido.

Quadro 6: Solução do aluno A3 (Item **c** da segunda questão)



Fonte: Acervo de pesquisa

- Um aluno resolveu este item a partir da subtração entre os módulos de $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Sendo assim, não calculou sequer o valor correto do módulo do vetor da velocidade resultante.
- Cinco alunos deixaram este item em branco.
- A análise das soluções do item **c** também será dividida em três grupos, respectivamente, conforme dividimos as soluções. As evidências obtidas dessa análise foram:
- Oito alunos buscaram a regra do triângulo como forma de resolver a questão. Porém, a dificuldade na compreensão de que velocidade é uma grandeza vetorial comprometeu a corporificação do vetor como velocidade e a escolha da estratégia de resolução desse problema, haja vista que a regra do paralelogramo seria mais apropriada;
- O aluno que buscou a solução escalar não foi capaz de corporificar a velocidade como uma grandeza vetorial, com módulo, direção e sentido; e
- Dentre os cinco alunos que deixaram este item em branco, quatro deixaram toda a segunda questão em branco. Nesse contexto, percebe-se que a corporificação do vetor como velocidade está demasiadamente comprometida.
- Em todos os casos analisados, em virtude do aluno visualizar a velocidade como uma grandeza escalar, não houve a preocupação de representá-la como um segmento de reta orientado.

Considerações finais

A partir dos protocolos da primeira questão, foi possível verificar que os alunos conseguiram identificar o triângulo retângulo e as medidas de seus catetos e aplicar o teorema de Pitágoras para o cálculo da hipotenusa. Isso possibilitou o cálculo das razões trigonométricas, evidenciando que os alunos conseguiram iniciar seus percursos pelos mundos da matemática na trigonometria.

Nos dois primeiros itens da segunda questão, identificamos uma dificuldade de corporificação do vetor como velocidade por todos os alunos. Os alunos trataram a velocidade como uma grandeza escalar, mas como em ambos os itens os vetores que representavam as velocidades da embarcação e da correnteza estavam na mesma direção, a maioria dos alunos conseguiu calcular corretamente o módulo do vetor resultante, sem especificar sua direção em sentido. Essa visão da velocidade como uma grandeza escalar pode ser consequência do estudo da cinemática na disciplina de Física.

Essa visão comprometeu a solução do terceiro item da segunda questão, pois a direção da velocidade do navio estava perpendicular à direção da velocidade da correnteza. Apesar da regra do paralelogramo ser mais adequada para a resolução desse problema, a maioria dos alunos utilizou de maneira equivocada a regra do triângulo, buscando calcular o módulo do vetor da velocidade resultante, sem preocupação com sua direção e sentido.

Nosso entendimento é que a sequência didática adotada na disciplina de Física pode ocasionar alguns “vícios” que podem gerar conflitos na corporificação do vetor como deslocamento e velocidade e na sua consequente representação como segmento orientado. Esse entendimento vai ao encontro de Watson, Spyrou e Tall (2003), que afirmam que as experiências físicas podem ocasionar diferentes significados sensoriais e podem levar a uma gama de crenças conscientes e inconscientes que são capazes de produzir obstáculos na aprendizagem.

Referências bibliográficas

Cobb, P.; Confrey, J.; Disessa, A.; Lehrer,R.; Schauble, L. (2003). Design experiments in education research. *Educational Researcher*, v.32, n.1, p. 9-13.

Lima, R. N. (2007). Equações algébricas no Ensino Médio: uma jornada por diferentes mundos da matemática. Tese de Doutorado. PUC-SP.

Máximo, A.; Alvarenga, B. (2013). Física: contexto & aplicações. Volume 1 – Ensino Médio. São Paulo: Scipione.

Moreira, P. C.; David, M. M. (2016). A formação matemática do professor: licenciatura e prática docente escolar. Coleção Tendências em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica Editora.

Tall, D. (2013). How Humans Learn to Think Mathematically: exploring the three worlds of mathematics. Cambridge: Cambridge University Press.

Tall, D. (2004) Thinking Through Three Worlds of Mathematics. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 4, 281-288.

Watson, A., Spyrou P., Tall, D. (2003). The Relationship between physical embodiment and mathematical simbolism: the concept of vector. *The mediterranean Journal of Mathematical Education*, 73-97.

Watson, A., Tall, D. (2002). Embodied action, effect and symbol in mathematical growth. *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the psychology of Mathematics Education*, 369-376.

ANÁLISIS DIDÁCTICO DE LA PROBABILIDAD FRECUENCIAL

DIDACTIC ANALYSIS OF FREQUENCY PROBABILITY

Ilseth Johana Leyva Zazueta, Angélica Moreno–Durazo
Universidad de Sonora (México)
ilsethleyva@hotmail.com, angelica.morenodurazo@unison.mx

Resumen
Este trabajo presenta un análisis sobre la enseñanza de la probabilidad frecuencial en la Educación Media Superior en México. Utilizamos herramientas teóricas de la Socioepistemología para analizar la dimensión didáctica a través del estudio de planes y programas, libros de texto y diálogos con docentes, esto como un primer acercamiento hacia una *problematización del saber probabilístico*. Empleamos la idea de *discurso Matemático Escolar* y sus características para verificar que la matemática escolar asociada a los significados de probabilidad privilegia el estudio del significado clásico, restando protagonismo al significado frecuencial y repercutiendo en el desarrollo del razonamiento probabilístico de los estudiantes.

Palabras clave: probabilidad frecuencial, discurso Matemático Escolar, Socioepistemología

Abstract
This paper presents an analysis on the teaching of frequency probability in the Mexican high school. We use theoretical tools of socio-epistemology to analyze the didactic dimension through the study of curricula and syllabuses, textbooks, and dialogues with teachers; this as a first approach towards a problematization of probabilistic knowledge. We use the idea of mathematical school discourse and its characteristics to verify that school mathematics associated with probability notions privileges the study of classical notion, downplaying the frequency notion and affecting the development of students' probabilistic reasoning.

Key words: frequency approach, mathematical school discourse, socio-epistemology

Introducción

La diversidad de problemáticas con las que constantemente nos confrontamos precisan que a nivel personal y colectivo se cuenten con las competencias adecuadas para la toma de decisiones. Gran parte de estas problemáticas tienen que ver con aspectos no deterministas, por lo que, el reconocimiento de las situaciones en las que intervienen cuestiones aleatorias ha provocado un incrementado en el interés por el aprendizaje y la enseñanza de la probabilidad. Al respecto, los planes y programas de estudio mexicanos han ido evolucionando e incorporando en sus propuestas de enseñanza, cada vez más contenidos referentes a probabilidad (SEP, 2017b).

Ahora bien, en la actualidad la probabilidad acepta diferentes perspectivas que se complementan entre sí, a saber, el enfoque intuitivo, clásico, frecuencial, subjetivo y axiomático (Batanero, Henry y Parzysz, 2005), que nacen en la búsqueda de atender las problemáticas de los enfoques existentes y ampliar el rango de aplicación de la probabilidad.

Según Batanero, Henry & Parzysz (2005), no se debe limitar el estudio de la probabilidad a una sola perspectiva, sino presentar a los estudiantes un panorama general a través de sus diferentes enfoques, lo que beneficia el desarrollo adecuado del razonamiento probabilístico. Por otra parte, diversas investigaciones realizadas en torno a los enfoques de probabilidad evidencian una inclinación del estudio de la probabilidad desde el enfoque clásico, concentrando en gran medida a métodos de combinatoria y repetición (Godino, Batanero y Cañizares, 1987; Batanero, 2005; Insunza, 2017). Por su parte, Sánchez (2009) señala que la ausencia de la probabilidad frecuentista evita el desarrollo de nociones fundamentales de probabilidad como la aleatoriedad, variación, predictibilidad e incertidumbre.

Cabe resaltar que una de las principales ventajas de estudiar el enfoque frecuencial de probabilidad para el área de la didáctica es el de conectar dos áreas de estudio, estas son la Probabilidad y la Estadística. Por lo que, a partir de consideraciones de diversas investigaciones, enmarcamos la problemática establecida para nuestro proyecto, considerando que la manera actual de estudio de la probabilidad frecuencial es limitada, bajo la hipótesis de que se presenta como un método experimental para la asignación de probabilidades cuando el espacio muestral del experimento aleatorio es desconocido, sin realizar una diferenciación adecuada entre los enfoques probabilísticos.

En consecuencia, presentamos un análisis didáctico de la probabilidad en la Educación Media Superior que brinda un panorama general de cómo es abordada la probabilidad frecuencial dentro del sistema educativo. Con esto en mente, mostramos un análisis transversal de los planes y programas de estudio y analizamos libros de texto vigentes, lo que nos brinda un panorama acerca de los contenidos y el enfoque de enseñanza a seguir; además, diseñamos y ejecutamos un instrumento de diálogo de su enseñanza, el cual se desarrolla con tres profesores en activo de nivel medio superior. En concreto, caracterizamos la enseñanza del enfoque experimental en la Educación Media Superior. Cabe mencionar que en este trabajo reportamos los resultados obtenidos a partir de Leyva (2021), donde se incluye de manera amplia cada etapa de su desarrollo.

Marco teórico

Para el análisis de la enseñanza de la probabilidad desde su enfoque frecuencial, se retoman los elementos de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. En las investigaciones dentro de esta teoría se estudian los fenómenos didácticos vinculados con el saber matemático, contemplando toda forma de saber, ya sea popular, técnico o culto, que, de manera integral, forman la sabiduría humana (Cantoral, 2013). Así, la Socioepistemología construye, reconstruye, significa y resignifica el saber, se localiza temporal y espacialmente, se estudia a partir de la perspectiva del contenido de la enseñanza (saber), quien aprende (estudiante) y quien enseña (docente); en otras palabras, se realiza una problematización del saber (Cantoral, Reyes-Gasperini & Montiel, 2014).

En tanto, si se busca el diseño o rediseño de actividades para la enseñanza de la probabilidad, es preciso realizar una problematización del saber que posibilite el diseño de actividades que enfaticen el *valor de uso* del conocimiento probabilístico en una situación de aprendizaje y, por tanto, se impulse hacia la *construcción social del conocimiento matemático*. Para la Socioepistemológica, esta problematización del saber matemático (y en este caso probabilístico) se realiza por medio de un análisis articulado de las dimensiones que constituyen un saber matemático en particular (Cantoral *et al*, 2014):

- *Dimensión epistemológica*: "aquellas condiciones que permitieron la constitución del saber, cuál fue el origen de determinado conocimiento matemático y el contexto asociado a su surgimiento" (Cantoral, 2013, p. 147).
- *Dimensión cognitiva*: construcciones mentales; formas de significación progresiva del conocimiento; forma de desarrollo del pensamiento matemático.
- *Dimensión didáctica*: forma en la que existe el saber dentro del sistema didáctico; la manera en la que se genera su difusión institucional, su intencionalidad al momento de ser enseñado y forma de develar su evolución dentro y fuera de entornos escolares.
- *Dimensión sociocultural*: se refiere al uso del saber en un tiempo y lugar determinado, la forma en que se contextualiza un conocimiento matemático en particular.

De forma que, al tener presente el objetivo de análisis del presente estudio, nos enfocamos en la dimensión didáctica (al realizar un análisis sobre cómo es que existe el saber probabilístico referido a la probabilidad frecuencial por medio de los elementos de estudio: planes y programas de estudio, libros de texto y el instrumento diseñado para docentes), lo que representa un inicio para la problematización del saber probabilístico.

Por otra parte, según Soto y Cantoral (2014) es común culpabilizar a los docentes o a los estudiantes de las problemáticas existentes en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; el panorama del fracaso común conduce a considerar a docentes y estudiantes como únicos responsables de los bajos niveles de aprovechamiento existentes. Ante lo cual, la Teoría Socioepistemológica considera estas problemáticas desde una tercera perspectiva que pone en manifiesto la idea de *discurso Matemático Escolar (dME)*.

Entre las características del *dME* se enlistan las siguientes (Soto y Cantoral, 2014, p. 1528):

- *La atomización en los conceptos*: no se consideran los contextos sociales y culturales que permiten la constitución del conocimiento.
- *El carácter hegemónico*: existe una supremacía de argumentaciones, significados y procedimientos, frente a otras.
- *La concepción de que la Matemática es un conocimiento acabado y continuo*: los objetos matemáticos son presentados como si hubiesen existido siempre y con un orden.
- *El carácter utilitario y no funcional del conocimiento*: la organización de la matemática escolar ha antepuesto la utilidad del conocimiento a cualquiera de sus restantes cualidades. Se busca que el conocimiento tenga un carácter funcional, en el sentido que logre integrar tal conocimiento a la vida para transformarla.
- *La falta de marcos de referencia para resignificar la matemática escolar*: se ha soslayado el hecho de que la Matemática responde a otras disciplinas y, por tanto, es ahí donde encuentra una base de significados naturales.

De esta manera, Soto y Cantoral (2014) al analizar las características del *dME* consideran al fracaso desde una perspectiva más amplia, es decir, el *fenómeno de exclusión*, respecto a dos planteamientos: *violencia simbólica* referente a *"*todo poder que logra imponer significaciones e imponerla como legítimas disimulando las relaciones de fuerza en que se funda su propia fuerza*"* (Bourdieu y Paseron, 2005, p. 44, como se citó en Soto y Cantoral, 2014) y los *sistemas de prácticas* que conciben mapas y delimitan la forma de acción, razón, significancia y

argumentación de las personas, así no se aceptarán como válidas aquellas formas que no concuerden con lo establecido, valorándose como fuera de lo normal y enmarcan la imposición presente dentro del *dME*.
En este sentido, a partir del modelo de exclusión (Soto y Cantoral, 2014), exponemos la presencia del *dME* para la enseñanza de la probabilidad frecuencial haciendo uso de las nociones de *violencia simbólica* y *sistemas de prácticas*.

Metodología

Para el desarrollo del estudio, se analizaron tres elementos relacionados con la matemática escolar del significado frecuencial de probabilidad: planes y programas de estudio mexicanos, libros de texto vigentes para Educación Básica y Media Superior, así como el diseño e implementación de un instrumento de diálogo dirigido a docentes de bachillerato. Pretendiendo en cada punto de análisis identificar la presencia de los elementos del *dME* planteados por la Socioepistemología presentando un contraste entre estos y sus implicaciones.

Instrumentos de análisis

Análisis curricular
El análisis de planes y programas de estudio referentes a la probabilidad frecuencial es de tipo documental y se realizó transversalmente; esto es, consideramos los documentos para la Educación Básica y para la Educación Media Superior. Para la Educación Básica, tomamos en cuenta las últimas dos reformas establecidas por la Secretaría de Educación Pública (SEP 2011; SEP, 2017a) y desglosamos sus principales características, así como la evolución y comparación de las nociones probabilísticas establecidas de una reforma a otra. Seguido, se presenta un análisis probabilístico del plan de estudio para el nivel medio superior, partiendo del programa para el bachillerato general mexicano.

Análisis de libros de texto
El *Modelo exhaustivo de análisis y valoración de libros de texto escolares de matemáticas* de Monterrubio y Ortega (2012) guía el análisis de los libros de texto. Este modelo considera una valoración cualitativa bajo diversos criterios, entre ellos seleccionamos los organizadores: *objetivos, contenidos, conexiones, actividades, lenguaje, ilustraciones y recursos generales*, pues en nuestro criterio son los que mejor permiten analizar el tratamiento del conocimiento matemático. En concreto, analizamos las secciones relacionadas con nociones probabilísticas de los libros de texto para quinto y sexto grado de primaria, diversas propuestas de textos escolares vigentes para la secundaria y los libros de texto desarrollados por el Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora para la asignatura de Probabilidad y Estadística.

Diseño y aplicación de instrumento
Como tercer elemento de análisis, diseñamos un instrumento de diálogo y lo implementamos a docentes de bachillerato en activo. Para esto, realizamos una revisión bibliográfica, donde presentamos una serie de investigaciones enfocadas en evaluar o caracterizar el aprendizaje de la probabilidad en distintos niveles educativos (Green, 1983; Cañizares, 1997; Gómez, Batanero y Contreras, 2014). Estas investigaciones se enfocan tanto en estudiantes como en docentes y son base para la conformación del instrumento.

El producto resultante consta de tres apartados llamados componentes (1, 2 y 3) y que describimos en lo siguiente.

Componente 1 – Entrevista inicial: Conformado por una serie de preguntas relativas a la formación, experiencia docente y cuestionamientos sobre la enseñanza de la probabilidad.
Componente 2 – Cuestionario: Para la selección de ítems, se retoman algunas tareas y/o ejercicios de investigaciones previas con base en su relación con las nociones que pretendemos estudiar. La Tabla 1, muestra los tres ítems seleccionados.

Tabla 1. Componente 2 – Cuestionario

ÍTEM 1.
Una moneda equilibrada se lanza al aire cinco veces y sale CARA las cinco veces. De las siguientes frases, señala la que consideres correcta:

a) La próxima vez es más probable que otra vez salga CARA

b) La próxima vez es más probable que salga CRUZ.

c) La próxima vez es igual de probable que salga CARA o CRUZ

d) No lo sé

Justifica la respuesta.

ÍTEM 2
Una bolsa contiene en su interior algunas bolas blancas y algunas bolas negras. Un niño extrae una bola, anota su color y la vuelve a introducir. A continuación, remueve las bolas para que se mezclen bien. El chico repite esta operación 4 veces y siempre obtiene una bola negra. A continuación, extrae una quinta bola. ¿De qué color piensas que será con más probabilidad? Señala la frase que consideres correcta:

a) La negra es más probable de nuevo

b) La negra y la blanca son igualmente probables.

c) La blanca es más probable esta vez.

d) Otra: ¿Cuál?

Justifica la respuesta.

ÍTEM 3
Actividad 1. Un profesor vacía sobre la mesa un paquete de 100 chinchetas obteniendo los siguientes resultados: 68 caen con la punta para arriba y 32 caen hacia abajo.
Supongamos que el profesor pide a 4 niños repetir el experimento, lanzando las 100 chinchetas. Cada niño obtendrá algunas con la punta hacia arriba y otras con la punta hacia abajo.
a) Escribe en la siguiente tabla un posible resultado para cada niño:

Daniel	Martín	Diana	María
Punta arriba:	Punta arriba:	Punta arriba:	Punta arriba:
Punta abajo:	Punta abajo:	Punta abajo:	Punta abajo:

Actividad 2. Cuatro alumnos completaron cada uno la tarea anterior. Estas fueron sus respuestas

a)

Daniel	Martín	Diana	María
Punta arriba: 32	Punta arriba: 70	Punta arriba: 35	Punta arriba: 65
Punta abajo: 68	Punta abajo: 30	Punta abajo: 65	Punta abajo: 35

b)

Daniel	Martín	Diana	María
Punta arriba: 67	Punta arriba: 68	Punta arriba: 70	Punta arriba: 71
Punta abajo:33	Punta abajo:32	Punta abajo: 30	Punta abajo: 29

c)

Daniel	Martín	Diana	María
Punta arriba: 68	Punta arriba: 68	Punta arriba: 68	Punta arriba: 68
Punta abajo: 32	Punta abajo: 32	Punta abajo: 32	Punta abajo: 32

d)

Daniel	Martín	Diana	María
Punta arriba: 50	Punta arriba: 51	Punta arriba: 48	Punta arriba: 53
Punta abajo: 50	Punta abajo: 49	Punta abajo: 52	Punta abajo: 47

a) Señala cuál o cuáles de estas respuestas son correctas
b) Para cada una de las respuestas incorrectas explica cuáles son las posibles intuiciones o estrategias incorrectas que han llevado a los participantes a dar una respuesta errónea

Fuente: Elaboración propia

Ítem 1. Tomado de Green (1983) y Cañizares (1997), aborda la independencia de ensayos repetidos bajo las mismas condiciones iniciales; se puede detectar la presencia de los efectos de la heurística de la representatividad (Khaneman, Slovic & Tvesky, 1982). Su intención dentro del instrumento es establecer un vínculo con problemas clásicos de los cursos de probabilidad, esperando sea familiar para el docente y permita considerar casos no equiprobables.

Ítem 2. Extraído de Cañizares (1997), usa el principio de inferencia para estimar el contenido de una bolsa mediante datos, esperando estimaciones frecuenciales. Sesgo asociado: sesgo de equiprobabilidad (Lecountre y Durand, 1988).

Ítem 3. Tomado de Cañizares (1997) y Gómez, Batanero y Contreras (2014), con el propósito de comparar probabilidades binomiales. Sesgo asociado a este problema: sesgo de equiprobabilidad.

Componente 3 - Análisis didáctico por parte del docente: Consta de cinco preguntas (Tabla 2) con la finalidad de conocer aspectos didácticos de los problemas planteados en el Componente 2, su vinculación con los problemas presentes en los cursos de los docentes y su postura con respecto a las nociones probabilísticas involucradas.

Tabla 2. Componente 3 – Análisis didáctico

1. Resuelva cada uno de los ítems.
2. ¿Los ítems presentados tienen similitudes con los trabajados en su clase? ¿Qué similitudes y qué diferencias encuentra?
3. ¿Con qué conceptos del currículo escolar relaciona el contenido involucrado en la resolución de estos problemas?
4. ¿Qué dificultades podrían presentarse en los estudiantes al enfrentarse a la resolución de los problemas antes descritos?
5. ¿Qué tipo de errores podrían cometer sus estudiantes al abordar la resolución de los problemas?

Fuente: Elaboración propia

Análisis didáctico de la probabilidad

Análisis de planes y programas

Para esta sección se analizan los planes y programas de estudio vigentes para la Educación Básica y Educación Media Superior para el bachillerato general. La Tabla 3. Muestra los aprendizajes esperados en el nivel básico para el eje *Análisis de datos* para el tema de probabilidad.

Tabla 3. Aprendizajes esperados eje Análisis de datos Educación Básica (Adaptado SEP, 2017b, p. 314 – 315)

Educación primaria	**Secundaria**		
5º y 6º	**1º**	**2º**	**3º**
Determina y registra en tablas de frecuencias los resultados de experimentos aleatorios.	Realiza experimentos aleatorios y registra los resultados para un acercamiento a la probabilidad frecuencial.	Determina la probabilidad teórica de un evento en un experimento aleatorio.	Calcula la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes

Fuente: Elaboración propia

En quinto grado de primaria se plantea el estudio de resultados de experimentos aleatorios y un acercamiento experiencias aleatorias, así como una idea primitiva de espacio muestral. Para el sexto grado, se espera que el estudiante logre identificar los posibles resultados en un experimento aleatorio sencillo y desarrollar nociones intuitivas de espacio muestral sin la necesidad de manejar el concepto formalmente.

Para la educación secundaria, el primer grado se designa para el estudio de la probabilidad frecuencial y el uso de diferentes métodos para recolectar y registrar datos, en el segundo grado se estudia el enfoque clásico de probabilidad y en el tercer grado se espera que el estudiante logre calcular la probabilidad de eventos mutuamente excluyentes.

Con respecto a la Educación Media Superior, se establece el estudio de los enfoques clásico y frecuencial de probabilidad, análisis y organización de información y determinación de probabilidades numéricas, además de su vinculación con herramientas estadísticas. La Tabla 4 presenta los contenidos establecidos para la asignatura de Probabilidad y Estadística para el bachillerato general.

Tabla 4. Contenidos para Probabilidad y Estadística, Educación Media Superior (SEP, 2017, p. 151)

Aprendizajes clave para Probabilidad y estadística en la Educación Media Superior			
Eje	**Contenido Central**	**Contenidos Específicos**	**Aprendizajes esperados**
Del manejo de la información al pensamiento estocástico	Conceptos básicos de Estadística y Probabilidad. Recolección de datos y su clasificación en clases. Uso del conteo y la probabilidad para eventos.	Nociones y conceptos básicos de Estadística y Probabilidad. Enfoques de probabilidad: ¿qué significa cada enfoque de probabilidad?, ¿qué significan las medidas de tendencia central?, ¿para qué obtener estos valores? Técnicas de conteo y agrupación en clases para la determinación de probabilidades.	Usa un lenguaje propio para situaciones que necesiten del estudio con elementos de Estadística y Probabilidad. Usa técnicas de conteo o agrupación en la determinación de probabilidades. Organiza la información como parte de la Estadística para el estudio de la probabilidad. Estudia el complemento que ofrece la Estadística para la Probabilidad.

Fuente: Elaboración propia

Así, al tomar en cuenta el currículo vigente para Educación Básica y Media Superior, observamos que se establece el estudio de los enfoques de probabilidad de forma gradual, iniciando en la primaria con nociones intuitivas de probabilidad y para en el nivel secundaria se introducen los enfoques frecuencial y clásico (SEP, 2017b), que serán retomados para su estudio en el nivel medio superior (SEP, 2017a).

Análisis de libros de texto

Aunque el análisis de libros de textos se realiza para la Educación Básica y Media Superior (Leyva, 2021), en esta sección nos concentraremos en presentar los resultados obtenidos exclusivamente del análisis de textos de Educación Media Superior. Para esto, recurrimos a los textos de las asignaturas *Probabilidad y Estadística I y II* del Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora (COBACH). En lo siguiente, se sintetizan los resultados obtenidos:

Probabilidad y Estadística I (Durazo, 2018). En general, el texto presenta al inicio de cada bloque un panorama histórico en torno a las nociones de estudio e incluye actividades de investigación, se retoman situaciones extramatemáticas, proporciona ejemplos de aplicación y se utiliza información real para su análisis en las actividades.

Respecto a la probabilidad frecuencial, ubicada en el Bloque 4 del texto, se inicia con el estudio básico de la teoría de conjuntos y se introduce el enfoque clásico como fórmula para eventos de espacios equiprobables y el enfoque frecuencial como fórmula para eventos posibles al realizar un experimento. Con base en esto, no se identifica una diferenciación de situaciones para la aplicación de cada enfoque, lo que indica la presencia de la concepción de que la *matemática es un conocimiento acabado, continuo y con carácter hegemónico.*

Probabilidad y Estadística II (COBACH, 2016). El Bloque I, en la secuencia didáctica II, incluye los significados clásico y frecuencial de probabilidad. El enfoque experimental se presenta como una forma para determinar probabilidades cuando no se conoce el espacio muestral y mientras que, si se conoce el espacio muestral, se recurre al significado clásico (sin especificar la necesidad de equiprobabilidad) (Ilustración 1).

> **Métodos para asignar probabilidades.**
>
> En este curso abordaremos que probabilidad se puede determinar de dos formas: experimentalmente y teóricamente. La diferencia entre ellas, es que la probabilidad experimental no conocemos los resultados posibles que pueden ocurrir, como su nombre lo expresa se tiene que probar el experimento al instante e ir anotando los resultados que se han obtenido al repetirlo una determinada cantidad de veces .
>
> Sin embargo la probabilidad teórica podemos obtenerla cuando podemos conocer los resultados posibles que pueden darse de un experimento dado, es decir, cuando conocemos su espacio muestral.
>
> Fórmula de la probabilidad teórica.
>
> $$P(E) = \frac{número\ de\ resultados\ favorables}{número\ total\ de\ resultados}$$

Ilustración 1. Módulo de aprendizaje: Probabilidad y Estadística II (COBACH, 2016, p. 36)

Enseguida, se presentan ejemplos de aplicación y fórmulas para la probabilidad teórica y experimental.

Como resultado del análisis, se identifica la presencia de las características del *dME*:

- *Carácter hegemónico*: mayor importancia al estudio del enfoque clásico.
- *Carácter utilitario*: la probabilidad frecuencial se presenta como regla ante situaciones específicas, no se permite realizar inferencias, cuestionamientos o argumentaciones para su resignificación.
- *Concepción de que la matemática es un conocimiento acabado y continuo*: se obliga a la asunción de la validez de la probabilidad frecuencial.
- *Falta de marcos de referencia*: el enfoque frecuencial se establece bajo características limitadas, a pesar de ser posible estudiarlo de formas alternativas.
- *Atomización de conceptos*: se establece la probabilidad frecuencial desprovista de argumentaciones y enfoques a partir de las problemáticas de la sociedad.

Lo que pone en evidencia el *fenómeno de exclusión:* las argumentaciones, significados y procedimientos del *dME*, con relación a los enfoques probabilísticos se imponen, presentados como si siempre hubieran existido sin admitir la participación de los participantes en la *construcción social del conocimiento matemático*; en suma, no se consideran aspectos sociales y culturales en su construcción.

Análisis de instrumento de diálogo

Para su análisis, se transcriben y sintetizan las respuestas expresadas por los docentes para cada componente del instrumento. Para fines ilustrativos, seleccionamos los resultados obtenidos del diálogo con el docente B que presentamos a continuación. La Tabla 5, resume lo expuesto por el docente B con respecto al Componente 1 – Entrevista inicial.

Tabla 5. Respuestas Componente 1 – Entrevista inicial. Docente B.

Ideas acerca de la probabilidad	*Es importante porque se presenta en muchas situaciones de la vida real. Se debe brindar importancia al estudio de la probabilidad por su gran campo de aplicación y porque proporciona herramientas para entender diversas situaciones de interés actual.*
Objetivos de enseñanza	*Que sus estudiantes puedan analizar datos presentes en la vida real, como cuestiones climáticas, precios, ofertas y visualicen la aplicación de los conceptos probabilísticos fuera de la escuela.*
Distribución, materiales y herramientas didácticas	*La institución proporciona temarios y libros de texto revisados por el área de matemáticas del sistema educativo en cuestión.* *Se adecua el temario y actividades del libro de texto acorde al grupo. Basa gran parte de su labor en el libro de texto de COBACH.* *Uso principalmente de libro, calculadora y cuaderno. Uso de Excel.*
Dificultades de los estudiantes	*Ideas intuitivas muy limitadas acerca de la probabilidad, conocimientos base insuficientes, no logran ver el espacio muestral en su totalidad y falta de interés.*
Vinculación	*Buscar aplicaciones de la probabilidad para motivar su estudio y apoyar el aprendizaje (desarrollo de proyectos y planteamiento de problemas cercanos a la realidad)).*
Enfoque frecuencial	*Se asigna muy poco tiempo al estudio del significado frecuencial de la probabilidad.* *Se tiene que buscar estrategias para que los estudiantes visualicen los conceptos referentes a la probabilidad frecuencial porque el tiempo y las instalaciones no permiten la experimentación.* *Clases más enfocadas al estudio del significado clásico de la probabilidad.*

Fuente: Elaboración propia

En general, los docentes coinciden en la importancia del estudio de la probabilidad y señalan dificultades que enfrenta su enseñanza, concuerdan en que se deben estudiar estas nociones a partir de situaciones cercanas y de interés para los estudiantes. En la Tabla 6, mostramos los resultados expresados por el docente B a partir de la aplicación del Componente 2 – Cuestionario:

Tabla 6. Respuestas al Componente 2 – Cuestionario: Docente B.

ITEM 1
c) La próxima vez es igual de probable que salga CARA o CRUZ. Justificación: *Como se trata de una moneda equilibrada, ambos lados pesan lo mismo. Un lado no es más pesado que el otro, es decir, no está cargado. Es, de hecho, la respuesta que yo esperaría de mis estudiantes ante un problema similar.*
ITEM 2
Respuesta: b) La negra y la blanca son igualmente probables. Justificación: *Son solamente dos colores y, por tanto, es igual de probable que salga bola blanca o bola negra, suponiendo que haya la misma cantidad de bolas.*
ITEM 3
Respuesta: Actividad 1. *Al principio la dejé en blanco~~,~~ porque no sé cómo se hizo el lanzamiento de las chinchetas, si de una por una o se dejan caer todas sobre la mesa o al piso. No propuse una respuesta, pero sé que las respuestas van en proporción a que la suma de las que caen hacia arriba más las que caen hacia abajo sea 100; por tanto, los resultados de Daniel, Martín, Diana y María deberán sumar 100 cada uno.*

Daniel	**Martín**	**Diana**	**María**
Punta arriba: 30	Punta arriba: 70	Punta arriba:40	Punta arriba: 60
Punta abajo: 70	Punta abajo: 30	Punta abajo: 60	Punta abajo: 40

Actividad 2. *Todas las respuestas son correctas por el hecho de sumar 100, la que considero con menos probabilidad de ocurrencia es la respuesta 50-50 que da el cuarto niño; puede suceder, pero con probabilidad baja.*

Fuente: Elaboración propia

Respecto al ítem 1, los tres docentes lo resuelven sin mayor problema, con justificaciones semejantes a la expresada por el docente B (Tabla 6). Los resultados muestran la presencia del sesgo de equiprobabilidad en los tres docentes para los ítems 2 y 3; sin embargo, los docentes A y B, después de reflexionar acerca de las implicaciones de cada ítem, realizan estimaciones frecuenciales que les permiten modificar sus respuestas. Por último, mostramos la síntesis de respuestas obtenidas del docente B, del Componente 3 – Análisis didáctico:

Tabla 7. Respuestas docente B. Componente 3 – Análisis didáctico.

2. *Por cuestiones de tiempo, me limito a problemas clásicos. Mis estudiantes quizá pudiesen resolver este tipo de problemas, pero sin encontrarles sentido y sin realizar un análisis adecuado para llegar a la solución.* 3. *Fracciones, ordenamiento de datos en tablas, números enteros y fraccionales.* 4. *Es complicado hacer una diferenciación entre una moneda o dado equilibrado a uno truqueado; por ejemplo, si yo les muestro una moneda truqueada, ellos presentarán dificultades para concebir que tiene características diferentes a las monedas comunes. Por otra parte, en el ítem 2, es probable que mis estudiantes desvíen su atención hacia las características de las bolas (textura, tamaño, peso).* 5. *Para los ítems 1 y 3, los estudiantes pueden no concebir las características del objeto en cuestión y llegar a resultados erróneos por una mala interpretación. Para el ítem 2, no lograr estimar el contenido de la bolsa.*

Fuente: Elaboración propia

A partir de esto, identificamos las siguientes características del *dME:*

- *El carácter hegemónico*: los docentes resuelven problemas del enfoque clásico, mientras que en situaciones donde se requieren estimaciones frecuenciales manifiestan dificultades y se inclinan al uso de la regla de Laplace en cada problema.
- *La concepción de que la matemática es un conocimiento acabado y continuo*: los docentes buscan reducir la probabilidad a la aplicación de una regla, sin considerar características específicas de la situación aleatoria.
- *Falta de marcos de referencia para resignificar la matemática escolar:* a partir de los comentarios expresados por los docentes, que remarcan la importancia y necesidad de estudiar la probabilidad desde sus diversos enfoques.

Conclusiones

A partir del análisis de los planes de estudio y libros de texto, se destaca la presencia de los elementos *dME* para los enfoques de probabilidad; se privilegia el estudio de la probabilidad clásica y se evidencia el *fenómeno de exclusión* modelado por la teoría Socioepistemológica. Consideramos que los conocimientos y nociones matemáticas no son concebidos desde situaciones de aprendizaje, lo que nos conduce a declarar que no se motiva al estudiante hacia el aprendizaje de las nociones probabilísticas y no se le incluye en la *construcción del conocimiento matemático*.

Respecto a la implementación del instrumento, los comentarios expresados por los docentes durante la primera y segunda sesión surgen de forma natural; la idea de que la enseñanza de la probabilidad se inclina al estudio del

enfoque clásico. De igual forma, mediante el análisis didáctico de los ítems, se exhibe el hecho de que no se estudia la probabilidad frecuencial con la misma profundidad que la probabilidad clásica, prestando mayor atención a la última.
En lo siguiente, enlistamos los elementos del *dME* identificados para la enseñanza de la probabilidad frecuencial:

- *El carácter hegemónico*: Presente al favorecer el uso del enfoque clásico de probabilidad, sobreponiéndolo ante los restantes, privilegiando argumentaciones, significados y procedimientos provenientes de la probabilidad clásica.
- *El carácter utilitario del conocimiento*: El significado frecuencial de probabilidad es presentado como una regla estática, como un saber que permite hacer frente a ciertas problemáticas y con el fin de implementarse ante situaciones con las mismas características. No se permite a los actores del sistema educativo problematizar, inferir y trastocar el conocimiento. Por tanto, no es posible resignificarlo en contextos diferentes.
- *La concepción de que la Matemática es un conocimiento constituido y anterior a la praxis humana*: El enfoque frecuencial se estudia como una fórmula, como un saber matemático terminado y lineal, obligando a los actores del sistema educativo a su asunción como objeto matemático preexistente.
- *La falta de marcos de referencia que obliguen a resignificar la Matemática Escolar*: La forma de estudio del enfoque frecuencial~~,~~ surge de la matemática misma, mediante situaciones con características específicas, sin considerar otros campos de conocimiento.
- *La atomización de los objetos y procesos matemáticos*: Se estudia el enfoque frecuencial desprovisto de argumentaciones y significados que surjan de la acción humana, sin considerar las prácticas que permitieron su nacimiento ni los fundamentos institucionales que lo colocan dentro de los planes y programas de estudio.

Con base en estos elementos, consideramos que no solo es posible, sino necesario un planteamiento didáctico que articule el estudio de los enfoques probabilísticos de manera complementaria, diferenciado sus características y otorgando relevancia requerida a su estudio. De igual forma, es importante su estudio mediante situaciones aleatorias cercanas al estudiante y hagan emerger de manera natural los enfoques.

En concreto, el análisis didáctico realizado evidencia áreas de oportunidad para posibles rediseños de la Matemática Escolar para los significados de probabilidad y particularmente, para el estudio de la probabilidad frecuencial. Bajo este propósito, se pretende ampliar el proyecto~~,~~ al realizar un análisis de las dimensiones epistemológica, cognitiva y sociocultural que, sumada la dimensión didáctica, constituyen un saber matemático. El análisis pretendido posibilitaría el diseño de materiales que favorezcan la interacción individual y social de los individuos, permitiendo la *construcción social del conocimiento matemático.*

Referencias bibliográficas

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *8* (3), 247-264.

Batanero, C., Henry, M. y Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 15-37), Springer. doi.org/10.1007/0-387-24530-8_2

Bourdieu, J. y Passeron, J. (2005). *La reproducción: elementos para una teoría del sistema de enseñanza*. Ed. Traducción de Melendres J., Subirat M. Fontamara.

Cantoral, R., Reyes, D. & Montiel, G. (2014). Socioepistemología, Matemática y Realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *7*(3), 91-116.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Gedisa.

Cañizares, M. J. (1997). *Influencia del razonamiento proporcional y combinatorio y de creencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primarias*. [Tesis de doctorado, Universidad de Granada]. http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/CANIZARE.pdf

Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora, COBACH (2016). *Probabilidad y Estadística II, módulo de aprendizaje*. Hermosillo, Sonora: Departamento de Innovación y desarrollo de la práctica docente.

Durazo, A. (2018). *Probabilidad y Estadística I, módulo de aprendizaje*. Hermosillo, Sonora: Departamento de Innovación y desarrollo de la práctica docente.

Godino, J., Batanero, C. y Cañizares, M. J. (1987). *Azar y probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares*. Síntesis.

Gómez, E., Batanero, C., & Contreras, J. M. (2014). Conocimiento matemático de futuros profesores para la enseñanza de la probabilidad desde el enfoque frecuencial. *BOLEMA. Boletim de Educação Matemática*, *28*(48), 209-229.

Green, D. (1983). A Survey of probabilistic concepts in 3000 pupils aged 11-16 years. *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics*, *2,* 766 – 783.

Hacking, Ian (1975). *The Emergence of Probability: A Philosophical Study of Early Ideas about Probability, Induction and Statistical Inference*. Cambridge University Press.

Inzunza, S., (2017). Conexiones entre Probabilidad Teórica y Probabilidad Frecuencial en un Ambiente de Modelación Computacional. *Avances de investigación en educación matemática*, *11*, 69-86.

Kahneman, D., Slovic, P. y Tversky, A. (1982). *Judgment under uncertainty: heuristics and biases*. Cambridge University Press.

Lecoutre, M. P. y Durand, J. L. (1988). Judgements probabilistes et modèles cognitifs: étude d'une situation aleatoire. *Educational Studies in Mathematics, 19,* 357- 368.

Leyva, I. (2021). *Análisis didáctico referido a la probabilidad frecuencial.* [Tesis de Licenciatura, Universidad de Sonora].

Monterrubio, M. C. y Ortega, T. (2012). Creación y aplicación de un modelo de valoración de textos escolares matemáticos en Educación Secundaria. *Revista de Educación*, *358*, 471-496.

Sánchez, E. (2009). La probabilidad en el programa de estudio de matemáticas de la secundaria en México. *Educación matemática*, *21*(2), 39-77.

SEP. Secretaría de Educación Pública (2017a). *Aprendizaje Clave para la Educación Integral.* SEP. https://www.planyprogramasdestudio.sep.gob.mx/descargables/APRENDIZAJES_CLAVE_PARA_LA_EDUCACION_INTEGRAL.pdf.

SEP. Secretaría de Educación Pública (2017b). *Planes de estudio de referencia del marco curricular común de la Educación Media Superior*. http://sems.gob.mx/work/models/sems/Resource/12491/4/images/libro.pdf

Soto, D. y Cantoral, R. (2014). Discurso Matemático Escolar y la Exclusión. Una visión Socioepistemológica. *Bolema- Boletim de Educação matemática*, *28* (50), 1525 – 1544.

VOL 34, NÚMERO 2, AÑO 2021

EL PAPEL DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN LA FORMACIÓN DEL CONTADOR PÚBLICO

THE ROLE OF MATHEMATICAL EDUCATION IN THE PUBLIC ACCOUNTANT'S TRAINING

Liliana Suárez Téllez, Alma Yereli Soto Lazcano, María Reyna Navarro García
Instituto Politécnico Nacional (México) - DFIE, ESCA STO y CECyT 12 (México)
lsuarez@ipn.mx, aysotol@ipn.mx, mariareynang@gmail.com

Resumen
El propósito de la investigación es identificar la dimensión matemática en la formación de los profesionistas egresados de la carrera de Contador Público. La primera etapa de la investigación consistió en indagar cual es el grado de alfabetización financiera a partir del instrumento de la encuesta Banamex-UNAM (2008) El marco de referencia de la Cultura Financiera trabaja las categorías de Cultura y dinero, Planeación y Presupuesto, Hábitos de consumo y ahorro, Conocimiento y uso de los productos financieros y Cultura de la previsión. Se trata de una investigación de tipo transversal con una muestra no probabilística. Entre los principales resultados se observa un nivel de Cultura financiera mayor en algunas de las dimensiones, lo que nos permite concluir con recomendaciones, en el ámbito de la Cultura Financiera, en el ámbito de la educación Matemática, para los diseñadores curriculares de la carrera de Contador Público.

Palabras clave: Educación financiera, matemática educativa

Abstract
The purpose of the research is to identify the mathematical dimension in the training of professionals graduated from the Public Accountant degree. The research first stage consisted of investigating the degree of financial literacy from the instrument of the Banamex-UNAM survey (2008). The financial culture framework works the categories of culture and money, planning and budget, habits consumption and savings, knowledge and use of financial products and forecast culture. This is a cross-sectional investigation with a non-probabilistic sample. Among the main results, a higher level of financial culture is observed in some of the dimensions, which allows us to conclude with recommendations in the field of financial culture, and in the field of Mathematics education, for the curriculum designers of Public Accountant degree.

Key words: financial education, mathematics education

Introducción

La adquisición de una Cultura Financiera en los habitantes de un país es crucial para su desarrollo. Esta área de conocimiento se adquiere, como otros campos, por medio de conocimiento, práctica y reflexión. Las carreras universitarias deben ser el espacio para la formación integral, incluida la importante formación en Cultura Financiera. Datos del INEGI en México establecen que el nivel de Cultura Financiera en los jóvenes de México no es el suficiente para enfrentar los retos de desarrollo y emprendimiento que del país.

A partir de una investigación con el propósito describir cuál es el nivel de Cultura Financiera que tienen los estudiantes de los últimos niveles de formación de la carrera de Contador Público de la ESCA Santo Tomás del Instituto Politécnico Nacional, se plantea la problemática de ubicar la dimensión matemática que contribuye a la alfabetización financiera.

Dimensiones de la Cultura Financiera

La Cultura Financiera es un contenido relevante en la formación de estudiantes en bachillerato y universidad de acuerdo con algunos referentes educativos internacionales como la OCDE. Sin embargo, en nuestro país es incipiente el desarrollo de este campo. Aun así, existen esfuerzos por parte de diferentes instituciones públicas y privadas orientados a difundir conocimientos y desarrollar habilidades para que las personas tomen mejores decisiones financieras. A continuación, se exponen algunas definiciones de este ámbito tan importante en el mundo de hoy y de mañana.

Aunado a los campos que el Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos de la OCDE (PISA, por sus siglas en inglés) ha trabajado desde el año 2000, Matemáticas, Ciencias y Lectura, en 2012 se crea el marco para evaluar también la Competencia Financiera. Después de algunas adecuaciones se define de la siguiente manera:

La competencia financiera hace referencia al conocimiento y la comprensión de los conceptos y los riesgos financieros, y las destrezas, la motivación y la confianza para aplicar dicho conocimiento y comprensión con el fin de tomar decisiones eficaces en una amplia gama de contextos financieros, mejorar el bienestar financiero de los individuos y la sociedad, y permitir la participación en la vida económica. (OCDE, 2015, 11).

De acuerdo con la AMAFORE (2014) la Educación Financiera involucra:
[…] que las personas tengan conocimientos, habilidades y actitudes que les permitan tomar mejores decisiones. (p.2)

Para el proyecto BANAMEX-UNAM son importantes los conocimientos, habilidades, actitudes y competencias para la toma de decisiones financieras que contribuyan al bienestar de las personas y sus familias. (BANAMEX-UNAM, 2008)

Soto (2016), basada en la revisión de documentos de educación financiera señala que:
"La Cultura Financiera comprende el conocimiento sobre las finanzas, las creencias que se tengan al respecto, los usos y las costumbres en la forma de analizar y evaluar la información financiera en el contexto económico, para la toma de decisiones tendientes a lograr un bienestar individual y social." (s/p)

De este conjunto de definiciones similares, hemos optado por el de Cultura Financiera. Se puede advertir, que el concepto en sí, con sus múltiples maneras de mencionarlo, es reconocido por organismos internacionales como una competencia esencial para la vida y que ésta puede adquirirse en la escuela desde los niveles básicos, junto con el desarrollo de las competencias en matemáticas y en ciencias, entre otras.

Modelo encuesta Banamex-UNAM (2008)

De la revisión realizada, en esta investigación se toma la decisión de adoptar la Encuesta Banamex sobre la Cultura Financiera, que proporciona ítems para:

- Conocer las aspiraciones, percepciones, creencias y prácticas sobre el manejo de sus recursos y toma de decisiones.
- Indagar sobre el acceso y uso de productos y servicios financieros.
- Contar con información en relación con la generación, administración y optimización de sus recursos financieros.
- Identificar los intereses, necesidades, dificultades, oportunidades en materia de manejo de su dinero, así como las motivaciones y obstáculos para adoptar mejores prácticas financieras. (Banamex-UNAM, 2008, p.8)

- Los temas que se abordan son:
- Manejo del dinero, • Planeación, • Consumo, • Ahorro, • Crédito, • Inversión, • Previsión (ahorro para el retiro y seguros) y • Emprendimiento (Banamex-UNAM, 2008, p.8).

Observando la diversidad de temas y problemáticas que se pueden abordar en este ámbito se hace patente la complejidad de la Cultura Financiera.

Metodología/desarrollo de algunos ejemplos

La investigación planteada se aborda con un método de investigación deductivo porque se usa el Modelo de Encuesta Banamex-UNAM como un marco teórico general para describir la realidad sobre el nivel de Cultura Financiera de los estudiantes de los últimos niveles de la carrera de Contador Público de la ESCA Santo Tomás. Esta investigación se inscribe en un paradigma de investigación racionalista positivista. De acuerdo con Martínez, V.L. (2013) este tipo de paradigma tiene como propósito la búsqueda de "hechos o causas de los fenómenos sociales independientemente de los estados subjetivos de los individuos" (p. 2). El tipo de estudio es cuantitativo de tipo descriptivo. El diseño de la investigación es no experimental de tipo transversal. La información se obtuvo de los estudiantes de los últimos niveles de la carrera de Contador Público en una sola ocasión, sin ningún paso previo que alterará las respuestas que de ellos obtuvimos.

Población y muestra

La unidad de análisis es una muestra no probabilística de estudiantes de los últimos niveles de la carrera en Contaduría Pública.

De acuerdo con la Estadística Básica del IPN (2018), la ESCA Santo Tomás para el inicio del periodo 2018-2019/1, la carrera de Contador Público tuvo 172 estudiantes en el nivel IV y 171 en el nivel V. Como se muestra en el Cuadro 4, la muestra se compone por 100 estudiantes del nivel IV y 112 estudiantes del nivel V y 16 más que no especificaron nivel, 228 en total.

Para responder la pregunta de investigación: ¿Cuál es el nivel de Cultura Financiera en las competencias de los estudiantes en formación de Contador Público en la ESCA Santo Tomas del Instituto Politécnico Nacional? se selecciona la encuesta Banamex-UNAM (2008) la que ubica el sector de la población en México que se corresponde con los estudiantes de los últimos niveles de una carrera profesional, es decir, los jóvenes.

Variable dependiente: la Cultura Financiera
Variables independientes:

I. Cultura y dinero
II. Planeación y presupuesto
III. Hábitos para consumo y ahorro
IV. Conocimiento y uso de los productos financieros
V. Cultura de la previsión

Resultados

Para fines de este reporte sólo se describen los resultados para la primera categoría de variables independientes. El relacionado con la Cultura y el dinero

Para ti, ¿qué es el ahorro?
El tema de ¿Qué es el ahorro? Usamos una herramienta "palabra clave" que identifica la palabra más usada en las respuestas abiertas de esta pregunta.

En la encuesta de Banamex-UNAM, más de la mitad de los encuestados asoció el **ahorro** a las categorías de Guardar el dinero (38%) y Tener dinero para urgencias (27%). En el análisis de palabra clave con los estudiantes de los últimos semestres de Contaduría Pública de la ESCA Santo Tomás observamos en primer lugar la palabra "Dinero". La palabra "Guardar" es la palabra que se destaca en segundo lugar, coincidiendo con la encuesta de Banamex-UNAM, pero también observamos una destacada presencia de la palabra "Futuro" que la encuesta de Banamex-UNAM asocia al 12% de las respuestas (p. 10). De este análisis se resalta en cuarto lugar la palabra "parte" que se precisa que se ahorra (separa, guarda, acumula, reserva, junta) sólo una parte de los ingresos (ganancia, sueldo, dinero).

Figura 1. Análisis de palabra clave de las respuestas a ¿Qué es el ahorro?

[Elaboración propia]

Figura 2. Distribución de las respuestas a ¿Qué es el ahorro?

Fuente: Elaboración propia

En la distribución de las respuestas de los alumnos encuestados de la ESCA Santo Tomás observamos, como en el análisis de "palabra clave" anterior que el mayor porcentaje es la respuesta de que el ahorro se relaciona con "algo para el futuro" (29%), seguido de "tener dinero para urgencias" (24%).

En un análisis semántico de las respuestas abiertas a esta pregunta pudimos observar las siguientes cualidades:

La definición está compuesta por "el qué" y el "para qué". Se describe el ahorro principalmente como una acción (guardar, separar, reservar), pero también como una situación (tener, contar), como un concepto (cultura, visión, forma de, manera de) y como objeto (herramienta, porcentaje, dinero). Entre las finalidades las clasificamos entre que tienen una implicación negativa (sacrificar, emergencia), positiva (beneficio, inversión, asegurar el futuro, oportunidad, obtener lo que se desea) y neutra (para un uso futuro, utilizarlo en un largo plazo, eventualidad, dinero sobrante, futuros imprevistos). Se destaca el sentido de "planeación": cumplir un objetivo, comprar algo específico, para una causa específica, algo que deseamos.

De las definiciones obtenidas transcribimos a continuación algunas definiciones dadas por los participantes de la encuesta:

Cuadro 1. Definiciones del Ahorro.

QUÉ	DEFINICIÓN OBTENIDA DE LOS PARTICIPANTES	PARA QUÉ
Conocimiento	[Ahorro1] *Saber cuándo y cuánto dinero utilizar es importante y el porqué*	Conocimiento
Capacidad	[Ahorro2] *El ahorro es la capacidad de poder guardar dinero de los ingresos obtenidos a pesar de los gastos*	
Cultura	[Ahorro3] *Herramienta, cultura, visión y prevención de tener una reserva para cualquier evento no considerado en mi hacer económico*	Enfrentar una eventualidad económica
Objeto	[Ahorro4] *Es un monto de tus ingresos que separas para no usarlo y de este ganar intereses*	Inversión
Conocimiento	[Ahorro5] *Saber la volatilidad del dinero y como necesidad de invertirlo*	Conocimiento

Nota: Se puede observar que las definiciones incluyen un *qué* y un *para qué [Selección de respuestas de los encuestados]*.

Estas definiciones conciben al ahorro como algo que van más allá de una actividad o una situación incluyendo una conceptualización más elaborada relacionada con conocimiento, capacidad y cultura.

¿Qué se hace en el hogar para enseñar a los niños a ahorrar?

Figura 3. Análisis "palabra clave" de estrategias de ahorro inculcadas en niños

[Elaboración propia]

La mayoría de las respuestas estuvo encaminada a estrategias que ellos vivieron o que usan actualmente o usarían para enseñar a los niños a ahorrar. El uso de una alcancía fue la estrategia más socorrida pero también aparecieron otras, en el Cuadro 2 se presenta una selección de las respuestas de los encuestados. La definición de estás estrategias también se puede identificar *qué es*, es decir, qué tipo de objeto interviene en la estrategia es y el *para qué*, su propósito.

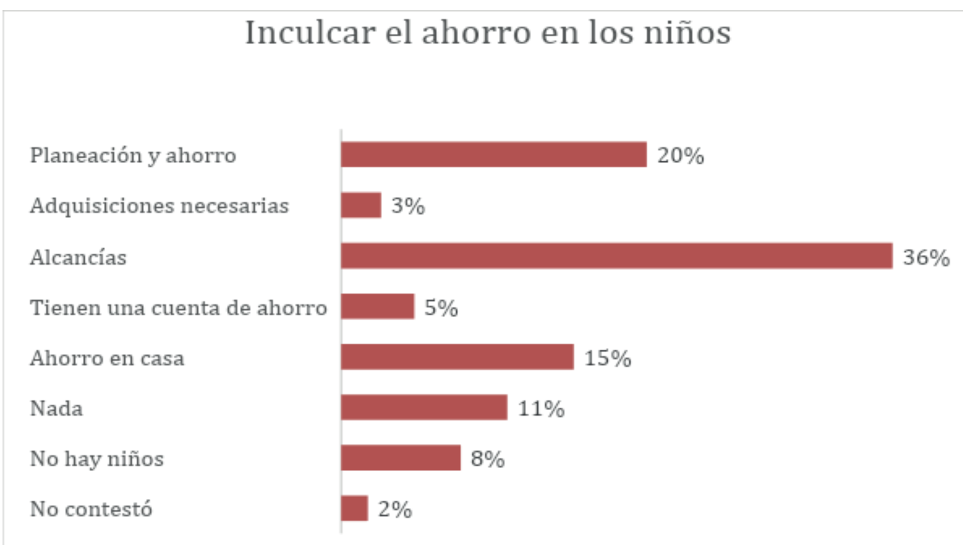
Cuadro 2. Estrategias para enseñar a los niños a ahorrar

Estrategias	Qué	Para qué
Al menos se dé el 20% de lo que se les da en casa por día para ahorrar	Dar una cantidad específica	Aprender a ahorrar
Cuando era pequeño mi mamá nos premia por … ayudar y ese dinero lo guardamos para ir de vacaciones a casa así	Guardar	para el logro de un fin
Disponer o guardar una cantidad del total que se perciba	Separar	Formar hábito
En la mía nada mi papá nos acostumbró a no gastar tanto	No gastar	Forma de vida
Enseñarles a acumular para compra algo que anhelan	Acumular	Comprar algo que se anhela
Guardar el dinero en un lugar inaccesible para el dueño del dinero	Guardar	Sea inaccesible

Nota: Se puede observar que las definiciones incluyen un *qué* y un *para qué [Selección de respuestas de los encuestados]*.

En la siguiente figura se observa que la estrategia más socorrida es el uso de la alcancía (36%), seguida de la planeación y el ahorro (20%) y el ahorro en casa (11%).

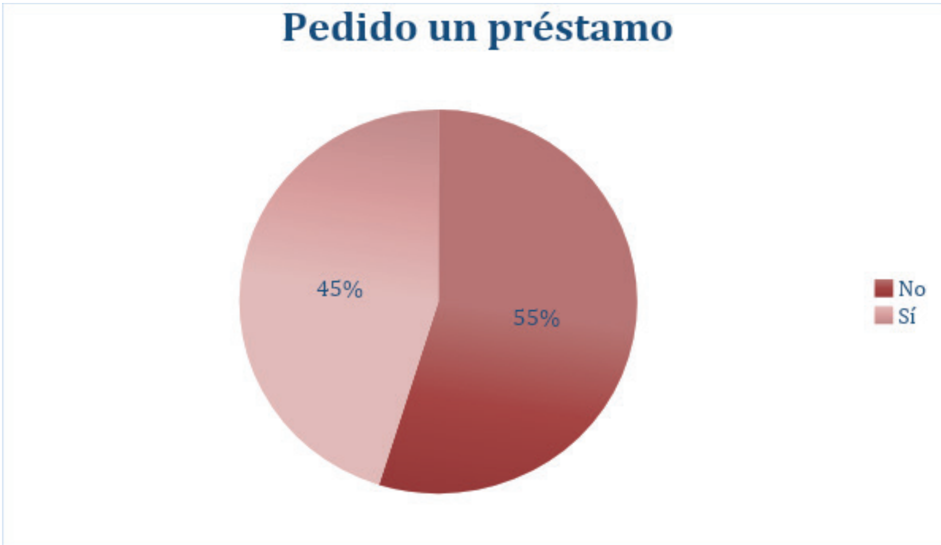
Figura 4. Acciones para inculcar el ahorro en los niños



[Elaboración propia]

¿Algún miembro de su hogar ha pedido prestado en los últimos 12 meses?, ¿a quién?, ¿a alguna institución? Aproximadamente la mitad declara que en su hogar se ha pedido prestado.

Figura 5. Distribución de personas que han pedido un préstamo.



[Elaboración propia]

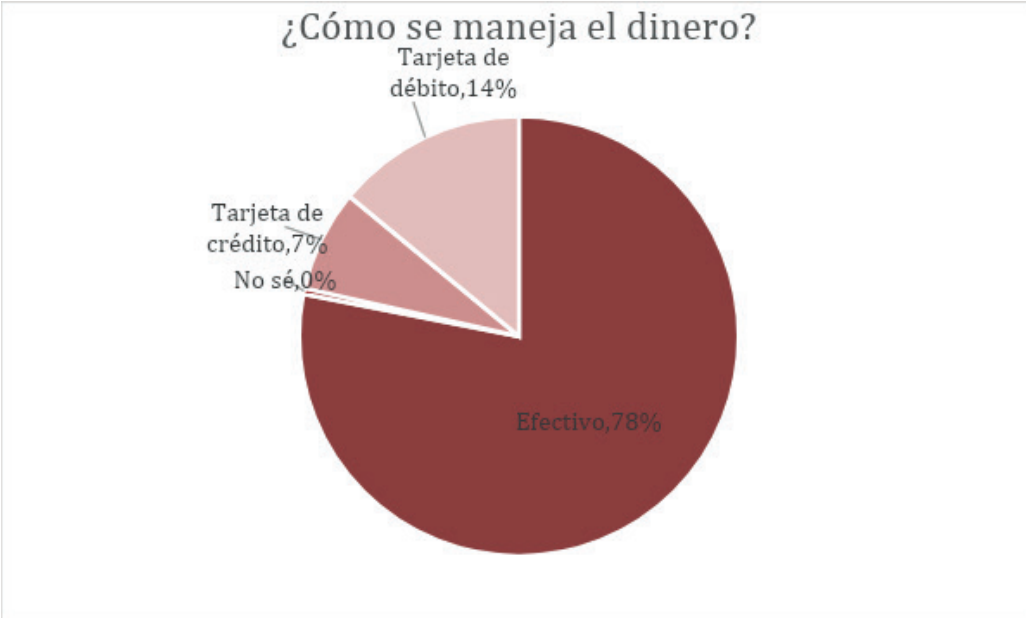
En la siguiente figura se observa que, entre los que han solicitado un préstamo, se divide entre los préstamos en las redes sociales con un 25% (amigos, pariente, cajas de ahorro o jefe en el trabajo) y un 26% por vías no sociales.

Figura 6. Distribución sobre A quién se recurre para un préstamo

[Elaboración propia]

En términos generales, ¿en tu hogar cómo prefieren manejar el dinero?
Casi el 80% de la muestra manifiesta que en su hogar se prefiere manejar el dinero en efectivo.

Figura 7. Distribución sobre Cómo se maneja el dinero en la familia



[Elaboración propia]

En la encuesta de Banamex-UNAM (2008) se reporta una tendencia que a mayor escolaridad aumenta la preferencia por el uso de las tarjetas de crédito, débito o cheques: 26% para nivel preparatoria y 34% para nivel universidad. El porcentaje entre los estudiantes encuestados en la ESCA Santo Tomás se encuentra en un 22%.

En términos de la categoría **Cultura y dinero** los estudiantes de la ESCA Santo Tomás coinciden con los resultados de la encuesta Banamex-UNAM (2008) en lo que se refiere a que el **ahorro** se asocia a guardar el dinero, como ya lo hemos explicado en el apartado V.1. En las respuestas de los estudiantes de la ESCA Santo Tomás hay una previsión hacia el futuro. También le asociamos una valoración positiva en las estrategias para enseñar a los niños a ahorrar por la diversidad de estrategias comentadas también en el apartado V.1.

Cuadro 3. Nivel de cultura financiera en la categoría de Cultura y dinero

Categoría	Pregunta	CP IPN 2019	Banamex-UNAM 2008	Nivel
I.Cultura y dinero	1	29% algo para el futuro/ 24% Tener dinero para urgencias/ 12% tener dinero disponible/ 9% Tener dinero en el banco	38% Guardar el dinero / 27%Tener dinero para urgencias/12% Algo para el futuro	+
	2	36% Alcancías/20% Planeación y ahorro / 15% Ahorro en casa / 11% nada	36% Nada, no ahorran 26% ahorro en casa 1% cuenta de ahorro	+
	3	55% sí ha pedido préstamo 15% Amigo o pariente 18% banco	44% sí ha pedido préstamo 13% amigo o pariente	

		15 % amigo o pariente 6% caja de ahorro	19% tienda vende a crédito 6% banco 2% caja de ahorro	
	4	78% Efectivo 14% TC, 8% TD	80% Efectivo 11% TC, 6% TD	

Nota. Elaboración con base a resultados propios y los de la encuesta Banamex-UNAM (2008).

Conclusiones

Con estos resultados podemos afirmar que los resultados de la encuesta aplicada indican, en general un buen nivel de Cultura Financiera de competencias de cultura financiera en los estudiantes en formación de Contador Público en la ESCA Santo Tomas del Instituto Politécnico Nacional, para las categorías, presenta tendencias de mejora de los estudiantes de la ESCA Santo Tomás con respecto a los datos de la encuesta de Cultura Financiera de Banamex (2008). Una posible explicación es debido a la formación integral que recibe un joven en la universidad, donde resalta la importancia del manejo de las matemáticas.

Con los resultados de esta investigación exploratoria, se puede diseñar una investigación correlacional entre los elementos de la formación en la carrera de Contador Público, por ejemplo, en el planteamiento de hipótesis del tipo: La formación técnica del Contador Público se relaciona con un nivel de Cultura Financiera en las dimensiones de Planeación y presupuesto y Conocimiento y uso de los Productos Financieros.

El análisis cuantitativo de las tres preguntas abiertas de la encuesta aplicada abre la puerta a incursionar en investigaciones cualitativas para caracterizar las conceptualizaciones que los jóvenes tienen sobre la Cultura Financiera y su relación con la Educación Matemática.

Referencias bibliográficas

Asociación Mexicana de Afores (2014). Ahorro y Futuro: ¿Cómo se preparan los mexicanos para su retiro? AMAFORE.

Instituto Nacional de Estadística y Geografía. – Comisión Nacional Bancaria y de Valores (2018). Encuesta Nacional de Inclusión Financiera. Presentación de resultados. Recuperado de: https://www.inegi.org.mx/contenidos/programas/enif/2018/doc/enif_2018_resultados.pdf

Martínez, V.L. (2013). Paradigmas de investigación. Manual Multimedia para el desarrollo de trabajos de investigación. Una visión desde la epistemología dialéctico crítica.

OECD (2016), PISA 2015 Assessment and Analytical Framework: Science, Reading, Mathematic and Financial Literacy, PISA, OECD Publishing, Paris. http://dx.doi.org/10.1787/9789264255425-en. [Traducción del Instituto Nacional de Evaluación Educativa, Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, España].

Soto, A. Y. (2016). Cultura Financiera en el desarrollo de empresas familiares. Contaduría Pública. Recuperado de: http://contaduriapublica.org.mx/2016/01/04/cultura-financiera-en-el-desarrollo-de-empresas-familiares/

Suárez, L. (2020). El papel de la Cultura Financiera en la formación del Contador Público. Tesis de Licenciatura de la ESCA Santo Tomás, México.

Universidad Nacional Autónoma de México y Educación Financiera BANAMEX. Primera Encuesta Sobre Cultura Financiera en México BANAMEX-UNAM, 2008. México, D.F. México. División de Educación Continua de Facultad de Psicología: www.banamex.com/demos/saber_cuenta/pdf/encuesta_corta_final.pdf

Acta Latinoamericana de Matemática Educativa
SECCIÓN 1 / ANÁLISIS DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR
VOL 34, NÚMERO 2, AÑO 2021

EL ROL DE LOS LENGUAJES INTERMEDIARIOS EN LA ENSEÑANZA DE LOS NÚMEROS ENTEROS

THE ROLE OF INTERMEDIARY LANGUAGES IN THE TEACHING OF WHOLE NUMBERS

Florencia Rivero, Verónica Molfino, Avenilde Romo-Vázquez
Dirección General de Educación Secundaria (Uruguay). Consejo de Formación Docente (Uruguay). Cinvestav (México)
florenciaprs@gmail.com, veromolifino@gmail.com, avenilderv@yahoo.com.mx

Resumen
Se presenta una investigación enfocada en el análisis del lenguaje empleado en la enseñanza del conjunto de los números enteros, enmarcada en elementos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico y en las categorías de lenguajes intermediarios propuestas en Roshaní y Romo (2020). Se analizan los tipos de lenguajes intermediarios que figuran en dos libros de texto, en una propuesta didáctica específica implementada en el aula y en las producciones orales de los estudiantes. Los resultados muestran que tres categorías de lenguajes intermediarios coexisten en diferentes momentos de la construcción y reconstrucción de las actividades matemáticas en el aula.

Palabras clave: Lenguajes intermediarios, Praxeología matemática, Praxeología didáctica, Tipos de tareas

Abstract
An investigation focused on the analysis of the language used in the teaching of whole numbers set is presented. It is based on elements of the Anthropological Theory of Didactics and in the categories of intermediary languages proposed in Roshaní and Romo (2020). The types of intermediary languages that appear in two textbooks are analyzed, in a specific didactic proposal implemented in the classroom and in the oral productions of the students. The results show that three categories of intermediate languages coexist at different times in the construction and reconstruction of mathematical activities in the classroom

Key words: intermediary languages, mathematical Praxeology, didactic Praxeology, types of tasks

Introducción

El lenguaje ha sido objeto de estudio por diversas investigaciones, pero existen pocos trabajos realizados considerando como objeto de estudio el lenguaje matemático en el contexto latinoamericano. Un ejemplo de ello lo constituye la investigación de Parra y Trinick (2018). Sin embargo, sí existe un desarrollo importante en países europeos, lo que se evidencia mediante las diferentes ediciones del grupo de trabajo Matemáticas y Lenguaje del CERME (Congreso Europeo de Investigación en Educación Matemática).

El rol del lenguaje es un elemento clave para comprender los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Según Alfaro (2009), el lenguaje matemático es un elemento básico para desarrollar el pensamiento matemático y Sfard (2012) sostiene que en el aula conviven diferentes discursos y formas de actuar y pensar.

El lenguaje juega un papel importante en la comunicación matemática y, desde el enfoque semiótico, es una herramienta de representación, comunicación, pensamiento y construcción del conocimiento (Schleppegrell, 2010).

La caracterización del lenguaje matemático no es única, hecho que complejiza su estudio. De hecho, uno de los resultados más reveladores del estudio de Roshaní y Romo (2020) es que en el aula de matemáticas conviven diferentes tipos de lenguajes matemáticos: cotidianos, intermediarios y formales. Además, las categorizaciones propuestas por Roshaní y Romo (2020) no se han considerado en otras perspectivas y se considera que pueden ser la base de una contribución al desarrollo de este tipo de trabajos, principalmente en Latinoamérica.

Tomando la caracterización realizada por Roshaní y Romo (2020) resulta necesario profundizar en el estudio de estos lenguajes intermediarios, poco o nada percibidos por docentes e investigadores, para determinar si permiten transiciones entre el lenguaje cotidiano y el matemático-formal, así como su rol en el desarrollo de la actividad matemática. En particular, ¿qué tipo de lenguaje utiliza el docente para construir una noción matemática en el aula?, ¿estos tipos de lenguajes están relacionados con el tipo de tarea didáctica, como presentar una definición, explicar una técnica matemática o validar un teorema?

Más aún, cuáles son los tipos de lenguaje privilegiados para introducir el estudio de un tema matemático, particularmente cuando se usan contextos cotidianos para darles sentido. Con el objetivo de contribuir al estudio de esta problemática de investigación se optó por analizar la enseñanza de los números enteros en el nivel secundario, debido a su rol fundamental en el estudio del álgebra y de otras áreas de la matemática.

Se presenta, en primer lugar, el marco conceptual conformado por la Teoría Antropológica de lo Didáctico y el enfoque teórico conformado por seis tipos de lenguajes intermediarios (Roshaní, 2019). A continuación, se describe brevemente la metodología utilizada; más adelante se ejemplifican las características del análisis realizado y se muestran algunos resultados obtenidos y, por último, se presentan conclusiones y perspectivas de esta investigación.

Marco conceptual

Esta investigación se enmarcó en elementos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) y en las categorías de los lenguajes intermediarios (Roshaní y Romo, 2020).

La TAD ofrece un modelo epistemológico para al análisis de la actividad humana en su dimensión institucional, es así que desde la TAD se entiende a las instituciones como organizaciones sociales que enmarcan las actividades humanas y las hacen posibles.

La TAD concibe a la actividad matemática, y en consecuencia la actividad del estudio de las matemáticas, inmersa en el conjunto de actividades humanas y de instituciones sociales, y es por eso que se habla de teoría “antropológica” (Bosch y Gascón, 2009). La praxeología es la unidad mínima de análisis de la actividad humana y se conforma de dos bloques: práctico y tecnológico-teórico. El bloque práctico corresponde al saber-hacer y se compone de dos elementos, los tipos de tareas –lo que se hace— y las correspondientes técnicas —maneras de realizar dichas tareas—.

El bloque tecnológico-teórico corresponde al saber, y se compone de la tecnología y de la teoría, entendiéndose por la primera el discurso que explica, produce y justifica las técnicas y por la segunda un discurso más general que explica, produce y justifica las tecnologías.

La TAD parte del principio que el saber matemático se construye y reconstruye como respuesta al estudio de cuestiones problemáticas, es el resultado de un proceso de estudio el cual esta influenciado por connotaciones sociales y culturales. Para conocer y reconocer cómo las praxeologías matemáticas u organizaciones matemáticas (OM) se construyen y reconstruyen se requiere de las praxeologías didácticas u organizaciones didácticas (OD).
Desde esta teoría, las praxeologías matemáticas y didácticas se co-determinan. Es decir, depende de la praxeología matemática considerada –en referencia a su dimensión epistemológica— la organización didáctica que pueda producirse y viceversa. Además, existen condiciones y restricciones específicas que se imponen ya sea desde adentro o afuera de cada institución docente, las cuales condicionan la OM de dicha institución. Sierra (2006) muestra un ejemplo:

[…] si en una institución docente determinada se restringe enormemente la posibilidad de llevar a cabo ciertas tareas matemáticas necesarias para que los sujetos de dicha institución rutinicen las técnicas matemáticas impidiendo así el consiguiente desarrollo de las mismas en manos de los estudiantes, entonces se está dificultando la posibilidad de organizar el proceso de estudio en base al trabajo autónomo de los estudiantes. (p. 39)
En este artículo el énfasis está en identificar y analizar las OD y las OM en la enseñanza de los números enteros, evidenciando los diferentes tipos de lenguaje matemático utilizados.

Roshaní y Romo (2020) plantean que existen seis categorías de lenguajes intermediarios entre el lenguaje natural y el lenguaje matemático formal, que han sido establecidas con base en la complejidad de los conceptos y de sus símbolos asociados, así como las tareas que permite realizar y del grado de abstracción requerido para las mismas.

-Lenguaje coloquial matemático: Los enunciados y proposiciones están expresados con términos del lenguaje coloquial, no hay presencia de variables, cuantificadores o conectores de manera explícita. Los signos o símbolos matemáticos que aparecen son los que se utilizan en la vida cotidiana de todos los individuos (números, signos de operaciones básicas, notación de unidades de medida, etc.). Los conceptos matemáticos son nombrados utilizando el nombre adecuado desde lo disciplinar (vértice, cuadrado, número par, múltiplo, etc.)

- Lenguaje intermediario básico: El lenguaje predominantemente es coloquial, pero se reconocen variables de manera explícita y presenta símbolos matemáticos que se usan en contextos escolares o matemáticos, como son: “$\in$”, “R”, “N”, “$<$”, “$\leq$”, “$\neq$”, “π”, “$\perp$”, “//”, “$\equiv$”, “$\subset$”, “R”, “C_O, r” etc. Este lenguaje se caracteriza por utilizar símbolos para designar objetos y otros para expresar hechos equivalentes a los verbos utilizados en la lengua coloquial.

- Lenguaje intermediario medio: Las proposiciones o enunciados están expresados en términos que se alejan del lenguaje coloquial, las variables están de forma explícita y se reconocen algunos conectores o cuantificadores de forma explícita, pero expresados en lenguaje coloquial, y otros están implícitos. A los símbolos utilizados en las categorías anteriores se incorporan términos que sólo pertenecen al ámbito matemático relacionados con conceptos de orden superior, como son: “ln”, “sen”, “lím”, “dx”, “Δ”, “Σ”, etc.

- Lenguaje intermediario avanzado: las proposiciones o enunciados están dados en términos más formales reconociendo variables, símbolos, cuantificadores y conectores de forma explícita utilizando lenguaje formal o coloquial.
- Lenguaje formal aplicado: las proposiciones y los enunciados se expresan en términos formales utilizando variables, símbolos, cuantificadores y conectores de forma explícita y con sus respectivos signos matemáticos. No hay presencia de palabras de la lengua vernácula.
- Lenguaje formal lógico: Presenta únicamente lenguaje formal con signos propios de la matemática y funciones proposicionales. (Roshaní y Romo, 2020, pp. 10-11)

Un ejemplo de lenguaje coloquial matemático podría ser “Si la temperatura era de 2ºC bajo cero y subió dos grados, ¿qué temperatura se tiene actualmente?”. Por otra parte, ejemplos de lenguaje intermedio básico, medio y avanzado son, respectivamente: “la suma de dos números opuestos es cero”, “Si dos números a y b cumplen que la suma es cero, entonces $b = -a$”, “Cualesquiera sean a y b reales tales que $a+b=0$, se cumple que a= - b”. Un ejemplo de lenguaje formal aplicado sería “$\forall a \in R$ y $\forall b \in R$ tal que $a+b=0$, entonces $b=-a$”. Un lenguaje formal lógico sería “$\forall a \in R$, $\forall b \in R$, $a+b=0 \Rightarrow b=-a$”.

Los diferentes tipos de lenguajes intermediarios suelen estar presentes en la clase de matemática, así como en los recursos utilizados por docentes y alumnos, libros de texto, artículos, videos, etc. Es así que en este artículo se presenta la forma en que estos lenguajes figuran en la enseñanza de los números enteros en el nivel secundaria, considerando el caso de una clase uruguaya. Asimismo, se evidencia el rol de estos lenguajes en la co-determinación entre lo matemático y lo didáctico.

Metodología

Con base en los elementos descritos en el marco conceptual, la metodología de trabajo que guió la investigación utilizó como insumos libros de textos, secuencias de enseñanza y episodios de clase. Se analizaron las organizaciones didácticas y los tipos de lenguajes intermediarios utilizados en la enseñanza de los números enteros en dos libros de texto, Borbonet, Burgos, Martínez y Ravaioli (2005) y Ochoviet y Vitabar (2013), llamados LT1 y LT2 respectivamente, elegidos por ser utilizados en la planificación docente de las secuencias de clase que fueron observadas y documentadas. El análisis de los libros se realizó siguiendo la propuesta de Bittar (2017). Asimismo, se analizaron cinco episodios de clase correspondientes a la enseñanza de los números enteros, dictados por una misma docente que es a la vez una de las investigadoras autoras de esta contribución. Se identificaron las organizaciones didácticas implementadas por la docente y las praxeologías matemáticas construidas por los estudiantes. En el análisis de la componente tecnológica de las praxeologías analizadas, se identificaron los tipos de lenguajes intermediarios. El análisis de las OD de los libros de texto y de la clase permitió evidenciar la similitud de los lenguajes intermediarios utilizados en la propuesta didáctica planificada e implementada y la forma en que el docente puede proponer transiciones entre diferentes tipos de lenguajes intermediarios a partir de tareas consideradas en la planificación o generadas en la gestión de la clase.

Análisis de algunos ejemplos

En la investigación que da lugar a este artículo (Rivero, 2020) se analizaron varias OD enfocadas en la enseñanza de los números enteros en los libros de texto, LT1 y LT2, distinguiendo la componente praxis y la componente logos, en la que se identificaron los lenguajes intermediarios. Con el fin de ejemplificar el análisis realizado se muestran a continuación algunos casos concretos del análisis.

Uno de los tipos de tarea de la OD identificada en ambos libros de textos (LT1 y LT2) es *presentar definiciones de nociones matemáticas*, denominada T_1, y cuya praxeología, que es similar en ambos libros, se muestra en la siguiente tabla.

Tabla 1. Descripción de componentes praxeológicas relativas a la tarea T_1 en LT1 y LT2

Tipo de tarea (T_1)	Presentar definiciones de nociones matemáticas	
Técnica	Presentar definiciones o diferentes discursos explicativos que permitan reconocer las características de nociones o conceptos vinculados al número entero.	
Tecnología	Darle un sentido de formalidad a la conceptualización realizada previamente a partir de situaciones extra-matemáticas. Situarse en el contexto matemático escolar y recurrir a un discurso más cercano al de la institución enseñanza de las matemáticas e incluso el de las matemáticas, considerando al conjunto de los números enteros como un conjunto de números con ciertas propiedades.	
	Tipo de lenguaje	➢ Intermediario básico ➢ Intermediario medio

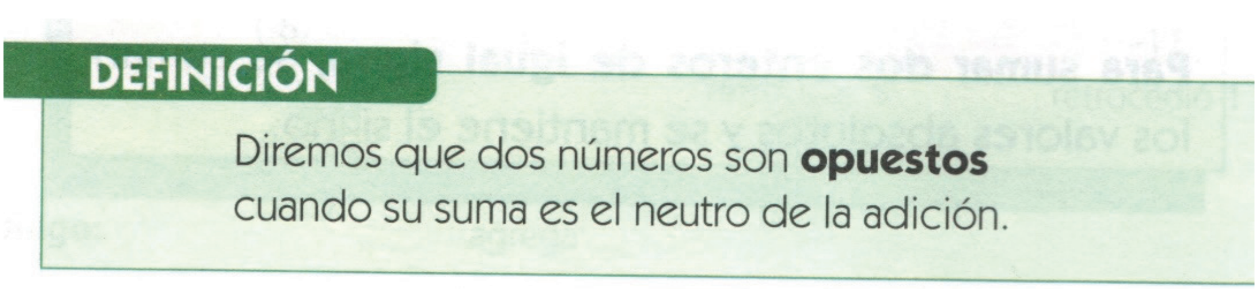
Fuente: Elaboración propia

Es decir, ambos libros presentan una organización didáctica similar. Para ilustrarlo, a continuación, se muestran algunos ejemplos de los libros de texto donde se evidencia el tipo de tarea T_1 y en cada uno de ellos se identifica el tipo de lenguaje que se emplea para enunciar la tarea. De manera general, se puede decir que en las tareas del tipo T_1 el lenguaje que predomina es intermediario básico, pero también aparece el intermediario medio, debido a que los términos empleados se alejan de un sentido coloquial (característica del lenguaje intermediario medio), pero a la vez se reconocen variables, conectores y cuantificadores, aunque los símbolos formales no aparecen explícitamente, sino que son expresados con palabras "para todo", "todo número" (característica del lenguaje intermediario básico).

Ejemplo 1: Definición de números opuestos en LT1

Los números opuestos se definen de la manera siguiente: "Diremos que dos números son **opuestos** cuando su suma es el neutro de la adición" (Borbonet et al., 2005, p. 70). No se utilizan símbolos ni signos, pero los términos nombrados son exclusivos del ámbito de la matemática, por ejemplo "neutro de la adición". Por lo que el lenguaje que se utiliza es intermediario medio, el cuantificador universal ∀ aparece de forma implícita, ya que existe una cuantificación universal: cualesquiera sean dos números cuya suma es el neutro de la adición, son opuestos.

Figura 1. Definición de números opuestos


DEFINICIÓN

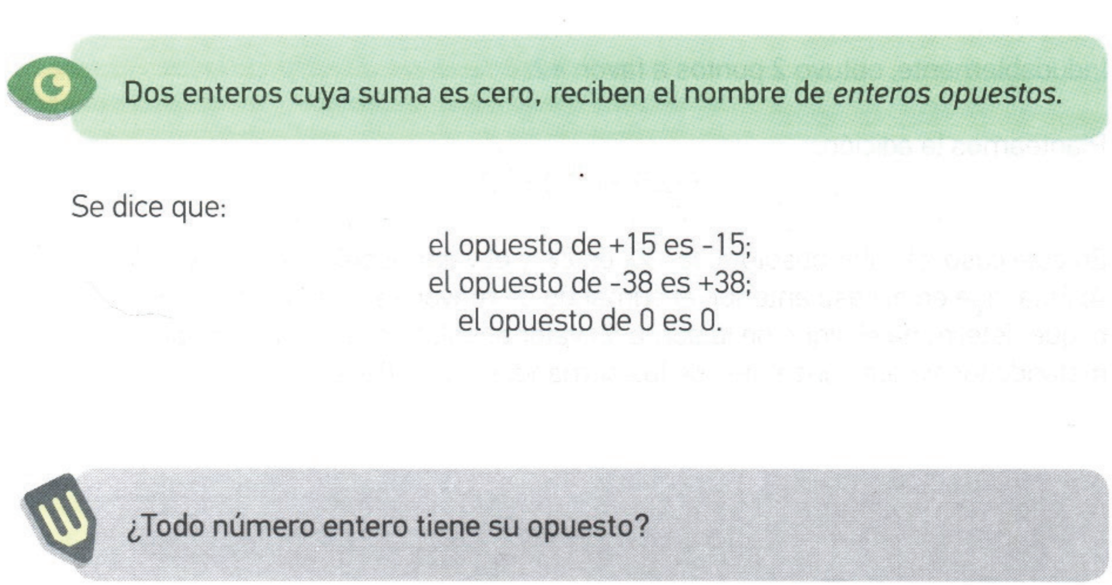
Diremos que dos números son **opuestos** cuando su suma es el neutro de la adición.

Fuente: Borbonet et al., 2005, p. 70.

Ejemplo 2: Definición de números opuestos en LT2

Una de las tareas de este tipo es la de presentar la definición de números opuestos: "Dos enteros cuya suma es cero, reciben el nombre de opuestos" (Ochoviet y Vitabar, 2013, p. 34). Se puede identificar que el lenguaje que subyace es el lenguaje intermediario básico o medio, debido a que los contenidos son exclusivos de la matemática (característica del lenguaje intermediario medio) y, además, se pueden identificar el cuantificador $\forall$ (para cada par de números enteros) y conectores $\Longrightarrow$ de forma implícita, (si dos números enteros suman cero, entonces son opuestos) característica del lenguaje intermediario básico. A diferencia del ejemplo anterior el hecho de decir "Dos enteros cuya suma es cero" y no el "neutro de la adición" induce a considerar que este ejemplo está expresado en el lenguaje intermediario básico.

Figura 2. Definición de números opuestos


Dos enteros cuya suma es cero, reciben el nombre de *enteros opuestos*.

Se dice que:

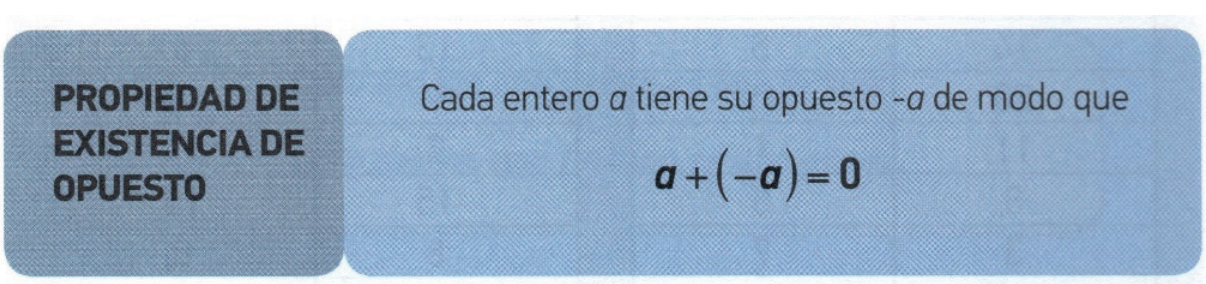
el opuesto de +15 es -15;
el opuesto de -38 es +38;
el opuesto de 0 es 0.

¿Todo número entero tiene su opuesto?

Fuente: Ochoviet y Vitabar, 2013, p. 34.

Seguida a la tarea de presentar la definición de números enteros opuestos, aparece la propiedad de existencia del opuesto: "cada entero a tiene su opuesto $-a$ de modo que $a + (-a) = 0$" (Ochoviet y Vitabar, 2013, p. 36). A diferencia de la tarea anterior, aquí sí se logra identificar claramente que el lenguaje empleado es intermediario medio, debido a que se introducen signos que representan números. También se identifica el cuantificador universal de forma implícita.

Figura 3. Propiedad de existencia y de opuesto


PROPIEDAD DE EXISTENCIA DE OPUESTO

Cada entero a tiene su opuesto $-a$ de modo que

$$a+(-a)=0$$

Fuente: Ochoviet y Vitabar, 2013, p. 36.

Otro de los tipos de tarea que se identificó en el análisis de los libros de texto fue el tipo de tarea denominado T_2: presentar actividades para deducir nociones matemáticas. En este caso, este tipo de tarea solo fue identificado en LT2. En la siguiente tabla se puede identificar la descripción de la praxeología.

Tabla 2. Descripción de componentes praxeológicas relativas a la tarea T_2 en LT2

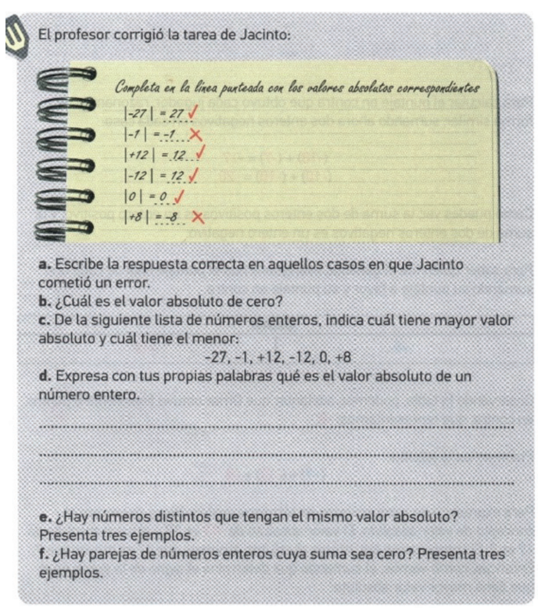
<table>
<tr><th>Tipo de tarea (T_2)</th><th colspan="2">Presentar actividades para deducir nociones matemáticas</th></tr>
<tr><td>Técnica</td><td colspan="2">1) Asociar diferentes situaciones extra-matemáticas o intra-matemáticas con propiedades de números enteros.
2) Presentar actividades o situaciones donde surja la necesidad de incorporar reglas, definiciones o diferentes discursos explicativos que permitan reconocer las características de nociones o conceptos vinculados al número entero.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Tecnología</td><td colspan="2">Dar un sentido de formalidad a la conceptualización realizada previamente a partir de situaciones extra e intra-matemáticas. Para ello, se reconoce el contexto matemático escolar y se recurre a un discurso más cercano al de la institución enseñanza de las matemáticas (matemática escolar) e incluso al de las matemáticas (disciplina), alejándose de contextos cotidianos.</td></tr>
<tr><td>Tipo de lenguaje</td><td>➢ Coloquial matemático
➢ Intermediario básico</td></tr>
</table>

Fuente: Elaboración propia

Se muestran a continuación algunos ejemplos de este tipo de tareas y se analiza el tipo de lenguaje que presenta.

Ejemplo 3: t_{2b} presentar actividades para establecer la definición de valor absoluto
En la tarea que se presenta a continuación se pretende que los estudiantes establezcan una definición del valor absoluto de un número entero y deduzcan propiedades de este concepto.

Figura 4. Tarea para definir el valor absoluto


El profesor corrigió la tarea de Jacinto:

Completa en la línea punteada con los valores absolutos correspondientes

$|-27| = 27$ ✓
$|-1| = -1$ ✗
$|+12| = 12$ ✓
$|-12| = 12$ ✓
$|0| = 0$ ✓
$|+8| = -8$ ✗

a. Escribe la respuesta correcta en aquellos casos en que Jacinto cometió un error.
b. ¿Cuál es el valor absoluto de cero?
c. De la siguiente lista de números enteros, indica cuál tiene mayor valor absoluto y cuál tiene el menor:
-27, -1, +12, -12, 0, +8
d. Expresa con tus propias palabras qué es el valor absoluto de un número entero.
....
....
....
e. ¿Hay números distintos que tengan el mismo valor absoluto? Presenta tres ejemplos.
f. ¿Hay parejas de números enteros cuya suma sea cero? Presenta tres ejemplos.

Fuente: Ochoviet y Vitabar, 2013, p. 34.

A continuación, se muestra lo identificado en relación a los análisis de episodios de clase. Durante el análisis de episodios de clase se identificaron cinco tipos de tareas: T_a: Conceptualizar la noción de número entero mediante situaciones extra-matemáticas; T_b: Introducir la adición en los números enteros mediante situaciones extra-matemáticas; T_c: Conceptualizar la noción de número opuesto; T_d: Conceptualizar el conjunto de los números enteros y T_e: Conceptualizar el valor absoluto de un número.

En este artículo se abordará solo $T_{c,}$ detallando tanto la OD como la OM.

La secuencia didáctica propuesta por la docente (a la vez investigadora) tenía por objetivo que los estudiantes lograran ver similitudes y diferencias entre los ejemplos de números opuestos presentados, para así generar la idea de que dos números son opuestos si su suma es cero. A su vez se pretendía que identificaran otras dos características: equidistar del cero y poseer el mismo valor absoluto. La OD de la docente está conformada por dos tipos de tareas T_{c1}: Conceptualizar la noción de números opuestos a partir del análisis de ejemplos y T_{c2}: Establecer una definición de números opuestos a partir de las afirmaciones elaboradas por los estudiantes, como se muestra a continuación.

Tabla 3. OD relativa a T_{c1}: conceptualizar la noción de números opuestos a partir del análisis de ejemplos

Tipo de tarea (T_{c1})	**Conceptualizar la noción de números opuestos a partir del análisis de ejemplos**
Técnica	1) Analizar ejemplos de números opuestos e identificar diferencias y similitudes. 2) Determinar una condición para que dos números sean opuestos. 3) Establecer que el opuesto de x es $-x$ y de $-x$ es x.
Tecnología	Generar una primera significación concreta sobre los números opuestos.

Fuente: Elaboración propia

Tabla 4. OD relativa a $T_{c2:}$ conceptualizar la noción de números opuestos a partir del análisis de ejemplos

Tarea (T_{c2})	**Establecer una definición de números opuestos a partir de las afirmaciones elaboradas por los estudiantes**
Técnica	1) Realizar un debate analizando las afirmaciones elaboradas por los estudiantes. 2) Identificar qué aspectos debe de tener una definición. 3) Establecer una definición de números opuestos empleando la condición deben de cumplir dos números para ser opuestos.
Tecnología	Generar una primera significación concreta sobre los números opuestos.

Fuente: Elaboración propia

La tarea del tipo T_{c1} se llevó a cabo en la clase mediante la siguiente propuesta a los estudiantes:

Sabiendo que: 3 y -3	*-12 y 12*	*-9 y 9*	*2 y -2*	
cada una de las parejas de números, son números opuestos. Escribe con tus palabras qué significa que un número es opuesto de otro				

En este caso se puede identificar que el tipo de lenguaje que aparece en la consigna es coloquial matemático y lenguaje intermediario básico, ya que se utilizan términos como “opuesto” de índole matemático, distanciándose del lenguaje coloquial puro. En la segunda parte de la consigna, pedir a los estudiantes que expresaran con sus palabras el significado de un número opuesto, se pretendía una transición del lenguaje coloquial matemático al intermediario básico, pues se trata de expresar una propiedad de los números enteros con el lenguaje coloquial, sin imponer el lenguaje intermediario básico. Es decir, el objetivo de esta tarea es que los estudiantes construyan un discurso tecnológico-teórico, a partir de analizar varios ejemplos, reconociendo los elementos invariantes y definiendo una propiedad de los números enteros, el discurso de la docente está marcado por el uso de un lenguaje intermediario medio. En el discurso tecnológico de la docente se reconoce la invitación a que los estudiantes utilicen variables para generalizar de forma explícita. A partir del registro de las ideas de los estudiantes, se diseña la consigna de T_{c2}.

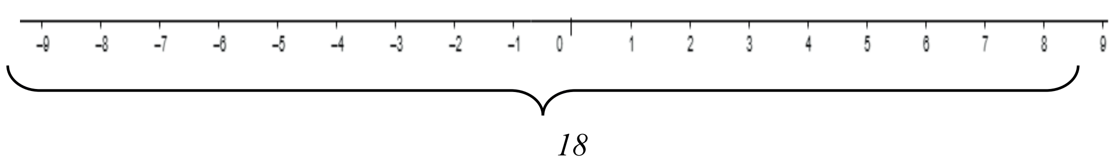
A continuación, se detallan algunas de las preguntas realizadas a los estudiantes para construir el discurso tecnológico-teórico:

"¿La idea que escribiste servirá para cualquier número natural?" (no se menciona al conjunto de los números enteros debido a que aún no se introdujo en clase). Se considera importante aclarar que esta tarea pretende que los estudiantes transiten por diversos tipos de lenguaje con el objetivo de que se llegue en cierta medida a un dominio del tema matemático, de conceptos y de propiedades, así como cierta capacidad de abstracción para expresar dichos conceptos y propiedades mediante signos y símbolos.

La consigna que se les presentó a los estudiantes en relación al tipo T_{c2} consistía en presentarles enunciados elaborados por ellos mismos y solicitarles que ellos eligieran el que mejor define a los números opuestos.

Figura 5. Lista de definiciones propuestas por los estudiantes

Si tuviéramos que elegir una de estas ideas como definición, ¿cuál elegirían? y ¿por qué?

1) *Son números contrarios pero el mismo número. -12 fuego y 12 agua*
2) *Los dos números son iguales, uno negativo y otro positivo.*
3) *Significado no es igual a otro o siquiera parecido. Un positivo no se enfrenta a un negativo.*
4) *Si le restas el mismo número da 0. Si a 10 le restas 10 da cero. 10-10 = 0*
5) *A cualquier número le restas el doble me daría el mismo número negativo a-(a+a) =-a donde a+a es el doble de a.*
6) *Agrega al 2 que uno es mayor que cero y el otro es menor que cero.*
7) *Son contrarios, si a -12 +12 =0 y no 12, b no es lo mismo que –b*
8) 

Fuente: Elaboración propia

Los enunciados presentados en estas tareas se basan en ideas que los estudiantes expresaron como respuesta a la tarea T_{c1}. Se puede identificar que sus definiciones están expresadas en lenguaje coloquial matemático o en intermediario básico, mientras que realizar la la tarea T_{3a} requería un lenguaje intermediario medio. Además, en el discurso tecnológico de la docente se insta a que los estudiantes utilicen variables "*a*" y "*-a*" para generalizar de forma explícita y al uso de cuantificadores expresados en lenguaje coloquial o en un lenguaje intermediario básico. Algunas de las preguntas que se realizaron a los grupos con base en esta tarea y con el objetivo de reflexionar sobre la forma de expresar la definición de los números opuestos: "¿Puedo dar una definición usando en ella el mismo concepto que quiero definir?" otra de las preguntas que se realizó fue "¿todos los números naturales tienen opuesto?" comenzado así a discutir lo que sucede con el 0. Otras preguntas fueron "¿Quién es *b*? y ¿–*b*?".

Nuevamente, se pretende que, en la construcción del discurso tecnológico teórico, los estudiantes transiten por diferentes tipos de lenguaje.

A continuación se realiza un análisis breve de la organización matemática de los estudiantes relativa a tareas de los tipos: T_{c1} y T_{c2}

La técnica y tecnología de algunas de las respuestas que fueron dadas por los estudiantes en la puesta en común de la tarea implementada del tipo T_{c1} que se presentó anteriormente. Cuando un alumno responde que "Son números contrarios pero el mismo número. -12 fuego y 12 agua" se puede observar que su técnica fue la de comparar esas parejas de números, identificando fuerzas de igual magnitud, pero antagónicas. Existe una búsqueda de analogías en contextos extra-matemáticos y, en este caso, el fuego y el agua son elementos ostensivos. La tecnología parece ser la de considerar un sinónimo coloquial de la palabra "opuesto", que es "contrario".

Cuando un estudiante selecciona alguna de estas respuestas: "Los dos números son iguales, uno negativo y otro positivo" o "los dos números son iguales, representan lo mismo, pero uno es negativo y el otro es positivo", se podría decir que hay una técnica de comparación de las parejas de números, buscando similitudes y diferencias entre los ejemplos propuestos, la tecnología asociada podría ser la de considerar que "número" y "valor absoluto de un número" son equivalentes.

La respuesta "A cualquier número le restas el doble me daría el mismo número negativo a-(a+a) = -a donde a+a es el doble de a.", está asociada a la técnica de determinar una regla para obtener los números opuestos, apoyada en la tecnología de considerar la existencia de una propiedad general de los elementos del conjunto de los números enteros: cada elemento tiene un elemento opuesto o simétrico.

En la construcción de estas técnicas y tecnologías asociadas al tipo de tareas T_c el tipo de lenguaje que subyace no es único. En algunos casos, se emplea el lenguaje coloquial matemático, específicamente cuando se utilizan términos del lenguaje coloquial puro, pero también hay casos donde el lenguaje que subyace es un lenguaje intermediario básico, ya que se usan términos como "natural" o "negativo" que son de índole matemático, que se alejan del lenguaje coloquial puro. Además, se evidenciaron casos donde el lenguaje del discurso tecnológico es un lenguaje intermediario medio, debido a que los términos empleados se alejan del lenguaje coloquial. Lo que implica el uso de los signos, además de relatores y funtores como, por ejemplo: "=". También se utilizaron variables de forma explícita, para generalizar, y se reconocieron algunos cuantificadores expresados en lenguaje coloquial o bien expresados de forma implícita, por ejemplo –b y b o a-(a+a) = -a, que implícitamente expresan "para todo número entero positivo b...", "para todo número entero a…"

En suma, se podría decir que el tipo de lenguaje que subyace en la construcción de la técnica en este tipo de tareas es variado y que oscila entre un lenguaje coloquial matemático hasta un lenguaje intermediario medio. De igual forma, durante la elaboración del discurso tecnológico para el tipo de tarea T_c se evidencia cómo los estudiantes transitan entre los diferentes tipos de lenguaje.

Es importante destacar que la propuesta didáctica posibilitó el tránsito por los otros tipos de lenguaje coloquial puro, coloquial matemático y el intermediario básico, permitiendo a su vez, que los estudiantes adquirieran un dominio del conocimiento de conceptos y de propiedades, así como de cierta capacidad de abstracción para poder expresar dichos conceptos y propiedades a través de signos y símbolos. Lo que se evidencia a partir de la construcción del concepto que ellos mismos fueron construyendo en clase respecto a cómo definir números opuestos.

Conclusiones

Los resultados encontrados en la investigación a partir del análisis de dos libros de textos y de diferentes episodios de clases, mostró seis grandes tareas didácticas en la enseñanza de los números enteros y la forma en que estas tareas, desde las propuestas en contextos cotidianos hasta las más matemáticas, promueven el uso de tres lenguajes intermediarios, coloquial matemático, intermediario básico, intermediario medio. El lenguaje coloquial aparece en la introducción del tema del conjunto de los números enteros, que antecede a las tareas presentadas aquí, y en las que se utilizan contextos cotidianos: funcionamiento de un ascensor, alturas sobre y bajo el nivel del mar, temperaturas sobre y bajo cero. Estas situaciones en las que predomina el lenguaje coloquial, permiten la introducción de ostensivos matemáticos, -2, -1 para etiquetar los pisos subterráneos y las temperaturas bajo cero, el 0 para la planta baja y para el punto neutral del termómetro. La evolución en el tratamiento didáctico de estos ostensivos obliga a transitar del lenguaje coloquial matemático a los lenguajes intermediarios básico e intermedio. Más precisamente, solicitar a los estudiantes definir los números opuestos a partir del análisis de varios ejemplos, posibilita la el uso de varios tipos de lenguaje, coloquial matemático, "son números contrarios […] 12 agua y -12 fuego", del intermediario básico "*A cualquier número le restas el doble me daría el mismo número negativo a-(a+a) =-a donde a+a es el doble de a.*" Analizar las diferentes "definiciones" propuestas por los estudiantes, permite a la docente promover una transición colectiva a los lenguajes intermediarios básico e intermediario medio. En esta evolución los tipos de tareas resultan clave, ya que de ello dependerán el tipo de técnicas necesarias para su resolución, distintos niveles de abstracción y, por tanto, diferentes tipos de lenguajes matemáticos intermediarios para comunicarlas.

También se evidenció que la función de los lenguajes intermediarios es posibilitar la conceptualización de los números enteros, mediante diferentes tareas didácticas presentadas gradualmente: analizar ejemplos, producir primeras definiciones individuales, análisis colectivo de las definiciones, consenso sobre "la definición más adecuada". La gestión de la docente de estas tareas resulta fundamental en esta conceptualización, ya que motiva transiciones entre diferentes tipos de lenguajes intermediarios. En este sentido, esta investigación muestra una ruta teórica-metodológica para generar propuestas didácticas, manteniendo como referente los libros de texto, pero poniendo una atención especial en la construcción del lenguaje matemático, a partir de generar transiciones entre diferentes tipos de lenguajes intermediarios.

Referencias bibliográficas

Alfaro, H. (2019). Taking advantage of the different types of mathematical languages to promote students' meaningful learning. *11th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 11)*, Utrech, Holanda. https://cerme11.org/

Bittar, M. (2017). A Teoria Antropológica do Didático como ferramenta metodológica para análise de livros didáticos. *Zetetiké, 25*(3), 364-387.

Borbonet, M., Burgos, B., Martínez, A. y Ravaioli, N. (2005). *Matemática 1*. Montevideo Uruguay: Fin de Siglo.

Bosch, M. y Gascón, J. (2009). Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico a la formación del profesorado de matemáticas de secundaria. En González, M., González, M. y J. Murillo. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. XIII Simposio de la SEIEM,* (pp. 89-113). SEIEM.

Ochoviet, C. y Vitabar, F. (2013). *Matemática 1*. Montevideo Uruguay: Losa Ediciones.

Parra, A. & Trinick, T. (2018). Multilingualism in indigenous mathematics education: an epistemic matter. *Mathematics Education Research Journal 30*, 233–253. https://doi.org/10.1007/s13394-017-0231-5

Rivero, F. (2020). *Análisis de prácticas lingüísticas en torno a la enseñanza de los números enteros. Un estudio exploratorio.* [Tesis de maestría, CICATA, IPN]. Repositorio Institucional. https://www.cicata.ipn.mx/assets/files/cicata/ProME/docs/tesis/tesis_maestria/2020/rivero_2020.pdf

Roshaní, C. (2019). *Análisis de prácticas lingüísticas asociadas a la actividad matemática en la formación de futuros profesores.* [Tesis de maestría, CICATA, IPN]. Repositorio Institucional. https://www.cicata.ipn.mx/assets/files/cicata/ProME/docs/tesis/tesis_maestria/2019/roshani_2019.pdf

Roshaní, C. y Romo-Vázquez, A. (2020). Lenguajes intermediarios y su rol en la enseñanza de las matemáticas. Una experiencia de formación docente. *Fuentes de Aprendizaje e Innovación, 1*(1), 4-25.

Schleppegrell, M. J. (2010). Language in mathematics teaching and learning: A research review. In J. N. Moschkovich (Ed.), *Language and mathematics education: Multiple perspectives and directions for research* (pp. 73-112). Information Age Publishing.

Sfard, A. (2012). Introduction: Developing mathematical discourse—Some insights from communicational research. *International Journal of Educational Research*, *51-52*, 1-9.

Sierra, T. (2006). *Lo matemático en el diseño y análisis de organizaciones didácticas: los sistemas de numeración y la medida de magnitudes*. [Tesis de doctorado, Universidad Complutense]. Repositorio Institucional. http://eprints.ucm.es/tesis/edu/ucm-t29075.pdf

FORTALECIMIENTO DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO MEDIANTE LA SOLUCIÓN DEL CUBO DE RUBIK

STRENGTHENING MATHEMATICAL THINKING THROUGH THE RUBIK'S CUBE SOLUTION

Erling Obeniel López Velásquez, Reyli Manuel Rivera Castro, Grebis Vásquez Castro, Norman Randolfo Chinchilla Chacón
Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán. (Honduras)
erling009@gmail.com, reylirivera08@gmail.com, grevis2015@hotmail.com, nodolch@hotmail.com

Resumen
Este trabajo aborda el desarrollo del pensamiento matemático mediante la solución del cubo de Rubik, como objetivo nos planteamos en conocer ¿Cuál es el pensamiento matemático más estimulado al resolver el cubo de Rubik? utilizando el algoritmo para principiantes, apoyados en la Teoría de Inteligencias Múltiples. El enfoque de la investigación es cualitativo con un diseño Investigación-Acción Participativa. En cada intervención se enseñó a los participantes a armar el cubo de Rubik. Como resultado los participantes mostraron mejor dominio del pensamiento espacial o geométrico, manifestando mejores ideas para resolver ejercicios como transposición de figuras, optimización de recorridos y cortes en el plano.

Palabras clave: cubo de rubik, pensamiento matemático, pensamiento espacial

Abstract
This work tackles the development of mathematical thinking through the solution of the Rubik's cube. As objective we ask ourselves: what is the most stimulated mathematical thinking when solving the Rubik's cube? by using the algorithm for beginners, supported by the Theory of Multiple Intelligences. The research approach is qualitative in nature, with a Participatory Action Research design. In each intervention, the participants were taught to assemble the Rubik's cube. As a result, the participants showed a better command of spatial or geometric thinking, showing better ideas to solve exercises such as transposition of figures, optimization of routes and cuts in the plane.

Key words: Rubik's cube, mathematical thinking, spatial thinking

Introducción

El cubo de Rubik representa un desafío emocionante para las personas que intentan resolverlo, se han creado distintos métodos basados en algoritmos matemáticos para dar solución. Estudios demuestran que "su práctica favorece el desarrollo de los procesos psicológicos superiores: entre ellos, la memoria, a nivel visual y asociativo […] inteligencia.

lógico-matemática, como las habilidades de razonamiento y de algoritmos" (Rojas, 2017, párr. 6). Durante el aprendizaje de todos los algoritmos que componen su resolución se trabajan mucho las inteligencias múltiples "inteligencias como la memoria, razonamiento, optimización de algoritmos y por supuesto la inteligencia espacial" (Morales, 2017, párr. 7). Ante los beneficios que esconde este juego la investigación se enfoca conocer ¿Cuál es el pensamiento matemático que más se estimula en la resolución del cubo de Rubik? a partir de la enseñanza del algoritmo para principiantes para resolver el cubo de Rubik. El campo de la investigación es el pensamiento geométrico.

Marco Teórico

La teoría de Inteligencias Múltiples propone ocho tipos de inteligencias, estas inteligencias son inteligencia lingüística, inteligencia lógico-matemática, inteligencia espacial, inteligencia musical, inteligencia corporal y cinética, inteligencia intrapersonal, inteligencia interpersonal y la inteligencia naturalista. Esta teoría fue planteada por Howard Gardner en contracción al paradigma de la inteligencia única. A continuación, se muestra las características de cada una de estas inteligencias.

Tabla 1. Inteligencias múltiples según Howard Gardner

Tipo de Inteligencia	Características
Inteligencia Lingüística	Capacidad de dominar el lenguaje y comunicarse
Inteligencia Lógico Matemática	Capacidad para el razonamiento lógico y resolución de problemas matemáticos
Inteligencia Espacial	Capacidad para observar los objetos desde diferentes perspectivas
Inteligencia Musical	Ejecutar funciones vinculadas con la interpretación y composición de musical
Inteligencia Corporal Cinética	Habilidades corporales y motrices
Inteligencia Intrapersonal	Comprender y controlar el ámbito interno de uno mismo en lo que se refiere a la regulación de las emociones
Inteligencia Interpersonal	Facultad para poder advertir cosas de las otras personas más allá de lo que nuestros sentidos logran captar
Inteligencia Naturalista	Capacidad para detectar, diferenciar y categorizar los aspectos vinculados al entorno

Fuente: adaptado de Regader (2015, párr. 5-12)

La práctica del cubo de Rubik está asociada al desarrollo de las inteligencias múltiples, ya que al momento de resolverlo se necesita de la observación, análisis, memorización de patrones, identificación de piezas, en general este proceso involucra todos los sentidos, debido a ello se estimula las inteligencias múltiples como lo dice García Morales (2017, párr. 3) señala "el cubo proporciona al alumno en edades tempranas desarrollo intelectual y psicomotriz, entre las que destaca una mejora de la inteligencia espacial, visualización y resolución de problemas, toma de decisiones, creación y ejecución de estrategias". Debido a sus beneficios el cubo de Rubik ha llegado a la clase de matemáticas, este juguete puede representar un recurso útil en la clase de matemáticas, ante lo anterior Marta Moreno, (2018, párr. 3) expone "el Cubo de Rubik mejora la memoria y la retención, ayuda a los niños a adquirir conceptos de habilidad matemática (gracias al Cubo aprecian tamaños, direcciones y relaciones espaciales) y con él aprenden a reconocer elementos en el espacio". Un aspecto llamativo del cubo es que su solución está relacionada con las Matemáticas.

El cubo de Rubik es totalmente compatible en la asignatura de matemáticas, donde podemos emplearlo para sumas, restas, multiplicaciones y divisiones haciendo uso de las diferentes pegatinas de los seis colores que componen el cubo, incluso puede ser usado en el estudio de las diferentes formas geométricas, pues son muchas las variantes que existen del Cubo de Rubik (cubos, esferas, dodecaedros, tetraedros, octaedros, icosaedros...). (Morales, 2017, párr. 5).

En Chile catalogan el cubo de Rubik como un método de aprendizaje que ayuda a la lógica matemática ya que "su práctica favorece el desarrollo de los procesos psicológicos superiores: entre ellos, la memoria, a nivel visual y asociativo […] inteligencia lógico-matemática, como las habilidades de razonamiento y de algoritmos" (Rojas, 2017, párr. 5).

Dentro de la clase de matemáticas se trabaja el pensamiento matemático, este es un nuevo concepto relacionado con el pensamiento, algunos investigadores han definido este tipo de pensamiento, para Cantoral, Cordero, Farfán, Alanís, Rodríguez y Garza (2005) señalan que "el pensamiento matemático hace referencia a las formas en que piensan las personas que se dedican profesionalmente a las matemáticas" (p. 18). Aunque la definición pueda cambiar según su autor, en su esencia sigue la misma idea, esa capacidad de poder trasferir las ideas al mundo de las matemáticas. Según Cantoral et al. (2005) los investigadores sobre el pensamiento matemático se ocupan de entender cómo interpreta la gente un contenido específico, en este caso las matemáticas, se interesan por caracterizar o modelar los procesos de comprensión de los conceptos y procesos propiamente matemáticos, concluyen que el pensamiento matemático incluye, por un lado, pensamiento sobre tópicos matemáticos, y por otro, procesos avanzados del pensamiento como abstracción, justificación, visualización.

Dentro del pensamiento matemático existen divisiones más específicas, tal es el caso del pensamiento numérico, espacial o geométrico, métrico, probabilístico y variacional. A continuación, se presentan algunas definiciones de autores destacados Alsina (2006) define el pensamiento numérico como "la capacidad de aplicar buenos razonamientos cuantitativos y poder emitir juicios sobre informaciones y/o resultados numéricos" (citado en Bosch 2012, p. 21). El Ministerio Nacional de Educación de Colombia (MEN de aquí en delante) (2008) define el pensamiento espacial como "el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones o representaciones materiales" (citado en Fonseca, 2016, p. 53). También este mismo autor define el pensamiento métrico como "la comprensión general que tiene una persona sobre las magnitudes y las cantidades, su medición y el uso flexible de los sistemas métricos o de medidas en diferentes situaciones" (MEN, 2006 citado en Fonseca, 2016, p. 54). Para Palacios (2005) en su libro El Crucigrama define el pensamiento probabilístico de la siguiente manera.

El probabilístico es un tipo de pensamiento que se caracteriza, fundamentalmente, por su carga de inferencia. Es decir, por su carácter predictivo: prevemos lo que podría pasar, basándonos en lo que sabemos que ha pasado. Es un tipo de pensamiento que utilizamos de forma habitual (aunque no siempre somos conscientes de ello) en la mayoría de decisiones que tomamos o de acciones que emprendemos, tanto en el plano personal como en el profesional. (p. 183)

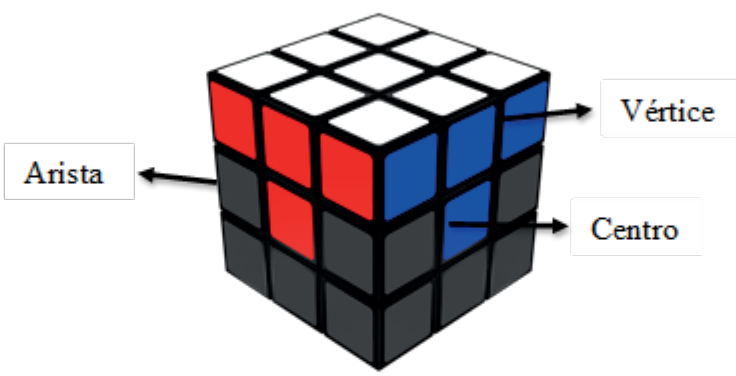
El MEN (2006) al respecto del pensamiento variacional en los estándares educativos nacionales de Colombia plantea lo siguiente.

[…] este tipo de pensamiento tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos (p. 66).

Como señalan diferentes autores dentro del pensamiento matemático existen diferentes tipos de pensamiento, cada uno con un objeto de estudio marcado y definido. En este trabajo se excluyó el pensamiento probabilístico debido a la naturaleza del algoritmo a utilizar al momento de solucionar el cubo de Rubik.

El cubo de Rubik fue inventado en 1974 por Erno Rubik profesor de arquitectura de la Universidad de Budapest, en Hungría. Su forma es un bloque cúbico con su superficie subdividida de modo que cada cara consiste en nueve cuadrados, en su estado original cada cara del cubo es de un color, pero la rotación de cada una de estas permite que los cubos más pequeños sean combinados de muchas maneras. (Romero, 2013). El cubo está compuesto tres tipos de piezas: 8 Vértices, 12 Aristas y 6 centros.

Figura 1. Piezas del Cubo de Rubik

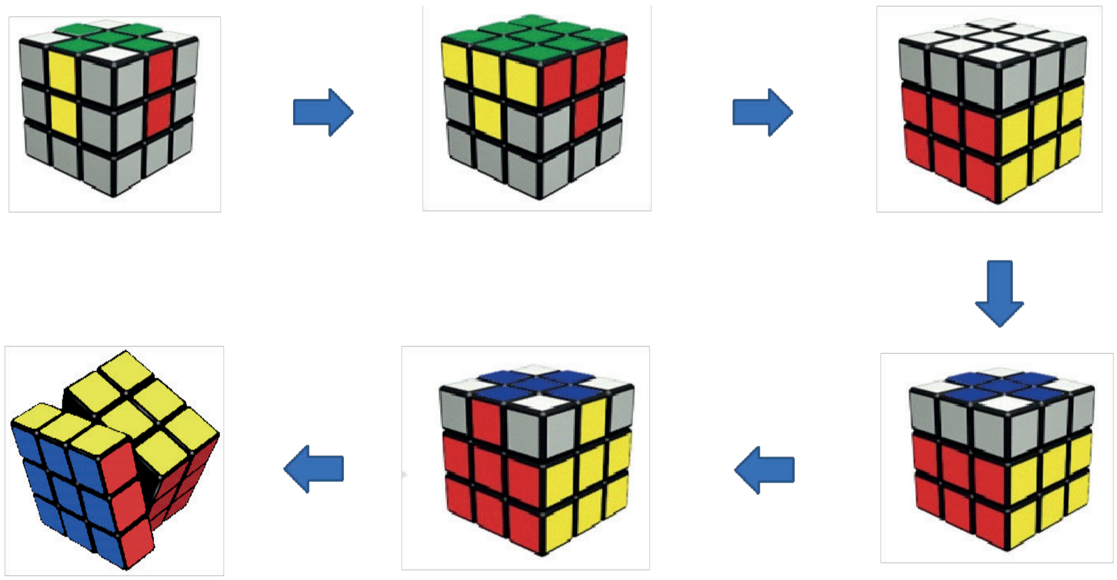


Fuente: elaboración propia

Para efectos de este trabajo se utilizó el algoritmo para principiantes para resolver el cubo de Rubik. Este algoritmo es progresivo, es decir el cubo se va ordenando capa por capa sin que se desordene los conseguido. Para resolver el cubo se hace lo siguiente:

a) Elegir un color base para armar la primera capa del cubo
b) Formar una cruz en la primera capa con los centros del color elegido, de manera que los colores de las aristas de la primera capa coincidan con el color de los centros
c) Ubicar los vértices de la primera capa, estas deben compartir color con los centros contiguos
d) Ubicar las aristas de la segunda capa, estas deben compartir color con los centros contiguos
e) Formar una cruz en la tercera capa del cubo con los centros del cubo esta cruz debe ser del color opuesto al color elegido en la primera capa
f) Ubicar los vértices de la tercera capa, estas deben coincidir con el color de los centros contiguos

g) **Figura 2.** Secuencia de movimientos método para principiantes



Fuente: elaboración propia

Metodología

Según los objetivos que persigue la investigación se desarrolló bajo el enfoque cualitativo, puesto que según (Hernández, Fernández, y Batista, 2010) la investigación cualitativa se enfoca a comprender y profundizar los fenómenos, explorándolos desde la perspectiva de los participantes en un ambiente natural y en relación con el contexto… se busca comprender la perspectiva de los participantes (individuos o grupos pequeños de personas a los que se investigará) acerca de los fenómenos que los rodean, profundizar en sus experiencias, perspectivas, opiniones y significados, es decir, la forma en que los participantes perciben subjetivamente su realidad. (p. 364)

El alcance es descriptivo debido a que "busca especificar las propiedades, las características y los perfiles importantes de personas, grupos comunidades o cualquier otro fenómeno que se someta a un análisis mide, evalúa o recolecta datos sobre diversos aspectos, dimensiones o componentes del fenómeno" (Hernández et al. 2010, p. 80). El diseño de la investigación fue Investigación Acción considerando que la investigación–acción considera la situación desde el punto de vista de los participantes, describirá y explicará "lo que sucede" con el mismo lenguaje utilizado por ellos; o sea, con el lenguaje del sentido común que la gente usa para describir y explicar las acciones humanas y las situaciones sociales en su vida cotidiana (Eliot, 2005, p. 25).

La investigación se llevó cabo en cuatro intervenciones. La primera una intervención diagnóstica, en las siguientes tres intervenciones se enseñó a resolver el cubo de Rubik mediante el método para principiantes, después de cada intervención se aplicó una hoja de trabajo con ejercicios de pensamiento matemático numérico, espacial o geométrico y variacional.

Los participantes fueron 10 estudiantes de la carrera de Matemáticas que cursaban el espacio formativo de Didáctica de las Matemáticas durante el II período académico 2019 en la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán. El muestreo fue intencionado no probabilístico, donde los estudiantes decidieron participar por el interés en aprender a resolver el cubo de Rubik. Para obtener la información de la investigación se aplicaron hojas de trabajo, así como un grupo focal, además de la observación directa.

Tabla 2. Categorías de análisis

Categoría	Definición conceptual	Definición operacional	Sub categoría	Indicadores
Pensamiento matemático	El pensamiento matemático es el que construye el individuo al relacionar las experiencias obtenidas en la manipulación de los objetos (Paltan y Quilli, 2011)	Se realizó a través de la manipulación del Cubo de Rubik en varias intervenciones, complementando con técnicas de recolección de datos	Pensamiento numérico	Secuencias
			Pensamiento espacial o geométrico	Relaciones de movimientos
			Pensamiento variacional	Patrones
			Pensamiento métrico	Cantidad de movimientos

Fuente: elaboración propia

Primera intervención
En esta intervención los participantes manipularon el cubo por primera vez, se les pidió que intentaran resolverlo, pero ningún participante pudo lograrlo, posteriormente se enseñó algunos de los conceptos básicos del cubo como nombre de las piezas y capas.

Figura 3. Primera manipulación del cubo de Rubik

Fuente: archivo del autor

Segunda intervención
En la segunda intervención los participantes aprendieron el armado de la primera capa del cubo de Rubik.

Tercera intervención
En esta intervención los participantes armaron por si solos la primera capa del cubo, posteriormente los investigadores enseñaron el armado la segunda capa del cubo de Rubik.

Cuarta intervención
En esta última intervención los participantes aprendieron el armado de la última capa del cubo de Rubik y con esto lograron resolver el cubo de Rubik por completo.

Figura 4. Armado de la última capa del Cubo de Rubik

Fuente: archivo del autor

Al final de cada intervención se aplicó una hoja de trabajo a los participantes, la hoja de trabajo contenía ejercicios de pensamiento matemático de tipo numérico, métrico, espacial y variacional. Además, se aumentó el nivel de dificultad de los ejercicios con cada intervención.

Resultados

A continuación, se describen los resultados más significativos de cada una de las intervenciones mencionadas:

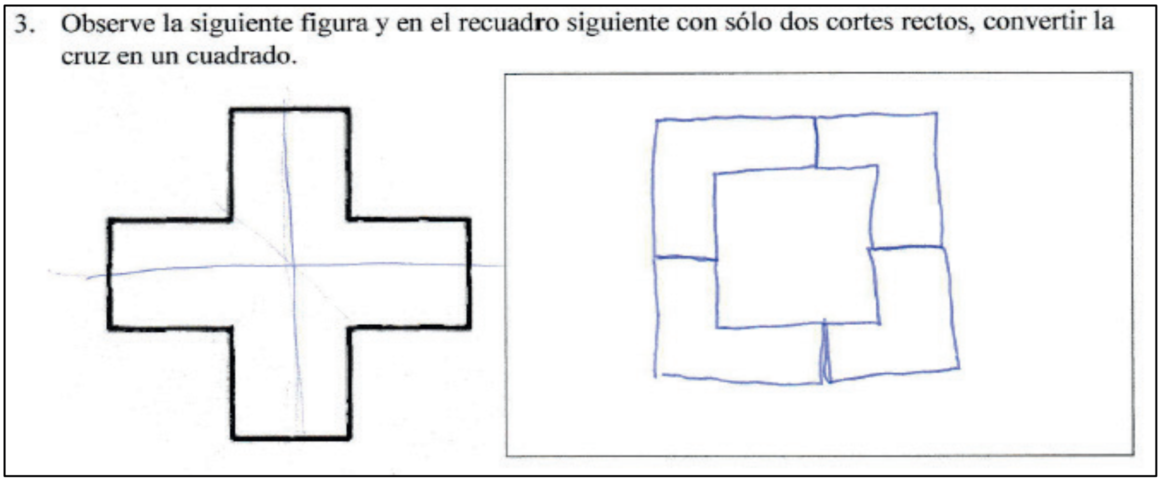
Primera intervención
En la etapa diagnóstica la mayoría de los participantes logró identificar las partes del cubo de Rubik tales como aristas, vértices, caras, centros y capas. Ninguno de los participantes fue capaz de armar el cubo de Rubik. La mayoría de los participantes mostraron dominio en los ejercicios de tipo numérico y métrico, sin embargo, presentaron dificultades en la resolución de problemas de pensamiento matemático de tipo variacional como ser secuencias de figuras, movimientos de las piezas.

Segunda Intervención
En la segunda intervención todos los participantes pudieron formar la primera capa del cubo de Rubik correctamente. Los resultados en cuanto al pensamiento métrico y numérico se mantuvieron constantes. Los

participantes mostraron una mejoría en cuanto a los ejercicios de pensamiento variacional, como secuencias numéricas y alfabéticas, sin embargo, se presentaron mejores estrategias en cuanto a la resolución de ejercicios sobre pensamiento espacial geométrico. A continuación, se muestra la solución presentada por uno de los participantes en un ejercicio de tipo espacial.

Como se muestra en la figura 5 este participante hizo los cortes en el plano de manera perpendicular para transformar la cruz en un cuadrado. El acierto en este ejercicio depende de la capacidad de los participantes para realizar los cortes adecuados en la cruz y poder transformar la cruz en una nueva figura. La mitad de los participantes presentaron la misma estrategia para resolver este ejercicio.

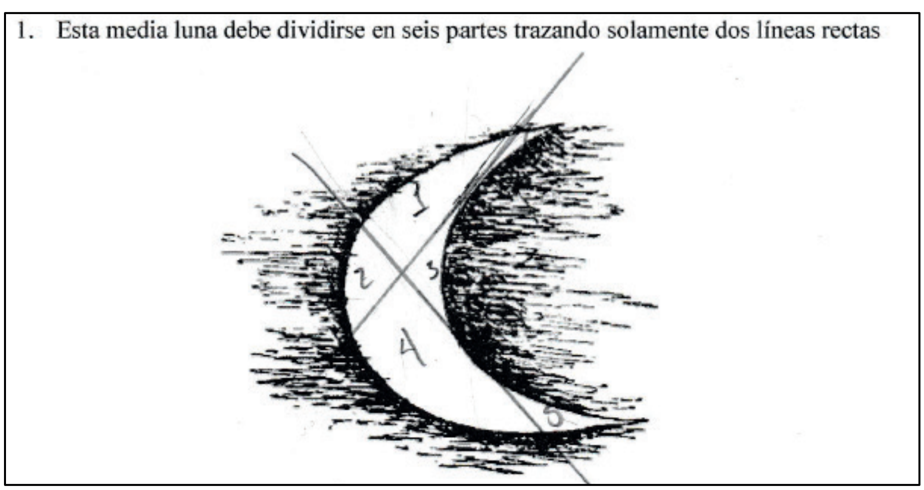
Figura 5. Hoja de trabajo 2, ítem número 1



Fuente: archivo del autor

Tercera Intervención
En esta intervención los participantes aprendieron el armado de la segunda capa del cubo de Rubik. Debido a la mejoría en el pensamiento variacional y las mejoras en las estrategias en cuanto a la solución de ejercicios de tipo espacial, la investigación se centró en el pensamiento matemático tipo variacional y espacial.

Figura 6. Hoja de trabajo 3, Parte II ítem número 1

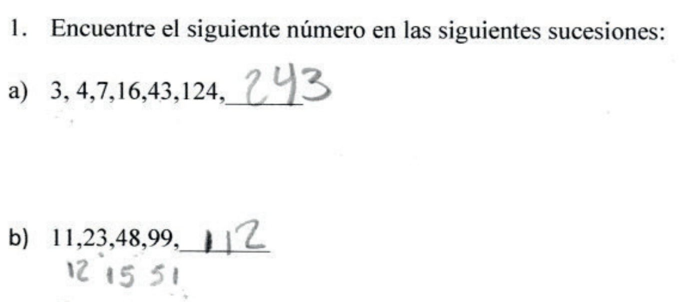


Fuente: archivo del autor

Durante el desarrollo de la hoja de trabajo los participantes mostraron notables mejorías en los ejercicios sobre visualización en el espacio de dificultad media como se muestra en la figura 6. Para dividir la media luna en las partes solicitadas se debe hacer los cortes tangentes al centro de la media luna. Más de la mitad de los estudiantes presentaron estrategias correctas.

Cuarta Intervención
En la última intervención los participantes armaron el cubo de Rubik en su totalidad. El objetivo de la última hoja de trabajo es comparar los resultados con la intervención diagnóstica. En cuanto a los ejercicios de pensamiento numérico los participantes no mostraron mejoría. A continuación, se muestra una de las ideas propuestas por uno de los participantes.

Figura 7. Hoja de trabajo 4, Pate II ítem 1


1. Encuentre el siguiente número en las siguientes sucesiones:

a) 3, 4,7,16,43,124, 243

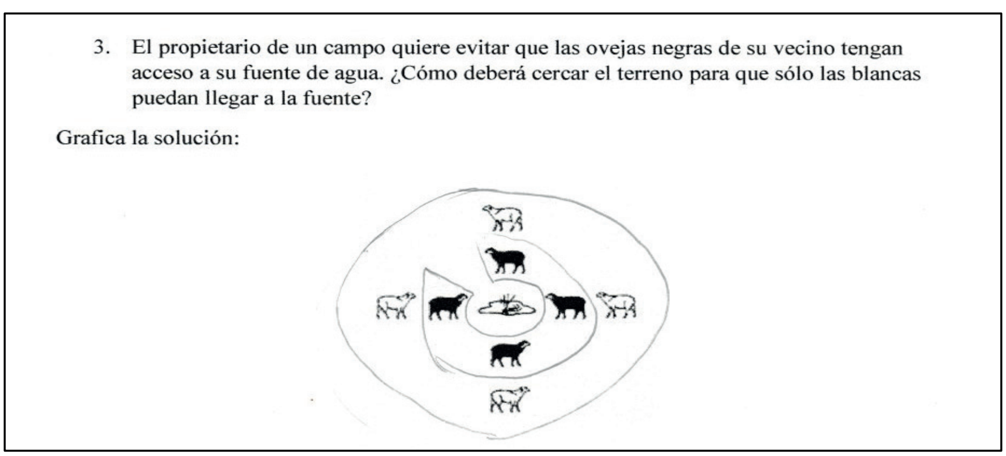
b) 11,23,48,99, 112
12 15 51

Fuente: archivo del autor

Se puede observar en la figura 7 como los participantes al finalizar las intervenciones todavía presentan dificultades al momento de resolver ejercicios de pensamiento numérico, en el inciso a) este participante logró establecer el incremento de cada término, pero no estableció el último término de la sucesión. El inciso b) es una sucesión cuadrática de igual manera el participante no logró establecer el último término.

Los aciertos en los ejercicios de pensamiento variacional se mantuvieron constantes, sin embargo, la dificultad de los ejercicios aumentaba.
Los resultados más notorios se presentaron en los ejercicios de tipo pensamiento espacial-geométrico como los siguientes.

Figura 8. Intervención final, Parte II ítem 3

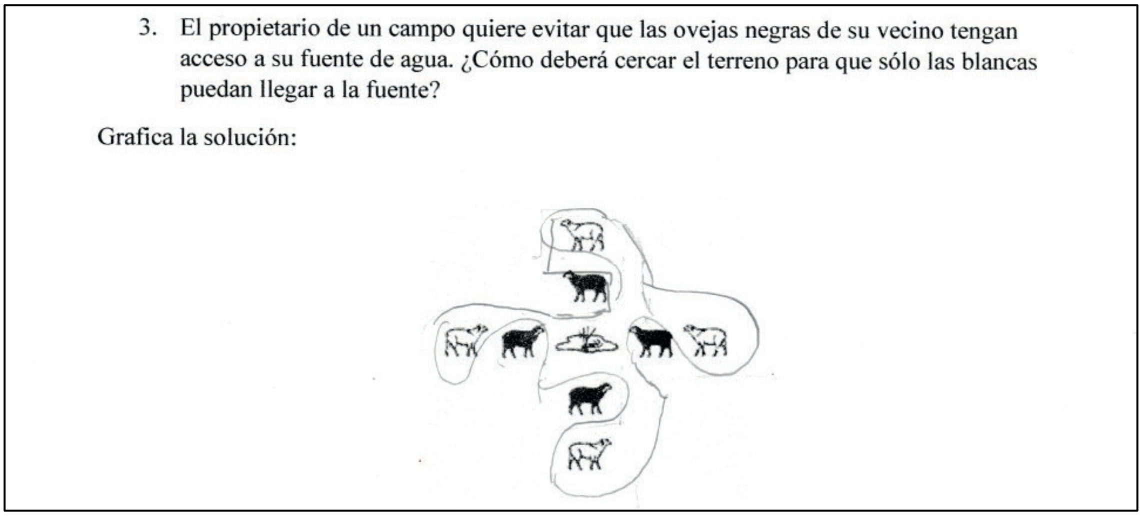

3. El propietario de un campo quiere evitar que las ovejas negras de su vecino tengan acceso a su fuente de agua. ¿Cómo deberá cercar el terreno para que sólo las blancas puedan llegar a la fuente?

Grafica la solución:

Fuente: archivo del autor

Los participantes a, c, f, j utilizaron la estrategia mostrada en la figura 8 para poder resolver el ejercicio

Figura 9. Intervención final Parte II ítem 3 evidencia 2



Fuente: archivo del autor

Los participantes e, g, i, d presentaron la estrategia mostrada en la figura 9. El participante h utilizó una estrategia que no cumple las indicaciones del ejercicio. El participante b dejó en blanco el ejercicio. Casi todos los participantes contestaron correctamente el ejercicio de pensamiento matemático espacial, relacionado con la optimización de recorridos de dificultad alta.

Conclusiones

Durante la solución del cubo de Rubik mediante el algoritmo para principiantes, el pensamiento matemático más estimulado fue el pensamiento de tipo espacial-geométrico, las ideas presentadas por los participantes durante todas las intervenciones mostraron una notable mejoría en cuanto a las ideas presentadas en la intervención diagnóstica. Los participantes mostraron mejores estrategias para resolver ejercicios sobre cortes en el plano, transposición de figuras, optimización de recorridos.

En segunda instancia se estimuló el pensamiento variacional, aunque no se mostraron ideas tan brillantes para resolver los ejercicios de este tipo como en el caso del pensamiento espacial, los aciertos de los participantes se mantuvieron, a pesar del incremento de la dificultad en los ejercicios de este tipo. Sin embargo, se puede utilizar los colores y movimientos de las piezas para elaborar ejercicios de este tipo de pensamiento matemático.

De acuerdo a los resultados obtenidos en las hojas de trabajo, los participantes siempre presentaron dificultades al momento de resolver los ejercicios de pensamiento numérico. Debido al algoritmo utilizado consideramos que la resolución del cubo de mediante al algoritmo para principiantes no tiene influencia en el pensamiento métrico.

La solución del cubo de Rubik mediante el algoritmo para principiantes puede ser utilizado para la estimulación del pensamiento matemático de tipo espacial y variacional. La naturaleza del algoritmo permite trabajar conceptos matemáticos como visualización, espacio, optimización, patrones, transformación de figuras.

Referencias bibliográficas

Bosch, M. (2012). Apuntes teóricos sobre el pensamiento matemático y multiplicativo en los primeros niveles. *Revista Educación matemática en la infancia*. 1(1), 15-37.

Cantotal, R., Farfán, M., Cordero, F., Alanís, F., Rodríguez, R., y Garza, A. (2005). *Desarrollo del Pensamiento Matemático*. México: McGrawhill.

Eloit, J. (2005). *La investigación acción en educación*. Madrid: Ediciones Morata.

Fonseca, J. (2016). Elementos para el desarrollo del pensamiento matemático en la escuela. *Encuentro Distrital de Educación Matemática.* (3)*,*53-54.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, M. (2005). Metodología de la investigación. México: McGrawhill.

Ministerio Educacional Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Recuperado de https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_1.pdf

Morales, R. (21 de mayo de 2017). *El Cubo de Rubik en las aulas como elemento potenciador de la inteligencia espacial y lógico-matemática*. Red Educa. Recuperado de https://redsocial.rededuca.net/cubo-de-rubik-en-las-aulas-inteligencia

Moreno, M. (25 de julio de 2018). Estos son los beneficios educativos del Cubo de Rubik. *Educación 3.0*. Recuperado de https://www.educaciontrespuntocero.com/recursos/beneficios-educativos-cubo-rubik/88827.html

Palacios, J. (2005). *El Crucigrama Retos e ideas para desaprender a pensar*. Madrid, España: Díaz de Santos

Paltan, G. y Quilli, K. (2011). *Estrategias metodológicas para desarrollar el razonamiento lógico – matemático en los niños y niñas del cuarto año de educación básica de la escuela "Martín welte" del cantón cuenca, en el año lectivo 2010 – 2011.* (Tesis de pregrado). Universidad de Cuenca, Ecuador.

Regader, B. (2015). *La Teoría de las Inteligencias Múltiples propone ocho tipos de inteligencia.* Recuperado el 22 de abril de 2019 de https://psicologiaymente.com/inteligencia/teoria-inteligencias-multiples-gardner

Rojas, J. (5 de noviembre de 2017). Los secretos del cubo Rubik que fascinó al mundo hace 40 años. *El tiempo*. Recuperado de https://www.eltiempo.com/cultura/entretenimiento/entrevista-con-el-creador-del-cubo-rubik-quien-lo-invento-hace-cuarenta-anos-148408

Romero, R. (2013). Las matemáticas del cubo de Rubik. *Revista de Investigación Pensamiento Matemático*. 3(2), 97-110.

SECCIÓN 2

PROPUESTAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

VOL 34, NÚMERO 2, AÑO 2021

ENFOQUE HEURÍSTICO EN EL PLANTEO DE UN PROBLEMA GEOMÉTRICO
A HEURISTIC APPROACH IN POSING A GEOMETRIC PROBLEM

Miguel Cruz Ramírez, Marta Maria Álvarez Pérez, Nolbert González Hernández
Universidad de Holguín (Cuba), Ministerio de Educación (Cuba), Universidad de Holguín. (Cuba)
mcruzr@uho.edu.cu, marta.alvarez@mined.gob.cu, nolvert@uho.edu.cu

Resumen
La formulación, creación, invención y planteo de nuevos problemas han sido empleados como sinónimos de un proceso cognitivo complejo, estrechamente vinculado con la resolución de problemas y con el pensamiento matemático avanzado. El presente trabajo adecua enfoque heurístico del aprendizaje matemático, orientado hacia el planteo de problemas. Para ello se enfatiza la reformulación sucesiva de un problema, hasta conseguir nuevas interrogantes que tengan significado y sentido matemático. Este proceder se ejemplifica con base en una experiencia didáctica, desarrollada en un contexto relacionado con la resolución de problemas geométricos. La sucesión de etapas muestra un camino viable para promover la invención de nuevos problemas y desarrollar la creatividad. Los resultados pueden ser aplicables en numerosos contextos didácticos, especialmente en la formación de profesores de matemáticas donde esta actividad se convierte en una habilidad profesional.

Palabras clave: planteo de problemas, resolución de problemas, razonamiento heurístico, pensamiento matemático avanzado, geometría elemental

Abstract
The formulation, creation, invention and posing of new problems have been used as synonyms for a complex cognitive process, closely linked to problem solving and advanced mathematical thinking. The present work adapts a heuristic approach to mathematical learning, oriented towards problem posing. So, the successive reformulation of a problem is emphasized, until new questions that have mathematical meaning and sense are achieved. This procedure is exemplified based on a didactic experience which is developed in a context related to geometric problem solving. The succession of stages shows a viable way to promote the invention of new problems and to develop creativity. The results can be applicable in many didactic contexts, especially in the training of mathematics teachers where this activity constitutes a professional skill.

Key words: problem posing, problem solving, heuristic reasoning, advanced mathematical thinking, elementary geometry

Introducción

El planteo de nuevos problemas constituye un proceso de elevada complejidad cognitiva, siempre que se tome distancia de situaciones triviales vinculadas a la realización simplificada de preguntas (Cai y Hwang, 2020). La pregunta es exactamente la etapa final, mediada por una actividad altamente creativa que nace de un estado suficientemente motivado. El planteo de problemas forma un binomio estrechamente relacionado con la resolución de problemas, y junto a procesos tales como el razonamiento analógico y la generalización, forma una parte importante del pensamiento matemático avanzado (Leikin y Elgrably, 2020).

Numerosos estudios han ponderado la necesidad de llevar el planteo de problemas al contexto escolar. Ello no solo ha sido consignado en importantes documentos normativos, sino también en informes de investigación y en pronunciamientos durante eventos y foros internacionales relacionados con la matemática educativa. Al respecto, Kilpatrick ha señalado que "[…] la formulación de problemas debería ser vista no solo como meta de instrucción sino como medio de instrucción. La experiencia en descubrir y crear por sí mismos problemas matemáticos debe ser parte de la educación de los estudiantes" (Kilpatrick, 1987, p. 123).

A pesar de la consabida necesidad de potenciar el planteo de problemas en el contexto escolar, existen algunos problemas importantes que no han sido suficientemente abordados (Baumanns y Rott, 2020). Entre ellos se pueden enumerar el diseño de instrumentos que permitan evaluar la actividad asociada al planteo de nuevos problemas, la elaboración de dispositivos que faciliten cualificar la calidad del proceso creativo, así como la identificación de estadios de desarrollo y las etapas que conforman este complejo proceso cognitivo. En este último caso, todo avance en la identificación de etapas, acciones y operaciones del pensamiento, resultará útil desde el punto de vista didáctico. El presente trabajo adecua el PHG (programa heurístico general de Polya, 1957) al planteo de problemas, con la finalidad de presentar este proceso como una estrategia al alcance del quehacer didáctico del profesor de matemáticas, lo cual se ejemplifica por medio de un problema geométrico.

Marco teórico

El planteo de problemas puede verse como una competencia profesional del maestro, asociada a la elaboración de tareas docentes y a la graduación de sus niveles de dificultad (Leavy y Hourigan, 2020), como ocurre con la invención de problemas para las olimpiadas de matemática. Asimismo, este proceso también constituye una actividad de aprendizaje, donde el estudiante formula preguntas razonables que expresan una elevada comprensión de los contenidos matemáticos (Cai y Hwang, 2020; English, 2019). Por otro lado, el planteo de problemas constituye una actividad compleja y multifactorial que, desde el plano didáctico, refiere tanto la generación de nuevos problemas como la reformulación de problemas dados (Silver, 1994).

Algunos estudios han identificado la presencia relativamente estable de etapas cognitivas, durante el planteo de problemas matemáticos (Brown y Walter, 1990; Cruz et al., 2016; Cruz, 2021). Trasladar estas etapas hacia la clase de matemáticas requiere de una perspectiva que trace pautas a seguir, pero con niveles de libertad para no constreñir un proceso que, por antonomasia, es altamente creativo. Una forma viable de extender estos estudios al aula de matemáticas consiste en adecuar el PHG de Polya (1957), consistente en cuatro etapas: comprender el problema, establecer un plan, llevar a cabo el plan, y la mirada retrospectiva.

English (2019) reconoce la existencia de un vínculo muy estrecho entre el planteo y la resolución de problemas, tanto en lo epistémico como en lo didáctico. Asimismo, ambos procesos tienen una raíz común en el concepto de problema. Plantear un problema puede enfocarse como un problema en sí mismo. No se trata de una redundancia cuando se separan los planos desde los cuales se pone de relieve esta singularidad. En efecto, lo problémico se refiere a *cómo* arribar al nuevo problema, es decir, enfatiza el proceso gnoseológico, mientras que el problema se relaciona con el *qué*, o sea, enfatiza el aspecto ontológico.

Existen también situaciones especiales donde una persona plantea un problema para otros, el cual no es necesariamente un problema para sí. Por ejemplo, la elaboración y la reformulación de ejercicios, donde no pocas veces se despliegan estrategias aprendidas con la práctica, y raras veces tratadas con detalles en el proceso de formación inicial y permanente del profesor. En el extremo más trivial se posicionan recursos cuasi-algorítmicos tradicionales para la composición de ejercicios, como suele ser la transformación de una ecuación "hacia atrás". O sea, partir de cierta factorización igualada a cero con raíces prefijadas, que luego de efectuar el producto y reducir términos semejantes conduce a un ejercicio común de resolución de ecuaciones. Esta práctica no debe desestimarse si se busca la aprehensión de procedimientos básicos, por medio de la ejercitación y la fijación del conocimiento. Sin embargo, el aprendizaje matemático apenas comienza así. Resta todavía idear problemas que desafíen y potencien el razonamiento.

La imaginación de nuevos problemas constituye un proceso donde confluyen sendos componentes didáctico y matemático. Por tanto, el profesor debe contar con una sólida formación en ambos aspectos. El primero garantiza la rigurosidad del conocimiento, la originalidad del razonamiento o del hecho matemático, el balance adecuado de lo conceptual y lo procedimental, el aseguramiento de más de una vía de solución, entre otros aspectos. El segundo, está relacionado con refuerzos de motivación, con el aseguramiento de variaciones para la graduación de los niveles de dificultad, con el establecimiento de normas de calificación, con la capacidad ilustrativa para ejemplificar un contenido, entre otras cualidades.

Tanto un camino predominantemente creativo, como otro más estructurado, requieren de orientación hacia cierta situación de partida, de la concepción e implementación de un modo para lograr el objetivo, aun cuando no se tiene una vía expedita para ello, e incluso de la realización de consideraciones retrospectivas y perspectivas. Esto último es útil como parte el mejoramiento del problema propuesto, la identificación y corrección de posibles errores, e incluso la búsqueda de situaciones prácticas que puedan reducirse al hecho matemático. Así, puede concluirse que el PHG orientado hacia la resolución de problemas se puede aplicar, bajo ciertas adecuaciones, en el ámbito de la formulación de problemas. El presente trabajo desarrolla algunas ideas al respecto, donde el PHG se centra en el problema didáctico de plantear preguntas con significado y sentido matemático.

Metodología

El método fundamental consiste en el analítico-sintético, en el sentido de partir del PHG de Polya (1957), reconocer la existencia de un vínculo estrecho entre el planteo y la resolución de problemas (English, 2019), y adecuar entonces dicho programa a las especificidades del proceso creativo conducente al planteo de problemas.

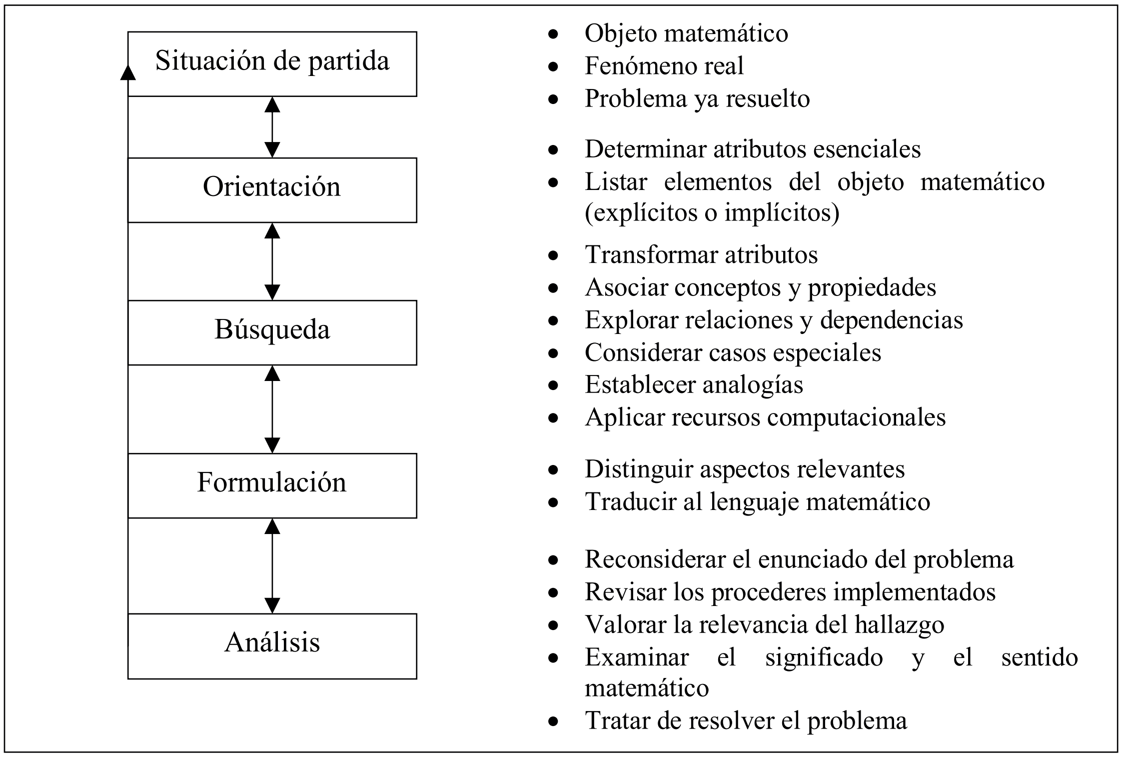
Avances

La presente adecuación del PHG consta de cinco etapas: (1) establecimiento de la situación de partida, (2) orientación hacia la búsqueda del problema, (3) trabajo en la búsqueda del problema, (4) formulación del problema, y (5) análisis del problema. La Figura 1 ilustra, en su parte izquierda, el conjunto de etapas que conforman la adecuación del PHG y, en su parte derecha, algunos aspectos que caracterizan cada etapa.

En esta representación se ha tenido en cuenta que el proceso de planteo de un problema no posee en general una estructura lineal, por lo que el sentido de las saetas pretende hacer visible que, en cada fase, se puede avanzar a la próxima o incluso a otra más adelante en la que se puede estar trabajando simultáneamente, o retroceder a la fase inmediata anterior o incluso a otra anterior, sin que al retroceder ello implique que haya que ejecutar todas las acciones que aparecen dentro de dicha fase, sino solo la(s) que interesa volver a realizar. La saeta que conecta la última fase con la situación de partida indica que, a partir de la experiencia obtenida pueden surgir nuevas ideas, acerca de otros problemas que se pueden generar o bien que el problema planteado no responde a las expectativas y se requiere comenzar de nuevo el proceso.

El modo en que un sujeto transita por cada una de las fases del PHG es propio de este y depende de los contenidos y nivel desarrollo de su personalidad. Lo dicho anteriormente significa, por ejemplo, que es posible determinar y descomponer los atributos de la situación original y, al mismo tiempo, estar pensando en cuál transformación de los componentes de esta podría ser útil para plantear un nuevo problema. De igual forma, dentro de la fase de trabajo en la búsqueda del problema es posible que después de tratar de establecer relaciones y dependencias se proceda otra vez a aplicar ciertas técnicas para transformar el objeto, se seleccionen nuevos conceptos y se reinicie la búsqueda de nuevas propiedades y relaciones. También puede ocurrir que no se tenga que realizar transformación alguna y se seleccionen otros conceptos para recomenzar la búsqueda.

Figura 1. *Una adecuación del PHG al planteo de nuevos problemas.*



Adaptación realizada por los autores.

Al determinar atributos de la situación resulta importante la descomposición de estos tanto como resulte posible, por cuanto ello permitirá tener una mejor perspectiva de todo lo que se puede transformar llegado el momento. Distintas personas determinarán diferentes atributos, los cuales pueden o no ser independientes unos de otros. Estos atributos abarcan desde las características más externas hasta las relaciones más esenciales y profundas de la situación de partida. Es conveniente clasificar los atributos, agrupándolos en clases disjuntas a partir de criterios preestablecidos. De forma similar a la clasificación de los triángulos según sus lados o según sus ángulos, se pueden descomponer los objetos (problemas) matemáticos en objetos (elementos) más simples y recomponerlos siguiendo un camino distinto (la descomposición-recomposición clásica de Polya, 1957).

El acto de plantear nuevos problemas imbrica procesos específicos que han sido descritos por varios autores: aceptar / “qué-si-no” (Brown y Walter, 1990), “qué-si-más” (Kaput, 1984, citado por Kilpatrick, 1987), analogías y generalización / particularización (Polya, 1957), la formación de recíprocos o de proposiciones equivalentes, la cuantificación de proposiciones, entre otros. La dinámica entre aceptar un hecho matemático y plantearse el reto “qué-si-no”, permite a la persona hacerse consciente de nuevos atributos y añadirlos a los ya determinados previamente. Además, despliega amplias posibilidades para establecer los puntos de partida, como en el caso de problemas ya resueltos, teoremas ya demostrados, y conceptos ya establecidos. El pensamiento prosigue por un camino inquisitivo y creador, donde se modifican elementos y se indaga acerca de qué pasaría bajo tales condiciones. Es muy difícil adoptar estos recursos cognitivos, al margen de elementos afectivos y motivacionales que sirven de catalizador.

En este proceso de observación o transformación de lo dado se asocian conceptos a los atributos determinados de la situación de partida, original o modificada, y se seleccionan algunos, a partir de lo cual se establecen relaciones y dependencias mediante procedimientos heurísticos, lógicos y algorítmicos. Mientras más atributos se hayan determinado, más conceptos se les podrán asociar y más nexos entre ellos se podrán establecer, con lo cual se fertiliza el camino para identificar vacíos en el conocimiento, que se expresan en forma de problemas.

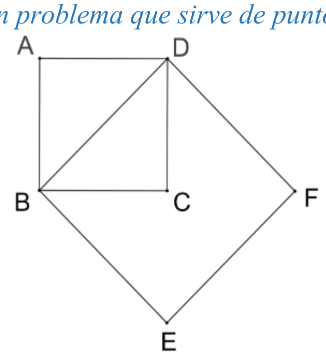
La formulación preliminar y/o definitiva de los problemas constituye, en primera instancia, el componente comunicativo del proceso. En algunos casos, la formulación enmascara el problema matemático con una situación práctica o con ciertas complicaciones lógico-lingüísticas. Por tal motivo, la fase de formulación de problemas entra en conexión directa con el gusto estético, las aspiraciones e intereses dentro de un contexto específico y otros elementos idiosincráticos. Todo ello pone de relieve el carácter motivado y contextualizado de dicho proceso. Por otra parte, también debe tenerse en cuenta que algunos estudiantes muestran cierta tendencia a plantear problemas inconsistentes, en que se presentan errores lógicos o falta de relación entre lo dado y lo buscado, por lo que su análisis crítico mediante el control metacognitivo y su posterior resolución, reviste gran importancia.

En el caso de los profesores, una vez que formulen y resuelvan los problemas, deben valorar no solo si tienen sentido y están expresados de forma clara y rigurosa, sino también si se ajustan a los objetivos didácticos previstos, sean estos motivar y elaborar un nuevo contenido, sistematizar los conocimientos adquiridos o evaluar el desarrollo del aprendizaje o de la propia capacidad de formular un problema, entre otros posibles. Todo ello puede requerir realizar transformaciones en los enunciados de los problemas o reformularlos por completo. Igualmente, es preciso que analicen la variación y adecuación de los niveles de dificultad atendiendo a las necesidades de los alumnos individuales y el grupo, que prevean los recursos didácticos requeridos y el posicionamiento de los problemas dentro del sistema de clases atendiendo a su función didáctica.

Tal como señala Silver (1994), el hallazgo de nuevos problemas puede ocurrir antes, durante, o al finalizar la resolución de un problema. Seguidamente se presenta un ejemplo, el cual tiene como punto de partida la resolución previa de un problema de geometría plana. La formulación de problemas se desarrolla con base en la adecuación antes descrita del PHG. Como situación inicial, se adopta el siguiente problema resuelto previamente.

Establecimiento de la Situación de partida. Supongamos que el lado de un cuadrado es la diagonal de un segundo cuadrado. Calcular la razón entre el área del primer cuadrado y la del segundo cuadrado (Díaz, 2006, p. 34; problema No. 52, ver Figura 2).

Figura 2. *Un problema que sirve de punto de partida.*



Díaz, 2006, p. 34; Problema No. 52.

Orientación hacia la búsqueda del problema. La determinación de atributos o componentes ya tiene un avance, en el sentido de considerarse inicialmente ambos cuadrados, donde el lado de uno constituye la diagonal del otro. El problema original asocia conceptos tales como área y razón y se exige el cálculo del cociente entre dos áreas. Para la solución, se asume que el cuadrado pequeño es unitario, de donde resulta que el lado del cuadrado grande mide $\sqrt{2}$ unidades, y finalmente se concluye que la razón entre las áreas es 2.

Entre los distintos atributos que se pueden determinar, se encuentran los siguientes:

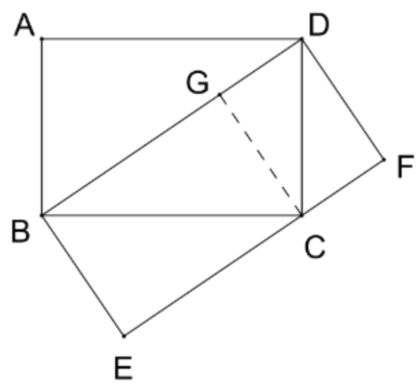
- En el problema de partida aparecen dos figuras geométricas planas.
- Las dos figuras geométricas pertenecen a la misma clase de cuadriláteros.
- Las dos figuras geométricas son cuadrados.
- Un lado de una figura es una diagonal de la otra.
- Existe una relación entre las áreas de las figuras geométricas.

Trabajo en la búsqueda del problema. La estrategia ¿qué-si-no?, sistematizada por Brown y Walter (1990), resulta muy provechosa. Por ejemplo, el profesor puede demandar a sus alumnos: ¿Qué ocurriría si, en lugar de cuadrados, se tratara de rectángulos? Y, ¿qué nueva relación subsiste entre las áreas? Este camino conduce a una generalización del problema original (se modifica el tercer atributo determinado). Sin embargo, un pensamiento lateral e intencionado puede ser útil para abordar, con mayor flexibilidad, las relaciones y dependencias que se ocultan tras la figura formada por ambos rectángulos.

En efecto, la transformación de algunos atributos asociados a los objetos matemáticos puede enriquecer el conjunto de conceptos que se podrían asociar. Así el profesor puede solicitar primeramente a los alumnos que transformen algunos elementos de la situación inicial. Seguidamente, se ilustran tres variantes posibles que los alumnos pueden seguir en la búsqueda de un nuevo problema.

La situación podría transformarse por los alumnos al añadir condiciones: ¿Qué pasaría si el lado paralelo a la diagonal contiene un vértice del otro rectángulo?

Figura 3. *Primera variante en la transformación del objeto.*



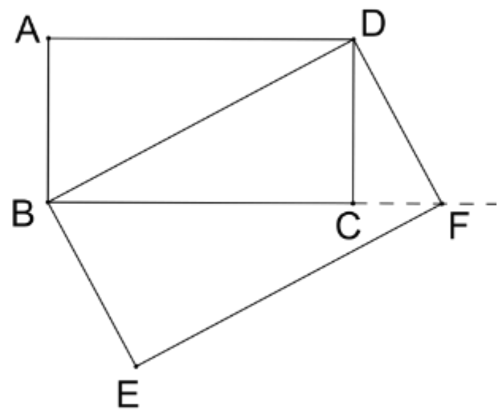
Transformación elaborada por los autores.

Puede observarse que ambos rectángulos poseen un área común, comprendida dentro del ΔBCD. Si se traza la altura $\overline{CG}$, está claro que $\Delta CFD = \Delta DGC$ y $\Delta BEC = \Delta CGB$. Como $\Delta BCD = \Delta DAB$, resulta que las áreas de ambos rectángulos son iguales. Una formulación posible sería demostrar que ambos rectángulos tienen la misma área. Pero una formulación más sugerente sería la siguiente:

Formulación del problema (primera variante). Observe los dos rectángulos de la figura anterior. ¿Cuál de los dos ocupa mayor superficie, el $ABCD$ o el $BEFD$? Razone su respuesta.

Si se pretende que el contexto del problema se relacione con un ambiente motivado y de reflexión abierta, entonces la pregunta relativa a cuál de los dos rectángulos ocupa mayor superficie tiene la intención de que se observe que, contrariamente a la orden del problema, los rectángulos tienen igual área. Ello exige a la persona que intente resolverlo que actúe con seguridad y responda que ninguno de los dos abarca mayor superficie, ya que ambos poseen la misma área. Si se tratara de una pregunta que se plantea en un ambiente de tensión, como suele ocurrir durante una evaluación, esta forma de presentar el problema puede provocar confusión, e incluso temor de refutar la exigencia expresada en la pregunta. Otra posibilidad de transformar el problema podría ser (ver Figura 4). ¿Qué pasaría si un vértice del rectángulo que yace sobre la diagonal, pertenece a la prolongación de un lado del otro rectángulo?

Figura 4. *Segunda variante en la transformación del objeto.*



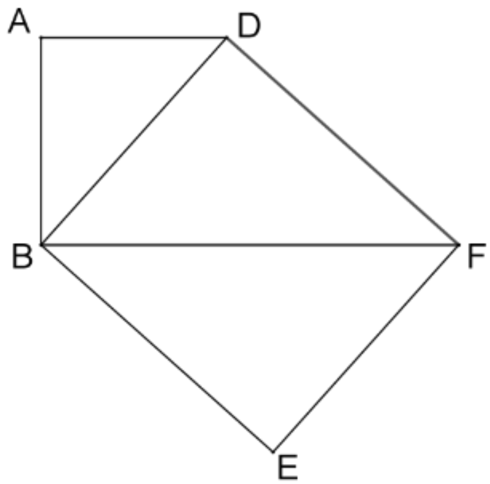
Transformación elaborada por los autores.

Como $AD \parallel BF$, la posición del triángulo rectángulo ΔFDB ahora muestra una relación de semejanza respecto al ΔDAB. Puede notarse que $\frac{\overline{BD}}{\overline{BF}} = cos\measuredangle DBF = cos\measuredangle ADB = \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}$, de modo que $\overline{BD}^2 = \overline{AD} \cdot \overline{BF}$.

Esta última relación ya estaba presente en el problema original, donde puede comprobarse que la diagonal $\overline{BD}$ del cuadrado menor es la media geométrica entre el lado $\overline{AD}$ y la diagonal $\overline{BF}$ del cuadrado mayor. Comprobar esta relación, tanto en cuadrados como en rectángulos, ya constituye un problema interesante, pero cabe preguntarse si podrían encontrarse otras relaciones que motiven nuevos problemas. En relación con esto, Polya (1957) plantea, en *How to Solve It,* un símil entre el descubrimiento de nuevos problemas y el hallazgo de setas, en el sentido de que aparecen por grupos y cuando se encuentra uno es muy probable que aparezcan otros en la vecindad.

Si se considera que las dos figuras geométricas no sean ambas cuadrados o rectángulos (se modifica el segundo atributo determinado), entonces la relación $\overline{BD}^2 = \overline{AD} \cdot \overline{BF}$ conecta, por ejemplo, las longitudes de las bases del trapecio rectángulo $ABFD$ con un lado del rectángulo $BEFD$. Si son dadas las longitudes de $\overline{AD}$ y $\overline{BF}$, entonces es posible calcular la longitud de $\overline{DC}$ y luego de $\overline{DF}$, a partir de las relaciones pitagóricas y de $\overline{BF} = \overline{BC} + \overline{CF} = \overline{AD} + \overline{CF}$. En fin, si las longitudes de las bases del trapecio son conocidas, entonces pueden calcularse todas las áreas de los triángulos y rectángulos representados en la figura. Los razonamientos anteriores se relacionan con el siguiente problema:
Formulación del problema (segunda variante). En la figura, $ABFD$ es un trapecio rectángulo en A y B. $BEFD$ es un rectángulo, $\overline{BF} = 9{,}0\ cm$ y $\overline{AD} = 4{,}0\ cm$. Hallar el área del triángulo $BAD\ y$ del rectángulo $BEFD$.

Figura 5. *Adecuación de la segunda variante en la transformación del objeto.*



Transformación elaborada por los autores.

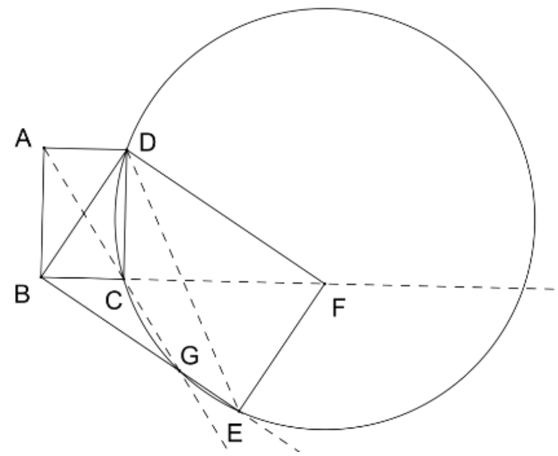
Nótese que generalmente la elaboración de un gráfico, tabla o figura tiene incidencia directa en la formulación de la pregunta. Deben valorarse, tanto las particularidades de la figura que acompaña al texto del problema, como los elementos que en esta se disponen. Por ejemplo, en este caso, el gráfico del problema "oculta" el segmento $\overline{DC}$. Este aspecto es muy importante, pues este lado del cuadrado $ABCD$ también constituye la altura relativa a la hipotenusa del ΔFDB. Al no dibujar dicho elemento, se espera que la persona que resuelva el problema lo trace, como parte de su reflexión heurística, justo ante la necesidad de hacer utilización del grupo de teoremas de Pitágoras.

Por otro lado, si se desplaza la atención de la relación entre las áreas de las figuras geométricas (se modifica el quinto atributo determinado), otra exploración de los objetos matemáticos y sus relaciones puede conllevar a la observación de que $\measuredangle ABD = \measuredangle EBF$. Si en la Figura 4 se trazan además las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{ED}$, pueden comprobarse relaciones mutuas de igualdad entre ciertos triángulos dentro de cada rectángulo, así como determinadas relaciones de semejanza entre triángulos correspondientes de ambos rectángulos. Por ejemplo, $\Delta BCD = \Delta CDA$ y $\Delta CDA \sim \Delta DBE$. Estos tipos de relaciones pueden motivar en la clase la búsqueda de relaciones entre rectas y puntos, resultantes de prolongar e intersecar lados y diagonales. Por tanto, los alumnos podrían preguntarse: ¿Qué relaciones tienen lugar al prolongar las diagonales y los lados?, ¿qué pasaría si consideramos más de dos figuras geométricas y se incorpora otro objeto geométrico (se modifica el primer atributo determinado)?

Para abordar este aspecto puede considerarse, por ejemplo, la semirrecta de origen A que contiene a C y la semirrecta de origen B que contiene a E. Estas semirrectas son prolongaciones de la diagonal $\overline{AC}$ y del lado $\overline{BE}$, respectivamente. Con ayuda de GeoGebra, se puede visualizar, si se introducen deslizadores para los lados del rectángulo $ABCD$, que estas semirrectas se intersecan en un punto G, cuando $\overline{AD} < \overline{DC}$ o bien $0° < \measuredangle CDE < 90°$.

También es sugerente explorar qué ocurre con la amplitud de varios ángulos, por ejemplo, cuando las semirrectas AC y BE se cortan en un punto interior del segmento $\overline{BE}$, como se ilustra en la Figura 6 que aparece a continuación:

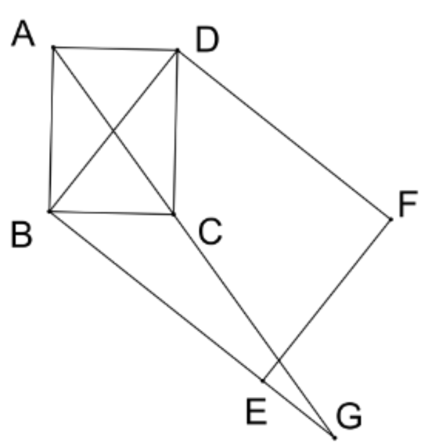
Figura 6. *Tercera variante en la transformación del objeto.*



Transformación elaborada por los autores.

Una relación interesante consiste en que $\measuredangle DEB$ y $\measuredangle GCD$ son ángulos suplementarios. En efecto, en virtud de la semejanza entre ΔCDA y ΔDBE, es suficiente observar que $\measuredangle GCD + \measuredangle DEG = \measuredangle GCD + \measuredangle DEB = \measuredangle GCD + \measuredangle DAC = 180°$. Por tanto, el cuadrilátero $DCGE$ se puede inscribir en una circunferencia. Si los puntos E y G son coincidentes, se sabe que a todo triángulo se le puede circunscribir una circunferencia. Bajo qué condición E y G son coincidentes, sería otro problema para resolver ($0^{\circ} < \measuredangle CDE = \measuredangle CEB < 90°$).
¿Qué sucede entonces cuando las semirrectas AC y BE se cortan en un punto perteneciente a la prolongación de $\overline{BE}$ por E, como se ilustra en la figura siguiente?

Figura 7. *Adecuación de la tercera variante en la transformación del objeto.*



Transformación elaborada por los autores.

Con ayuda de GeoGebra se puede visualizar para distintas configuraciones que también en este caso los puntos D, C, E y G yacen sobre una circunferencia. A partir de esta conjetura puede surgir el siguiente problema más general:

Formulación del problema (tercera variante). Sean $ABCD$ y $BEFD$ dos rectángulos, tales que el vértice F es un punto de la semirrecta BC y $0° < \measuredangle CDE < 90°$. Sea G el punto de intersección de las semirrectas AC y BE. Probar que los puntos D, C, E y G son concíclicos.

Debe observarse que cuando el punto G está en una posición exterior al segmento $\overline{BE}$, el cuadrilátero $DCGE$ siempre es no convexo (es un cuadrilátero cruzado o complejo). Sin embargo, este aspecto es intrascendente para el planteo del problema, que se refiere a cuatro puntos concíclicos. El problema de la convexidad o no del cuadrilátero $DCGE$ se atiende en el proceso de resolución del problema.

Análisis del problema. Esta etapa constituye una mirada retrospectiva del problema y otra mirada perspectiva hacia sus potencialidades y utilidad. La vista retrospectiva responde al *looking back* señalado por Polya (1957) y no implica, necesariamente, recorrer de nuevo todos los momentos del programa heurístico que posibilitó el planteo, sino la reconsideración de los aspectos esenciales. El primero de ellos consiste en la solución del problema planteado, lo cual puede conllevar a la identificación y subsanación de errores, e incluso a la modificación de las condiciones del problema. En el tercer problema, en el caso en que las semirrectas AC y BE se cortan en un punto perteneciente a la prolongación de $\overline{BE}$ por E es necesario demostrar todavía que los puntos D, C, E y G son concíclicos, lo que puede quedar para el trabajo independiente de los alumnos.

El primer problema se origina mediante una combinación de los procesos lógicos de generalización y particularización. Como puede apreciarse, cuando los criterios de generalización y particularización son diferentes, el proceso de razonamiento conduce a situaciones generalmente nuevas y, con ello, a nuevos problemas. El segundo problema se generó mediante la aplicación de la estrategia *"qué-si-no"* (en lugar de dos rectángulos se consideró un trapecio y un rectángulo), se asoció de nuevo el concepto de área y se procedió a la búsqueda de relaciones entre lados, ángulos y triángulos. Por último, el tercero de los problemas se originó al variar condiciones (se prolongó un lado y una diagonal, de modo que se intersecaran en un punto), al encontrar un par de ángulos suplementarios y asociar el concepto de cuadrilátero inscrito en una circunferencia al cuadrilátero $DCGE$, con lo cual se incorporó un nuevo elemento a la situación planteada (la circunferencia circunscrita). Una vez más se observa que la búsqueda de nuevos problemas se enriquece no solo con el hallazgo de nuevas propiedades, sino también con la incorporación de nuevos elementos al objeto matemático. Luego de trazar la circunferencia que circunscribe el cuadrilátero, otros problemas pueden emerger considerando nuevas relaciones entre puntos, rectas y la propia circunferencia.

Nótese que en la formulación de los problemas intervienen elementos de orden estético y práctico, como ocurre en el segundo problema, cuando se seleccionan las longitudes $\overline{BF} = 9{,}0\ cm$ y $\overline{AD} = 4{,}0\ cm$. No es propósito del problema enfatizar en el cálculo numérico, sino en el razonamiento geométrico. Por tanto, es mejor tomar valores convenientes para dichas longitudes de modo que $\overline{BD}^2$ sea un cuadrado perfecto y se simplifique el cálculo numérico.

En el tercer problema es importante observar que este tiene sentido bajo la restricción $0° < \measuredangle CDE < 90°$, donde dicho ángulo se considera orientado positivamente en sentido antihorario. Con ayuda de GeoGebra puede observarse que si la amplitud del $\measuredangle CDE$ tiende a 0°, entonces las semirrectas AC y BE tienden a ser paralelas no coincidentes y no se cortarían en un punto del semiplano que contiene a F, respecto a la recta DC. Si $\measuredangle CDE$ obtusángulo, entonces las rectas AC y BE se cortarían en el semiplano contrario a F, respecto a DC, y ello implicaría otras consideraciones en el problema. Para evitar esto, en el enunciado se precisa $0° < \measuredangle CDE < 90°$. Si se renuncia a esta condición y se utiliza el concepto de recta, en lugar de semirrecta, surge un nuevo problema y se incrementa el grado de complejidad de la solución.

También hubiera sido posible considerar que un lado de un cuadrado no fuera una diagonal del otro (se modifica el cuarto atributo determinado). Por ejemplo, si los dos cuadrados estuvieran dispuestos de modo que un vértice de uno yaciese en el centro del otro, entonces se podría indagar acerca del valor del área de las intersecciones de los dos cuadrados, lo que puede dar lugar a una tarea para la casa de nivel productivo.

Bajo la mirada perspectiva, es sugerente analizar la utilidad del resultado obtenido. Si el problema emerge como parte de una discusión heurística en la clase de matemática, entonces se podría valorar cómo proceder en situaciones semejantes, o bien orientar la solución del problema encontrado organizando el trabajo por pequeños grupos. También el hecho de plantear nuevos problemas deja una importante huella en el pensamiento de los alumnos, relacionada con el estímulo de sus potencialidades y la sistematización de otros recursos aprendidos. Incluso existen elementos perspectivos que apuntan hacia la concepción de la propia ciencia, al mostrar el quehacer matemático como un proceso vivo e inherente al ser humano. El planteo de problemas también constituye un recurso para influir favorablemente en la concepción flexible y falibilista de la matemática (Ernest, 1991). Ya en el caso de la formación de profesores, también es conveniente discutir aspectos didácticos relacionados con la graduación de la complejidad del problema, las normas de calificación, la viabilidad del problema en contexto concreto del ambiente didáctico, entre numerosos aspectos de su formación profesional.

Conclusiones

Los resultados mostrados reflejan la amplitud del PHG establecido por Polya para el proceso de resolución de problemas, en el sentido de servir también de base para el planteo de problemas. Por tanto, ambos procesos deben verse en estrecha unidad dialéctica. Desde el punto de vista práctico, la adecuación realizada contiene etapas y acciones concretas que resultan útiles para la matemática educativa, pues sirven de recurso de enseñanza y también de aprendizaje para el planteo de problemas en el contexto escolar. Las etapas que conforman la adecuación del PGH pueden concebirse en forma de estrategia heurística, la cual puede ser objeto de enseñanza en la formación de profesores de matemática. Así, los futuros maestros pueden incorporar en su formación no solo un modo de organizar el razonamiento hacia la búsqueda de problemas, sino también un recurso que se manifiesta como habilidad profesional. Los modos de actuación aprendidos pueden favorecer una mirada más flexible, activa y participativa en el quehacer matemático. Para el alumno esto significa un progreso en el desarrollo del pensamiento matemático avanzado, y para el futuro profesor también significa una forma más activa de enseñar lo aprendido y de dejar una huella favorable en la educación de sus estudiantes.

El ejemplo desarrollado apenas ilustra un proceso mucho más profundo e inagotable, donde no es posible recorrer las infinitas variantes de exploración. El empleo de recursos computacionales es favorable y sugerente, especialmente los paquetes de geometría dinámica, donde la movilidad puede conducir al establecimiento de hipótesis cuya verificación constituyen problemas. Si bien el ejemplo está relacionado con la geometría plana, también es posible implementar la adecuación del PHG en otros contenidos matemáticos. Este aspecto trae a colación la necesidad de una elevada preparación del maestro, ya que la autopreparación para conducir el proceso puede enfrentar aspectos no previstos durante la propia clase.

El tema abordado también está relacionado con numerosos procesos tales como el razonamiento analógico y la generalización, pero también con elementos de la creatividad matemática, el control metacognitivo, y las creencias y concepciones sobre el saber matemático. Estos aspectos no han sido abordados aquí, pero su conexión ha sido constatada en numerosos estudios del campo de la resolución de problemas. Por tanto, ya que es transferible y adaptable el PHG al campo del planteo de problemas, quedan abiertos nuevos caminos para la indagación científica en el futuro.

Referencias bibliográficas

Baumanns, L., & Rott, B. (2020), Rethinking problem-posing situations: a review. *Investigations in Mathematics Learning*. doi: 10.1080/19477503.2020.1841501

Brown, S. I., & Walter, M. I. (1990). *The Art of Problem Posing* (2nd ed.). Erlbaum, Hillsdale, New Jersey.

Cai, J., & Hwang, S. (2020). Learning to teach through mathematical problem posing: Theoretical considerations, methodology, and directions for future research. *International Journal of Educational Research*, *102*, 101391. doi: 10.1016/j.ijer.2019.01.001

Cruz, M. (2021). *A strategy for enhancing mathematical problem posing.* Paper presented at TSG-17 in the 14th International Congress on Mathematical Education (ICME 14, July 11-18), Shanghai.

Cruz, M., García, M. M., Rojas, O. J., & Sigarreta, J. M. (2016). Analogies in mathematical problem posing. *Journal of Science Education*, *17*(2), 84-90. https://chinakxjy.com/downloads/V17-2016-2/V17-2016-2-9.pdf

Díaz, M. (2006). *Problemas de Matemática para los Entrenamientos de la Educación Secundaria Básica* (vol. II). La Habana: Pueblo y Educación.

English, L. D. (2019). Teaching and learning through mathematical problem posing: commentary. *International Journal of Educational Research*. doi: 10.1016/j.ijer.2019.06.014

Ernest, P. (1991). *The Philosophy of Mathematics Education*. New York: The Falmer Press.

Kilpatrick, J. (1987). Problem formulating: where do good problems come from? In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive Science and Mathematics Education* (pp. 123-147). Erlbaum: Hillsdale.

Leavy, A., & Hourigan, M. (2020). Posing mathematically worthwile problems: developing the problem-solving skills of prospective teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *23*(4), 341-361. doi: 10.1007/s10857-018-09425-w

Leikin, R., & Elgrably, H. (2020). Problem posing through investigations for the development and evaluation of proof-related skills and creativity skills of prospective high school mathematics teachers. *International Journal of Educational Research*, *102*, 101424. doi: 10.1016/j.ijer.2019.04.002

Polya, G. (1957). *How to Solve It: A new Aspect of Mathematical Method* (2nd ed.). Princeton: Princeton University Press.

Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics*, *14*(1), 19-28. https://www.jstor.org/stable/40248099?origin=JSTOR-pdf

Clame Acta Latinoamericana de Matemática Educativa
SECCIÓN 2 / PROPUESTAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS
VOL 34, NÚMERO 2, AÑO 2021

EL MÉTODO DE APRENDIZAJE COOPERATIVO EN MATEMÁTICA
THE COOPERATIVE LEARNING METHOD IN MATHEMATICS

Niurys Lázaro Alvarez; María Caridad Valdés Rodríguez
Universidad de las Ciencias Informáticas (Cuba)
nlazaro@uci.cu, mvaldes@uci.cu

Resumen
El proceso de enseñanza aprendizaje de las asignaturas de Matemática en el primer año de carreras de Ingeniería requiere de métodos y estrategias que motiven el aprendizaje de los estudiantes, más en época de la pandemia provocada por la Covid-19. El presente trabajo tiene por objetivo exponer una experiencia docente mediante el empleo del método de aprendizaje cooperativo para motivar el aprendizaje de la asignatura Matemática I, en la carrera Ingeniería en Ciencias Informáticas. El trabajo muestra cómo se diseñó la experiencia a través del sistema de clases relacionado con el análisis de curvas de funciones reales de una variable real mediante el cálculo diferencial. Los estudiantes realizaron diferentes actividades en equipo dentro y fuera de clases, crearon ejercicios y utilizaron las tecnologías para el aprendizaje y la realización de actividades evaluativas. Se logró la motivación de los estudiantes por el estudio y se elevaron los resultados de promoción en cantidad y calidad.

Palabras clave: aprendizaje cooperativo, enseñanza aprendizaje, matemática

Abstract
Mathematics teaching-learning process in the first year of engineering degree courses requires methods and strategies that motivate students' learning, especially in the time of the pandemic caused by Covid-19. This work aims to present a teaching experience by using the cooperative learning method to motivate the learning in Mathematics I subject, in the Computer Science Engineering degree. The work shows how the experience was designed through the system of lessons related to the analysis of real function curves of a real-variable by using differential calculus. The students carried out different team activities in and out of class; they created exercises and used technologies for learning and carrying out evaluation activities. Students' learning motivation was achieved; and academic performance results increased quantitative and qualitative.

Key words: cooperative learning, teaching-learning, mathematics

Introducción

El proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en cualquier carrera se enfrenta con frecuencia a rechazos, predisposición y, por lo tanto, bajos resultados en las evaluaciones de los estudiantes. Uno de los componentes de la didáctica que incide en este proceso son los métodos de enseñanza, pues son la vía para la dirección de la actividad cognoscitiva de los educandos.

En los informes semestrales que se emiten del Departamento de Matemática se identifica la necesidad de introducir métodos activos que contribuyan al aprendizaje de los estudiantes e incrementen el uso de las tecnologías para el aprendizaje en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Teniendo en cuenta que el presente trabajo se enfoca en la enseñanza de asignaturas de Matemática, en el primer año, de la carrera de Ingeniería en Ciencias Informáticas, se presenta una experiencia docente que responde a la pregunta; ¿Cómo introducir el método de aprendizaje cooperativo en el tratamiento de la aplicación del cálculo diferencial al análisis de curvas, que exijan en los estudiantes el trabajo en equipos, la indagación, la investigación y la búsqueda de la información utilizando las tecnologías?

El trabajo presenta primeramente un estudio del arte sobre el uso del método de aprendizaje cooperativo en el proceso de enseñanza-aprendizaje, posteriormente recomendaciones para la utilización del método de aprendizaje cooperativo en Matemática y la descripción de la propuesta de utilización del método en el tratamiento de las aplicaciones del cálculo diferencial al análisis de curvas y concluye con el análisis de resultados.

Marco teórico

Los métodos de enseñanza son el conjunto de técnicas y actividades que un profesor utiliza con el fin de lograr uno o varios objetivos educativos. En los últimos años se han introducido las metodologías activas como estrategias que conciben el aprendizaje como un proceso integrador y constructivista, y no solo receptivo, donde la formación y construcción de conocimientos están orientados a la participación activa de los alumnos a partir de oportunidades y condiciones dadas por el profesor cercanas al perfil profesional (Montes de Oca y Machado, 2011).

Existen diferentes tipos de metodologías activas que contribuyen al buen desarrollo de los métodos de enseñanza por parte del profesor con la activa participación de los estudiantes, entre ellos: el aprendizaje basado en problemas, el aprendizaje basado en proyectos, el método de estudio de casos, las simulaciones dramatizadas o través de las tecnologías, el método de situación, las discusiones, las dinámicas de grupo y el aprendizaje cooperativo. También suele utilizarse la mezcla de varios de éstos.

El aprendizaje cooperativo se basa en el empleo didáctico de grupos reducidos de estudiantes que trabajan juntos y se interrelacionan entre sí para mejorar su aprendizaje y el de los demás, orientados y guiados por el profesor. Uno de sus precursores, John Dewey, promovía la importancia de construir el conocimiento mediante la interacción entre iguales en el salón de clases (García, 2012).

Éste se diferencia de los aprendizajes colaborativo, competitivo e individualista. Según Zañartu (2000) la diferencia básica entre aprendizaje cooperativo frente al colaborativo, es que mientras que el primero necesita de una gran estructuración para la realización de una actividad por parte del docente; el segundo necesita mucha más autonomía del grupo de estudiantes y menos estructuración por parte del profesor. Por otra parte, en el aprendizaje competitivo los estudiantes rivalizan entre sí para el logro de sus objetivos de forma individual, al margen del resto del grupo; similar al aprendizaje individualista, donde tienen como único objetivo la realización de su tarea. De donde el aprendizaje cooperativo es superior a estos para la socialización, el aprendizaje y el rendimiento académico (García, Traver y Candela, 2019).

Se define el aprendizaje cooperativo como "un modelo pedagógico en el que los estudiantes aprenden con, de y por otros estudiantes a través de un planteamiento de enseñanza-aprendizaje que posibilita la interacción e interdependencia positivas en el que docente y estudiantes actúan como co-aprendices" (Fernández-Río, 2014, p.70).

El proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática se fortalece con el método de aprendizaje cooperativo y contribuye al desarrollo de habilidades matemáticas (Yong, Cedeno, Tubay y Cedeno, 2018). Se utiliza también en otros niveles educativos (Iglesias, López, y Fernández-Río, 2017) con resultados significativos en la motivación por la asignatura. Aunque se consideran insuficientes, en la literatura consultada se encontraron varias experiencias de éxito sobre el aprendizaje cooperativo en Matemática (Bertaa y Hoffmannb, 2020; Capar y Tarim, 2015; Terwel, 2011).

Asimismo, en las diferentes ediciones del Acta Latinoamericana de Matemática Educativa revisadas se valora la importancia de este método para la enseñanza de la Matemática en el primer año de carreras universitarias, así como para propiciar un mejor aprendizaje (Martínez, Bianco, Martín y López, 2014; Kreimer, 2014; Salazar, 2018; Vrancken, Müller y Engler, 2018).

El aprendizaje cooperativo es una estrategia didáctica que parte de la organización de la clase en pequeños grupos donde los estudiantes trabajan de forma coordinada para resolver tareas académicas y desarrollar su propio aprendizaje. Para activarlo en clases, según Carrasco (2011, diapositiva 18) se deben realizar las siguientes acciones:

- Conformar grupos de tres alumnos que garanticen la interacción de todos con todos.
- Explicar a los alumnos por qué se usa el método, en qué consiste el método, dificultades y expectativas.
- Enseñarles habilidades de interacción grupal (escuchar, respetar opiniones, intentar consensos entre otros).
- Animarles a pedir ayuda primero a sus compañeros, luego al profesor.
- Utilizar los materiales según el nivel de dificultad.
- Planificar y controlar el tiempo y realización de las tareas.
- Realizar el seguimiento del grupo y comprobar tanto el aprendizaje grupal como el individual mediante tutorías.

Es recomendable para introducir el método, primeramente, realizar pequeñas actividades cooperativas en dúos durante el desarrollo de una clase, un ejercicio o una práctica. Posteriormente, planificar secuencias formales de aprendizaje cooperativo en equipos, mediante actividades que ocupan desde una clase hasta varias semanas.

Otros autores sugieren asignar roles para el trabajo en el equipo (Cuadrado, et al., 2012) específicos en la realización de la tarea y roles de organización del equipo, tales como:

1. Roles específicos a desempeñar en la realización de la tarea:
   - Verificador de tareas: se asegura que todos hayan entendido los contenidos.
   - Incentivador del diálogo: procura que todos los miembros del equipo den respuesta y tomen decisiones de forma consensuada.
   - Sintetizador: sintetiza y recapitula utilizando esquemas y/o mapas.
   - Verificador de la corrección: Se asegura de que las respuestas y producciones del equipo sean correctas.
2. Roles de organización a desempeñar en el equipo:
   - Supervisor: control de la disciplina.
   - Coordinador: supervisa que todos anoten y realicen deberes, trabajos y tareas.
   - Moderador: dirige las actividades, reparte el turno de palabra.
   - Portavoz: se comunica con otros grupos o con el profesor.

Asimismo, se puede utilizar el método del intercambio de conocimientos, descrito por Leikin y Zaslavsky (2013), donde cada participante juega el rol de estudiante y de profesor en diferentes momentos.

El método se utiliza en dos etapas dentro del entorno de aprendizaje, las etapas se diferencias en la organización de los grupos o equipos. Una primera en que se organizan en grupos de expertos que trabajan sobre una misma tarjeta de aprendizaje, y concluye cuando los estudiantes se ponen de acuerdo en la solución del problema de la parte dos. En la segunda etapa se organizan en grupos de intercambio de conocimientos y participan representantes de cada tarjeta de aprendizaje; trabajan en parejas intercambiando roles de profesor y estudiante, el proceso se repite hasta que todos los integrantes hayan resuelto y comprendido los problemas propuestos en la parte dos de cada tarjeta.

Se describen dos formas de aplicación del método aprendizaje cooperativo en clases de Matemática, siguiendo las pautas y juego de roles específicos y organizativos en el trabajo en equipos y el método del intercambio de conocimientos, presentado por Leikin y Zaslavsky (2013), donde cada participante juega el rol de estudiante y de profesor en diferentes momentos, mediante tarjetas de aprendizaje relacionadas con un tema específico de Matemática. Cada tarjeta consta de tres partes: un ejemplo resuelto, un problema similar al resuelto para resolver y uno de mayor complejidad.

Desarrollo de algunos ejemplos

Como ejemplo de aplicación del método se utiliza el sistema de clases relacionado con la aplicación del cálculo diferencial al análisis de curvas en la asignatura Matemática I de la carrera Ingeniería en Ciencias Informáticas.

Dentro de los objetivos previstos en el plan de estudios para la asignatura se encuentran:

1. Interpretar el concepto de derivada de una función en un punto y su relación con la pendiente de la recta tangente a la curva de la función en dicho punto.
2. Calcular derivadas de funciones elementales y compuestas.
3. Aplicar los métodos del Cálculo Diferencial para el análisis del comportamiento de funciones reales de una variable.

Dentro del sistema de conocimientos relacionados con el análisis de curvas:

- Extremos locales y globales de funciones. Intervalos de monotonía.
- Asíntotas. Puntos de inflexión. Concavidad y convexidad.
- Trazado de la gráfica de una función.

Primeramente, se plantean los elementos didácticos a tener en cuenta (objetivos, contenidos, forma organizativa, métodos, medios y evaluación) para la planeación del sistema de clases y posteriormente se muestran algunos ejemplos de actividades a desarrollar según el tipo de clase. En la Tabla 1 se resumen los objetivos, contenidos, formas organizativas, métodos y medios propuestos para el sistema de clase.

Tabla 1. *Objetivos, contenidos, formas organizativas, métodos, medios y evaluación propuestos para el sistema de clase.*

No. clase	1	2	3	4
Forma organizativa	**Conferencia**	**Clase práctica**	**Clase práctica en Laboratorio**	**Taller**
Título	Análisis de curvas de funciones reales de una variable	Ejercitación sobre extremos, monotonía	Ejercitación sobre análisis de curvas	Profundización sobre análisis de curvas.

No. clase	1	2	3	4
		y concavidad de funciones		
Objetivo	Describir el procedimiento para representar gráficamente una función a partir de sus propiedades, de la primera y segunda derivada.	Identificar el procedimiento para la determinación de extremos, intervalos de monotonía y concavidad.	Algoritmizar el procedimiento para representar gráficamente una función a partir de sus propiedades, de la primera y segunda derivada.	Aplicar los métodos del cálculo diferencial para el análisis del comportamiento de funciones reales de una variable en situaciones reales.
Métodos	Elaboración conjunta y trabajo cooperativo en dúos	Trabajo cooperativo en equipos	Trabajo cooperativo en dúos	Trabajo cooperativo en equipos
Medios de enseñanza	pizarra y plumones. Libro de texto, PC (diapositivas, asistente matemático)	pizarra y plumones. Libro de texto, Tarjetas de aprendizaje, PC (diapositivas, asistente matemático y video tutorial)	pizarra y plumones. Libro de texto, PC (diapositivas, asistente matemático y video tutorial)	PC (diapositivas, asistente matemático, video y herramienta para la edición y producción de videos)
Evaluación	Preguntas orales	Pregunta escrita revisada por sus pares	Trabajo en el laboratorio	Presentación y preguntas orales en el taller

Elaboración de los autores.

A continuación, se describe un ejemplo de actividad mediante aprendizaje cooperado para cada tipo de clase.

En la clase 1, desarrollada en forma de conferencia y utilizando la elaboración conjunta y el aprendizaje colaborativo en dúo se propone el método inductivo para obtener la relación entre el signo de la función primera derivada y la función original donde un estudiante analiza la monotonía de la función y el otro el signo de la derivada.

Actividad 1 Utilización de imágenes en las Figuras 1 y 2 para el análisis geométrico de la monotonía y la concavidad de funciones. Dada las gráficas de una función y su primera derivada, analizar la relación que existe entre la monotonía de la función y el signo de la derivada: Nota: Se hace corresponder el color de la ecuación con el de su gráfica

$$f(x) = x^4(x-1)^3 \qquad\qquad f'(x) = x^3(x-1)^2(7x-4)$$

Recomendación a los estudiantes: Para su realización, un estudiante analiza el signo de la derivada y otro la monotonía de la función en los siguientes intervalos: $(-\infty, 0)$; $(0,1)$; $\left(1, {}^4/_7\right)$ y $\left({}^4/_7, +\infty\right)$. Posteriormente, ambos hagan un análisis de lo que ocurre y planteen conclusiones. Las gráficas y las ecuaciones de la función y su derivada se corresponden en color rojo y azul, respectivamente. Se han obtenido con el asistente matemático DERIVE la primera derivada de *f(x)* y las gráficas de ambas funciones.

Figura 1. *Gráfica de la función.*

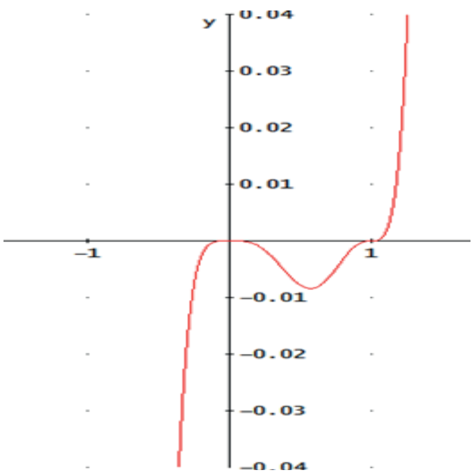
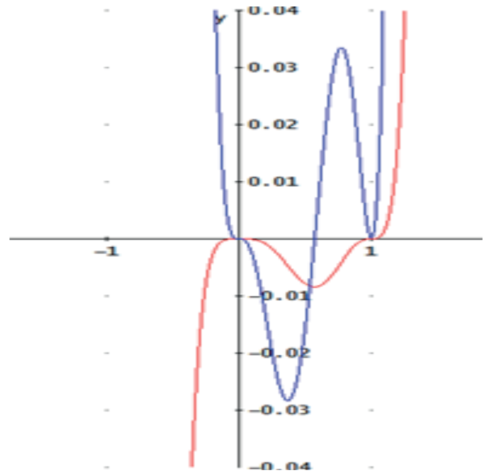


Figura 2. *Gráficas de la función y su derivada.*



Elaboración de los autores.

Posible respuesta: *f(x)* crece si *f '(x)>0* y *f(x)* decrece si *f '(x) <0*

Actividad 2 Utilización de tarjetas para el análisis de la relación entre las funciones y sus derivadas y los intervalos de monotonía y concavidad.

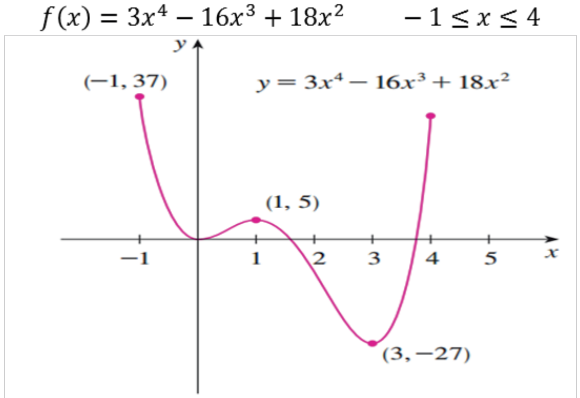
Para la clase 2 que se desarrolla en forma de clase práctica se utiliza el método del intercambio de conocimientos mediante tarjetas como se describió en la sección anterior. Se muestran en las Figuras 3, 4, 5 y 6 ejemplos de ejercicios y tarjetas utilizadas. Existen tantas tarjetas diferentes como grupos de expertos se formen, pero todas responden a un mismo objetivo.

Figura 3. *Ejercicio 1 de la Tarjeta 1.*

Tarjeta 1.

1. Estudia el siguiente ejemplo resuelto y analiza con tu pareja la solución.
   a. La función *f(x)* representada en el sistema coordenadas rectangulares en la figura 3, posee extremos en los valores *x=-1; x=0; x=1; x=3; x=4.*
   b. Los puntos de coordenadas *(-1,37)* y *(3,-27)* son puntos de extremos absolutos: máximo y mínimo respectivamente.
   c. Los valores absolutos máximo y mínimo son *37* y *-27*, respectivamente.

$$f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2 \qquad -1 \le x \le 4$$



Elaboración de los autores.

Figura 4. *Ejercicio 2 de la Tarjeta 1.*

Tarjeta 1.

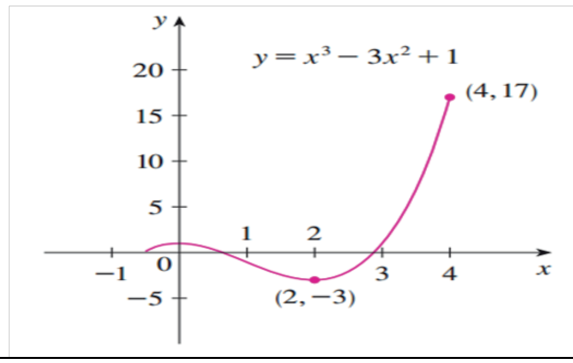
2. De la siguiente función diga:

a. Para qué valores del dominio la función f(x), representada en el sistema coordenadas rectangulares, alcanza valores extremos.

b. Identifica los puntos de extremos absolutos.

c. ¿Cuáles son los valores absolutos máximo y mínimo?

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1 \qquad -\frac{1}{2} < x \leq 4$$

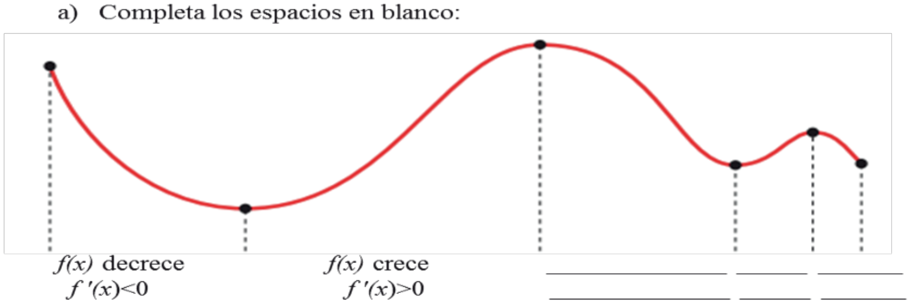


Elaboración de los autores.

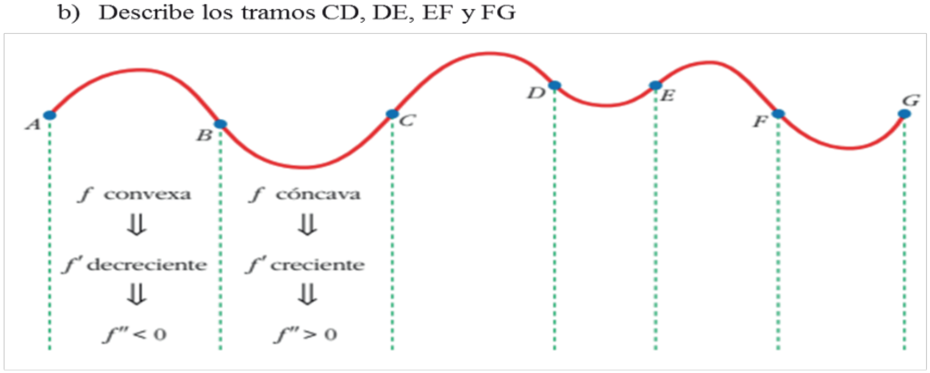
Figura 5. *Ejercicio 1 de la Tarjeta 2.*

Tarjeta 2.

1. Reflexiona y descubre.
   a) Completa los espacios en blanco:



   b) Describe los tramos CD, DE, EF y FG



Elaboración de los autores.

Figura 6. *Ejercicio 2 de la Tarjeta 2.*

Tarjeta 2.

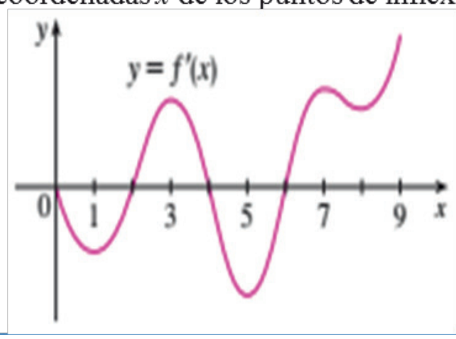
2. Se muestra la gráfica de la primera derivada f' de una función f.

a) ¿Sobre qué intervalos f es creciente? Explique.

b) ¿En qué valores de x tiene f un máximo o mínimo local? Explique.

c) ¿Sobre qué intervalos es f cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo? Explique.

d) ¿Cuáles son las coordenadas x de los puntos de inflexión de f? ¿Por qué?



Elaboración de los autores.

Actividad 3 Se introduce una actividad de aprendizaje cooperado vinculado con la visualización de videos tutoriales. Se orienta como estudio independiente de la Clase Práctica 1 a realizar en dúos con la siguiente orientación: Visualizar en dúo el video que se comparte en el siguiente vínculo: https://youtu.be/Q73XxigqTP8

Mientras visualizan toma nota de:

1. Tipo de función que se trabaja.
2. ¿Qué aporta la primera derivada a la gráfica de dicha función?
3. ¿Qué aporta la segunda derivada a la gráfica de dicha función?
4. ¿Cuáles son los ceros de la función?
5. Escribe el algoritmo general para analizar y representar la curva de dicha función.

Al revisar esta tarea en la próxima clase se propicia el intercambio de notas entre diferentes dúos hasta llegar al algoritmo más completo.

Actividad 4 El aprendizaje cooperativo junto a la producción de videos se desarrolla con vistas al Taller final del tema de estudio. Con tiempo suficiente se orienta a los estudiantes la producción de un video tutorial sobre el análisis de las propiedades y representación gráfica de una función utilizando el cálculo diferencial. Para ello deben emplear asistentes matemáticos y editores de texto, ecuaciones y video. Asimismo, se distribuyen las tareas entre los miembros del equipo donde cada estudiante realiza una tarea de forma independiente y luego, unos necesitarán de otros para conformar la tarea definitiva a presentar en equipos.

Para el desarrollo de la tarea se facilita a los estudiantes las siguientes condiciones:

- Se facilita una herramienta que permite hacer y editar videos mediante captura de pantallas.
- Se comparten videos tutoriales sobre el uso de la herramienta y sobre la producción de videos tutoriales.
- Se realizan tutorías a los equipos durante el desarrollo de la actividad para evaluar el desarrollo y participación de los miembros del equipo.

Para la actividad se distribuyen las siguientes tareas entre los miembros del equipo:

1. Selección de las funciones a graficar y analizar sus propiedades.
2. Utilización del asistente matemático para los cálculos necesarios y representación gráfica de las funciones.
3. Realización de la presentación a utilizar para la edición del video.
4. Revisión de los resultados de las tareas 1, 2 y 3.
5. Realización del guion del video tutorial.
6. Utilización de la herramienta de edición de video.

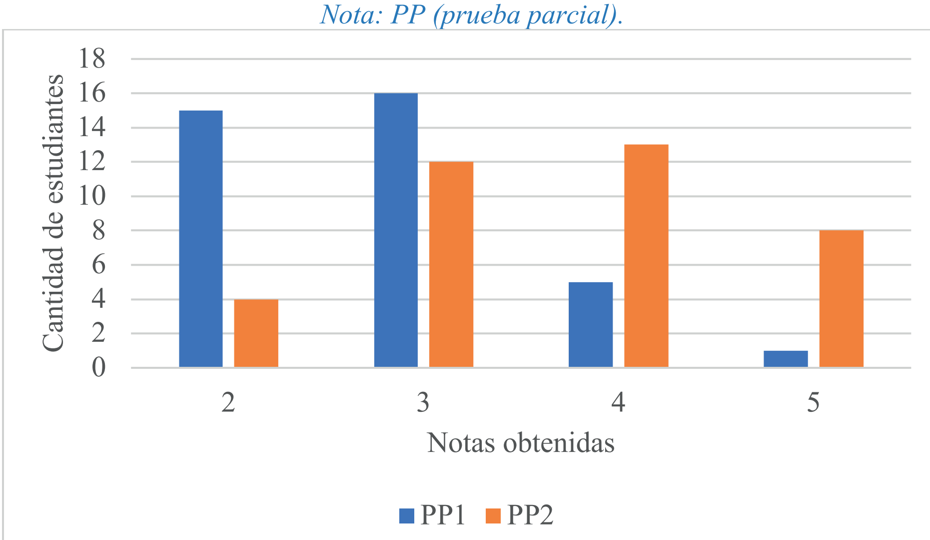
Como resultado de la actividad 4 los estudiantes lograron realizar videos tutoriales en equipo, otro elemento motivador para la asignatura (Lázaro, 2020)

Resultados

La experiencia se desarrolló en los cursos académicos 2017-2018 y 2018-2019, con 37 estudiantes de primer año, en la carrera Ingeniería en Ciencias Informáticas. Se muestran a continuación, en la Figura 7, los resultados cuantitativos obtenidos de las pruebas parciales de la asignatura. Las pruebas parciales se evalúan empleando las categorías siguientes: excelente (5), bien (4), regular (3) y mal (2). Cada categoría establecida expresa el grado de calidad alcanzado por el estudiante en el cumplimiento de los objetivos de las asignaturas. Las calificaciones de excelente, bien y regular expresan diferentes grados de dominio de los objetivos que tienen los estudiantes y, con cualquiera de ellas, resulta aprobado en la asignatura. La calificación con valor igual a mal (2) expresa que el estudiante no domina los objetivos al nivel mínimo requerido (Ministerio de Educación Superior, 2017).

Los resultados revelan los avances de los estudiantes en los grupos donde se ha aplicado la estrategia de la primera prueba parcial a la segunda, un incremento de un 30% de aprobados y un 40% de calidad. Los aprobados se determinan, mediante el porcentaje de estudiantes con notas de 3, 4 y 5 respecto al total, y la calidad mediante el porcentaje de estudiantes con notas de 4 y 5 respecto al total. Asimismo, al concluir la asignatura en el primer semestre del curso 18-19, se elevaron los resultados académicos del grupo experimental tanto en cantidad (+40%) como en calidad (+45%) respecto a otros grupos que no participaron. Coincidiendo estos resultados con otros estudios donde se aplicó el método en Matemática (Martínez, et al, 2014; Yong, et al, 2018).

Figura 7. *Resultados de las pruebas parciales 1 y 2 de MI en los 37 estudiantes de muestra Nota: PP (prueba parcial).*



Elaboración de los autores.

Se logró la motivación por el aprendizaje de la asignatura mostrada en la opinión de los estudiantes y la dedicación al estudio. Los estudiantes interactuaron en la realización de estas y otras actividades, unos dependían de otros para la respuesta y conclusiones de cada tarea e intercambiaron sus soluciones.

Desde el punto de vista cualitativo se solicitó la opinión de los estudiantes al concluir la asignatura de Matemática I, donde se le aplicó la técnica PNI de forma anónima, para conocer lo positivo, negativo e interesante sobre las actividades. Participaron los 37 estudiantes, todas las opiniones fueron positivas e interesantes, se declaran a continuación las ideas que más se repitieron:

Positivo Relacionado con el método de enseñanza opinaron sobre "me sentí muy bien participando en equipo", "la forma de enseñar en las clases", "nos ayudó a trabajar mejor como equipo y a limar nuestras diferencias", "aprendí lo importante que es ser disciplinado y a estudiar para triunfar", "pude colaborar con mis compañeros", "puedo aprender de mis compañeros", "pude aplicar el cálculo diferencial e integral a la vida".

Interesante "utilicé mi celular para hacer trabajos de matemática", "la utilización del Derive para graficar mi función", "pude realizar un video", "la manera y el método de la profesora dar las clases", "no me aburre la clase de matemáticas".

Estas opiniones corroboran que vale la pena trabajar metodológicamente para diseñar actividades de aprendizaje cooperativo que motiven el estudio de la Matemática en los estudiantes.

Estos resultados en la motivación de los estudiantes por la matemática corroboran los obtenidos por García (2012) y Kreimer (2014).

Conclusiones

Cuando se aplica el sistema de aprendizaje cooperativo en grupos la dinámica en clase mejora; los estudiantes se implican y se introducen en la materia de una forma mucho más participativa; la responsabilidad que adquieren provoca que su actitud ante los proyectos sea más comprometida. En aquellos casos en los que la implicación resulta ser menor por parte de un participante, el propio grupo le recuerda que ellos dependen de él. La posición vigilante del profesor desaparece siendo los propios estudiantes los que adquieren ese rol.

La experiencia realizada en un aula de la asignatura Matemática I en la Universidad de las Ciencias Informáticas resultó satisfactoria para los estudiantes pues elevó el rendimiento académico de los estudiantes, donde se aprecia un considerable avance tanto en cantidad de estudiantes aprobados (+40%) como en la calidad de los resultados (+45%) respecto a los grupos que no aplicaron la experiencia. Desde lo cualitativo, la opinión de los estudiantes sobre los aspectos positivos e interesantes percibidos en la metodología utilizada evidenció una mayor motivación intrínseca por la asignatura. Los estudiantes implicados, tanto en su progreso individual como grupal, lograron el desarrollo de habilidades que contribuyeron a su motivación y satisfacción durante el proceso de enseñanza-aprendizaje de la asignatura Matemática I. Hoy es un reto y necesidad llevar este método a un ambiente virtual.

Referencias bibliográficas

Bertaa, T. y Hoffmannb, M., (2020). Cooperative learning methods in mathematics education – 1.5 year experience from teachers' perspective. *Annales Mathematicae et Informaticae 52*, 269–279. https://doi.org/10.33039/ami.2020.12.002

Capar, G. y Tarim, K., (2015). Efficacy of the Cooperative Learning Method on Mathematics Achievement and Attitude: a Meta-Analysis Research. *Educational Sciences: Theory & Practice. 15*(2), 553-559. https://doi.org/10.12738/estp.2015.2.2098

Carrasco, V., (6 de mayo de 2011). *Metodologías para el aprendizaje activo.* [Diapositiva de PowerPoint]. SlideShare. https://es.slideshare.net/JoaquiCB/metodologas-para-el-aprendizaje-activo

Cuadrado, C., Fernández, F. J., Fernández, M., Fernández-Pacheco, E., González, L., Lifante, I. y Moya, J. (2012). *Técnicas de trabajo en equipo para estudiantes universitarios.* REDES, 1-15. https://web.ua.es/es/ice/jornadas-redes-2012/documentos/posters/246217.pdf

Fernández-Río, J. (2014). Aportaciones del modelo de responsabilidad personal y social al aprendizaje cooperativo. *Actas de IX Congreso Internacional de Actividades Físicas Cooperativas,* Torre del Mar, Málaga.

García, M. (2012). *El aprendizaje cooperativo de las matemáticas en el s.XXI*. Universidad Politécnica de Cataluña. Recuperado el 28 de enero de 2021 de: https://upcommons.upc.edu/bitstream/handle/2099.1/17719/80641_memoria.pdf?sequence=1&isAllowed=y

García, R., Traver, J. y Candela, I., (2019). *Aprendizaje cooperativo. Fundamentos, características y técnicas.* Madrid: CCS. Recuperado el 28 de enero de 2021 de: https://bit.ly/3ktWi0g

Iglesias, J., López, T. y Fernández-Río, J. (2017). La enseñanza de las matemáticas a través del aprendizaje cooperativo en 2o curso de educación primaria. *Contextos Educativos,* 2, 47–64. https://doi.org/10.18172/com.2926.

Kreimer, M. (2014). Cómo enseñas y te diré como aprenden. En P. Lestón (Ed), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 27, 1697-1704. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Lázaro, N. (2020). Utilización y producción de videos tutoriales en Matemática. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 33*(1), 106–115.

Leikin, R. y Zaslavsky, O., (2013). Cooperative learning in mathematics. *The Mathematics Teacher, 92(*3), 240-246 Published by: National Council of Teachers of Mathematics Stable URL: http://www.jstor.org/stable/27970923

Martínez, S., Bianco, N.D., Martín, M.C. y López, F. (2014). En el primer año de carreras universitarias ¿es la matemática un problema para los estudiantes? Importancia de competencias específicas. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 27*, 281-289. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Ministerio de Educación Superior. (2017). *Reglamento de Organización Docente de la Educación Superior* (Reglamento No.111/2017; pp. 1–27). Gaceta Oficial de la República de Cuba.

Montes de Oca, N. y Machado, E.F. (2011). Estrategias docentes y métodos de enseñanza-aprendizaje en la Educación Superior. *Humanidades Médicas; V11*(3), pp. 475-488.

Yong, E. A., Cedeno, E. J., Tubay, M. F. y Cedeno, L. B. (2018). Aprendizaje colaborativo de matemáticas en los alumnos de Economía de la UTEQ. *Revista Ciencia e Investigación, 3*(10), 10–15.

Salazar, L. (2018). Invención de problemas en un contexto de competitividad y cooperación: una experiencia con sumas de series. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 31* (1), 215-222.

Terwel, J., (2011). Cooperative learning and Mathematics Education: A happy marriage. En *Workshop "Education for Innovation: The role of Arts and STEM Education"* (pp. 1-14). Paris: OECD.

Vrancken, S., Müller, D. y Engler, A. (2018). Ambientes de aprendizaje para el aula de Matemática en la Universidad. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 31* (1), 771-778.

Zañartu, L., (2000). Aprendizaje colaborativo: una nueva forma de Diálogo Interpersonal. En *Red. Contexto Educativo. Revista Digital en Educación y Nuevas Tecnologías.* (28). Año V. Recuperado el 28 de enero de 2021 de: http://contexto-educativo.com.ar/2003/4/nota-02.html

VOL 34, NÚMERO 2, AÑO 2021

PROPUESTA DE MODELACIÓN MATEMÁTICA PARA LA COMPRENSIÓN DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN UN CONTEXTO DE ENTORNOS RURALES

MATHEMATICAL MODELING PROPOSAL FOR UNDERSTANDING TRIGONOMETRIC RATIOS IN A RURAL ENVIRONMENT CONTEXT

Raúl Efraín Sánchez Martínez, Gabriela Ibarra Ruiz, Jesús Roberto Alcantar Palacios.
Centenaria y Benemérita Escuela Normal del Estado de Querétaro "Andrés Balvanera" (México)
raulefrainsanchezmartinez18@gmail.com, gabrielaibarraruiz8@gmail.com, jalcantar021@gmail.com

Resumen
La presente propuesta expone el uso áulico de un material didáctico que pretende disminuir las dificultades que hay en el aprendizaje y aplicación práctica de las razones trigonométricas, a través de un triángulo rectángulo interactivo. Dicho material se realizó con el propósito de emplearse con estudiantes de tercer grado de secundaria que habitan en zonas que carecen de entornos tecnológicos. Cabe señalar que la propuesta fue enriquecida con una contextualización en torno a un sentido ecológico y sustentable, con el que los alumnos se sintieran atraídos, además de poder visualizar el tema de forma cercana; se manifestó interés por parte de los estudiantes, logrando una mejor comprensión del tema, puesto que no se limitaron a utilizar solo el material propuesto, sino que hicieron uso de otras herramientas matemáticas que les ayudaron a encontrar soluciones a los problemas planteados.

Palabras clave: razones trigonométricas, interdisciplinar, modelación

Abstract
This paper presents the classroom use of a didactic material that aims to diminish the existing difficulties in the learning and practical application of the trigonometric reasons, through an interactive right-angle triangle. The aforementioned material was made with the aim to be used with third-grade middle school students who live in areas that lack technological environments. It should be point out that the proposal was enriched with a contextualization around an ecological and sustainable sense, what made students feel attracted, in addition to be able to visualize the subject in a close way. Interest was expressed on the part of the students, achieving a better understanding of the subject, since they did not limit themselves to using only the proposed material, but they made use of other mathematical tools that helped them to find solutions to the problems posed.

Key words: trigonometric ratios, interdisciplinary, modeling

Introducción

El presente escrito hace referencia a un reporte de actividad escolar, llevado a cabo durante el mes de enero de 2020, antes de comenzar la contingencia sanitaria derivada de la propagación del virus COVID-19 en México. La experiencia educativa se implementó con alumnos de tercero de secundaria, pues es hasta este grado que se propone la enseñanza de las razones trigonométricas de acuerdo con el plan de estudios mexicano.

La propuesta presentada se relaciona con el uso de un material didáctico referente a la manipulación de un triángulo rectángulo con vértices móviles, con el propósito de facilitar la comprensión y hacer palpable la aplicación de las razones trigonométricas. La pertinencia de este material es la funcionalidad en ambientes escolares donde se carece de entornos tecnológicos, ya que es un sustituto visual y manejable de plataformas de geometría dinámica, por lo que se vuelve relevante al poder ser ocupado en ambientes rurales, presentando de una manera interesante un contenido complicado.

En la enseñanza secundaria el contenido matemático que concierne a las razones trigonométricas, ha sido objeto de estudios epistemológicos debido a que: "la trigonometría es un contenido escolar que resulta difícil de entender por los estudiantes" (De Kee, Mura y Dionne, 1996; Maldonado, 2005; citado por Martin Fernández, Ruiz Hidalgo y Rico, 2016, p. 52).

De acuerdo con el contenido matemático, más allá de aprender un algoritmo de resolución, está la comprensión y aplicación de los procedimientos, los cuales pocas veces son reflexionados por los docentes, ya que se acostumbra a presentar dicho tema con ejercicios, donde se tiene que encontrar la dimensión de un lado faltante del triángulo rectángulo (Montiel, 2013).

Las actividades se llevaron a cabo con el objetivo de que los alumnos obtuvieran los modelos matemáticos de las razones trigonométricas seno y coseno, pretendiendo "llevar al alumno a construir conocimientos que tienen significados o sentido para él" (Biembengut y Hein, 2004, p. 108). Se decidió trabajar con aspectos teóricos de la modelación matemática, involucrando un tema actual como es el caso del cambio climático, implementando el trabajo interdisciplinar con la asignatura de Biología, donde se abordó el desarrollo sustentable como una propuesta que contrarreste los efectos de dicha problemática global.

Marco teórico

Para llevar a buen término las actividades planteadas en la propuesta presentada, se decidió trabajar con la modelación matemática expuesta por Biembengut y Hein (2004), quienes mencionan la importancia de introducirla en las aulas de secundaria como un recurso que apoye el proceso de enseñanza-aprendizaje, ya que: "permite al alumno no solamente aprender las matemáticas de manera aplicada a las otras áreas del conocimiento, sino también mejorar la capacidad para leer, interpretar, formular y solucionar situaciones problema" (Biembengut y Hein, 2004, p. 105).

Se consideró la definición planteada por los autores: "La modelación matemática es un proceso involucrado en la obtención de un modelo matemático. Un modelo matemático de un fenómeno o situación problema es un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que representa, de alguna manera, el fenómeno en cuestión" (Biembengut y Hein, 2004, p. 106).

La modelación busca que, a través de una interacción con el medio real, los alumnos puedan plantear los modelos adecuados que permitan dar solución a las problemáticas presentadas y de esta manera comprendan el contenido matemático relacionado. Para la puesta en práctica de las actividades, se consideraron las etapas de la modelación matemática del primer abordaje propuesto por los autores, con el objetivo de contextualizar el material didáctico y lograr que los estudiantes fueran miembros activos del aprendizaje.

Por lo anterior, esta propuesta de actividad escolar se clasifica dentro de la modelación como herramienta para enseñar y aprender matemática, donde lo relevante es: "la producción de significados matemáticos articulados a los significados de los objetos en los contextos y profesiones en que se modelan" (Villa-Ochoa y Alencar, 2019, p. 25), donde la importancia radica en construir conceptos matemáticos a partir de contextos cercanos a los alumnos.

Los alumnos no comprenden el significado de las razones trigonométricas pues el contenido tradicionalmente se imparte presentando fórmulas donde tienen que sustituir valores para encontrar lo que se pide. De acuerdo con Montiel (2013, p. 27): "El discurso Trigonométrico Escolar (dTE) ha convertido a las razones trigonométricas en el proceso aritmético de dividir las longitudes de los lados del triángulo, esto es, en una técnica para encontrar valores faltantes de un triángulo".

De esta manera, se ha decidido trabajar desde una perspectiva distinta a la comúnmente empleada, rescatando elementos que involucran a la proporcionalidad, de acuerdo con las investigaciones de Montiel (2013), pues es de esta confrontación donde surgen las razones trigonométricas. Algunas de las actividades de su trabajo son parte fundamental del presente reporte, pues complementado con el uso de un prototipo manipulable permite que los estudiantes establezcan las relaciones y razones proporcionales entre los elementos del triángulo rectángulo, logrando una comprensión más cercana de las razones trigonométricas.

Se sabe, de acuerdo con un estudio realizado por Naranjo y Triana (2015, p. 70) que:

Los estudiantes no le encuentran sentido a las respuestas que obtienen: por ejemplo, hallan el valor de la hipotenusa y, por algún error de procedimiento, obtienen un valor incorrecto menor al valor de los catetos; aun así, siguen resolviendo el triángulo.

Ello ratifica que es indispensable la adecuación de la clase en la que se imparta este contenido matemático, involucrando la participación de los estudiantes, donde puedan observar lo que ocurre al cambiar las longitudes de los elementos del triángulo y de esta manera se pueda generar un ambiente de aprendizaje significativo. Por otra parte, es necesario recalcar que, de acuerdo con Vasco (1978, p. 100): "La producción matemática parte de actividades, de manipulaciones, acciones, movimientos". Por lo que se corrobora el involucramiento activo de los estudiantes, donde puedan ser miembros de escenarios de aprendizaje auténtico, poniendo en marcha el uso de sus conocimientos, habilidades y actitudes.

Metodología

Se abordó desde la perspectiva del enfoque cualitativo y mediante la investigación-acción cuyos rasgos, entre otros, son la autorreflexión de los participantes (alumnos y profesores) para la mejora de sus prácticas (Kemmis y McTaggart, 1988), lo que permitió hacer uso de la técnica descriptiva para explicar el desarrollo de las actividades planteadas, así como lo ocurrido durante el proceso de enseñanza-aprendizaje con los estudiantes.

Para la organización de actividades se consideraron los elementos teóricos de Biembengut y Hein (2004), considerando el primer abordaje de modelación propuesto por los autores. Además, se tomaron en cuenta las ideas de Villa-Ochoa y Alencar (2019) contextualizando en un sistema de riego triangular el contenido. También, se involucraron ideas propuestas por Montiel (2013), las cuales fomentan la relación entre lo proporcional y lo trigonométrico, encaminando a los estudiantes hacia la modelación, llegando a comprender los modelos de seno y coseno. Las actividades se organizaron de la siguiente manera:

1.Exposición del tema Se realizó una exposición en Power Point donde se presentaron los principales efectos y problemáticas ocasionadas por el cambio climático, además como propuesta para combatirlo se mencionó el desarrollo sustentable, el cual se podría visualizar por medio de la construcción de un pequeño sistema de riego de forma triangular, donde se colocaron plantas que podían consumir agua de un contenedor, por medio de un proceso llamado ósmosis. Las plantas con las que se trabajó poseen las siguientes características:

Tabla 1. *Plantas empleadas en el sistema de riego triangular.*

Planta	Descripción
Hierbabuena	Es una planta que se usa como condimento por sus peculiaridades culinarias. También suele emplearse en farmacología como carminativo, estimulante y antiespasmódico (Japon Quintero, 1985, p. 13).
Romero	Planta rica en principios activos y con acción sobre casi todos los órganos de cuerpo humano. Al tener un alto contenido en aceites esenciales, cuyos ingredientes activos son flavonoides, ácidos fenólicos y principios amargos, genera una acción tónica y estimulante sobre el sistema nervioso, circulatorio y corazón (Musa y Chalchat 2008; citado por Avila Sosa, Navarro-Cruz, Vera-López, Dávila-Márquez, Melgoza-Palma y Meza-Pluma, 2011, p. 24).
Perejil	Las hojas pueden utilizarse como condimento, crudas o cocidas. Se añaden a las salsas, ensaladas, etc., tanto para dar su típico sabor como para adornar los platos. Hoy día la industria expende las hojas de perejil troceadas y envasadas en botes de cristal. La destilación de la planta permite obtener esencias y un aceite utilizado como estimulante (Japon Quintero, 1985, p. 20).

Elaboración de los autores.

Figura 1. *Hierbabuena, romero y perejil.*

Fotografía de los autores.

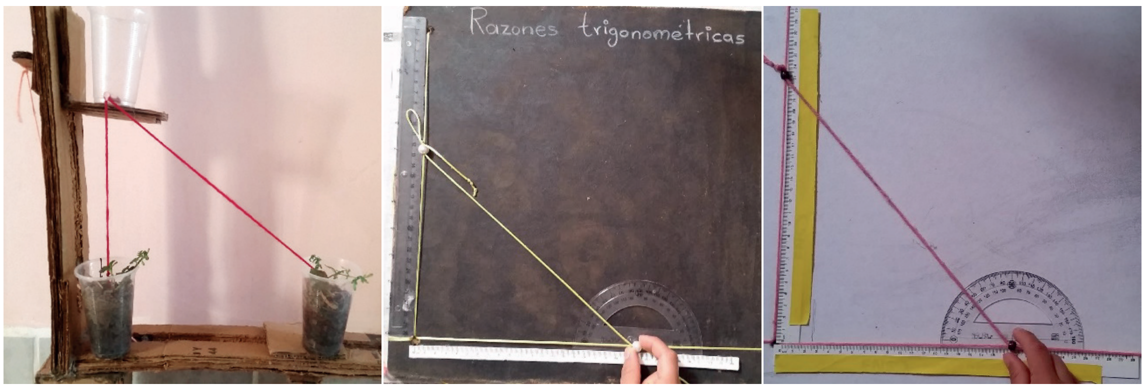
El estudio y producción de vegetales, plantas, hierbas o frutos pueden ayudar a combatir el cambio climático, por medio del desarrollo sustentable, fomentando la elaboración de un huerto en casa, que permita consumir y compartir con otros lo sembrado. Además, el cultivo sirve para diversas causas, ya que existen plantas ornamentales, medicinales, gastronómicas, entre otras. Por lo tanto, la investigación de estos aspectos se dejó a consideración de los alumnos, pues ellos mismos decidieron que tanto profundizar y conocer acerca de las plantas que sembrarían, lo que les pareció algo atractivo e interesante, pues muchas veces no se reflexiona acerca de las plantas y sus múltiples beneficios para la humanidad.

El objetivo de este primer paso es precisamente que los alumnos se sientan atraídos por la temática expuesta y se involucren desde el primer momento en la investigación, así como en la formulación de preguntas que incrementen su curiosidad, pues ello contribuirá más adelante a relacionarlo con el contenido matemático.

La prueba del material se realizó en dos grupos de tercer grado de secundaria, en el estado de Querétaro, México. Los alumnos se organizaron para producir su propio material en equipos de 5. El material consta de un triángulo rectángulo simulado con piezas de cartón o madera de 50 cm x 50 cm, en el que los vértices correspondientes a los ángulos agudos pueden ser modificados manualmente, donde con ayuda de reglas y un transportador adheridos al mismo, se aprecia el cambio de longitudes de los catetos y los ángulos agudos, representados por partes del mismo prototipo y estambres, esperando contrarrestar lo expuesto por Naranjo y Triana (2015), llevando al alumno a comprender el sentido de lo que obtienen.

Dado que se trabajó con plantas, se decidió elaborar un prototipo con plantas y uno sin plantas, donde se pudieran observar de mejor manera las longitudes al modificar alguno de los elementos del triángulo rectángulo.

Figura 2. *Prototipos triangulares con vértices móviles.*



Fotografía de los autores.

Dicho sistema cuenta con un contenedor de agua “A”, (vértice superior), una planta B y una planta C, ubicadas en los vértices inferiores. El cateto adyacente al contenedor de agua y la hipotenusa se encargan de suministrar el agua a las plantitas por medio de estambres, realizando el proceso de ósmosis.

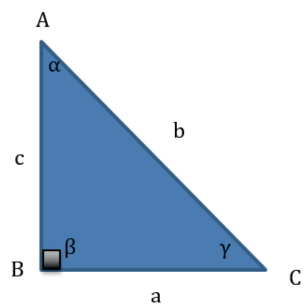
“La ósmosis es el paso de un disolvente a través de una membrana semipermeable, la cual permite el paso de algunos tipos de partículas, pero no de todas. El proceso espontáneo es siempre el paso de disolvente hacia la solución más concentrada” (Corominas, 2009, p. 151). En este caso se empleó la ósmosis inversa por medio de la capilaridad que ofrece el estambre que transporta el agua, pues precisamente esta propiedad, permite que la planta pueda adquirir el agua necesaria para su supervivencia.

2. Delimitación del problema Se delimitó el problema realizando preguntas detonadoras a los alumnos y solicitando la investigación sobre ellas. Se cuestionó qué pasaría si se modifican las posiciones del contenedor de agua y las plantas, a lo que una estudiante respondió que se modifican las distancias de los catetos e hipotenusa. Posterior a ello se preguntó cómo se podían obtener dichas distancias, donde las respuestas fueron muy interesantes pues mencionó que podía usar una regla para medir, utilizar la semejanza de triángulos o bien construir algunos con las mismas características para obtener la medida que faltara.

Se hicieron otras preguntas como cuál de las dos plantitas requiere mayor cantidad de agua, y cómo podemos saber qué estambre es el que conduce mayor cantidad de agua, solo como reflexión, ya que también se debía tomar en cuenta para colocar la especie de la planta de acuerdo con la cantidad de agua que requiere, aunque no se hicieron los cálculos en ese aspecto, se requiere analizar el agua que fluye a través de los estambres, puesto que un exceso de agua puede hacer que la planta muera.

3. Formulación del problema Ante la problemática del cambio climático, se ha propuesto construir un huerto personal que permita promover el desarrollo sustentable en nuestro hogar. El huerto tiene forma triangular como el siguiente:

Figura 3. *Notación de un triángulo rectángulo.*



Elaboración de los autores.

-En el vértice A se encuentra un contenedor de agua, en los vértices B y C se encuentra una plantita en cada uno.

a) Si colocamos el contenedor de agua a 15 cm de altura de la planta B, con un ángulo de 45° respecto a la planta C. ¿Qué longitud tendrá el estambre del contenedor a la planta C?
b) ¿Cuántos centímetros hay de separación entre cada planta?
c) Si colocamos el estambre del contenedor a 50° respecto a la planta C y las plantas B y C, están separadas 30 cm ¿Qué distancia existe entre el contenedor de agua y la planta C?
d) De acuerdo con lo anterior, ¿Qué altura tiene sobre la planta B?
e) Si se coloca el contenedor a 25 cm de altura sobre la planta B, y la distancia entre el contenedor y la planta C es de 50 cm, ¿Cuál es la abertura del ángulo del estambre del contenedor respecto a la planta C?

Una vez presentado el problema se pidió que le dieran solución utilizando los métodos que desearan, incluyendo el uso del prototipo manipulable. Fue aquí donde se pudieron apreciar distintas estrategias pues estas pueden pertenecer a las matemáticas intuitivas, previas a conocer y aplicar las razones trigonométricas. La estrategia propuesta en el presente artículo es el uso de un prototipo manipulable, del cual hicieron uso de manera adecuada y encontraron resultados muy aproximados, pero esta no fue la única manera en que los alumnos lograron llegar a una aproximación, pues utilizaron otras herramientas matemáticas que les ayudaron bastante, a continuación, se analiza el uso y procedimientos empleados.

Prototipo manipulable Para encontrar las soluciones a las diferentes cuestiones, los estudiantes reflexionaron sobre lo que se les estaba solicitando, manipulando el prototipo, modificando las distancias de los catetos e hipotenusa, así como la abertura de los ángulos agudos, las medidas las obtuvieron con una regla, así como con un transportador. Ello permitió que los estudiantes pudieran observar algunas de las relaciones entre los lados del triángulo rectángulo del problema inicial, pues conforme obtuvieron los resultados, se percataron de que la hipotenusa siempre es el lado más grande y que en ocasiones los catetos y ángulos agudos miden lo mismo.

La importancia del uso de este prototipo es que los estudiantes puedan manipular para encontrar respuestas, lo cual los prepara de manera previa al contenido de razones trigonométricas. Además, es un sustituto de una plataforma de geometría dinámica, el cual se planteó con el objetivo de ser utilizado en zonas rurales sin acceso a ese tipo de tecnologías.

Construcción de triángulos Algunos alumnos hicieron uso de esta estrategia, pues el contenido ya lo habían visto previamente. Con este contenido trazaron en su cuaderno los distintos triángulos de acuerdo con las especificaciones, corroborando sus medidas con el uso de la regla y transportador, fue parecido a lo que hicieron con el prototipo, a diferencia de que con esta estrategia deben trazar cada uno de los triángulos y en el prototipo basta con modificar los vértices para poder obtener el triángulo deseado.

Semejanza de triángulos De igual forma este contenido fue visto de manera previa, para hacer uso de él trazaron un triángulo rectángulo pequeño y midieron sus lados, luego relacionaron las medidas dadas en el problema con las del triángulo pequeño, estableciendo proporciones, para de esta manera encontrar el lado faltante, cabe mencionar que con esta estrategia pudieron encontrar solo los lados, ya que los ángulos no los pudieron encontrar haciendo uso de este método.

Las respuestas encontradas a las preguntas con los distintos métodos fueron las siguientes:

Tabla 2. *Problemáticas planteadas y respuestas de uno de los equipos.*

Problemática	Herramienta matemática utilizada	Respuestas
a. Si colocamos el contenedor de agua a 15 cm de altura de la planta B, con un ángulo de 45° respecto a la planta C. ¿Qué longitud tendrá el estambre del contenedor a la planta C?	Prototipo Construcción Proporciones / semejanza	21.3 cm 21.5 cm 21.9 cm
b. ¿Cuántos centímetros hay de separación entre cada planta?	Prototipo Construcción Proporciones / semejanza	15 cm 15 cm 15 cm
c. Si colocamos el estambre del contenedor a 50° respecto a la planta C y las plantas B y C, están separadas 30 cm ¿Qué distancia existe entre el contenedor de agua y la planta C?	Prototipo Construcción Proporciones / semejanza	39 cm 39 cm 39.3 cm
d. De acuerdo a lo anterior, ¿Qué altura tiene sobre la planta B?	Prototipo Construcción Proporciones / semejanza	24.2 cm 25.4 cm 25.2 cm
e. Si se coloca el contenedor a 25 cm de altura sobre la planta B, y la distancia entre el contenedor y la planta C es de 50 cm, ¿Cuál es la abertura del ángulo del estambre del contenedor respecto a la planta C?	Prototipo Construcción Proporciones / semejanza	No se pudo No se pudo No se pudo

Elaboración de los autores.

4. Desarrollo del contenido programático En esta etapa del primer abordaje se utilizó una de las actividades propuestas por Montiel (2013) que orientó a los alumnos a llegar a los modelos matemáticos de las razones trigonométricas seno y coseno, aquí es donde se pudo corroborar la importancia de la modelación. Además, ello permitió proponer actividades complementarias para lograr la comprensión del contenido, ya que estuvieron orientadas a responder qué pasa al obtener la razón seno y coseno de triángulos con longitudes diferentes pero el mismo ángulo. Por ejemplo, una de las actividades que propusimos consistió en establecer en 3 ocasiones las relaciones entre los elementos del triángulo rectángulo, donde siempre se mantuvo un ángulo de 45°, pero las longitudes de los catetos e hipotenusa se modificaban.

Figura 4. *Comparación de elementos del triángulo rectángulo con un mismo ángulo.*

Razón trigonométrica	Caso 1	Caso 2	Caso 3
$\operatorname{sen}\alpha = \frac{Cateto\ opuesto}{Hipotenusa}$	$\operatorname{sen} 45° = \frac{24}{34}$	$\operatorname{sen} 45° = \frac{12}{16.9}$	$\operatorname{sen} 45° = \frac{6}{8.5}$
Resultado de la razón:	0.705	0.710	0.705
$\cos\alpha = \frac{Cateto\ adyacente}{Hipotenusa}$	$\cos 45° = \frac{24}{34}$	$\cos 45° = \frac{12}{16.9}$	$\cos 45° = \frac{6}{8.5}$
Resultado de la razón:	0.705	0.710	0.705

- ¿Qué pasa al obtener la razón seno y coseno de triángulos con longitudes diferentes pero el mismo ángulo? Dan la misma razón para sen y dan la misma razón para cos.

Elaboración de los autores.

5.Presentación de ejemplos análogos Trabajando en el huerto personal se pudo visualizar un sistema a escala de problemas de la vida cotidiana, como la obtención de grandes distancias y alturas, problemas relacionados con la arquitectura, ingeniería civil, construcciones como rampas y puentes, entre otras situaciones que se pueden apreciar en la vida cotidiana. Ello permitió que los estudiantes comprendieran la importancia de hacer uso de las razones trigonométricas en el contexto real y no solo en el aspecto matemático.

6.Formulación de un modelo matemático y resolución del problema a partir del modelo Dado que los modelos de las razones trigonométricas seno y coseno se obtuvieron en una etapa previa, en esta fase se utilizaron para dar solución a la problemática inicial y comparar los resultados obtenidos con los distintos métodos empleados. Además, se invitó a los alumnos a comprobar los resultados de las distancias midiendo y comprobando la aplicación de las razones trigonométricas en el sistema de riego, cuestionándoles si se aproximaba la distancia obtenida con la regla a la obtenida con las razones, a lo que la mayoría respondió que sí.

También se cuestionó, qué beneficios tenía la aplicación de las razones trigonométricas, a lo cual respondieron que nos da resultados más exactos, en menor tiempo, a comparación de los otros métodos empleados, puesto que llevaron más tiempo de resolución al hacer uso de ellos.

Haciendo uso de las razones trigonométricas, las respuestas a los problemas referidos en la tabla 2 fueron las siguientes:

Tabla 3. *Respuestas obtenidas por un equipo aplicando las razones trigonométricas.*

Problema	Respuestas con razones trigonométricas
a.	21.21 cm
b.	14.99 cm
c.	39.16 cm
d.	25.17 cm
e.	60°

Elaboración de los autores.

7.Interpretación de la solución y validación del modelo En el sistema de riego se podían verificar las distancias que se movieran o los grados que adoptaran, dejando siempre un lado faltante a calcular, por lo que se pudieron establecer y aplicar los modelos de las razones trigonométricas, en este caso el de

$$sen\ \alpha = \frac{Cateto\ opuesto}{hipotenusa}, y\ \ cos\ \alpha = \frac{Cateto\ adyacente}{hipotenusa}.$$

Finalmente, se realizó la interpretación de la solución y validación de los resultados encontrados con los modelos, donde se invitó nuevamente a los alumnos a comprobar los resultados de las distancias, midiendo y comprobando en el sistema de riego. Así nos acercamos a la manipulación de la matemática propuesta por Vasco (1978).

Se realizó una reflexión sobre el uso de las razones trigonométricas, y se propusieron algunas mejoras al prototipo, también se planteó la idea de tomar en cuenta la cantidad de agua que requiere cada planta, cuál requiere más, cuál requiere menos. Algunos alumnos comentaron que la solución de los problemas se puede realizar con distintos métodos, pero que las razones dan un resultado más certero.

Análisis de resultados

Se observó una interacción positiva por parte de los alumnos respecto al material, logrando así una mejor visualización de la aplicación, así como el uso de las razones trigonométricas por medio del manejo y configuración de las medidas del triángulo rectángulo. Además, se pudo corroborar que se facilitó la comprensión de para qué sirven las razones trigonométricas a través del manejo de la modelación matemática.

Se impulsó la contextualización que mencionan Villa-Ochoa y Alencar (2019) promoviendo el desarrollo sustentable por medio del cuidado de especies vegetales de consumo y que ocupan poco espacio en el hogar, relacionando esto con la parte matemática del prototipo. Los estudiantes comentaron que habían adquirido la responsabilidad por cuidar y mantener vivas a sus plantas. Para obtener respuestas certeras, se realizó una evaluación del prototipo propuesto, que fue a lo que se le dio énfasis en el presente artículo.

El objetivo principal, era precisamente que pudiera coadyuvar en el proceso de aprendizaje de las razones trigonométricas seno y coseno, lo que para algunos resultó de manera positiva, pues mencionaron que les había ayudado a corroborar el uso y aprendizaje del contenido debido a que al comparar las estrategias empleadas, se dieron cuenta de que en realidad el uso del prototipo les había proporcionado resultados aproximados a los que brindaban las razones trigonométricas, aunque hubo algunas distorsiones de medición al utilizar herramientas matemáticas tangibles, como lo fueron la regla y el transportador. Con lo anterior se contrarrestó lo planteado por Naranjo y Triana (2015), al lograr que los alumnos entendieran el sentido de los datos encontrados.

Por otra parte, la confrontación entre los distintos métodos para llegar a los resultados (Tabla 2), permitió visualizar que las razones trigonométricas son una herramienta matemática eficiente. Principalmente se buscó que los alumnos notaran regularidades al comparar razones (figura 4), permitiendo así dirigirse hacia la trigonometría, como lo propone Montiel (2013). De esta manera se introdujo una noción sobre la relación entre lo proporcional y lo trigonométrico, es decir, se logró que los alumnos observaran que las razones trigonométricas tienen un origen y no son simples fórmulas donde se sustituyen valores para encontrar otros.

Lo que realmente impactó en esta fase de la propuesta educativa, fue que algunos alumnos comentaron que el tema de razones es complicado, pero te queda más claro cuando lo ves, precisamente fue lo que se buscó con la implementación de este prototipo didáctico, resaltando la manipulación que menciona Vasco (1978), pues pocas veces se reflexiona por medio de la manipulación de elementos matemáticos de forma real, además lo que se pretendió fue hacer uso de él, debido a que en muchos espacios educativos se carece de tecnología, lo que favorece su utilización en zonas rurales.

Finalmente, se encontró que la implementación del método de modelación matemática (Biembengut y Hein, 2004), a través de propuestas manejables y cercanas al contexto de los alumnos, favorece en gran medida la comprensión de un tema complejo para la mayoría.

Como docentes en formación es necesario concientizar acerca de las dificultades y problemas epistemológicos respecto a los contenidos observados en educación básica, para que de esta manera se lleven a cabo propuestas en pro de que los estudiantes no manifiesten un rezago matemático, logrando adquirir las competencias necesarias para desenvolverse en ámbitos sociales y académicos, buscando siempre la superación personal.

Conclusiones

La propuesta educativa expresada en este artículo manifiesta una respuesta positiva por parte de los alumnos en cuanto a la comprensión del contenido matemático abordado. Se enfatiza que el profesor de matemáticas debe modificar su práctica pedagógica al momento de impartir este contenido, pues por lo regular se presentan las fórmulas para que sean sustituidas por valores numéricos que se encuentran en distintos triángulos rectángulos, de manera que solo se encuentren los elementos faltantes de esta figura geométrica como lo expresa Montiel (2013).

Por otra parte, el utilizar las etapas de la modelación que proponen Biembengut y Hein (2004), fueron clave para lograr una buena comprensión, pues estas dan la pauta para tener un seguimiento paso a paso en el aprendizaje, lo que permite identificar y profundizar en aspectos donde los estudiantes pudieran tener dudas.

El trabajar de manera interdisciplinar con la asignatura de Biología impulsa el trabajo colaborativo entre docentes, al igual que se manifiesta la amplia gama de aplicaciones donde se puede presentar la Matemática, pues, aunque no se reflexionó sobre las cantidades de agua y los recipientes empleados, cabe la posibilidad de realizar una investigación futura sobre estos aspectos, donde se pueda recuperar la colaboración interdisciplinar.

Agradecimientos

Agradecemos el apoyo brindado para la participación en la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME 34), a nuestra institución: Centenaria y Benemérita Escuela Normal del Estado de Querétaro “Andrés Balvanera”. Dicho apoyo favorece nuestra profesionalización como docentes, lo cual valoramos profundamente.

Referencias bibliográficas

Avila-Sosa, R., Navarro-Cruz, A., Vera-López, O., Dávila-Márquez, R. M., Melgoza-Palma, N. y Meza-Pluma, R. (2011). Romero (*Rosmarinus officinalis* L.): una revisión de sus usos no culinarios. *Ciencia y Mar XV(43),* 23-36.

Biembengut, M. S. y Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación matemática, 16*(2), 105-125.

Corominas, J. (2009). Patatas y huevos osmóticos. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias, 7*(1), 151-157.

Japon Quintero, J. (1985). Cultivo del perejil y de la hierbabuena. *Hojas divulgadoras del Ministerio de Agricultura, Pesca y Alimentación, 14*, 1-20

Kemmis, S., Mc Taggart, T. (1988). *Cómo planificar investigación-acción*. Laertes.

Martin Fernández, E., Ruiz Hidalgo, J. F. y Rico, L. (2016). Significado escolar de las razones trigonométricas elementales. *Enseñanza de las ciencias, 34*(3), 51-71. DOI: https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1871

Montiel Espinosa, G. (2013). *Desarrollo del pensamiento trigonométrico.* México: SEP.

Naranjo Triana, W. E. y Triana Tobar, M. A. (2015). Las razones trigonométricas a través del trabajo experimental en Matemáticas: reflexiones de una indagación en el aula. *Ejes 3*, 67-73.

Vasco, C. E. (1978). Estratificación conceptual del proceso de producción de conocimientos matemáticos. *Ideas y valores 27*(53-54), 99-112.

Villa-Ochoa, J. A., y Alencar, E. S. de. (2019). Un panorama de investigaciones sobre Modelación Matemática: Colombia y Brasil. *Revista De Educação Matemática 16*(21), 18 – 37. DOI: https://doi.org/10.25090/remat25269062v16n212019p18a37

ANIMAL O CAZADOR: UNA PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE CONCEPTOS BÁSICOS DE PROBABILIDAD

ANIMAL OR HUNTER: A PEDAGOGICAL PROPOSAL FOR THE TEACHING OF BASIC PROBABILITY CONCEPTS

Helen Guillén Oviedo, Eduardo Aguilar Fernández, José Andrey Zamora Araya
Universidad Nacional (Costa Rica)
hellen.guillen.oviedo@una.cr, eduardo.aguilar.fernandez@una.cr, jzamo@una.ac.cr

Resumen
En este artículo se presenta un juego que permite comprender la forma de determinar el espacio muestral de un experimento aleatorio que permita el cálculo de la probabilidad de un evento mediante la definición clásica de la probabilidad. En la actividad participaron 34 personas estudiantes de la carrera Bachillerato y Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática de la Universidad Nacional, Costa Rica divididas en dos grupos. Durante la actividad inicial, las soluciones propuestas por el estudiando mostraron errores relacionados con la falta de distinción entre los animales y la no consideración del reemplazo a la hora de plantear el espacio muestral. La discusión entre las personas participantes durante la actividad inicial contribuyó a identificar errores en las propuestas de solución de las actividades, lo cual permitió un adecuado abordaje de la segunda parte de la actividad. Donde se mostró una mejoría en la solución de los ejercicios. La interacción y la participación en la actividad propuesta contribuye al desarrollo de clases atractivas que despierten el interés y deseo de aprender en el estudiantado.

Palabras clave: juego, probabilidad, espacio simple, propuesta pedagógica, conteo

Abstract
This paper presents a card game which allows understanding a way to determine the sample space of a random experiment, in order to calculate the probability of an event by using the classical definition of probability. The activity involved thirty-two students (divided into two groups) from the Bachelor's degree in Math Education at the National University of Costa Rica. During the opening activity, the solutions proposed by the students showed errors related to the inadequate distinction between the animals, and the fact of not considering the replacement when posing the sample space. The discussion originated in the opening activity helped to identify some errors in the proposed solutions for the activities, which contributed to an adequate approach to the second part of the activity where the students showed an improvement on the solution of the exercises. Interaction and participation in the proposed activity contribute to the development of attractive lessons that arouse students' interest and desire to learn.

Key words: game, probability, sample space, pedagogical proposal, counting

Introducción

Desde hace varios años, la enseñanza de la Estadística y la Probabilidad ha sido incorporada en los planes de estudio de la educación primaria y secundaria de varios países, por lo que el número de investigaciones relacionadas con su enseñanza y aprendizaje ha venido en aumento. Algunas de estos estudios se han centrado en explorar la forma en cómo el estudiantado aprende Estadística y Probabilidad (Garfield y Ben-Zvi, 2007). Otros en cambio, han puesto su atención en estudiar la forma en cómo el profesorado aprende Estadística y Probabilidad (Makar y Confrey, 2004; Leavy, 2006; Pfannkuch, 2006).

Aunque la investigación sobre cómo aprende el personal docente la Estadística es importante, hay un tema central adicional que requiere atención: el profesorado debe aprender a ayudar a otros a comprender la Estadística (Groth, 2017), por lo que el uso de estrategias innovadoras para la enseñanza de la Estadística que permitan la correcta comprensión y aplicación de conceptos estadísticos y subsanar las deficiencias es necesario (Angulo, Castaño y Bernal, 2011). Una serie de actividades, entre ellas los juegos (Lesser y Pearl, 2008), aparecen como propuestas didácticas que buscan contribuir a la labor docente en el aula para la enseñanza de la Estadística y Probabilidad.

Marco teórico

Según lo relatan Basulto y Camúñez (2007), la teoría de la probabilidad inicia alrededor de 1654 cuando Antoine Gombaud, un noble francés interesado en juegos de apuestas conocido como el caballero de Méré, consultó a su amigo Blaise Pascal sobre un juego de azar, pues él quería saber cómo ganar en las apuestas. El juego trataba de tirar dos dados 24 veces y apostar o no a que saldría al menos un doble seis, situación que generó gran interés en Pascal, quien estableció comunicación con Pierre de Fermat, con el fin de establecer las reglas del juego, dando origen a los principios básicos de las probabilidades, es decir, las primeras ideas en la teoría de las probabilidades surgen a partir de un juego.

Los juegos favorecen la construcción de una extensa red de dispositivos que permiten a la niñez la asimilación total de la realidad para revivirla, dominarla, comprenderla y compensarla (Piaget, 1991). Por otro lado, los juegos ofrecen métodos de aprendizaje que son muy consistentes con las teorías modernas de aprendizaje efectivo que proponen que las actividades de aprendizaje deben ser activas, situadas, basadas en problemas, interactivas y socialmente mediadas (Boyle, Connolly y Hainey, 2011).

Por otro lado, las investigaciones señalan que el juego como recurso didáctico aumenta el interés del estudiantado, es una actividad innovadora y genera el espíritu de competencia entre las personas participantes en el salón de clase (Muñiz, Alonso y Rodríguez, 2014). Además, el juego aporta en el desarrollo de habilidades de socialización, comunicación, argumentación y razonamiento lógico (Vankúš, 2008), permite reducir la ansiedad y contribuye a mejorar las percepciones del estudiantado sobre utilidad de aprender (Nisbet y Williams, 2009) y aumenta la cantidad de tiempo que el estudiantado se enfoca en las actividades en el aula (Bragg, 2012).

Es decir, los juegos contribuyen al desarrollo de competencias que son fundamentales para el aprendizaje del estudiantado, pues su empleo como recurso didáctico contribuye a que el estudiantado aprenda a tomar decisiones, asimile los conocimientos de las diferentes asignaturas y adquiera una experiencia práctica del trabajo colectivo (Argumedo y Castiblanco, 2008). Además, permiten el desarrollo de la espontaneidad, la motivación y la estimulación de la imaginación (Calderón, 2013). La experiencia de interactuar y de usar sus sentidos logra una motivación y hace que el estudiantado realice un esfuerzo físico y mental, pero además con una muy buena actitud, que deja ver toda su creatividad (Rojas, 2009).

Por otro lado, se ha mencionado que al estudiantado le resulta difícil aprender las ideas de Estadística y Probabilidad (Garfield y Ben-Zvi, 2007), es decir, se les dificulta la comprensión de las diferentes temáticas. Además, el personal docente menciona que la probabilidad es uno de los temas que representa mayor dificultad a la hora de enseñar, pues, en las carreras de formación de profesores, a la Estadística y la Probabilidad no se le ha dado la importancia necesaria (Alvarado, Andaur y Estrada, 2018). La enseñanza de la Probabilidad constituye un gran reto para el profesorado, pues "deben enfocar su esfuerzo en aplicar diferentes estrategias y plantear otras que permitan captar el interés y tener éxito en la compleja tarea de formar profesionales con las competencias para responder a las necesidades del mercado laboral" (Angarita, Parra y Sandoval, 2013, p. 138).

En este contexto, la implementación de actividades que incluyen los juegos pueden ser de gran ayuda para el profesorado, pues los juegos contribuyen al logro del aprendizaje (Cano y Zapata, 2010; Herreros y Sanz, 2020; Koparan, 2019; Rojas, 2009). Por otra parte, la riqueza del juego y sus potencialidades deben llevar a reflexionar sobre su empleo en el aula, ya que la creación de experiencias de aprendizajes lúdicas permite el enriquecimiento de los procesos de pensamiento (Alsina, 2017).

El objetivo del estudio consistió en proponer una actividad lúdica que sirva como estrategia metodológica en el aula para comprender la forma de determinar el espacio muestral de un experimento aleatorio que permita el cálculo de la probabilidad de un evento mediante la definición clásica de la probabilidad.

Metodología

Participantes En la actividad participaron 34 personas estudiantes de la carrera Bachillerato y Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática de la Universidad Nacional, Costa Rica. El juego fue desarrollado como parte de las actividades implementadas en el curso Probabilidad y Estadística.

Material necesario Para llevar a cabo la actividad es necesario contar con los siguientes materiales:

- 5 cartas (4 cartas iguales con la fotografía de un animal en peligro de extinción y 1 carta con la fotografía de un cazador).
- Hojas blancas o rayadas o Tablet para dibujar
- Lápiz, lapicero
- Calculadora

Método

Las personas participantes se distribuyeron en dos grupos (19 en el Grupo 1 y 15 en el Grupo 2) a cargo de docentes diferentes. Para su aplicación se utilizó la modalidad de presencialidad remota debido a que el país enfrentaba la situación de la pandemia generada por la COVID-19 y para ello se utilizaron las plataformas virtuales Zoom (Grupo 1) y Microsoft Teams (Grupo 2). La actividad fue desarrollada simultáneamente en ambos grupos durante una de las sesiones de clase del curso en la cual se describió el juego utilizando una presentación, luego el estudiantado tuvo un espacio para resolver las preguntas planteadas, tomarle una fotografía a la solución y enviarla vía correo electrónico o WhatsApp a cada docente. Cuando todas las respuestas fueron recibidas se habilitó en cada grupo un espacio de discusión sobre las soluciones planteadas con el fin de verificar si las respuestas dadas se habían obtenido de manera adecuada según lo solicitaba la situación planteada. Como conocimiento previo, en las clases anteriores se cubrieron los contenidos relativos a conceptos básicos de probabilidad, axiomas, teoremas, técnicas de conteo y probabilidad condicional e independencia de eventos.

Desarrollo del juego

El juego tiene por nombre Animal o Cazador y en su estructura general consta de tres etapas para su desarrollo; sin embargo, en la actividad de aula solo se aplicó la primera parte, la cual se describe a continuación.

Por medio de una presentación de diapositivas en formato Power Point se muestra a todas las personas participantes una colección de 5 cartas (4 cartas iguales con la fotografía de un animal en peligro de extinción de Costa Rica y 1 carta con la fotografía de un cazador).

Figura 1. *Tarjeta de cazador.*

Fuente: https://www.freepik.es/vector-premium/ilustracion-dibujos-animados-cazador-objetivo-rifle_2293532.htm.

Figura 2. *Tarjeta de animal en peligro de extinción.*

Fuente: https://www.animalespeligroextincion.org/pais/animales-peligro-extincion-costa-rica/.

Y se les solicita pensar en qué apostarían si se les presentara la siguiente situación:

- Se extrae una carta y luego otra con reemplazo.
- Si alguna de las cartas extraídas corresponde al cazador, la persona que escogió las cartas pierde.
- Si las dos cartas seleccionadas son del animal en peligro de extinción, el animal se salva y la persona que escogió las cartas gana.

Seguidamente, se les pide:

- Determinar la probabilidad de ganar el juego

A partir de las consideraciones del juego y analizando lo que puede ocurrir, se solicitó a las personas participantes determinar y describir el espacio muestral, así como el cálculo de la probabilidad de ganar el juego.

Una vez planteadas las respuestas se presentaron algunos de los espacios muestrales propuestos en la solución, luego se generó una discusión para identificar si los espacios muestrales presentados y la probabilidad obtenida estaban correctos. Como se generaron soluciones incorrectas se planteó una discusión sobre las diferencias presentes entre las respuestas brindadas y la solución correcta. Además, esta discusión permitió resaltar la variedad de posibles respuestas que pueden obtenerse por parte del estudiantado al aplicar la actividad.

Posterior a la discusión generada, se presentaron distintas formas en que puede determinarse el espacio muestral por medio del uso de diferentes estrategias para contar los puntos muestrales, ya sea mediante el uso de una tabla, un diagrama de árbol o técnicas de conteo. Luego se identificó la probabilidad de ganar el juego a partir de los puntos muestrales determinados y se explicó cómo puede trabajarse la probabilidad frecuencial a través de la aplicación repetida del juego.

Finalmente, se repitió la actividad, pero extrayendo las cartas sin reemplazo y se solicitó plantear nuevamente el espacio muestral y calcular la probabilidad de ganar el juego.

Actividad propuesta para evaluación Se indicó a las personas participantes que esta parte de la actividad se puede utilizar como evaluación una vez que se realice y esté clara la parte anterior. Ahora si en lugar de tener 5 cartas se retiran del mazo dos cartas de animal y se repite el juego con 3 cartas (2 cartas iguales con la fotografía de un animal en peligro de extinción de Costa Rica y 1 carta con la fotografía de un cazador).

Seguidamente se les solicita calcular la probabilidad de:
Ganar el juego usando 3 cartas y seleccionando con reemplazo.
Ganar el juego usando 3 cartas y seleccionando sin reemplazo.

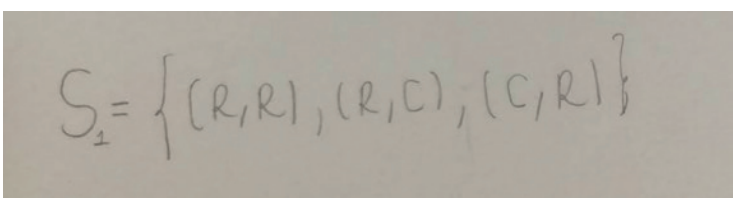
Duración La actividad tuvo una duración de 90 minutos.

Evaluación Como parte de la evaluación se considera la realización de diferentes actividades en cada una de las etapas del juego en las que las personas participantes comparten sus respuestas y se genera la discusión sobre la validez de los resultados obtenidos. A manera de cierre, se proyectan las soluciones a cada una de las actividades propuestas.

Resultados

En la actividad participaron un grupo de 34 personas. Entre los principales resultados se tiene que todas las personas participantes determinaron incorrectamente el espacio muestral en la primera etapa, la cual consistía en extraer dos cartas, una después de la otra y con reemplazo. Por ejemplo, la Figura 3 muestra la solución de un estudiante que consideró las cartas con la imagen del animal con la letra R (rana) y la carta del cazador la letra C, por lo que indico como espacio muestral a S = {RR, RC, CR}.

Figura 3. *Espacio muestral del experimento indicando 3 resultados posibles.*

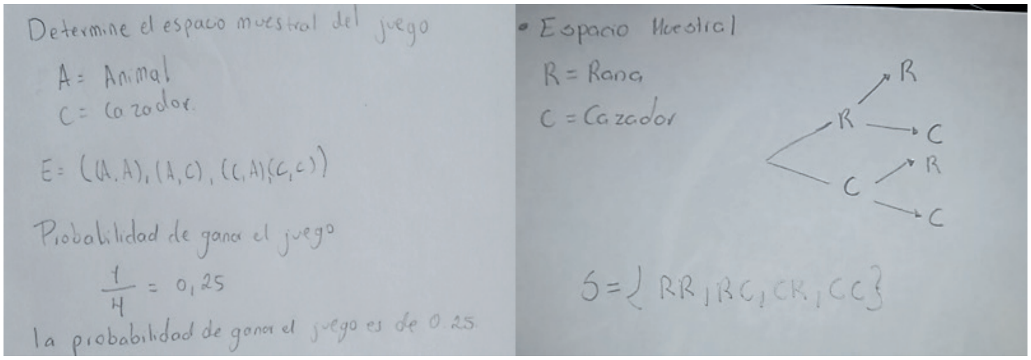


Elaborado por la autora.

El error cometido al plantear al espacio muestral radica en que el estudiante no está considerando el muestreo con reemplazo, pues el punto muestral RR está representando dos ranas, el RC y CR una rana y un cazador considerando el orden de selección. Note que no se coloca el punto muestral CC lo que evidencia un muestreo sin reemplazo.

La Figura 4 muestra la solución de dos estudiantes que consideraron las cartas con la imagen del animal con la letra A (animal) o R (rana) y la carta del cazador la letra C, los cuales indicaron que el espacio muestral corresponde a S = {RR, RC, CR, CC}, S = {AA, AC, CA, CC}

Figura 4. *Espacio muestral del experimento indicando 4 resultados posibles.*

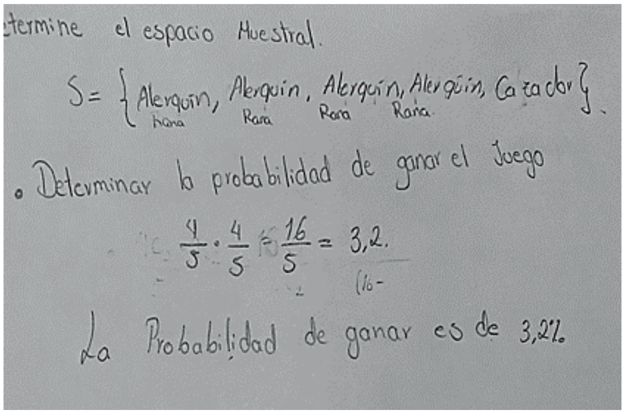


Fotografía de los autores.

A diferencia de la resolución mostrada en la Figura 3, las soluciones mostradas en la Figura 4, si consideran el muestreo con reemplazo, no obstante, no toma en cuenta la distinción en las cuatro ranas (R1, R2, R3 y R4), sino que solo distingue entre una rana y un cazador, es decir, solo considera dos cartas. Por ello, plantea el espacio muestra con cuatro elementos.

Otra respuesta plantea un resultado que podría considerarse como el espacio muestral obtenido si se extrae una carta, es decir, S = {R, R, R, R, C} con R asignado a Rana y C a cazador (Figura 5). En este caso el estudiante no considera la instrucción que se deben extraer dos cartas.

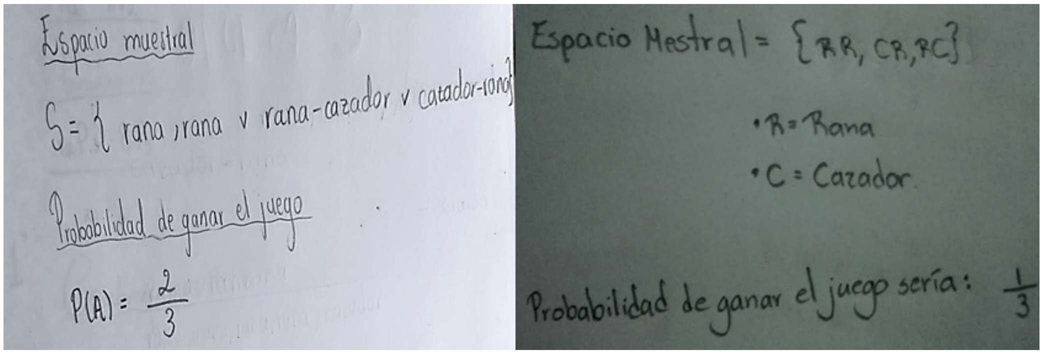
Figura 5. *Espacio muestral del experimento indicando 5 resultados posibles.*



Fotografía de los autores.

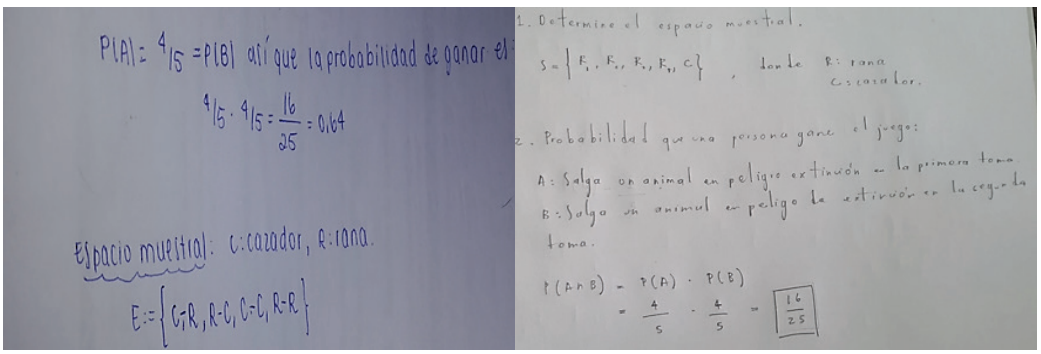
En relación con la pregunta sobre la probabilidad de ganar el juego, se dieron resultados incorrectos que se derivan de espacios muestrales mal determinados (Figura 6). Además, se brindaron respuestas que mostraron el resultado correcto para la probabilidad de ganar el juego, aunque los espacios muestrales no estaban bien determinados (Figura 7), pues se aplicaron otros conceptos como el de la ley de la probabilidad para el producto cuando se tiene eventos que son independientes.

Figura 6. *Probabilidad incorrecta de ganar el juego.*



Fotografía de los autores.

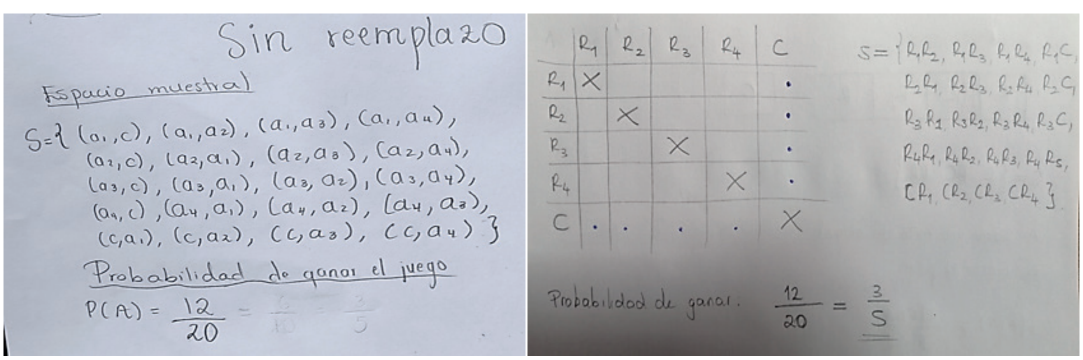
Figura 7. *Probabilidad correcta de ganar el juego.*



Fotografía de los autores.

Luego de la discusión inicial, donde se explicó distintas formas para obtener el espacio muestral correcto según la situación planteada, el estudiantado realizó nuevamente la actividad, pero en este caso se indicaba que las cartas debían extraerse sin reemplazo. Los resultados obtenidos indicaron que todas las personas hallaron de manera correcta el espacio muestral y la probabilidad de ganar el juego, además se identificó el uso de distintas estrategias para la determinación de dicho espacio muestral (Figura 8).

Figura 8. Espacio muestral y probabilidad de ganar el juego extrayendo las cartas sin reemplazo.



Fotografía de los autores.

Conclusiones

El juego es una actividad que forma parte de la vida de las personas y que se ha planteado como propuesta didáctica para implementar en los procesos de enseñanza y aprendizaje, pues su aplicación permite, entre otras cosas, la diversión, comunicación, discusión y la argumentación. De esta forma, la aplicación de la actividad propuesta contribuyó a generar una reflexión sobre los conceptos de espacio muestral, muestreo con o sin reemplazo y probabilidad, que contribuyó a despertar el interés en el estudiantado dada la interacción y dinámica que el juego propicia.

Por otro lado, aunque no todas las personas obtuvieron respuestas correctas en la tarea inicial, la actividad permitió identificar diferentes estrategias implementadas para dar respuesta a la situación planteada. Este aspecto adquiere relevancia pues la aplicación de actividades que involucran diversión puede conducir a estrategias más simples para resolver problemas (Wood, Beckman y Rossiter, 2011).

Por otro lado, la actividad permitió a la persona docente detectar errores cometidos por el estudiantado al plantear el espacio muestral y en la determinación de la probabilidad, pues tal y como lo señala Minnaard (2015) los errores surgen a partir de la solución de los problemas planteados al estudiantado y a las dificultades que se presentan en el proceso de aprendizaje, también por obstáculos o por ausencia de sentido y que están relacionados a asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento y la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes. Además, la identificación de errores es un aspecto de importancia para llevar a cabo la enseñanza de los contenidos de estocástica (Lavalle, Micheli y Boché, 2003).

La discusión entre las personas participantes contribuyó a identificar y corregir errores en las propuestas de solución de las actividades, así como mostrar el uso de distintas estrategias que permiten dar respuestas a las preguntas planteadas. Estas actividades de socialización de conocimientos y validación de resultados pueden ayudar a la comprensión de los problemas a resolver (Lavalle et al., 2003).

Además, la actividad permite incorporar ejes transversales señalados en los programas educativos. En el contexto del currículo costarricense permite hacer visible la cultura ambiental para el desarrollo sostenible (Ministerio de Educación Pública de Costa Rica, 2013) al dar a conocer animales que se encuentran en peligro de extinción.

También es importante mencionar que esta actividad fue pensada originalmente para ser aplicada en la presencialidad, pero debido a la situación que se vive por la pandemia del COVID-19, su realización se llevó cabo bajo la modalidad de la presencialidad remota, por lo que su aplicación requirió más tiempo del que se había programado inicialmente, así como la necesidad de incorporar otros recursos como lo son las plataformas virtuales y el manejo de la participación y comunicación del estudiantado mediante el uso de los dispositivos de audio y video de la computadora o el teléfono celular.

Por último, si bien es importante que las personas docentes promuevan la creación de actividades innovadoras que contribuyan al desarrollo de competencias para la formación profesional del estudiantado, es necesario tomar en cuenta que el profesorado que está usando o está dispuesto a utilizar actividades como las que promueven diversión en el aula menciona no tener recursos disponibles al alcance y no estar al tanto de recursos actualizados (Lesser et al., 2013). La formación en el profesorado que enseña estocástica tanto en contenido como en metodología de enseñanza se constituye en un aspecto relevante (Lavalle et al., 2003). Ante este panorama, la iniciativa propuesta en este documento pretende brindar a las personas docentes la oportunidad de contar con material didáctico que les permita generar un ambiente de clase atractivo con el fin de promover el aprendizaje significativo.

Agradecimientos

Esta investigación fue realizada con financiamiento por parte del proyecto denominado: Una propuesta didáctica, desde el enfoque por competencias, para la enseñanza de la Estadística y Probabilidad en la carrera de Bachillerato y Licenciatura en Enseñanza de la Matemática de la Universidad Nacional de Costa Rica (Código: 0064-19).

Referencias

Alsina, Á. (2017). Contextos y propuestas para la enseñanza de la estadística y la probabilidad en educación infantil: un itinerario didáctico. *Revista Épsilon, 34*(95), 25-48. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/17041/

Alvarado, H., Andaur, G. y Estrada, A. (2018). Actitudes hacia la probabilidad y su enseñanza: un estudio exploratorio con profesores de matemática en formación y en ejercicio de Chile. *Revista Paradigma*, *39*(2), 36-64. Recuperado de https://core.ac.uk/download/pdf/323492666.pdf

Angarita, M. A. O., Parra, A. S. y Sandoval, C. C. U. (2013). Revisión de alternativas propuestas para mejorar el aprendizaje de la Probabilidad. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte, 1*(38), 127-142. Recuperado de https://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php/RevistaUCN/article/view/409

Argumedo, D. y Castiblanco, Y. (2008). Diseño e implementación de una lúdica para analizar procesos de toma de decisiones basados en contabilidad del truput, mediante escenarios simulados de un sistema productivo en el Laboratorio de Ingeniería Aplicada de la Universidad de Córdoba. Trabajo de Grado, Universidad de Córdoba, Montería, Colombia. Recuperado de https://es.scribd.com/document/492189057/Trabajo-Final-Tati-Una-Seminario

Angulo, M., Castaño, O. y Bernal, J. (2011). Actividades didácticas en enseñanza secundaria para el desarrollo de pensamiento aleatorio. *Scientia et technica, 3*(49), 158-162. Recuperado de https://www.redalyc.org/pdf/849/84922625027.pdf

Basulto, J. y Camúñez, J. (2007). El problema de los dados del caballero de Méré: soluciones publicadas en el siglo XVII. *Suma, 56*, 43-54. Recuperado de http://materias.df.uba.ar/estadisticaa2019v/files/2019/02/El_caballero_de_Mere.pdf

Boyle, E., Connolly, T. M. y Hainey, T. (2011). The role of psychology in understanding the impact of computer games. *Entertainment computing, 2*(2), 69-74. https://doi.org/10.1016/j.entcom.2010.12.002

Bragg, L. A. (2012). The effect of mathematical games on on-task behaviours in the primary classroom. Mathematics education research journal, 24(4), 385-401. https://doi.org/10.1007/s13394-012-0045-4

Cano, N. A. y Zapata, F. N. (2010). La enseñanza de las matemáticas a través de la implementación del juego del rol y de aventura. *UNIÓN*, *23*, 211-222. Recuperado de https://union.fespm.es/index.php/UNION/issue/view/30/28

Calderón, K. (2013). La didáctica de hoy. San José, Costa Rica: EUNED.

Garfield, J. y Ben-Zvi, D. (2007). How students learn statistics revisited: A current review of research on teaching and learning statistics. *International Statistical Review, 75*(3), 372-396. https://doi.org/10.1111/j.1751-5823.2007.00029.x

Groth, R. E. (2017). Developing statistical knowledge for teaching during design-based research. *Statistics Education Research Journal*, *16*(2), 376-396. https://doi.org/10.52041/serj.v16i2.197

Koparan, T. (2019). Teaching game and simulation based probability. *International Journal of Assessment Tools in Education, 6*(2), 235-258. https://doi.org/10.21449/ijate.566563

Herreros, D. y Sanz, M. T. (2020). Estadística en educación primaria a través del apendizaje basado en juegos. *Matemáticas, educación y sociedad, 3*(1), 33-47. Recuperado de https://www.uco.es/ucopress/ojs/index.php/mes/article/view/12702

Lavalle, A., Micheli, E. y Boché, S. (2003). Juicios heurísticos sobre probabilidad en alumnos del profesorado en matemática. *Boletín SOAREM*, 17, 23-31. Recuperado de http://www.soarem.com.ar/Documentos/17%20Lavalle.pdf

Leavy, A. M. (2006). Using data comparison to support a focus on distribution: Examining preservice teacher's understandings of distribution when engaged in statistical inquiry. *Statistics Education Research Journal, 5*(2), 89-114. Recuperado de http://iase-web.org/documents/SERJ/SERJ5(2)_Leavy.pdf

Lesser, L. M., Wall, A. A., Carver, R. H., Pearl, D. K., Martin, N., Kuiper, S., ... Weber III, J. J. (2013). Using fun in the statistics classroom: An exploratory study of college instructors' hesitations and motivations. *Journal of Statistics Education*, *21*(1). https://doi.org/10.1080/10691898.2013.11889659

Lesser, L. M. y Pearl, D. K. (2008). Functional fun in Statistics teaching: resources, research, and recommendations. *Journal of Statistics Education, 16*(3), 1-11. https://doi.org/10.1080/10691898.2008.11889572

Makar, K. y Confrey, J. (2004). Secondary teachers' statistical reasoning in comparing two groups. In D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning, and thinking* (pp. 353–373). Dordrecht, The Netherlands: Springer. Recuperado de https://philpapers.org/archive/CAPTEO.pdf#page=356

Minnaard, C. (2015*). Los errores en Probabilidad y Estadística: un análisis desde el enfoque ontosemiótico* (Tesis Doctoral). Universidad Internacional del Atlántico, Hawaii. Recuperado de http://repositorio.unlz.edu.ar:8080/bitstream/handle/123456789/288/Los%20errores%20en%20Probabilidad%20y%20Estad%C3%ADstica.pdf?sequence=1

Muñiz, L., Alonso, P. y Rodríguez, L. (2014). El uso de los juegos como recurso didáctico para la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas: estudio de una experiencia innovadora. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 39*(1), 19-33. Recuperado de http://www.fisem.org/www/union/revistas/2014/39/archivo6.pdf

Nisbet, S. y A. Williams (2009). Improving students' attitudes to chance with games and activities. *Australian Mathematics Teacher*, *65*(3), 2537. Recuperado de http://hdl.handle.net/10072/29460

Pfannkuch, M. (2006). Comparing box plot distributions: A teacher's reasoning. *Statistics Education Research Journal, 5*(2), 27-45. Recuperado de https://iase-web.org/documents/SERJ/SERJ5(2)_Pfannkuch.pdf

Piaget, J. (1991). *Seis estudios de Psicología*. Barcelona, España: Editorial labor. S.A.

Rojas, I. (2009). Aplicación de juegos lógicos en Juventud Salesiana*. Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 19*(1), 150-156. Recuperado de https://core.ac.uk/download/pdf/328833577.pdf

Vankúš, P. (2008). Games based learning in teaching of mathematics at lower secondary school. *Acta Didactica Universitatis Comenianae Mathematics*, *8*, 103-120. Recuperado de https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.483.1747&rep=rep1&type=pdf

Wood, R. E., Beckmann, N. y Rossiter, J. R. (2011). Management humor: Asset or liability?. *Organizational Psychology Review*, *1*(4), 316-338. Recuperado de https://dro.dur.ac.uk/9232/1/9232.pdf

VOL 34, NÚMERO 2, AÑO 2021

UNA GUÍA SECUENCIADA PARA INDUCIR LA ARGUMENTACIÓN EN EL PROCESO DE PRUEBA

A SEQUENCED GUIDE TO LEAD ARGUMENTATION IN THE TESTING PROCESS

Rodolfo Eliseo D´Andrea
Pontificia Universidad Católica Argentina. Facultad de Química e Ingeniería. Campus Rosario. Rosario. Provincia de Santa Fe. (Argentina)
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires. Facultad de Agronomía. Azul. Provincia de Buenos Aires. (Argentina)
rodolfoedandrea@gmail.com

Resumen
El estudiante de Argentina que ingresa a la universidad, en los cursos de Matemática, se enfrenta a una gran dificultad en el abordaje de la prueba. El proceso de prueba requiere del conocimiento del lenguaje matemático y la epistemología propia de esta ciencia, temáticas no abordadas en el ciclo medio. El objetivo de este taller consistió en generar un espacio de descubrimiento y posterior reflexión acerca del análisis de una guía secuenciada diseñada para inducir la argumentación en el proceso de prueba. Los participantes del taller manifestaron que no hay una bibliografía específica sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de la demostración, encontrando en la Guía Secuenciada, una alternativa para atenuar este proceso. Se generó un espacio de debate sobre diferentes ejemplos expuestos por los participantes acerca de esta propuesta didáctica para finalmente cerrarlo con una reflexión sobre el futuro de la demostración en un escenario totalmente digital.

Palabras clave: argumentación, guía secuenciada, demostración

Abstract
The student from Argentina who enters the university, in Mathematics courses, faces great difficulty in approaching the test. The testing process requires knowledge of mathematical language and the epistemology of this science, which are topics not addressed in the middle cycle. The objective of this workshop was to generate a space for discovery and subsequent reflection on the analysis of a sequenced guide designed to induce argumentation into the testing process. Workshop participants stated that there is no specific bibliography on the teaching and learning process of the demonstration, finding in the Sequenced Guide, an alternative to mitigate this process. A space for debate on different examples presented by the participants about this didactic proposal was generated, to finally close it with a reflection on the future of the demonstration in a totally digital setting.

Key words: argumentation, sequenced guide, demonstration

Introducción

Cuando se les pregunta a los profesores universitarios acerca de su actitud con los estudiantes frente a la demostración, muchos llegan a decir que es una empresa cada vez más compleja, por ende, los procesos deductivos resultan cada vez más debilitados en el aula.

El estudiante de Argentina que ingresa a la universidad, en los cursos de Matemática, se enfrenta a una gran dificultad en el abordaje de la prueba, proceso que lleva implícito el conocimiento del lenguaje matemático y la epistemología propia de esta ciencia. Estas dos cuestiones son prácticamente desconocidas en el ciclo medio, pues en este nivel, mayoritariamente, la matemática que se presenta hace mostración de objetos matemáticos y sus propiedades pero, sin demostración. En general, el estudiante posmoderno es ante todo una persona, y está inmerso en un mundo tecnológico que avanza de forma exponencial. Este joven necesita de satisfacciones y respuestas instantáneas de la misma forma en que las obtiene cuando hace clic con el mouse de una computadora o apenas roza la pantalla de un teléfono móvil y accede instantáneamente a una información 'transfinita', literalmente 'tiene al mundo en sus manos'.

Los resultados obtenidos en una reciente investigación llevada a cabo por D´Andrea (2020) sobre las pautas de razonamientos utilizadas por estudiantes universitarios de ingeniería en demostraciones matemáticas muestran que este tipo de estudiantes son capaces de llevar a cabo un razonamiento deductivo que siga una trayectoria 'lineal' sin giros ni artificios en el camino que lo entorpezcan hacia la meta o proposición objetivo. También pueden generalizar, pero no validar una fórmula, utilizando el principio de inducción matemática. No pueden llevar a cabo un razonamiento por reducción al absurdo, entendiendo cómo funciona, aunque son capaces de desarrollarlo de forma mecánica, sin establecer una secuencia argumentativa del mismo. Cabe destacar que también son capaces de presentar una prueba visual con una justificación adecuada que sustente esa imagen construida por sí mismos, a mano alzada o a través del software. Este tipo de argumentaciones son cada vez más comunes en el estudiante ingresante a la universidad. Si nos remontamos a la historia de la demostración matemática, cabe destacar que la Matemática en China, entre otros pueblos primitivos, tuvo clara preferencia por las argumentaciones visuales en geometría.

Cabe preguntarse, ¿Por qué ante el avance tecnológico avasallante, la persona tiende a recurrir a procesos aparentemente tan primitivos y carentes de rigor formal como la prueba visual o la verificación?

El estudiante tiene convicciones y concepciones muy potentes sobre una Ciencia Matemática que consiste según su propio lenguaje 'en hacer ejercicios' en el peor de los casos; y en el mejor, que permite resolver problemas que tienen que ver con la cotidianeidad, pero sea como sea, su epistemología es algo muy lejano y hasta inexistente y desconocido.

Como afirma Dreyfus (2000): "*no deberíamos esperar que nuestros estudiantes sean capaces de captar demostraciones sofisticadas y de alto nivel, sin haber estado expuestos durante muchos años al espíritu de la justificación y a la naturaleza del pensamiento matemático.*"

El objetivo de este taller consistió en generar un espacio de descubrimiento y posterior reflexión acerca del análisis de una guía secuenciada diseñada para inducir la argumentación en el proceso de prueba.

En el desarrollo de este taller se instruyó al asistente, en el conocimiento de una Guía Secuenciada diseñada para optimizar el proceso de enseñanza y de aprendizaje del proceso de prueba, pero, que asimismo induce a la argumentación durante el proceso mencionado. Se presentó este taller a un grupo de docentes de nivel medio y superior que en su praxis se hace necesario, el uso de argumentaciones y validaciones por parte de los estudiantes. Previamente a la presentación de Guía Secuenciada mencionada, se les expuso a los asistentes un breve marco teórico que permitiera explicar la génesis y el proceso de investigación que permitió generarla. Luego, se les propuso que la aplicaran a la prueba de proposiciones utilizadas en sus clases y las expusieran, de forma de generar con el conductor del taller y el resto de los asistentes, debate; intercambio de ideas y como consecuencia, reflexiones y proyecciones.

El problema de investigación

En general, cuando se le pide una demostración a un estudiante que ingresa a la universidad, este recurre a la verificación, aunque, es consciente que no es el proceso adecuado para establecerse como prueba. Este proceso se repite ostensiblemente, y no de forma aislada. Se trata de una reacción muy general, cuando el estudiante no puede llevar a cabo una prueba o no se le ocurre como generarla. El estudiante universitario al que se hace alusión es un estudiante que en el currículum de su carrera de grado, Matemática es una disciplina instrumental y no específica. Como ejemplo pueden citarse estudiantes de Ingeniería en sus diferentes especialidades; Física; Química; Biología; Biotecnología; Bioquímica; Farmacia; etc. El estudiante universitario descrito se enfrenta a una gran dificultad en el abordaje de la prueba, tiene profundas dificultades para comprender, reproducir y generar demostraciones matemáticas. El proceso de prueba conlleva implícito el conocimiento del lenguaje matemático y la epistemología propia de esta ciencia.

El estudiante procede, en general, cuando se le pide una prueba, desde el empirismo ingenuo (Balacheff, 2000), considerando que la prueba consiste en la exhibición de algunos casos particulares sin un criterio formado al hacerlo. En muchos casos, cuando le es requerida una prueba que el profesor ya expuso en clase, vuelven a recurrir a la verificación ignorando lo expuesto. Por otro lado, están aquellos que repiten lo que el profesor realizó en clase, pero de modo mecánico, ritual y sin comprensión. Cabe preguntarse entonces:

¿Es necesario enseñar a argumentar para demostrar? ¿Con qué objetivo?
¿Cómo es posible guiar al estudiante para que sea capaz de respetar el proceso deductivo cuando realiza la argumentación que posibilita el proceso de prueba de una proposición?
¿Qué estrategias pueden utilizarse para que realice este proceso desde el razonamiento y no desde la memoria repetitiva?

Marco teórico

Leron (1983) propone un método denominado "*estructural*", inspirado por las ideas informáticas que surgieron en década del 80 del siglo pasado y repercutieron indiscutiblemente para posteriores avances. La idea básica que subyace es presentar las demostraciones en clase con diferentes niveles de gradualidad, procediendo desde las ideas elementales de la prueba hacia la conclusión, de manera escalonada y fragmentada.

La ventaja principal de presentar así una demostración es que permite una comunicación más fluida generando en el estudiante un aprendizaje significativo. A diferencia de la prueba tradicional que se desarrolla desde la hipótesis a la tesis, la prueba estructural se desarrolla como un 'diagrama de flujo', focalizando determinadas partes de la prueba, de forma de facilitar la comprensión de estas, con el objetivo de generar la comprensión global de la prueba completa.

Solow (1992) sostiene que si se tiene que realizar una demostración del tipo: si A entonces B, se dice que se usa un *método progresivo*, tomando A como cierto llegamos a B, y que se usa uno *regresivo* cuando se busca un método para demostrar que B es verdadero, generalmente partiendo del supuesto de que B es verdadero para lograrlo, pero solo será progresivo cuando se parta desde A. Ambos métodos se relacionan entre sí cuando se trabaja con B de tal forma que se llega a A y luego se toma A y se llega a B, obteniéndose así el método conocido como regresivo-progresivo. El proceso regresivo se inicia preguntando: ¿Cómo o cuándo puedo concluir que la proposición B es verdadera? El proceso de demostración se comienza regresivamente, planteando lo que Solow denomina: "pregunta de abstracción" que consiste siempre en un planteo de la forma: "¿Cómo o cuándo puedo concluir que la proposición B es verdadera?". La pregunta debe ser formulada de un modo abstracto y sin hacer referencia alguna al problema concreto que la generó. La respuesta a la pregunta de abstracción es un proceso de dos fases. Primero hay que dar una respuesta abstracta, para después aplicar esta respuesta a la situación específica. La forma en que sea formulada esta pregunta juega un papel decisivo. Por ejemplo, si tiene que probarse que el cuadrado de todo número entero par es par, entonces la pregunta de abstracción para el planteo de esta prueba es la siguiente: ¿Cómo puedo demostrar que un número entero al cuadrado es par? Se puede responder esta pregunta en términos no tan abstractos, diciendo que esto puede ocurrir cuando se puede expresar al número entero como el producto de 2 por otro entero.

Al observar que en la formación de profesores de Matemática cubanos existían dificultades en el aprendizaje de demostraciones geométricas, Bravo y Arrieta (2003) propusieron un sistema de acciones para su ~~a~~ enseñanza, lo cual impulsó a la búsqueda de herramientas metodológicas que condujeran a ideas novedosas en su enseñanza. En sus trabajos se presentan estrategias y los resultados obtenidos de su aplicación con el objeto de generar la habilidad ‘demostrar’ en el estudiante de profesorado. En el marco teórico de su trabajo, estudiaron algunas aportaciones teóricas sobre estrategias didácticas junto al importante papel que juega la resolución de problemas en el proceso de enseñanza de la Matemática.

Una ingeniería didáctica para optimizar el proceso de prueba

El lenguaje matemático tiene tres facetas claramente definidas: coloquial, que se expresa a través del lenguaje natural del individuo; visual, que se expresa a través de la visualización conceptual, que puede ser desde un simple diagrama a mano alzada a la gráfica realizada por un software y finalmente el lenguaje simbólico, que es el lenguaje propio de la Matemática. La epistemología de la Matemática se basa en el razonamiento y la abstracción. El desarrollo del razonamiento y la abstracción en el estudiante requieren de un entrenamiento en el conocimiento y la adquisición de destrezas en el Lenguaje Matemático.

Esta ingeniería se perfila a través de una serie de estrategias didácticas presentadas como una secuencia de tareas cuyo objetivo es lograr un aprendizaje comprensivo, significativo y constructivo con, una perspectiva implícita que permita desarrollar un pensamiento lógico que pueda ser extrapolado a otras disciplinas. La secuencia de tareas induce al fortalecimiento de una habilidad ‘dormida’ en el estudiante y es la actividad ‘demostrar’ y es una acción fundamental que está implícita en el proceso de argumentación, lo que posibilita el desarrollo del pensamiento abstracto y el razonamiento lógico – matemático, que se requiere en cualquier carrera de grado universitario donde Matemática integre su currículum.

Aprender a demostrar no es un contenido cualquiera, es una destreza que es propia de un matemático profesional y que tiene poco sentido exigirle a un estudiante inicial. Es esperable la comprensión, interpretación y explicación de las mismas. La importancia de las hipótesis de una proposición a demostrar y su intervención en las diferentes partes que hacen a la cadena argumentativa de la prueba es trascendente para su comprensión. Cuando los estudiantes no pueden comprenderlas, se apropian de ellas como pueden y reproducen una versión de la prueba de forma compulsiva y memorizada.

Healy y Hoyles (2000) sostienen que los estudiantes necesitan realizar ensayos de verificación – inclusive después de realizada la demostración – porque precisamente, la demostración no los convence y la exhibición de ejemplos les refuerza la idea conceptual propugnada por la proposición demostrada. Más allá del hecho de que una prueba formal confiere validez general a un enunciado matemático, para confirmar esa validez, necesitan de controles posteriores (Fishbein, 1982). La elección adecuada de ejemplos es una tarea que requiere reflexión y su práctica cotidiana contribuye a la construcción del razonamiento del estudiante y es también una instancia previa e imprescindible al proceso de prueba.

Producto de la investigación llevada a cabo por D´Andrea, Curia y Lavalle (2012) se generó un diagnóstico que postula lo siguiente:

El estudiante ingresante a Carreras de Ciencias Naturales e Ingeniería requiere en los cursos de Matemática del currículo de la carrera elegida comprender la demostración de proposiciones y teoremas. Tiene profundas dificultades para comprenderlas, y más aún para reproducirlas, producto del retardo del desarrollo del pensamiento formal y la supresión de desarrollos teóricos en el área matemática en el ciclo medio. A esto se suma la experiencia personal de los docentes que valoran la formación recibida en la demostración de proposiciones y teoremas pero que paralelamente reniegan de aprendizajes memorísticos implícitos en estas cuestiones y como consecuencia de estas experiencias y la reticencia de los estudiantes a incorporar estos contenidos debilitan estos procesos en el aula y por ende a la Matemática, al no exponer debidamente la epistemología que le es propia. (D´Andrea et al, 2012, p.130)

Inspirándose en las propuestas de Leron (1983), Solow (1993) y Bravo Estévez (2003) y el diagnóstico expuesto precedentemente, se propuso una ingeniería didáctica para conducir y encuadrar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la demostración matemática.

Para el desarrollo en clase de la actividad que consiste en la demostración de una proposición, que permita una secuencia inmediata de apropiación, como consecuencia de la comprensión, se sugiere seguir las siguientes etapas:

1. Comprensión y Apropiación del Lenguaje Matemático

Esta etapa es el prolegómeno a las siguientes y consiste en permitir al estudiante el acceso, comprensión y apropiación del Lenguaje Matemático. Para un acercamiento efectivo del estudiante a este Lenguaje, el profesor deberá diseñar y seleccionar estrategias y material didáctico que apunten a un aprendizaje constructivo y comprensivo.

Cabe destacar que el Lenguaje Matemático, implícitamente hace referencia a nociones elementales de la epistemología que le son propias a esta ciencia. Esto queda evidenciado en los contenidos que se exponen a continuación.
La utilización de conectores proposicionales: conjunción; disyunción inclusiva y exclusiva; implicación y doble implicación; negación.
Las condiciones que pueden presentarse en una implicación o condicional.
Las implicaciones asociadas que se hallan implícitas en un condicional.
Las reglas fundamentales del álgebra de proposiciones: Involución; De Morgan; Negación de una implicación, entre otras.
Los métodos de demostración de implicaciones.
El esquema de prueba por reducción al absurdo y la ley lógica implícita.
Los contenidos citados deben ser expuestos con una profusa cantidad de ejemplos, extraídos de contenidos del ciclo medio que son revisados, usualmente, en el curso propedéutico que antecede el inicio de las Carreras de grado universitarias.
Carece de sentido el planteo de las etapas siguientes, si el estudiante no tuvo la posibilidad de acceder al Lenguaje Matemático. La etapa descripta debe ser el comienzo de los cursos iniciales de Matemática de la carrera escogida por el estudiante.

2. Presentación del teorema o proposición a demostrar

En este punto se presenta al estudiante el teorema o proposición a demostrar, en su estructura formal. Las tres etapas siguientes tienen órdenes indistintos y esto obedece a que el estudiante puede apropiarse de la comprensión de la proposición a demostrar desde la perspectiva de su propio lenguaje, la visualización o la simple acción de verificación.

3. *Interpretación coloquial*

En esta etapa se propone al estudiante que intente explicar coloquialmente, lo expuesto formalmente en el ítem anterior. Con esta etapa se generaría la comprensión desde el lenguaje coloquial. Esta etapa constituye la parte crucial de este proceso.

4. *Verificación*

En esta etapa, el estudiante es instado por el conductor del aprendizaje a verificar por sí mismo, la proposición a demostrar debiendo generar mínimamente dos ejemplos. Estos ejemplos no deben ser elegidos aleatoriamente, sino teniendo en cuenta que deben cumplir lo planteado por las hipótesis de la proposición a demostrar.

5. *Visualización*

En esta etapa, el estudiante nuevamente es instado por el conductor del aprendizaje, pero, esta vez a visualizar la proposición a demostrar. La visualización puede ser una interpretación geométrica si así correspondiera, a través de un simple esquema, dibujo, figura a mano alzada o a través del software. La proposición podría no tener una interpretación geométrica, pero, un esquema visual que muestre la secuencia de lo que expresa conceptualmente, puede contribuir notablemente a su comprensión.

6. *Simbolización*

Luego de la interpretación coloquial, la verificación y la visualización, entonces debe retomarse la estructura formal de la proposición a demostrar.

La comprensión de la expresión simbólica de la proposición a demostrar ya tiene otra accesibilidad para el estudiante, penetrando de esta forma en el proceso de abstracción, imprescindible para llevar a cabo, la prueba formal.

7**.** Elementos vitales de la proposición
En esta etapa, el estudiante debe identificar la hipótesis de la proposición a demostrar; las hipótesis implícitas y la tesis.

8. Contenidos implícitos de la proposición
En esta etapa, el estudiante deberá identificar que estructuras conceptuales están implícitas en la proposición a demostrar.

Esto, de alguna manera, está incluido en la etapa anterior, en las hipótesis implícitas.

9. Abstracción

En esta etapa, el profesor guía al estudiante en la formulación de la clásica pregunta de abstracción postulada por Solow en su método regresivo–progresivo. Esta pregunta, en la exposición de la proposición a demostrar, debe ser formulada al grupo de estudiantes con el objetivo de generar: debate y reflexión.

10. Guía Secuenciada de la demostración

Si la proposición a demostrar es en extremo constructiva y compleja de modo que el estudiante no pueda abordarla por sí mismo, es recomendable la presentación secuenciada y detallada de la misma a la manera del método estructural sugerido por Leron.

Si la proposición no requiere de grandes artificios para la construcción de su prueba, es importante invitar al estudiante a llevarla a cabo por sí mismo, a través de la denominada *Guía Secuenciada* de instrucciones que contemplen el paso a paso de la prueba en cuestión para propiciar la construcción de los razonamientos y argumentaciones de forma autónoma.

Esta *Guía Secuenciada* permitirá observar la demostración una vez realizada desde una perspectiva global hacia perspectivas más focalizadas, posibilitando la construcción de la prueba, generando aprendizajes comprensivos y significativos y no, un conocimiento inerte sin interacción.

Se recomienda que, si la proposición reviste complejidad, el profesor debe exponerla detalladamente, y al finalizarla debe invitar al estudiante a que intente reproducirla de forma aproximada con la *Guía Secuenciada* antes descripta, o bien que él mismo la genere, o también, que elabore una serie de preguntas relacionadas a la argumentación que conduce a la prueba.

Esta serie de preguntas también podrían ser un disparador inicial para el estudiante, a los efectos de la construcción de la argumentación que constituye la prueba. La idea que subyace a esta Guía es que el planteo de la prueba no sea una instancia formal, sino que se integre a la práctica cotidiana.

Es decir, que la práctica tradicional, no esté formada por clásicos ejercicios de aplicación de las estructuras conceptuales y las proposiciones asociadas a estas o simplemente aplicación de algoritmos sino, que la teoría se articule con la práctica de forma natural.

Ejemplos de la *Guía Secuenciada*

Ejemplo 1 Se considera a continuación la propiedad del cociente de complejos expresados en forma polar.
¿Cómo puede probarse que el cociente entre dos números complejos, expresados en forma polar, es otro número complejo cuyo módulo es el cociente de los módulos de los complejos dados y su argumento es la diferencia de sus argumentos?

Guía Secuenciada
Considerar que el cociente entre dos números complejos z y z’ expresados en forma polar, arroja un cierto resultado (asignarle una letra que caracterice ese resultado y expresarlo asimismo en forma polar).

Luego despejar z o z’ en función de los otros dos complejos. Expresar ambos miembros de la igualdad planteada, en forma polar y luego aplicar la propiedad del producto de números complejos en forma polar.

Luego, considerar la definición de igualdad entre números complejos, correspondiente al formato polar, para $k = 0$. Aplicada la definición mencionada, deben despejarse los valores del módulo y el argumento del número complejo, resultado del cociente al cual se le otorgó una letra al comienzo de la prueba.

La prueba que refleja la *Guía Secuenciada* se expone a continuación:
$Sean\colon\ z = \rho_\alpha; u = {\rho'}_\beta; w = R_\varphi$

$$\frac{z}{u} = w \Leftrightarrow z = w.u \Leftrightarrow \rho_\alpha = R_\varphi.{\rho'}_\beta \Leftrightarrow \rho_\alpha = [R.\rho']_{\varphi+\beta} \Leftrightarrow \rho = R.\rho' \wedge$$
$$\wedge\, \alpha + 2k\pi = \varphi + \beta \Leftrightarrow R = \frac{\rho}{\rho'} \wedge\ \alpha - \beta = \varphi\ con\ k = 0 \quad \therefore w = R_\varphi$$

Ejemplo 2 Se considera a continuación el denominado: Criterio de la derivada primera para la determinación de la monotonía de una función.

El criterio está conformado por tres proposiciones que constituyen la totalidad de este teorema. Este contempla, según sea el signo de la primera derivada, que la función sea creciente, decreciente o constante. Se hace foco en el caso de la derivada primera positiva para la generación de la *Guía Secuenciada*.
Si $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ es una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) entonces, cualesquiera sea $x \in (a,b)$: $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ es estrictamente creciente en (a,b).
¿Cómo puede demostrarse que la función de la hipótesis es estrictamente creciente si la función derivada primera es positiva?

Guía Secuenciada
Considerar la función de la hipótesis del teorema, y un subintervalo de su dominio de definición, que puede llamárselo, por ejemplo: $[x,y] \subset [a,b]$.
Luego, aplicar a la función f, el teorema del valor medio del Cálculo Diferencial en el subintervalo considerado, previa verificación del cumplimiento de las hipótesis del teorema citado.

Posteriormente analizar el signo de la expresión obtenida, como producto de la aplicación del teorema del valor medio del Cálculo Diferencial, teniendo en cuenta la hipótesis del teorema que se está probando, sobre el signo de $f'(x)$ y la definición de función estrictamente creciente. Este análisis permitirá el arribo a la tesis que se quiere probar.

La prueba que refleja la *Guía Secuenciada* se expone a continuación:
Según la hipótesis del teorema que se quiere probar, resulta que:
$f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b)
Consideremos $[x,y] \subset [a,b]$
En virtud del Teorema del valor medio del Cálculo Diferencial:
f continua en $[x,y]$ y derivable en $(x,y) \Rightarrow \exists c \in (x,y) \,/\, f'(c).(y-x) = f(y)-f(x)$
El análisis de signo de la igualdad obtenida arroja lo siguiente:
$\underbrace{f'(c)}_{>0(1)}.\underbrace{(y-x)}_{>0(2)} = \underbrace{f(y)-f(x)}_{>0(3)} \Rightarrow f(y)-f(x) > 0 \Rightarrow \underbrace{f(y) > f(x)}_{(4)} \Rightarrow f$ es estrictamente creciente en $(x,y) \subset (a,b) \Rightarrow f$ es estrictamente creciente en (a,b)

(1) por hipótesis; (2) por ser la amplitud del subintervalo considerado;
(3) debido a que el primer miembro de la igualdad es positivo, inexorablemente, el segundo miembro lo es también.
(4) en virtud de la definición de función estrictamente creciente, resulta que la función de la hipótesis es estrictamente creciente, que es lo que se quería demostrar.

Ejemplo 3 Se considera a continuación la denominada: Regla de Barrow o Segundo Teorema Fundamental del Cálculo Integral.

$$f \; continua \; en \; [a,b], y, P \; primitiva \; de \; f, tal \; que\!: \; P' = f \Rightarrow \int_a^b f(t)dt = P(b) - P(a)$$

Guía Secuenciada
Considerar la función $F(x)$ expresada como una función integral, donde la función integrando es la función de la hipótesis y aplicarle el primer teorema fundamental del cálculo integral para ver el resultado obtenido.

Considerar la misma función $F(x)$ pero, expresada como la suma de una constante y una primitiva de la función $f(x)$ de la hipótesis. Comprobar que esta forma de expresar a F es equivalente a la obtenida como resultado de haber derivado a $F(x)$, expresada como función integral. La comprobación se obtiene derivando esta expresión alternativa de $F(x)$.

Evaluar ambas expresiones de $F(x)$ en $x = a$ para obtener el valor de la constante aditiva de integración de la segunda expresión. Sustituir este valor hallado en la segunda fórmula de la función $F(x)$. Luego evaluar las dos expresiones de F en $x = b$.
Igualando ambas expresiones evaluadas en el valor último, se podrá arribar al objetivo deseado.

La prueba que refleja la *Guía Secuenciada* se expone a continuación:
En virtud del Primer Teorema Fundamental del Cálculo Integral, resulta que si se considera la función integral, donde la función integrando, es la función de la hipótesis, resulta:
$F(x) = \int_a^x f(t)dt \Rightarrow F'(x) = f(x)/a \leq x \leq b$
Si P es una primitiva de $f \Rightarrow F(x) = P(x) + C(*)$
Esto es cierto, ya que: $F'(x) = P'(x) + 0 = f(x)$ por hipótesis.
Luego, si evaluamos respectivamente a la función F expresada de dos maneras distintas en los extremos de integración: $a\ y\ b,$ respectivamente, resulta:

$$F(a) = \int_a^a f(t)dt = 0, y, F(a) = 0 = P(a) + C \Leftrightarrow C = -P(a)$$

Sustituyendo el valor de $C\ en\ (*), resulta: F(x) = P(x) - P(a)$

$$F(b) = \int_a^b f(t)dt\,, y, F(b) = P(b) - P(a) \Rightarrow \int_a^b f(t)dt = P(b) - P(a)$$

Conclusiones

Los participantes del taller manifestaron que no hay una bibliografía específica sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de la argumentación y el proceso de prueba. Mostraron gran entusiasmo por la ingeniería didáctica propuesta y en particular se conectaron con la *Guía Secuenciada*, considerando que no es fácil su construcción, ya que la redacción debe ser extremadamente cuidadosa y detallada, a los efectos de que el destinatario pueda ser tutelado hacia la meta. Asimismo, presentaron algunas producciones que enriquecieron el marco del taller con debates, discusiones y reflexiones.

Cabe destacar que se generaron muchas preguntas acerca de la *Guía Secuenciada* y demandaron al conductor del taller la mostración de nuevos ejemplos sobre cómo aplicarla en argumentaciones por reducción al absurdo; la aplicación del principio de inducción completa frente a la validación de una función proposicional con variable natural o argumentaciones que requieran el uso de artificios para el arribo a la tesis que se quiere probar.

A continuación, se responden algunas cuestiones planteadas como problema de investigación combinadas con los aportes que resultaron de los debates y reflexiones surgidos en el taller.

El diseño de un curso de Matemática no debe limitarse solamente a proveer contenidos a sus destinatarios, sino que debe estimular y como consecuencia, desarrollar el pensamiento abstracto y la capacidad argumentativa, más allá de los contenidos, ya que de lo contrario, es un curso de 'recetas algorítmicas'. Por ende, Matemática no puede soslayar su epistemología y para poder ponerla en acción, se requiere conocer su lenguaje. Los avances tecnológicos surgidos a fines del siglo XX y principios del siglo XXI junto con las nuevas corrientes didácticas ponen en juicio las actividades que se sustentaban en el paradigma tradicional.

El estudiante cuando comienza a familiarizarse con la demostración tiene dificultades para comprender la exposición del proceso argumentativo que expone el profesor en el aula. Sin embargo, es consciente acerca de lo requerido por este, cuando pide una demostración, comprendiendo que la verificación no es el proceso adecuado para establecerse como prueba. No obstante, recurre a la verificación ni bien encuentra dificultades, posiblemente debido al hecho que en la cotidianeidad y en las ciencias experimentales, la verificación es el método de prueba usual. Este proceso se repite ostensiblemente, una y otra vez, y no de forma aislada. Se trata de una reacción muy general, cuando el estudiante no puede llevar a cabo una prueba o no se le ocurre como generarla.

La ingeniería didáctica presentada intenta posibilitar que el estudiante genere una actitud reflexiva frente a la instancia de la prueba. La etapa correspondiente a la *Guía Secuenciada*, es una alternativa que permite conducir al estudiante hacia el objetivo, pero también es una 'muletilla' que con el tiempo debe ser dejada para poder permitir un desarrollo mental autónomo. En caso contrario, el estudiante dependerá de esto de forma tal que le será imposible llegar a generar argumentaciones propias.

Así mismo, es muy usual escuchar a profesores universitarios de Matemática expresar su asombro ante un tipo de respuesta por parte de un estudiante frente a la consigna que propone la prueba de validez de una proposición. La respuesta generadora del asombro consiste en la exhibición de uno o varios ejemplos como prueba. Esta reacción, no es ajena a la realidad del mundo presente, ni tampoco al contexto donde se encuentra inserto el estudiante posmoderno. El proceso de prueba es lento, profundo y complejo, muy lejano a la inmediatez de la verificación. No se está con esto gestando una apología de las bondades del empirismo ingenuo de Balacheff (2000) sino describiendo y contextualizando al estudiante posmoderno inserto en la escena digital del mundo actual.

La verificación, en el lenguaje propio de los estudiantes ingresantes universitarios consiste en expresiones y preguntas tales como: '¿reemplazo con números?', 'Profe, ¿no es lo mismo si hago esto con números?'. Este es el procedimiento más común en la vida diaria, como ya se mencionó y la persona tiende a hacer una analogía de todas sus acciones habituales en otros contextos, por ende, no sorprende que recurra a estas acciones también en el ámbito áulico.

Si bien puede haber estudiantes que son instruidos específicamente en el conocimiento del lenguaje y ciertos rudimentos de la epistemología que le es propia a Matemática, asimismo, no tienen el tiempo suficiente de maduración, como afirma Dreyfus (2000) como para vencer prejuicios y concepciones adquiridas en el nivel medio y hasta en los niveles iniciales.

Su proceder es diferente frente a una consigna que requiere la prueba de validez de una proposición, asimismo reaccionan utilizando el *empirismo ingenuo* cuando no encuentran el camino para llevar a cabo la prueba, ganando las concepciones o 'la comodidad' a la hora de poder satisfacer un requerimiento, aún a sabiendas de que no es el procedimiento adecuado. Pero, debe destacarse que, en los procesos de aprendizaje, el estudiante tiende a repetir a escala y en 'un acelerado salto cuántico hacia atrás en el tiempo', los procesos que históricamente la humanidad necesitó y experimentó hasta llegar a las estructuras conceptuales o procesos epistemológicos actuales. Es necesario conocer y respetar estos procesos además de comprenderlos para encausarlos hacia las vías que en los contextos de la ciencia actual se consideran adecuados o tener la flexibilidad necesaria y suficiente para comprender nuevos procedimientos y acciones como la prueba visual, propia de la *cultura de videoclip* (Economist.com, 2006) en que se encuentra inserto el estudiante posmoderno.

Referencias bibliográficas

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas.* Una empresa docente. Bogotá: Universidad de Los Andes.

Bravo, L. y Arrieta, J. (2003). Una estrategia didáctica para la enseñanza de las demostraciones geométricas: resultados de su implementación. VII Simposio de la Sociedad española de investigación en educación Matemática, pp.153-160.

D´Andrea, R.E. (2020). Pautas de razonamientos utilizadas por estudiantes universitarios de ingeniería en demostraciones matemáticas. [Tesis de doctorado no publicada]. Universidad Nacional del Comahue.

D´Andrea, R.E.; Curia, L.; Lavalle, A. (2012). *Razonamiento deductivo y validación en estudiantes universitarios.* Alemania: Editorial Académica Española.

Dreyfus, T. (2000). *La demostración como contenido a lo largo del curriculum*. En Gorgorió, N.,Deulofeu, A. y Bishop, A. (Coords.). Matemáticas y Educación. *Retos y cambios desde una perspectiva internacional.* (pp.125–133). España, Barcelona: Graó, S.R.L.

Economist.com. (2006). Print Edition. April 20th, 2006. http://www.economist.com/printedition/index.cfm?d=20060429

Fischbein, E. (1982). Intuition and proof. For the Learning of Mathematics. 3(2), 9 – 24.

Healy, L. y Hoyles, C. (2000). A study of proof Conceptions in Algebra. Journal for Research in Mathematics Education. 31(4), 396 – 428.

Leron, U. (1983). Structuring Mathematical Proofs Author(s). The American Mathematical Monthly, 90, 3. pp. 174 – 185.

Solow, D. (1992). *Cómo entender y hacer demostraciones en Matemáticas.* México: Limusa. Noriega Editores.

Wason, A. y Mason, J. (2005). Mathematics as a constructive activity: learners generating examples. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, publishers.

Clame Acta Latinoamericana de Matemática Educativa

SECCIÓN 2 / PROPUESTAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

VOL 34, NÚMERO 2, AÑO 2021

MULHERES MIL E A PANIFICAÇÃO: ETNOMATEMÁTICA EM AÇÃO

MULHERES MIL AND BREAD MAKING: ETHNOMATHEMATICS IN ACTION

Lucianne Oliveira Monteiro Andrade, José Roberto Linhares de Mattos, Sandra Maria Nascimento de Mattos
Universidad Nacional de Rosario / Facultad de Humanidades y Artes. (Argentina), Universidade Federal Fluminense (Brasil), Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. (Brasil)
lucianne.andrade@ifgoiano.edu.br, jrlinhares@gmail.com, smnmattos@gmail.com

Resumo
O objetivo desse trabalho é investigar as atividades exercidas pelas mulheres no povoado do Sapé, no município de Ceres – GO, com foco na ressignificação da matemática escolar no Curso de Panificação do Programa "Mulheres Mil" do Instituto Federal Goiano - Campus Ceres, Brasil, e no empoderamento social e profissional. Trata-se de um estudo de caso, em que foram utilizadas técnicas de observação participante e entrevistas com os cursistas. O resultado obtido é que o Programa Mulheres Mil é importante para o empoderamento de mulheres que não conseguem nem reconhecer os seus direitos, ocasionando mudanças pessoais e profissionais na vida das egressas. Além disso, é possível relacionar conteúdos escolares por meio das suas atividades. Dessa forma, concluímos que, por meio da Etnomatemática, podemos contextualizar a matemática no curso de panificação do Programa Mulheres Mil, o qual contribui para a ascensão social das egressas com a profissionalização.

Palavras-chave: programa Mulheres Mil; etnomatemática; fabricação de pão

Abstract
The aim of this work is to investigate the activities performed by women in the village of *Sapé*, in the municipality of Ceres – GO, focusing on the resignification of school mathematics in the bread making Course of the "*Mulheres Mil*" Program of the Instituto Federal Goiano - Campus Ceres, Brazil, and in social and professional empowerment. The case study with participant observation and interview techniques with the beneficiaries of the program were used. The result obtained is that the "*Mulheres Mil*" Program is important for the empowerment of women who cannot even recognize their rights, causing personal and professional changes in the lives of the graduates. In addition, it is possible to relate school contents through their activities. Thus, we conclude that, through Ethnomathematics, we can contextualize mathematics in the bread making course of the "*Mulheres Mil*" Program, which contributes to the social ascension of graduates with professionalization.

Key words: *mulheres Mil* Program; ethnomathematics; bread making.

Introdução

Os Institutos Federais de Educação, Ciência e Tecnologia – IF foram criados em 2008 para promover a justiça social, a igualdade, o desenvolvimento sustentável, com a perspectiva de responder à demanda por formação profissional, propagação de conhecimentos científicos e auxílio aos grupos produtivos locais (Pacheco, 2012).

O desenvolvimento dessas instituições tem proporcionado um espaço para a continuidade da capacitação de trabalhadores e trabalhadoras, e eles se posicionam como parceiros estratégicos na implementação de políticas e programas de educação social inclusiva do governo federal. Segundo Pacheco (2012), a implantação do IF está pertinente a um conjunto de políticas de educação profissional e tecnológica, oferecendo cursos técnicos em colaboração com estados e municípios, através da defesa que os processos de formação para o trabalho se encontram relacionados ao aprimoramento e elevação escolar. Discute-se neste trabalho o Programa Mulheres Mil (PMM), desenvolvido pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia - Campus Ceres – GO.

O Programa Mulheres Mil, foi instituído pela Portaria No 1.015, de 21 de julho de 2011 (Brasil, 2011), que “contou com diversas parcerias, incluindo Institutos Federais de Educação, Ciência e Tecnologia (IF), visando, principalmente, à construção de redes educacionais locais” (Carmo, 2019, p. 3). O programa foi desenvolvido pelo Ministério da Educação, por intermédio da Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica, como um programa nacional que tem por objetivo a inclusão de mulheres em circunstância de vulnerabilidade social.

O PMM também foi criado para ter algum impacto na sociedade brasileira desde sua implementação, reduzindo assim as desigualdades de gênero no país. Para que o programa pudesse ser bem-sucedido e atender às suas expectativas, uma metodologia específica foi desenvolvida em colaboração com o governo canadense, com o objetivo de formação educacional, profissional e cidadã. O Programa deve ter carga horária mínima de 160 horas e apoia-se em módulos flexíveis, organizados de forma a avaliar a aprendizagem prévia das mulheres, bem como a contribuir com o aumento da autoestima, com a elevação da escolaridade e com o acesso ao mundo do trabalho e ao empreendedorismo, oferecendo formação em áreas profissionais específicas de acordo com a realidade de cada comunidade.

O PMM está inserido no contexto de um conjunto de políticas sociais que visam à qualificação para o trabalho, oferecendo qualificações profissionais e incentivo à educação formal para mulheres em situação social difícil, possibilitando acesso à educação, mecanismos profissionais e tecnológicos e de articulação e conexões de entrada no mundo do trabalho. O programa depende do contexto e das prioridades das diretrizes de política pública e política externa do governo brasileiro.

Com a estabelecimento do programa, o Instituto Federal Goiano - Campus Ceres, passou a desenvolver atividades que beneficiassem mulheres residentes em áreas rurais e urbanas, conforme a realidade de cada aluna. Portanto, o Campus Ceres é responsável por oferecer cursos a diversos alunos da região. Assim, foi realizado um trabalho com abordagem prática com as alunas do Programa Mulheres Mil do Campus Ceres do Instituto Federal Goiano – IF Goiano, com trabalhadoras rurais, do Povoado do Sapé, município de Ceres, em Goiás, para melhor entender os tipos de medidas utilizadas por essas mulheres para medir suas produções, a qual se encontra relacionada com a matemática da sala de aula.

Nesse sentido, essa pesquisa traz a possibilidade de refletir sobre o papel da educação matemática considerando a voz dos sujeitos envolvidos, alunas, comunidade, educadores e instituição de ensino. Muitas dessas mulheres, atendidas pelo PMM, já desenvolvem atividades profissionais para sua subsistência; outras estão desempregadas ou em subempregos, portanto entendemos como imprescindível conhecer a realidade das educandas, que já possuem experiências e saberes adquiridos ao longo da vida, que deverão ser reconhecidos e aperfeiçoados.

Acredita-se na necessidade de oferecer a educação Etnomatemática, a qual tem como objetivo integrar os saberes matemáticos populares e os propostos no currículo escolar. A Etnomatemática se apresenta como possibilidade do desenvolvimento de uma aprendizagem significativa (Mattos, 2020), pois procura resgatar, analisar e valorizar o saber e o fazer matemático produzido em diferentes contextos culturais.

Guerra (2016, p. 74), esclarece que "os objetivos declarados do PMM é a erradicação da pobreza extrema e da fome, a promoção de igualdade de gênero e autonomia das mulheres e sustentabilidade ambiental". O programa oferece às mulheres educação e emprego, como forma de fortalecer sua autonomia, permite que elas tenham a possibilidade de empoderamento dentro e fora da família.

■ Programa Mulheres Mil e o trabalho feminino em uma comunidade rural no povoado do Sapé - município de Ceres – GO

O trabalho da mulher sempre esteve relegado a segundo plano e inferiorizado:
O papel reservado às mulheres, portanto, desde o início da construção do país, sempre foi marcado pela subalternidade, não tendo elas o mesmo tratamento, poder e prestígio concedidos aos homens. Ao contrário, eram tratadas em relação a estes últimos como acessórios para que eles pudessem conquistar o novo território. (Nicknich, 2016, pp. 323-324)

Da mesma forma, a revolução industrial incorporou o trabalho da mulher no mundo da fábrica, separou o trabalho doméstico do trabalho remunerado fora do lar. A mulher foi incorporada subalternamente ao trabalho fabril. Em fases de ampliação da produção se incorporava a mão de obra feminina junto à masculina, nas fases de crise substituía-se o trabalho masculino pelo trabalho da mulher, porque o trabalho da mulher era mais barato. (Oliveira, 2012, p. 6).

O autor acrescenta, ainda, que a luta das mulheres se iniciou por direitos no trabalho e ao voto. Segundo ele, "já no século XIX havia movimento de mulheres reivindicando direitos trabalhistas, igualdade de jornada de trabalho para homens e mulheres e o direito de voto" (Oliveira, 2012, p. 6).

Historicamente, o processo de inclusão das mulheres no mercado de trabalho tem sido dificultoso, por fator cultural, etnicamente diversos como: salário e gênero. Nesta situação, as mulheres nas áreas rurais têm mais probabilidade de herdar conhecimentos e costumes das comunidades tradicionais. Não há restrições ao trabalho doméstico relacionadas a costumes e valores, conforme Wommer e Cassol (2014). A realidade das mulheres na agricultura familiar é que há muito trabalho e pouco reconhecimento. Até hoje, as agricultoras brasileiras ainda sentem insegurança social em ser trabalhadoras e cidadãs.

Todavia, em busca de soluções para combater a desigualdade social e, por conseguinte, a diminuição dos índices de pobreza, os países em desenvolvimento, mais castigados com essa circunstância, buscaram reduzir as condições de indigência e pobreza da população, adotando programas voltados para este fim (Alves e Silva, 2015), como o Programa "Mulheres Mil" que tem contribuído com a redução da pobreza ao permitir a melhoria da qualidade de vida das participantes.

As mulheres do PMM vêm de grupos de baixa renda, a maioria delas chefes de família com baixa escolaridade. Consistem em serem mulheres que foram excluídas do processo educacional em tenra idade, não optaram por abandonar a escola, tiveram que desempenhar outras responsabilidades, como cuidar do lar e criar filhos, no processo de definição social das relações de gênero (Ferreira e Duarte, 2018).

Com a institucionalização do programa, o Instituto Federal Goiano – Campus Ceres, passou a desenvolver atividades que beneficiam as mulheres residentes nas áreas urbana e rural do município, atendendo, assim, a demandas de trabalho relacionadas a cada realidade. O Campus Ceres foi responsável pela oferta de cursos a várias estudantes da região.

O estudo apresentado é referente ao trabalho das trabalhadoras rurais no povoado do Sapé, município de Ceres em Goiás (figura 1), onde foi realizada uma atividade prática com as alunas do Programa Mulheres Mil do Campus Ceres – IF Goiano. Este Campus encontra-se localizado na Rodovia GO-154, km 03, que liga a cidade de Ceres à cidade de Carmo do Rio Verde, a 180 km de Goiânia, no Vale de São Patrício, onde a economia é baseada na agropecuária e na prestação de serviços.

O município de Ceres está localizado na Mesorregião do Centro Goiano, cerca de 170 km de Goiânia, ocupando uma área de 214,322 km2. Sendo limitado pelos municípios de Ipiranga de Goiás, Carmo do Rio Verde, Rialma e Rubiataba (Ibge, 2013).

Figura 1. *Povoado do Sapé.*

Fonte: Google Maps, 2020.

O papel da mulher rural reflete as diversas habilidades que ela atua em campo. Antes, vistas como ajudantes, as trabalhadoras rurais se destacaram em vários níveis de produção de alimentos e geração de renda e desenvolvimento socioeconômico rural. Ainda que sua participação seja bastante expressiva no desenvolvimento das comunidades locais, a identidade e o trabalho desempenhado pelas mulheres rurais ainda não são reconhecidos por muitos na sociedade (Silva, 2016).

Conforme Ferreira e Duarte (2018), o Programa Mulheres Mil no Brasil surgiu de uma parceria do Governo brasileiro e canadense. A consolidação dessa cooperação teve o envolvimento da Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica do Ministério da Educação (SETEC/MEC) e da Agência Canadense para o Desenvolvimento Internacional (CIDA/ACDI) e a Associação do Colleges Comunitário do Canadá (ACCC).

O Programa é acolhido pelos Institutos Federais, que criam mecanismos para a promoção do acesso das mulheres afastadas da possibilidade de inclusão ao conhecimento, à tecnologia e à inovação, oferecendo educação profissional e tecnológica, atendendo as demandas sociais e peculiaridades regionais. (Trindade, 2018, p. 2)

Nessa mesma direção, Duarte e Paniago (2016) dizem que:

As desigualdades sociais parecem nortear a educação profissional no Brasil, num processo de controle da exclusão, sobretudo no que se refere ao gênero feminino. Este, muitas vezes, acaba por ser duplamente oprimido, em razão de sua condição socioeconômica e também da discriminação sócio-histórico-cultural de gênero. Contudo, a construção de uma consciência coletiva da classe trabalhadora - assim como a inclusão de políticas sociais afirmativas de fato, em um cenário em que o Estado vá além das relações de mercado - pode favorecer uma reversão das relações de poder que envolvem o PMM e outras iniciativas similares, especialmente no que tange à educação profissional. (Duarte e Paniago, 2016, p. 1).

A ideia central do programa é desenvolver ferramentas técnicas que promovam o acesso e a permanência na sala de aula, além da formação em áreas profissionais específicas em cada local. Além disso, busca-se a transmissão de temas considerados prioritários para a educação do cidadão, como saúde e direitos das mulheres, inclusão digital, cooperativas e proteção ambiental.

No PMM do Instituto Federal Goiano – Campus Ceres, como objetivos do curso, são apresentados a oferta de trabalho e o empoderamento das mulheres, sendo possível que elas se tornem gestoras de suas histórias. Como uma situação local, o projeto pedagógico determina que os critérios incluídos na seleção das mulheres não se refiram apenas à renda.

Vê-se que a linha da pobreza não é o único ponto a ser considerado, porque no município da cidade de Ceres, é possível encontrar muitas mulheres que sofrem violência, são agredidas por seus parceiros, e acabam ficando presas em suas próprias casas, pois têm vergonha de falar a respeito de seus problemas de saúde e não se envolvem em programas sociais no município, por acreditarem que não têm direito. A maioria delas não estudaram porque se envolveram nas práticas tradicionais que o sistema machista estabelece.

Contudo, as mulheres do PMM são atendidas pela Secretaria Social de Ceres. O Centro de Referência de Assistência Social: o CRAS é uma unidade pública-estatal vinculada à Secretaria Municipal de Assistência Social, do município de Ceres - Goiás. Implantado no município em 2005, atua como porta de entrada do Sistema Único de Assistência Social- SUAS. É a Secretaria que encaminha essas mulheres para que façam parte do Programa Mulheres Mil no IF (Ceres, 2013).

A Secretaria de Assistência Social possui a função de organizar essas mulheres e buscar profissionalização para elas. Muitas têm história de violência doméstica, além da questão da falta de estudo, de ter uma profissão, de ter que cuidar dos filhos e da casa. A fundação do CRAS no município de Ceres possibilitou à descentralização do atendimento integral as famílias e ampliou o acesso dos CRAS aos usuários para os serviços socioassistenciais (Ceres, 2013).

As mulheres rurais realizam tarefas domésticas dentro de suas famílias e ajudam nas atividades agrícolas. Além do quintal, cuidando dos seus jardins, desenvolvem a agricultura, cuidam de pequenos animais para alimentação, hortas etc. No entanto, essas atividades não são consideradas atividades financeiramente remuneradas e, assim, não trazem retorno para a família. São consideradas atividades rotineiras, tendo a mulher rural como exclusiva responsável (Carvalho, 2012). Muitas famílias de agricultores em Ceres-GO, continuam mantendo vivas as relações patrilineares em seu meio. Tendo como objetivo a continuidade da unidade de produção, onde todos os membros da família trabalham juntos.

A educação Etnomatemática no Programa Mulheres Mil

"A proposta pedagógica da etnomatemática é fazer da matemática algo vivo, lidando com situações reais no tempo [agora] e no espaço [aqui]. E, através da crítica, questionar o aqui e agora". Ao concretizar isso, as raízes culturais e a dinâmica cultural serão abrangidas. Por essa razão, vê-se "a etnomatemática como um caminho para uma educação renovada, capaz de preparar gerações futuras para construir uma civilização mais feliz" (D'Ambrosio, 2011, p. 47).

D'Ambrosio (1997, p. 14) afirma que "o ensino da matemática ou de qualquer outra disciplina dos nossos currículos escolares, só se justifica dentro de um contexto próprio, de objetivos bem delineados incluso do quadro das primazias nacionais". A matemática é de suma importância no ensino, entretanto é indispensável elucidar que esta disciplina não se limita exclusivamente à preparação de um profissional para a área de trabalho, todavia assim como nas ciências humanas, e do mesmo modo tem grande relevância no desenvolvimento social dos educandos.

Portanto, o Programa de Etnomatemática não é uma teoria final e esta proposta pode ser considerada uma proposta de pesquisa. É essencialmente um programa intercultural e interdisciplinar e usa os métodos da ciência, cognição, mitologia, antropologia, história, sociologia (política, economia, educação) e estudos culturais em geral. "A proposta se concentra na geração e evolução de comportamento e conhecimento em dois focos aparentemente distintos que são cada indivíduo da espécie humana e a espécie humana como um todo" (D'Ambrosio, 2018, p. 2).

As mulheres do PMM compreendem a necessidade de conhecimento matemático e procuram novas alternativas para resolver problemas que surgem diariamente. No entanto, elas reconhecem que novos conhecimentos são imprescindíveis e que muitos objetivos podem ser alcançados através da educação. A inclusão da etnomatemática no PMM reconhece a necessidade de uma educação diferenciada.

Os cursos do Programa Mulheres Mil são organizados com o princípio de que as áreas do conhecimento contempladas nas diferentes componentes curriculares do curso estejam interligadas com a formação técnico-profissionalizante. Assim, no Projeto Pedagógico de Curso (PPC) do PMM, está inclusa uma disciplina de matemática, tendo como objetivos: identificar os diversos tipos e representações de números; operar os diversos tipos de números na realização de cálculos; resolver questões de matemática a partir de situações problemas; utilizar os conceitos e propriedades de porcentagens na resolução de situações problemas e utilizar ferramentas de cálculos (calculadoras, planilhas, computador etc.).

Alves e Silva (2015) mencionam que para implementar o Programa Mulheres Mil, várias ferramentas e métodos precisam ser desenvolvidos, desde o planejamento até a sua realização. O acesso é considerado muito importante, mas a permanência bem-sucedida é decisiva para que isso aconteça. Um dos elementos responsáveis pela permanência das alunas no programa é o reconhecimento de suas aprendizagens anteriores, dos anos na educação formal cursados e identificar competências e habilidades obtidas em outros cursos ou em sua própria experiência de vida que promovem muito a autoestima, e auxilia no processo de ensino-aprendizagem.

Assim, faz-se imprescindível que a educação oferecida para essas mulheres se apresente como um campo de práticas educativas em que o professor deve se colocar como pesquisador e propor-se a elaborar um projeto de ensino da matemática contextualizado com a realidade em que vivem e com as exigências do Curso de Panificação.

Metodologia

Para a realização dessa pesquisa foi utilizado o método descritivo e interpretativo que, segundo Fino (2008) e Sabirón (2001), se adapta a processos de pesquisa com instituições, grupos e organizações sociais, pois utiliza a descrição como base para a interpretação do que é pesquisa em educação.

Trata-se de um estudo de caso, em que as técnicas de pesquisa utilizadas foram a observação participante no Curso de Planejamento do PMM para determinar o nível acadêmico e conhecimento prévio dos beneficiários para traçar os planos de aula do processo formativo. Foram realizadas entrevistas e pesquisas com os beneficiários do PMM, interessados em se inscrever no programa e com as lideranças com o objetivo de obter dados para a elaboração dos planos de aula do PMM Panificação. Os Formulários de entrevista e pesquisa foram elaborados no processo de pesquisa. Foram observados os conteúdos de matemática envolvidos no processo de fabricação do pão, nas aulas práticas do Curso de Padaria.

Buscou-se compreender a atividade exercida pelas mulheres do PMM, dentro da realidade delas no povoado do Sapé, situado no município de Ceres – GO. Procuramos entender desde a fabricação do polvilho (farinha extraída da mandioca) até sua utilização para a produção de alimentos que fazem parte do Curso de Panificação oferecido às alunas.

Foi verificado a forma utilizada para medir a matéria prima, com a utilização de medidas como "o prato e o copo", os quais são muito comuns nas receitas das quitandas nas comunidades rurais. São muito utilizadas medidas como balaio e lata para medir a quantidade de mandioca e polvilho, pelas mulheres produtoras rurais da comunidade.

A pesquisa foi desenvolvida no mês de setembro de 2019. A escolha do grupo de mulheres para investigação, ocorreu devido ao fato de já participarem do PMM do Instituto Federal Goiano – IF Goiano, Campus Ceres e trabalharem na zona rural, exercendo suas atividades conforme os ensinamentos instruídos no Curso de Planejamento do PMM de panificação.

Resultados

Atividade prática: as alunas do Programa Mulheres Mil do Campus Ceres IF Goiano

Para melhor entender como é realizado o trabalho das trabalhadoras rural, foi realizado uma atividade prática executada com as alunas do Programa Mulheres Mil. A atividade contemplou desde a fabricação do polvilho (farinha extraída da mandioca) até sua utilização para a produção de pêtas, pães e biscoitos de queijo, quitandas típicas da região e que fazem parte do Curso de Panificação oferecido às alunas. Logo após conhecerem todo o processo de fabricação do polvilho foram apresentadas as quitandas feitas pelas alunas, quando utilizam medidas como "o prato e o copo", muito comuns nas receitas de tais quitandas nas comunidades rurais.

Conhecemos a trabalhadora rural, Dona Madalena de 53 anos, que trabalha com a produção de polvilho há 38 anos e usa como medidas o latão e o balaio. Dona Madalena disse que acha melhor trabalhar em casa do que sair para trabalhar fora, e a matéria prima é adquirida por "a meia" que significa repartir a produção final, ou seja, repartir o polvilho, com o vizinho, compadre que plantou a mandioca, o qual é medido pelo balaio que corresponde a 100 litros. Para medir um balaio de mandioca com casca, Dona Madalena utiliza meio latão, que também corresponde a 100 litros. Segundo Dona Madalena, para fazer uma lata de polvilho é preciso de 2 balaios de mandiocas.

Em seguida, foi visto uma receita de pão de queijo, que faz parte do curso oferecido de panificação, ensinada pela salgadeira, Dona Regina de 59 anos, que utiliza o prato e copo como medidas para preparação da massa da quitanda, sendo essa uma receita herdada de sua mãe. Tais medidas são usadas nas comunidades rurais, sendo diferenciadas das medidas padronizadas, ensinadas às alunas durante o curso.

Observa-se que as técnicas são repassadas de geração a geração com relação a como fazer o polvilho, o pão de queijo entre outras coisas. Muitas receitas passadas entre gerações, com toques pessoais que fazem a diferença, garantem uma fonte de renda de muitas famílias do município.

Tradições familiares são de suma importância, pois é capaz de trazer a lembrança que cada família é única. Trazendo seu senso de pertencimento, aquecem os corações e trazem a lembrança de onde se vem. Isso lembra o legado que se quer levar adiante. As tradições carregam a marca de cada família e dão a seus membros a confiança no vínculo que eles podem confiar para sempre. Hoje, entretanto, a vida é diferente desta tradição, parece estar removendo esse momento de tradição, socialização, conhecimento e sua difusão (Rhein e Berrá, 2017).

Destaca-se que o Programa Mulheres Mil, vem aperfeiçoando a escolaridade e o profissionalismo, proporcionando às alunas a possibilidade de inclusão e reinserção social no mercado de trabalho. Portanto, é possível entender que os objetivos instituídos no programa podem ser alcançados em muitos aspectos, uma vez que tem o potencial de fornecer mudanças internas que virão a refletir em todas as áreas da vida dessas mulheres, especialmente em questões que se referem à vida familiar, a possibilidade de se tornar empreendedoras e construir melhores relacionamentos na vida social (Silva, 2016).

O Programa Mulheres Mil, com sua ampla funcionalidade, escolaridade elevada, formação profissional, autoestima resgatada, exercício da cidadania, oferta de serviços sociais e estímulo à inserção profissional, faz a diferença na vida das estudantes e embora não sejam inseridas no mundo do trabalho, o programa induz ao conceito de cidadania que sempre leva à mudança social.

De acordo com Oliveira, Carvalho, Souza Filho, Souza e Riva (2010), a agricultura familiar, que tem em sua história um papel importante como classe social, capaz de gerar com o trabalho familiar o diferencial na produção dos alimentos essenciais para a alimentação da população brasileira, se destaca por construir ambientes que produzem e reproduzem um jeito próprio de viver e se relacionar com as diferentes formas sociais, inclusive da própria Agricultura Familiar.

Ainda, conforme esses autores, a agricultura familiar possui um imenso destaque no meio rural, a qual, segundo o Ministério do Desenvolvimento e Combate à Fome, é responsável por mais de 40% do valor bruto da produção agropecuária, correspondendo a mais de 74% da mão-de-obra realizada nas propriedades rurais do país, e, do mesmo modo, também, pela maioria dos alimentos que se encontram na mesa dos brasileiros.

Nessa direção, no caso das alunas do Programa Mulheres Mil, vê-se que elas estão assumindo uma função social importante na manutenção familiar, atualmente. Dessa forma, o pequeno produtor rural, vem sendo enfocado também nas mulheres produtoras, que ajudam ou sustentam as suas famílias.

Considerações Finais

Esta pesquisa representa o trabalho voltado à luta das mulheres por um futuro melhor por meio do Programa Mulheres Mil em um curso de panificação, em que foi apresentada a vida da mulher na agricultura familiar do povoamento do Sapé, na cidade de Ceres – GO. Acredita-se que este possa encorajar muitas mulheres que vivem em áreas rurais a considerá-las parte integrante de sua propriedade, uma pessoa importante, e que as ajude a tomar decisões e contribuir economicamente para a gestão familiar.

As mulheres do povoamento do Sapé mostraram que há novas especificidades no meio rural. Não apenas desenvolvem os afazeres domésticos, cuidam dos filhos e realizam tarefas cotidianas de propriedade, entretanto também trabalham juntos para complementar a renda familiar e desenvolver outras atividades, como contribuir ativamente para a produção econômica familiar.

O processo de constituição das identidades pessoais dessas agricultoras familiares vem ocorrendo de forma positiva. Enfatiza-se que o PMM é de suma importância para empoderar mulheres que não conseguem nem reconhecer seus direitos. É claro que o retorno a uma instituição de ensino educacional faz com que as relações domésticas mudem com todas as dificuldades, embora de maneira tímida. O PMM pode ocasionar mudanças importantes na vida de suas egressas, ou seja, na maneira como eles viam a si próprias.

Com base na pesquisa realizada, tem-se que o Programa Mulheres Mil não resolve problemas históricos referentes a assuntos de gênero, saúde, educação e trabalho, mas avança relacionado na metodologia e conscientização das mulheres para um algo mais, para que elas tenham condições de prosseguir aos estudos e ao trabalho.

Dessa forma, entende-se que o PMM alcançou parcialmente sua meta de profissionalização e suplementação de renda, de capacitar mulheres e desenvolver habilidades de diversificação da produção, contribuindo para o aumento das vendas e, portanto, da receita. Assim, percebe-se que em um local, sendo ele uma vila, bairro ou comunidade, caracterizado por extrema pobreza, pode ser identificado grupos de mulheres que trabalham informalmente e que não têm relação com o mercado de trabalho, mas que podem ser organizadas em coletivos integrados aos recursos sociais e culturais locais ou se estabelecer como microempreendedoras, individualmente. Assim, o Programa Mulheres Mil passa a existir para profissionalizar mulheres e inseri-las em um mundo de trabalho mais rentável e mais valorizado quando relacionado ao trabalho doméstico.

Dessa forma, entende-se que a mulher tem papel social na família, na comunidade e nas atividades laborais, mais do que qualquer outra coisa. Elas estão invadindo, cada vez mais, o mercado de trabalho produtivo e conquistando respeito e visibilidade. Elas podem estar com ou sem seus cônjuges, mas estão colaborando para melhorar a qualidade de vida de seus familiares, sendo chefes de família. Como resultado, cada vez mais mulheres estão envolvidas na geração de renda familiar e estão buscando ativamente o aprimoramento da sua propriedade para aumentar o padrão de vida da sua família.

Por outro lado, pôde-se verificar, nas atividades das mulheres na confecção de pães, elementos etnomatemáticos que permitem contextualizar conteúdos escolares nas aulas de matemática do curso de panificação do Programa Mulheres Mil do Instituto Federal Goiano, Campus Ceres - GO. Por exemplo, figuras geométricas tridimensionais e unidades de medidas de volume, com o uso do balaio e do latão; razão e proporção, por meio da relação entre o volume do balaio e a capacidade do "meio latão"; e o prato e o copo, que fornecem medidas utilizadas na preparação da massa de pães e de receitas.

Assim, concluímos que é possível ressignificar a matemática escolar no curso de panificação do Programa Mulheres Mil do Instituto Federal Goiano, Campus Ceres, por meio das atividades exercidas pelas mulheres do povoado do Sapé com viés na Etnomatemática. Além disso, esse programa contribui com o empoderamento dessas mulheres, melhorando suas condições pessoais e profissionais.

Referências bibliográficas

Alves, C.B.C. e Silva, M.R.C. (2015). Educação, Cidadania e Desenvolvimento Sustentável. O programa Mulheres Mil no enfrentamento à feminização da pobreza. *Caderno Espaço Feminino 28*(1), 178-194. Recuperado de http://www.seer.ufu.br/index.php/neguem/article/view/28379.

Brasil. MEC. Portaria No 1.015, de 21 de julho de 2011. (2011). *Diário Oficial da União*. Brasília: Imprensa Nacional.

Carmo, N.C. (2019). *Programa Mulheres Mil: uma análise multidimensional*. Dissertação de Mestrado em Economia Doméstica, Departamento de Economia Doméstica, Universidade Federal de Viçosa. Brasil. Recuperado de https://www.locus.ufv.br/bitstream/handle/123456789/25859/texto%20completo.pdf?sequence=1&isAllowed=y.

Carvalho, D.J. (2012). *O empoderamento da mulher na agricultura familiar de Carvalhópolis-MG*. Dissertação de Mestrado em Políticas Sociais, Escola de Serviço Social, Universidade Federal Fluminense. Brasil. Recuperado de https://app.uff.br/riuff/bitstream/1/7679/1/DeboraJucelyDeCarvalho.pdf.

Ceres (Go). (2013). Centro de Referências de Assistência Social – CRAS – Ceres – *Projeto Conviver.* Ceres-Go.

D'Ambrosio, U. (1997). *Transdisciplinaridad*e. São Paulo: Palas Athena.

D'Ambrosio, U. (2011). *Etnomatemática - Elo entre as tradições e a modernidade*. Belo Horizonte: Autêntica.

D'Ambrosio, U. (2018). Etnomatemática, justiça social e sustentabilidade. *Estudos avançados,* 32(94), 189-204. Recuperado de https://www.scielo.br/pdf/ea/v32n94/0103-4014-ea-32-94-00189.pdf.

Duarte, K.C.F.P e Paniago, M.L.F.S. Programa Mulheres Mil: educação profissional destinada ao gênero feminino. *Revista Eletrônica da Pós-Graduação em Educação*, 12(1), 1-10.

Ferreira, A.M.S. e Duarte, V.C.O. (2018). A implementação do programa mulheres mil no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Mato Grosso, Campus Pontes e Lacerda: relato de uma experiência exitosa. *Revista Práticas em Gestão Pública Universitária*, 2(2), 165-182.

Fino, C.N. (2008) A etnografia enquanto método: um modo de entender as culturas (escolares) locais. *Educação e cultura*, 43-53. Recuperado de http://www3.uma.pt/carlosfino/publicacoes/22.pdf.

Guerra, S.C. (2016). *Relevância do programa mulheres mil para o capital social das participantes*. Dissertação de Mestrado em Políticas Públicas de Educação Profissional, Universidade de Brasília, Faculdade de Educação. Brasil. Recuperado de https://repositorio.unb.br/bitstream/10482/19926/1/2016_SuzanaCuriGuerra.pdf.

Ibge. Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística – Cidades. (2013). Recuperado de http://cidades.ibge.gov.br/xtras/home.php20/11/2013.

Mattos, S.M.N. (2020). *O sentido da matemática e a matemática do sentido: aproximações com o Programa Etnomatemática*. São Paulo: Editora Livraria da Física.

Nicknich, M. (2016). *O direito social das mulheres ao trabalho e o princípio da fraternidade: uma nova relacionalidade na pós-modernidade*. Dissertação de Mestrado em Direito, Centro de Ciências Jurídicas, Universidade Federal de Santa Catarina. Brasil. Recuperado de https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/168000/340335.pdf?sequence=1&isAllowed=y.

Oliveira, A.C.M. (2012). *A evolução da mulher no brasil do período da colônia a república*. Memórias do VI Colóquio Internacional, Educação e Contemporaneidade. São Cristóvão – SE. Universidade Federal de Sergipe, 1-16. Recuperado de http://www.wwc2017.eventos.dype.com.br/resources/anais/1494945352_ARQUIVO_Artigocompleto-13MundodasMulhereseFazendoCidadania11.pdf.

Oliveira, N.S., Carvalho, K.M.G.A.S., Souza Filho, T.A., Souza, M.P. e Riva, F.R. (2010). Agricultura Familiar do Agronegócio do Leite em Rondônia, Importância e Características. *Memórias do 48º Congresso SOBER – Sociedade Brasileira de Economia, Administração e Sociologia Rural.* Campo Grande-MS, 1-21. Recuperado de https://docplayer.com.br/6012157-Agricultura-familiar-do-agronegocio-do-leite-em-rondonia-importancia-e-caracteristicas.html.

Pacheco, E. (2012). Prefácio: Institutos Federais: um futuro em aberto. En E.C.L. Souza e R. Castioni (Eds), *Institutos Federais: os desafios a institucionalização* (pp. 7-12), Brasília Editora UNB.

Rhein, T.H. e Berrá, L. (2017). Desafio da mulher na gestão das propriedades rurais familiares do município de Westfália/RS. *Revista Destaques Acadêmicos, Lajeado, 9*(1), 111-126. Recuperado de http://www.univates.br/revistas/index.php/destaques/article/view/1259/1115.pdf.

Sabirón, F. (2001) Estructura de un proyecto de investigación en Etnografía de la Educación (I). *Revista Europeia de Etnografia da Educação, 1*, 27-42.

Silva, C.M. (2016). *Formação de trabalhadoras: o programa mulheres mil sob o olhar de suas educadoras*. Dissertação de Mestrado em Educação, Universidade Federal de Lavras. Brasil. Recuperado de http://repositorio.ufla.br/bitstream/1/10821/2/DISSERTA%C3%87%C3%83O_Forma%C3%A7%C3%A3o%20de%20trabalhadoras%3A%20o%20programa%20mulheres%20mil%20sob%20o%20olhar%20de%20suas%20educadoras.pdf.

Trindade, F.M. (2018). *As implicações do programa mulheres mil*. In: VII Seminário Corpo, Gênero e Sexualidade, Memórias do III Seminário Internacional Corpo, Gênero e Sexualidade, III Luso-Brasileiro Educação em Sexualidade, Gênero, Saúde e Sustentabilidade, Rio Grande. Universidade Federal do Rio Grande - FURG, 1-8. Recuperado de https://7seminario.furg.br/images/arquivo/152.pdf.

Wommer, D.H. e Cassol, C.V. (2014). *A participação Feminina na Gestão da Propriedade Rural: cuidado que qualifica e humaniza*. Capítulo XXIII, 1-25. Recuperado de http://www.emater.tche.br/site/arquivos_pdf/teses/Dulceneia_Wommer.pdf.

PRÁTICAS PEDAGÓGICAS INDÍGENAS DE SUSTENTABILIDADE E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: SUPERANDO FATOS HISTÓRICOS

INDIGENOUS PEDAGOGICAL PRACTICES OF SUSTAINABILITY AND MATHEMATICS EDUCATION: OVERCOMING HISTORICAL FACTS

Sandra Maria Nascimento de Mattos, José Roberto Linhares de Mattos, Douglas Junior de Souza Alves
Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Universidade Federal Fluminense, Universidade Federal de Rondônia. (Brasil)
smnmattos@gmail.com, jrlinhares@gmail.com, douglaskcoal1@hotmail.com

Resumo
O objetivo desse artigo é apresentar práticas pedagógicas que são atos de resistência, insurgência e conscientização crítica a respeito da sustentabilidade e preservação da floresta, como estratégia para resguardar a história de cada etnia indígena existente no Corredor Etnoambiental Tupi Mondé. Apresentaremos uma retrospectiva de ações contra os povos indígenas, pois os relatos emergem como tal estratégia. Com abordagem qualitativa, a metodologia utilizada foi a observação participante com realização de rodas de conversas e entrevistas com lideranças e professores indígenas de matemática. Nessa perspectiva, práticas de sustentabilidade e das tradições originárias são caracterizadas como ações de empoderamento identitário e entendidas como caminhos para ultrapassar o que está instituído nas salas de aula. O resultado principal aponta para práticas pedagógicas que, aliando projetos de proteção e sustentabilidade, reforçam a dignidade, a identidade e a resistência de cada etnia, além de auxiliar no ensino e na aprendizagem da matemática escolar.

Palavras-chave: práticas indígenas; sustentabilidade; educação matemática

Abstract
This paper is aimed at presenting teaching practices that are acts of resistance, insurgency and critical awareness regarding the sustainability and forest preservation as a strategy to safeguard the history of each ethnic group in the Tupi Mondé Ethno-Environmental Corridor. We will present a retrospective of acts against indigenous peoples, since the reports emerge as such strategy. With a qualitative approach, the methodology used was active observation with rounds of talks and interviews with indigenous leaders and mathematics teachers. In this perspective, sustainability and original tradition practices are characterized as actions that incorporate identity empowerment; and they are understood as ways to overcome what is established in classrooms. The main result points to pedagogical practices that, combining protection and sustainability projects, reinforce the dignity, identity and resistance of each ethnic group, in addition to aiding the teaching and learning of school mathematics.

Key words: indigenous practices; sustainability; mathematics education

Introdução

Desde a invasão dos portugueses em terras indígenas, chamadas posteriormente de terras brasileiras ou Brasil, que os indígenas vêm sofrendo ataques de várias formas. Foram estratégias de eliminação da identidade, da espiritualidade e da ancestralidade. Momentos críticos que levaram ao extermínio de alguns povos indígenas. Apesar dessas ameaças, muitos indígenas conseguiram sobreviver e, consequentemente, resguardar suas tradições e seus conhecimentos originários, principalmente no que tange a sustentabilidade e proteção da floresta. Nessa lógica, entendem a floresta como parte deles, portanto, as terras indígenas são territórios em que guardam relação de cosmogonia e de ancestralidade.

Consideramos que esse foi o primeiro fato histórico de ataque às etnias indígenas no Brasil. Nessa época eles eram cerca de cinco milhões de habitantes. Os portugueses souberam ludibriar os povos originários com a tentativa de "civilizá-los". Começa, assim, um ataque aos povos indígenas, que tiveram suas terras exploradas, usurpadas e expropriadas em seus recursos. Como se isso não bastasse, tentaram apagar sua língua nativa, sua cosmogonia e suas tradições. Em troca de presentes sem valor monetário, os indígenas eram cooptados e, com o aval da igreja católica na época, os portugueses iniciaram uma catequese para subjugá-los, dominá-los e dizimar as suas culturas.

Após a perda de quase totalidade de suas terras, os indígenas foram obrigados a lutar pela demarcação do território, pelo qual foram espremidos e relegados por partes dos governantes que, de tempos em tempos, surgiam na escala do poder. Nesse ínterim, um segundo fato histórico começou a ameaçar os povos indígenas. Seringueiros, grileiros, madeireiros, mineradores, entre outros, invadem as terras indígenas demarcadas, explorando seus recursos, contaminando o solo e as águas, bem como, levando a extinção de algumas espécies da fauna e da flora. Atualmente, o próprio governo coaduna a opinião de exploração dos recursos em terras indígenas, o que propicia a morte de alguns líderes indígenas que se opõem. Uma perda lastimável para o bem estar do planeta.

Um terceiro fato histórico surge: A pandemia do novo coronavírus, ameaçando todo o planeta e, principalmente aos povos indígenas. Fragilizados e com pouca imunidade às doenças dos não indígenas, são eles os mais vulneráveis. Apesar do descaso, com poucas ações do governo brasileiro voltadas para os indígenas, eles continuam promovendo ações insurgentes, realizadas por cada liderança que assume compromisso com o seu povo.

Os indígenas resistem e persistem em suas práticas de sustentabilidade para o ambiente e de proteção à floresta. Continuam repassando aos mais jovens seus saberes e fazeres ancestrais, o que permite resguardá-los. Valorizam e respeitam os anciãos e anciãs, chamados sabedores ou sábios, pois são fontes da sabedoria da etnia. Todo esse conhecimento é levado às salas de aula e são apropriados por docentes indígenas, como o professor de matemática, para contextualizar os conteúdos escolares e facilitar a aprendizagem dos estudantes indígenas. São essas práticas que chamamos de Práticas Pedagógicas Indígenas e trazemos aqui.

Apresentamos projetos e práticas docentes indígenas de proteção tanto da natureza quanto dos saberes e fazeres tradicionais de cada etnia, estratégias pedagógicas de resistência, insurgência e conscientização crítica. Esses projetos desenvolvidos nas aldeias são, muitas vezes utilizados como elementos de ensino e de aprendizagem de conteúdos de matemática na escola indígena, como razão e proporção, figuras geométricas, medidas lineares, perímetros, áreas, contagem numérica, medição do tempo. Reciprocamente, conteúdos escolarizados de matemática são utilizados pelos indígenas nas aldeias permitindo uma troca entre escola e comunidade.

Todo esse estudo incorpora-se à educação matemática em um contexto etnomatemático, tendo em vista a relação homem-ambiente-escola. De fato, o foco recai sobre o sujeito "[...] como indivíduo integrado, imerso, numa realidade natural e social, o que significa em permanente interação com seu meio ambiente, natural e sociocultural" (D'Ambrosio, 2011, p. 51). Assim, as práticas indígenas, utilizando os seus saberes e fazeres ancestrais, servem como fonte de reflexão para os professores indígenas (de matemática) nas escolas das aldeias.

O Corredor Etnoambiental Tupi Mondé: diferentes etnias, mesmas preocupações

Passados pouco mais de 500 anos da invasão, observamos os indígenas – que eram considerados selvagens, preguiçosos, criaturas sem alma – como aqueles habitantes que continuam lutando por seus direitos. Podemos considerar que há poucas décadas eles tiveram direito a ter suas terras demarcadas, não pela bondade dos governantes, mas pela resistência, insurgência e confrontos constantes. Segundo Cunha (1994) o direito à posse de suas terras pelos indígenas consta desde a Carta Régia de 1609, tendo um ápice na Constituição de 1934, a qual garantia o direito inalienável das terras. De acordo com a autora, todas as constituições subsequentes mantiveram o direito à terra, apesar de ser desrespeitado por outros invasores que tinham ganância pelos recursos existentes nelas.

Foi somente no século XX, na Constituição da República Federativa do Brasil de 1988 (Brasil, 1988), que os indígenas tiveram assegurado a posse permanente das terras com o usufruto exclusivo das riquezas da floresta, do solo, dos mananciais hídricos nelas presentes. Essas terras indígenas (TI) continuaram sendo inalienáveis e o direito à posse imprescritíveis, cabendo à União suas demarcações. Porém, atualmente, não é que constatamos. Há interesses não indígenas, na exploração dos recursos naturais das TI, o que ocasiona a destruição de muitas aldeias e etnias.

Os estudos que trazemos diz respeito ao Corredor Etnoambiental Tupi Mondé, uma região localizada nos estados de Rondônia e Mato Grosso, que totaliza uma área de 3.522.754 hectares na Amazônia Brasileira (Barcellos, 2015). As etnias que ocupam essa área são: os Zoró *Pangyjej*; os *Paiter* Suruí; os Gavião *Ikólóéhj*; os *Karo Rap*; e os Cinta Larga, cujas localizações de suas terras estão indicadas na Figura 1. Trazemos aqui pesquisas realizadas apenas em uma aldeia do povo Zoró e duas aldeias do povo Paiter.

Figura 1. *Corredor Etnoambiental Tupi Mondé.*

Fonte: Google Maps, 2019.

A Terra Indígena Zoró (TIZ), da etnia Zoró *Pangyjej*, está localizada no Noroeste do estado de Mato Grosso, no município de Rondolândia. Segundo Ribeiro, Vale Júnior, Cardozo e Zoró (2015), a TIZ tem uma extensão de 355.789,5492 hectares e composta por 24 aldeias. Ela faz fronteira com a Terra Indígena Sete de Setembro, da etnia *Paiter* Suruí, e com as Terras Indígenas Roosevelt e Aripuanã da etnia Cinta Larga, no chamado "Corredor Etnoambiental Tupi Mondé". O chefe geral dos caciques Zoró *Pangyjej* é o Panderewup.

A Terra Indígena Sete de Setembro, da etnia *Paiter* Suruí, está localizada nos estados do Mato Grosso e Rondônia, com acessos pelo município de Rondolândia, no Mato Grosso e pelo município de Cacoal, em Rondônia. Ela tem uma extensão de 247.870 hectares e é composta por 27 aldeias. A maioria das aldeias se encontram em Cacoal que, por ser uma cidade mais estruturada, é onde os *Paiter* encontram suporte para as suas necessidades. Os acessos às aldeias em Cacoal são por estradas de terra chamadas linhas (estradas vicinais), do tempo da colonização.

Metodologia

Utilizamos uma abordagem qualitativa por permitir entendimento e aprofundamento da realidade investigada, além de possibilitar-nos compreensão e explicação da dinâmica das relações socioculturais existentes em cada etnia. Dessa maneira, buscamos descrever, compreender e explicar os fatos observados em consonância com os relatos dos sujeitos de pesquisa. A pesquisa participante permite a imersão no lócus de investigação, o que nos dá abertura para a observação de inúmeras atividades cotidianas, mescladas por saberes e fazeres tradicionais desses povos originários da região Norte e Centro-Oeste do Brasil.

A escolha das aldeias para a pesquisa ocorreu de acordo com aquelas que praticavam alguma atividade relacionada às práticas de sustentabilidade e proteção da floresta, desenvolvendo projetos em parceria com instituições não governamentais. Assim sendo, investigamos uma aldeia da etnia Zoró e duas da etnia Paiter Suruí. Foram participantes de pesquisa caciques das etnias, representantes das aldeias e docentes indígenas.

A pesquisa foi desenvolvida no período de julho de 2019 a maio de 2020, e a escolha dos participantes deu-se por entendermos que os mais experientes na etnia nos trariam mais subsídios. Além disso, a busca por docentes indígenas deu-se por àqueles que praticavam em sala de aula atividades que mantinham os conhecimentos tradicionais como estratégia para contextualizar os conteúdos escolares, bem como utilizassem os projetos que eram desenvolvidos em sua aldeia. Entre eles, temos o professor indígena de matemática.

De acordo com Sampaio, Santos, Agostini e Salvador (2014) a roda de conversas é um espaço que abre possibilidades para os participantes refletirem sobre suas experiências e as dos demais participantes. Utilizamos como instrumento, no desenvolvimento da roda de conversas, a entrevista que também foi empreendida individualmente em alguns momentos. A escolha da técnica e do instrumento deu-se por entendermos que a linguagem oral é habitual e cotidianamente praticada no interior das aldeias em todas as atividades, bem como por compreender que seria a possibilidade que mais dados apresentariam.

Movidos por nosso objetivo de pesquisa, que é apresentar práticas docentes que são atos de resistência, insurgência e conscientização crítica a respeito da sustentabilidade e preservação da floresta, como estratégia para resguardar a história real de cada etnia existente no Corredor Etnoambiental Tupi Mondé, optamos por apresentar recortes dos relatos enunciados pelos indígenas e que demonstrem evidências dessa história de preservação e que mantém a floresta em pé. Em respeito a eles, optamos por não modificar o seu modo de falar, na transcrição de seus relatos.

Resultados

Invasão, extermínio e doutrinação: o primeiro fato histórico

Quando observamos a história do Brasil, vemos a invasão das terras indígenas como um primeiro ataque. Existiam cerca de cinco milhões de indígenas que ocupavam as terras costeira e espalhavam-se por todo litoral e interior de algumas florestas. Eram pessoas que tinham na caça, na pesca, na plantação e no extrativismo, a alimentação necessária para a sobrevivência. Ainda hoje têm a floresta como casa, tanto habitacional como espiritual, território geográfico de ritos, mitos e festas, a qual eles sabem cuidar com empenho e sem depredá-la, retirando o essencial para comer e construir suas moradias, armas e utensílios. Cunha (1992) afirma que os portugueses quando aqui chegaram, começaram batizando a terra, antes mesmo de batizar os gentios que aqui moravam. Segundo a autora, “[...] o Brasil foi simbolicamente criado” (Cunha, 1992, p. 9) e tomou-se posse dele.

O que fariam com aqueles povos que, segundo eles, não tinham história e estavam à margem do Novo Mundo? Coube, portanto, à etnografia escrever-lhes sua história. Como se fosse possível! Os indígenas não eram uma sociedade virgem, pois “na realidade, a história está onipresente” (Cunha, 1992, p. 11). Essa história apresenta-se na cultura de cada etnia, as quais os indígenas conseguiram sobreviver e resguardá-las. Segundo a autora, essa história apresenta-se nos povos que ainda continuam isolados, remanescentes da barbárie realizada sobre os povos dessa terra. Apresenta-se, ainda, naquela parte da população indígena que, mesmo tendo sofrido pela homogeneização cultural e perda parcial da diversidade, continua preservando sua identidade e cultura.

Cabe-nos dizer que após a invasão diversos ataques foram ocorrendo aos habitantes originários dessa terra. A forçosa escravidão para atender aos requintes dos invasores; o auxílio no combate aos outros europeus invasores; as doenças advindas do povo invasor, provocaram mortalidade em massa desses povos, ocasionando o extermínio de alguns deles. A gripe, a varíola e o sarampo são exemplos de doenças trazidas pelos europeus. A sede por escravizar os habitantes provocou fugas e guerras constantes, resistência contra a segregação de alguns e insurgências ao que lhes era imposto. Para abrandar os ímpetos indígenas, a igreja católica enviou seus missionários para evangelizar e civilizar os gentios dessa terra. Entretanto, o interesse tanto da Coroa portuguesa como da igreja era a ocupação da Amazônia, cabendo aos jesuítas a missão de arrebanhar um território enorme.

Assim, era dado o aval à igreja católica para subjugar os indígenas, impossibilitando aos mesmos utilizarem sua língua, praticarem seus rituais e festas, invisibilizando diversas culturas. Algumas ações de proteção aos indígenas foram implementadas pelos jesuítas. Anchieta chega nessas terras imbuído de suas verdades pessoais e cristãs. O contato com os indígenas teve forte influência sobre ele (Almeida, 1998). Entretanto, havia o cuidado em ensinar os rudimentos da fé cristã, vestindo-os e batizando-os. O objetivo era doutrinar na fé, ensinando a ler e escrever para que pudessem compreender o que falavam entre si. O principal era inferiorizar a cultura e os costumes desses povos, demonizando rituais e atos cosmogônicos, os quais acreditavam ser feitiçarias.

Podemos afirmar que as cenas do passado não descrevem tamanha onda de ataques aos indígenas, tampouco faz jus aos fatos que foram relatados pelos invasores. Temos que compreender a histórias desses povos pelo viés deles. Relatos que trazem contribuições riquíssimas, zonas de visibilidade que reforçam tradições ancestrais. Temos que trazer à tona o ponto cego que existe sobre a participação indígena na formação do Brasil. Tidos como povos inferiores e primitivos, eles eram tutelados pelos jesuítas que os invisibilizavam. Segundo Almeida (2017) os indígenas sempre estiveram na história da constituição brasileira, porém como escravizados, trabalhadores rebeldes que acabavam sendo dominados pelos invasores e não eram considerados relevantes para a compreensão dos rumos da historiografia brasileira.

Madeireiros, seringueiros, garimpeiros e mineradores em terras indígenas: o segundo fato histórico

Em terras indígenas Zoró a exploração que ocorria era madeireira, mas os indígenas lutavam por manter a salvo a floresta e resistir às pressões dos madeireiros. Não é de hoje que os Paiter Suruí pedem socorro para a manutenção da floresta em pé. Em relatos alguns docentes indígenas constatam essas invasões. Dessa maneira, os indígenas têm consciência de que as ações de preservação ambiental são muito importantes não só para a cultura indígena, mas também para os não indígenas, por isso é essencial preservar a floresta. Segundo o professor Zoró,

Nós indígenas preservamos muito a nossa floresta, porque pra nós indígena, a floresta não é só floresta. A floresta é a vida, porque é de lá que a gente tira nosso sustento [...]. A gente vê hoje que o aquecimento global tá aumentando muito. Eu vejo isso porque a floresta tá sendo desmatada. Eu vejo que se acabar com a floresta, a humanidade vai sofrer com o aquecimento global. Eu vejo que esse prática que a gente temos de cuidar da floresta ajuda a humanidade. (Sandro Zoró, nov./2019)

Portanto, na visão deles, não se trata de uma prática que beneficia apenas aos povos indígenas, e sim ao mundo inteiro. Ainda, de acordo com o professor, essa prática de preservação da floresta sempre foi passada, de geração em geração, pelos seus ancestrais (educação indígena), e hoje continua sendo transmitida aos mais jovens, por docentes indígenas nas escolas da etnia (educação escolar indígena), com a ajuda de sabedores e lideranças indígenas. É uma visão futurista de mundo, em que o respeito pela natureza é essencial para a sobrevivência.

A associação Kanindé tem divulgado em seu site um discurso realizado na ONU, pelo líder do povo Paiter Suruí na época, Almir Suruí, que alertava para a destruição da floresta. De acordo com o indígena:
O desmatamento ilegal, provocado por madeireiros, fazendeiros, grileiros e garimpeiros nas terras indígenas, derrubam a floresta, matam os pássaros, pois destroem os seus ninhos, matam os animais que vivem dos frutos da mata, e ameaçam os indígenas que vivem e dependem da floresta. [...]. A ação destes invasores sobre as terras indígenas expulsam nosso povo de seus territórios e colocam nossa vida em perigo. (Almir Suruí, 2011)

Nessa fala constatamos um pedido de socorro não só para os povos indígenas como para o mundo, já que sem floresta estamos fadados à perda do oxigênio produzido por ela. A preocupação é tamanha com a preservação da floresta que essa etnia Paiter Suruí participa do Projeto Carbono Florestal, que é o primeiro projeto de redução de emissões de carbono por desmatamento e degradação em área indígena, do mundo.

Ações do governo e o novo coronavírus: o terceiro fato histórico

Atualmente, os indígenas sofrem ataques mais violentos por parte do governo federal. São inúmeros conflitos que perpassam a demarcação das TI, as quais foram totalmente paralisadas e, ainda, sofrem ameaças de ter um direito constitucional descumprido. No capítulo VIII, da Constituição da República Federativa do Brasil, que trata dos indígenas, o art. 231, inciso 2º é afirmado que "as terras tradicionalmente ocupadas pelos índios destinam-se a sua posse permanente, cabendo-lhes o usufruto exclusivo das riquezas do solo, dos rios e dos lagos nelas existentes" (Brasil, 1988, p. 133). Outra ameaça é a abertura para a mineração em TI, o que contraria a Constituição, mas que prevê no inciso 3º do art. 231 que:

> o aproveitamento dos recursos hídricos, incluídos os potenciais energéticos, a pesquisa e a lavra das riquezas minerais em terras indígenas só podem ser efetivados com autorização do Congresso Nacional, ouvidas as comunidades afetadas, ficando-lhes assegurada participação nos resultados da lavra, na forma da lei. (Brasil, 1988, p. 133)

Portanto, resta-nos saber se ocorrerá consulta aos povos indígenas a esse respeito. Outra ameaça é a expansão do agronegócio em TI. Para o atual governo a expansão pecuária em TI diminuiria o valor da carne. Vemos que o descaso com a Constituição é enorme, pois concede aos povos indígenas o usufruto exclusivo tanto das terras como dos recursos nelas existentes, como podemos constatar no inciso 2º já citado.

Em seu discurso na ONU, o presidente do Brasil criticou algumas instituições que protegem os indígenas e afirmou que eles devem ser integrados à sociedade nacional (Kanindé, 2020). Voltamos a nos apoiar na Constituição que no art. 231 afirma que "são reconhecidos aos índios sua organização social, costumes, línguas, crenças e tradições, e os direitos originários sobre as terras que tradicionalmente ocupam [...]" (Brasil, 1988, p. 133). Além disso, o governo federal interferiu em órgãos indigenistas, mudanças que agradam ao setor ruralista. Como se isso não bastasse, os indígenas foram largados a sua própria sorte e passam por escassez no que diz respeito a saúde pela retirada dos médicos cubanos. Diante de todas essas mazelas os indígenas continuam resistindo aos diferentes ataques governamentais.

Como tudo isso acontecendo a Covid-19 entrou nas TI, provocando inúmeras mortes de indígenas. O Instituto Socioambiental – ISA tem uma plataforma de monitoramento sobre o efeito da pandemia entre os indígenas. Segundo o ISA o epicentro da pandemia ocorre no Amazonas. Muitos indígenas estão contaminados e testam positivo para a Covid-19. Diante das subnotificações dos órgãos governamentais, o Instituto Socioambiental tem divulgado um levantamento independente, feito pela Articulação dos Povos Indígenas do Brasil (Apib), dos contaminados pela Covid-19. Em 13 de fevereiro de 2021 já contabilizavam 48.554 indígenas contaminados e 965 óbitos, sendo muitos no Alto Rio Solimões - AM (Instituto Socioambiental, 2020). Em termos numéricos isso significa uma etnia indígena extinta! A distância geográfica e a dificuldade de acesso à rede de saúde os tornam ainda mais vulneráveis. O que constatamos é o total descaso do governo federal e os indígenas estão deixados à própria sorte. São eles que interditaram as entradas às TI para evitar mais contaminação. O estado do Amazonas possui o pior cenário, e a saúde na capital Manaus entrou em colapso.

O respeito e a proteção à floresta e aos recursos das TI: ultrapassando os ataques

Para enfrentar todos esses ataques os indígenas do Corredor Etnoambiental Tupi Mondé desenvolvem alguns projetos de reflorestamento e de preservação dos saberes e fazeres tradicionais. Nossa exposição a seguir abordará essas ações que foram desenvolvidas aliada à educação escolar indígena.

O povo Zoró possui um projeto de reflorestamento com um viveiro de mudas de plantas nativas da floresta amazônica. Os *Pangyjej* (ou Zoró, como são conhecidos) possuem uma ação pedagógica de sustentabilidade e preservação ambiental, desenvolvida em sua terra indígena, na aldeia *Zawã Karej*. Essa ação é realizada por meio do projeto chamado “Amazônia Indígena Sustentável”, que é trabalhado pelos próprios indígenas Zoró, que tiveram apoio da Associação Kanindé de defesa etnoambiental, em parceria com a Associação do Povo Indígena Zoró (APIZ). Esse projeto contou com recursos do Fundo Amazônia e do Banco Nacional de Desenvolvimento Econômico e Social – BNDES, no governo da Presidenta Dilma Rousseff.

Essas espécies são replantadas pelos Zoró em áreas devastadas por queimadas ou ações ilegais dos não indígenas em suas terras, na floresta. Esse projeto conta com a participação de docentes indígenas Zoró, incluindo o professor de matemática, estudantes da Escola Estadual Indígena *Zawã Karej Pangyjej* (E.E.I. *Zawã Karej Pangyjej*), na aldeia *Zawã Karej*, e outros membros da comunidade. Com relação à matemática o professor indígena informou que associa questões envolvendo medidas lineares e de áreas, processos de contagem de mudas em determinada área, contagem de dias que a planta está sendo cuidada etc.

Em Mattos, Mattos e Alves (2019), vemos que sabedores Zoró sempre participaram do projeto como conselheiros e conselheiras. Foram estes sabedores que fizeram um levantamento da área a ser reflorestada, já que as espécies nativas devem ser replantadas em locais onde foram devastadas pelas queimadas e derrubadas ilegais. No início a área escolhida era grande e tiveram que restringir a áreas menores. Cada área tem uma pessoa encarregada do plantio e manutenção das árvores, para que elas cresçam sem problemas.

A escola E.E.I. *Zawã Karej Pangyjej*, cujo diretor, atualmente, é o professor indígena e cacique da aldeia *Zawã Karej*, Sandro *I’’ap* Zoró, foi pensada para ser intercultural e atuar no regime da pedagogia da alternância. A escola trabalha no seu currículo com conhecimentos tradicionais do povo Zoró e, portanto, o projeto de reflorestamento “Amazônia Indígena Sustentável” está incluído nas ações da escola. Alguns docentes indígenas consultam sabedores *Pangyjej* sobre aspectos do projeto de reflorestamento.

O projeto de reflorestamento Zoró tem uma boa aceitação por parte de toda a comunidade escolar e alguns docentes indígenas trabalham aspectos dele em suas práticas docentes. De acordo com o cacique, o próprio Projeto Político Pedagógico (PPP) da escola, prevê que projetos interculturais e projetos envolvendo conhecimentos tradicionais, realizados nas aldeias, devem ser trabalhados por docentes indígenas na educação escolar indígena.

De acordo com o professor indígena de matemática: “Nessas questões envolvem a matemática nas questões de medidas, em dias que planta vai se evoluindo”. Ele relatou que trabalha junto com a geografia no estudo do relevo e qual tipo de terra vai utilizar para a planta. Segundo esse professor: “tudo vai envolver matemática. A gente sabe disso porque tudo tem um tema voltado à matemática, quando você vai plantar, quando você vai fazer a roça, você vai fazer a medida, o tamanho, né”.

Dessa forma, o povo Zoró cuida da preservação da floresta na sua terra indígena, como parte dos conhecimentos tradicionais da etnia. O povo *Pangyjej* se preocupa, também, com a difusão desse conhecimento aos mais jovens, por meio de sabedores e docentes na educação escolar indígena.

Da mesma maneira, os Paiter Suruí de Rondônia e Mato Grosso desenvolveram projeto de reflorestamento, chamado Pamine, que visava o reflorestamento de áreas devastadas e o projeto chamado “carbono florestal” para o uso sustentável dos recursos naturais, e um outro projeto chamado Garah Itxa para corredores etnoambientais, conforme podemos ver em Mattos e Mattos (2018).

Vamos abordar aqui alguns projetos que estão em execução no momento nas aldeias Paiter Suruí. Alguns desses projetos envolvem diretamente a escola indígena, por meio da direção, de docentes e de estudantes; outros, mesmo não tendo uma relação direta com a escola, acabam envolvendo a educação escolar indígena, pois os conhecimentos tradicionais envolvidos nos projetos são trabalhados interdisciplinarmente por docentes indígenas.

A aldeia Paiter Linha 09, da etnia Paiter Suruí, localizada na Terra Indígena Sete de Setembro, na cidade de Cacoal, no estado de Rondônia, possui um Centro de Plantas Medicinais, chamado *Olawatawa*, que tem como objetivo a preservação e valorização dos saberes tradicionais Paiter, no uso de ervas medicinais para o tratamento e cura de algumas doenças. O Centro de plantas *Olawatawa* conta com recursos da ONG americana *Forest Trends*, que apoia iniciativas indígenas voltadas para o desenvolvimento sustentável e preservação da floresta.

Esse Centro de Plantas Medicinais *Olawatawa* possui uma trilha de plantas medicinais no seu habitat natural na própria floresta. O Centro *Olawatawa* é parceiro do grupo internacional de pesquisas Educação em Fronteiras (EmF) e faz parte de um projeto intitulado A cura pelas plantas medicinais do povo Paiter Suruí. Segundo Oliveira e Mattos (2018, p. 6) “o centro de plantas medicinais *Olawatawa* foi criado pelo técnico de enfermagem indígena Ricardo *Narayamat* Suruí com o objetivo de fazer um resgaste dos usos e dos costumes das ervas medicinais para o tratamento e cura de algumas enfermidades”.

A criação desse “viveiro ao ar livre” foi idealizada em trilhas na mata, para que não houvesse a necessidade de retiradas de outras plantas que estavam no caminho e para preservar, o máximo possível o local de origem das plantas medicinais. Essas plantas medicinais estão catalogadas e identificadas pelo nome no idioma nativo com sua prescrição escrita na língua portuguesa. Todas as plantas foram reconhecidas por sabedores anciãos e anciãs da aldeia, e as que foram mudadas de lugar, o foram por eles.

O Centro *Olawatawa* construiu, em 2019, um viveiro sustentável para o cultivo de mudas de plantas para reflorestamento, onde desenvolve o plantio de plantas medicinais e, também, de árvores frutíferas e de madeira de lei. Dessa forma, os indígenas estão trabalhando na preservação de espécies de plantas nativas e proporcionando um reflorestamento da área no entorno do Centro. Assim como os Zoró, no que diz respeito aos conteúdos da matemática escolar, o professor indígena de matemática relatou que são trabalhados sistemas de medidas, contagem do tempo, perímetro e área, utilizando a figura geométrica do viveiro.

Ainda na aldeia Paiter Linha 09, há uma outra ação pedagógica envolvendo a escola indígena, que tem como objetivo apresentar, para estudantes e para a comunidade, um trabalho de conscientização sobre os resíduos sólidos, como materiais plásticos e latas de alumínio, produzidos nas aldeias e que acabam não tendo um destino apropriado.

Já na aldeia *Iratana*, Linha 10 da Terra Indígena Sete de Setembro, a Associação *Soenama* do Povo Indígena Paiter Suruí desenvolve o Projeto Babaçu *Toroya*, cujo objetivo é fortalecer as práticas culturais com geração de renda sustentável a partir dos conhecimentos tradicionais sobre os recursos naturais, preservando a floresta em pé.

O uso tradicional do babaçu na cultura Paiter Suruí é bem diversificado e tudo é aproveitado dessa planta. A palha, da folha do babaçu, serve para cobertura das construções originais Paiter, para confeccionar esteiras e cestarias. O gongo ou *kadeg*, como é chamado em Tupi Mondé, uma larva desenvolvida dentro do coco do babaçu, é usado na culinária, na qual é degustado vivo ou frito, e usado para extrair um óleo utilizado em diversos alimentos, e tem funções cosméticas e medicinais na cultura Paiter.

A massa do mesocarpo do babaçu verde é utilizada na produção da farinha de babaçu, usada no preparo do beijú e da paçoca com carne de caça, e tem função terapêutica na medicina tradicional Paiter. A amêndoa, fruto do babaçu seco, é torrada e misturada ao óleo de gongo para ser utilizada na pintura corporal. Quando envelhecida, a amêndoa é utilizada no tratamento de manchas e feridas na pele. O que sobra do coco do babaçu é utilizado como lenha para fazer fogo.

Todas as atividades nas aldeias da etnia Paiter Suruí têm preocupação com a sustentabilidade e com a preservação do ambiente da aldeia e da floresta. De acordo com informações de docentes Paiter, as escolas das aldeias buscam a difusão desses conhecimentos, na educação escolar indígena, por meio de práticas docentes e das informações passadas por gestores das escolas e por sabedores. Há a utilização das atividades do Babaçu no ensino de conteúdos de matemática nas escolas das aldeias. Por exemplo, um professor indígena de matemática disse que envolve a quantidade de babaçu e a quantidade de farinha produzida, quando ensina razão e proporção.

Já para o professor indígena Hugo Cinta Larga é grande a importância de resguardar e restaurar os saberes e fazeres indígenas nas aldeias da etnia. Segundo esse professor, é prioridade da educação escolar indígena preservar e cuidar da natureza, que é importante para eles, pois “sem a natureza o indígena não seria nada”. Por isso os indígenas buscam essa preservação dentro da escola indígena e dentro de suas terras. O professor Hugo é filho de Cinta Larga com Zoró e já morou na Terra Indígena Roosevelt, dos Cinta Larga. Atualmente mora nas Terra Indígena Zoró, onde é Coordenador Pedagógico da Escola Estadual Indígena *Zawã Karej Pangyjej*.

Ao ser perguntado sobre a importância de ações de preservação ambiental e sustentabilidade nas Terras Indígenas, para eles e para o mundo, o professor indígena foi enfático em fazer referência à preservação da floresta para combater as mudanças climáticas: “eu, como Indígena, vejo que é importante para mim vive melhor. Para o mundo, ela controla o clima”. Dessa forma, há consciência por parte dele que é preciso cuidar do ambiente, protegendo a floresta para que não soframos as consequências mais tarde.

Dessa forma, esses ensinamentos devem passar, principalmente, pela educação, pela escola, seja ela formal, informal ou não formal. É preciso criarmos não só uma conscientização crítica a respeito da necessidade de olharmos para o futuro da humanidade, como, também, partirmos para ações práticas que surtam efeitos, antes que seja tarde demais.

As ações têm que ser sustentáveis para que a humanidade sobreviva por mais tempo. Isso fica muito claro na fala do cacique quando diz que “enquanto você tá respeitando a natureza aí você vai viver muito tempo, você não vai morrer tão rápido não, né, porque você tá respeitando a natureza, né. Sem natureza o ser humano não vive, tem que ter natureza”.

Ainda, de acordo com o cacique, é preciso que isso seja passado para os jovens, para estudantes, de geração em geração, em especial, aos que estudam fora da aldeia, para que eles saibam da importância de se preservar a natureza. Segundo ele: “pra poder ensinar os alunos que estão estudando fora da aldeia, esse ele não sabe disso não, os alunos não sabe, e nós tem que colocar isso no papel pra geração por gerações”. Assim, ele tem consciência da necessidade de proteger a floresta e de que os ensinamentos sobre o respeito à natureza fiquem registrados em escritos, para que sejam sempre lembrados.

Assim, vemos que a preocupação com o ambiente não é de agora, na cultura indígena. Eles sabem que a floresta é o local de onde eles tiram seu sustento e, dessa forma, precisa ser cuidada e preservada. É responsabilidade de todos na aldeia trabalharem nessa direção, em particular docente indígena, que junto com sabedores indígenas, devem transmitir isso para estudantes indígenas, fazendo da prática pedagógica uma ação decolonial (Walsh, 2009) de reflexão e luta na educação escolar indígena.

Considerações Finais

A história dos povos indígenas em 'terra brasilis' não começa com a invasão de suas terras pelos portugueses, tampouco começa pelas vozes de alguns não indígenas que mascaravam sua realidade e os tinham como selvagens, primitivos ou quaisquer outras adjetivações. Podemos dizer que não sabemos ao certo sua origem, mas que ela é visibilizada por intermédio dos relatos de anciãos e anciãs, sabedores de cada etnia que contam sobre a origem do mundo, dos animais, da floresta, rios e mares, entre outros, histórias mescladas pela cosmogonia, mitologia e rituais indígenas.

Não podemos esquecer que a 'terra brasilis' era território de pertencimento, de identidade marcada por mitos e ritos fortemente vivos na memória de cada etnia, tradições que se revertem em marcos de resistência, insurgências e conscientização a respeito da preservação, utilização sustentável dos recursos naturais e garantia de sobrevivência dos indígenas, tanto no presente como no futuro. Essa territorialidade perpassa a própria existência desses povos originários e compõe uma identidade coletiva de lutas, resistência e insurgência contra tudo que os inferioriza e os invisibiliza. Atualmente, as diminutas TI ainda são espaços que têm caráter espiritual, mitológico e religioso e sobretudo de moradia e sobrevivência.

Fica evidente que as Práticas Pedagógicas Indígenas se baseiam nos saberes e fazeres ancestrais. A educação matemática em um contexto etnomatemático evidencia a cultura dessas etnias. É entendimento dos indígenas, a importância de aprender os conteúdos escolares de matemática, para que possam conhecer a matemática do não indígena, para atuarem na produção e comércio de seus produtos e, também, prosseguirem nos estudos universitários. Da mesma forma que as práticas tradicionais auxiliam na compreensão e contextualização dos conteúdos escolares, os ensinamentos desses conteúdos também auxiliam para que eles possam desenvolver melhor suas atividades nas aldeias.

Os indígenas compreendem a necessidade do encontro cultural, pois a monocultura provoca invisibilidades, aspecto que eles insurgem contra, por já terem vivido isso. Fora do encontro cultural há ausências que impossibilitam a leitura de mundo contra-hegemônica. Eles entendem, ainda, que é importante essa mesclagem cultural para dar-lhes dignidade como agentes históricos. Assim, conseguir emergir em meio as ondas de ataques que tentaram e tentam submergi-los, camuflando a real história, é um ato de resistência que é transmitida às crianças e jovens das etnias como estratégia para resguardar tradições, empoderar e reafirmar identidades. É, mais ainda, um ato de insurgência que se rebela contra o que está posto nas escolas indígenas, que os permitem desenvolver práticas docentes que se fazem decoloniais, isto é, que transcendem e vivificam histórias marcadas por lutas, mortes e sofrimentos.

Referências bibliográficas

Almeida, M.R.C. (2017). A atuação dos indígenas na história do Brasil: revisões historiográficas. *Revista Brasileira de História*, 37(75), 17-38.

Almeida, M.R.C. (1998). Anchieta e os índios em Iperoig: reflexões sobre suas relações a partir da noção de cultura histórica. *Revista de Ciências Sociais*, 29(1-2), 109-119.

Barcellos, M.C. (2015). *Manual – Serviços Ambientais no Corredor Etnoambiental Tupi Mondé*. São Paulo: Ikore.

Brasil. (1988). *Constituição da República Federativa do Brasil*. Brasília, DF: Senado Federal; Centro Gráfico.

Cardozo, I.B. e Vale Júnior, I.C. (Eds.). (2012). *Diagnóstico etnoambiental participativo, etnozoneamento e plano de gestão Terra Indígena Igarapé Lourdes*. Porto Velho: Kanindé.

Cunha, M.C. (1994). O futuro da questão indígena. *Estudos Avançados*, 8(20), 121-136.

Cunha, M.C. (1992). Introdução a uma história indígena. En M.C. Cunha (Ed), *História dos índios no Brasil* (pp. 9-24), São Paulo: Companhia das Letras.

D'Ambrosio, U. (2011). *Etnomatemática – Elo entre as tradições e a modernidade*. Belo Horizonte: Autêntica Editora.

Instituto Socioambiental. (2020). *Covid-19 e os povos indígenas*. Recuperado de https://covid19.socioambiental.org/.

Kanindé – Associação de defesa socioambiental. (2020). *Líder indígena Almir Suruí discursa na assembleia geral da ONU*. Recuperado de https://www.kaninde.org.br/lider-indigena-almir-surui-discursa-na-assembleia-geral-da-onu/.

Mattos, J.R.L.; Mattos, S.M.N. e Alves, D.J.S. (2019). *Ação pedagógica intercultural na educação (escolar) indígena Zoró: preservação da floresta*. Memórias do XIII Encontro Nacional de Educação Matemática, Cuiabá, MT.

Mattos, S.M.N. e Mattos, J.R.L. (2018). Preservação Ambiental e Cultural na Educação Escolar Indígena. En J.R.L. Mattos e S.M.N. (Eds), *Etnomatemática e Práticas Docentes Indígenas* (pp. 185-214), Jundiaí: Paco Editorial.

Oliveira, K.F. e Mattos, S.M.N. (2018). *Sustentabilidade, plantas medicinais e produção de mudas no ensino indígena da matemática escolar*. Memórias do 5 Simpósio Internacional de Educação Matemática, Belém, PA.

Ribeiro, T.M.; Vale Júnior, I.C.; Cardozo, I.B. e Zoró, T.K. (Eds). (2015). *Terra indígena Zoró*. Porto Velho: Kanindé.

Sampaio, J.; Santos, G.C.; Agostini, M. e Salvador, A.S. (2014). Limites e potencialidades das rodas de conversa no cuidado da saúde: uma experiência com jovens no sertão de pernambucano. *Interface – Comunicação, Saúde, Educação*, 18(2), 1299-1312.

Walsh, C. (2009). *Interculturalidad, estado, sociedad*: *Luchas (de)coloniales de nuestra época*. Quito: Universidad Andina Simón Bolívar / Ediciones Abya-Yala.

Clame Acta Latinoamericana de Matemática Educativa
SECCIÓN 2 / PROPUESTAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS
VOL 34, NÚMERO 2, AÑO 2021

COMPRENSIÓN DE LA ESPERANZA MATEMÁTICA Y VARIABILIDAD EN EL LANZAMIENTO DE MONEDAS POR ESTUDIANTES DE SECUNDARIA

UNDERSTANDING OF MATHEMATICS EXPECTATION AND VARIABILITY BY SECONDARY SCHOOL STUDENTS

Nuria Begué, María Magdalena Gea, Jocelyn Díaz-Pallauta
Universidad de Zaragoza. (España), Universidad de Granada. (España)
nbegue@unizar.es, mmgea@ugr.es, jocelyndiaz@correo.ugr.es

Resumen
Se analiza la comprensión de la esperanza matemática y la variabilidad mediante muestras tomadas de la distribución binomial en un grupo de 536 estudiantes españoles de educación secundaria y bachillerato. Para ello, a los participantes se les pide indicar cuatro valores probables para el lanzamiento de 100 y 10 monedas equilibradas. Del análisis de los valores medios y variabilidad de los datos entregados por los estudiantes se deduce una buena comprensión de la esperanza matemática, aunque es razonable para la variabilidad en 10 lanzamientos y excesiva en 100 lanzamientos. Se detecta una mejora del razonamiento al progresar el curso.

Palabras clave: pensamiento probabilístico, estadística, estudiantes de educación secundaria

Abstract
This paper is aimed at analyzing the understanding of mathematical expectation and the variability through samples from binomial situations in a group of 536 Spanish secondary education and high school students. So, participants are asked to indicate four probable values for the toss of 100 and 10 balanced coins. From the analysis of the average values and the variability of the data provided by the students, a good understanding of mathematics expectation is deduced, although it is reasonable for the variability in 10 throws, but excessive in 100 throws. An improvement in reasoning is observed as the course progresses.

Key words: probabilistic thinking, statistics, secondary students

Introducción

La inferencia estadística nos permite obtener información de la población a partir del estudio de las muestras, por lo que resulta una herramienta esencial para la investigación. Esta es una de las razones por la que su enseñanza está presente en la universidad y la formación profesional (Batanero y Díaz, 2015). Los estudios dirigidos al análisis del currículo español revelan que este tema está presente en diferentes niveles educativos, tomando mayor relevancia en el segundo curso del Bachillerato de Humanidades y Ciencias Sociales. Sin embargo, la literatura nos advierte también de dificultades en su comprensión y aplicación. Según Batanero (2013), las dificultades surgen de la variedad de conceptos y procedimientos que intervienen en la inferencia, así como el poco tiempo que se dedica a su enseñanza.

Burril y Biehler (2011) indican que el estudio de la inferencia comienza por distinguir los conceptos de población y la muestra, junto con las ideas de representatividad y variabilidad muestral. En este sentido, la teoría del muestreo analiza la metodología para la obtención de muestras y sus propiedades con la finalidad de que las conclusiones obtenidas sean válidas y fiables. Por tanto, la estimación es una idea básica asociada al trabajo con el muestreo e implica la posibilidad de generalizar los datos de una muestra a una población mayor, a la vez se asume que la información obtenida presenta un margen de variabilidad. En definitiva, el sentido del muestreo exige coordinar de manera adecuada las ideas de representatividad y variabilidad muestral presentes en el proceso de muestreo (Batanero, Begué y Gea, 2018).

En el currículo español los contenidos de población y muestra se introducen desde el primer curso de la etapa de secundaria obligatoria (12-13 años); además, se propone que el trabajo de la probabilidad durante los dos primeros cursos (1º y 2º ESO) se fundamente en la simulación y/o experimentación (MECD, 2015). Por tanto, el currículo propone la enseñanza de la probabilidad a partir del enfoque frecuencial, lo que supone establecer un puente entre la probabilidad y la estadística, pues la Ley de los Grandes Números aparece implícita en algunas de las ideas asociadas al concepto de muestreo y a su vez supone la base del enfoque frecuencial.

El objetivo de nuestro trabajo es analizar la comprensión que muestran los estudiantes de educación secundaria obligatoria y bachillerato sobre la esperanza matemática y la variabilidad mediante muestras tomadas de la distribución binomial. Se consideran tres grupos de estudiantes de cursos distintos, por tanto, otro aspecto a estudiar es identificar si existe una progresión en la comprensión con respecto al curso escolar.

Marco referencial

La literatura que se ha centrado en analizar la comprensión del muestreo o caracterizar sus componentes, ha identificado una serie de niveles que nos permiten establecer en qué estadio se sitúa un sujeto. A continuación, se presenta una breve caracterización de algunas de estas investigaciones.

En la investigación de Rubin, Bruce y Tenney (1991) se investigaron a 12 estudiantes de bachillerato sin instrucción previa para formularles cuestiones sobre muestreo. Los autores identifican que los estudiantes ignoran que las muestras fueran representativas, lo que conduce a sobreestimar la obtención de valores centrales de la distribución muestral, independientemente del tamaño de la muestra.

Shaugnessy, Ciancetta y Canada (2004) estudian la variabilidad en el muestreo. En particular, pretenden analizar la comprensión que presentan 272 estudiantes (10-19 años) cuando se les presenta un contexto de caramelos de dos colores en el que el 40% son rojos y 60% son negros. Los estudiantes tenían que proporcionar una muestra de 10 elementos y otra de 100 elementos y, tenían que indicar si esperaban repetición de los resultados si se obtuviera una segunda muestra. Los resultados revelan que una parte de los estudiantes esperaban obtener el mismo resultado en las dos muestras repetidas del mismo tamaño, y algunos proporcionaron muestras muy poco probables (toda la muestra formada por caramelos negros). En relación con la variabilidad muestral, la mayoría sobreestimaron la variabilidad de la distribución muestral sin considerar el efecto del tamaño de la muestra. Además, los autores identifican tres concepciones sobre las muestras: aditiva, proporcional y distribucional. La mayoría de los estudiantes se sitúan en la primera concepción, que se caracteriza por aquellas respuestas que se guían por la proporción presente en la población.

Siguiendo a Ben-Zvi, Bakker y Makar (2015), la variabilidad inherente al proceso de muestreo se fundamenta en las ideas de aleatoriedad y azar. Por otro lado, la Ley de los Grandes Números supone la base del significado frecuencial de la probabilidad y garantiza que muestras de mayor tamaño representen mejor a la población de la que fueron tomadas. Por tanto, describimos en las siguientes líneas algunas de las investigaciones centradas en el análisis de la comprensión de la probabilidad desde dicho enfoque, porque subyacen ideas presentes en el proceso de muestreo.

Gómez, Batanero y Contreras (2014) elaboran un cuestionario para evaluar el conocimiento matemático para la enseñanza de la probabilidad desde el enfoque frecuencial de futuros profesores de educación primaria. En particular, el primer ítem del cuestionario es una adaptación del propuesto en la investigación de Green (1983), pues se pide a los participantes generar cuatro muestras de tamaño 100 asociadas a un fenómeno que no cumple la propiedad de equiprobabilidad. El análisis de los resultados revela que solo una tercera parte de los sujetos tiene una comprensión simultánea del valor esperado y la variabilidad muestral.

Recientemente, encontramos la investigación de Valdez (2016) centrada en el estudio del razonamiento probabilístico de estudiantes de bachillerato (17-18 años), para analizar si diferencian y ponen en relación los significados clásicos y frecuencial de la probabilidad. A través de un cuestionario fundamentado en un contexto de urnas y entrevistas, las conclusiones del estudio indican que los estudiantes aceptan la variabilidad en la muestra cuando la distribución de bolas es equiprobable y la ignoran al hacer predicciones sobre el resultado que se puede obtener en una extracción. A pesar de que reconocen el modelo equiprobable, consideran la variabilidad en la muestra como excesiva si se aparta un poco de lo predicho por el modelo. Como resultado de la investigación, el autor elabora una tabla de cuatro niveles sobre el razonamiento probabilístico con respecto a las ideas de variabilidad, aleatoriedad e independencia.

Metodología

En nuestro trabajo se analizó las respuestas de 536 estudiantes: 157 de 2º ESO (12-13 años), 145 de 4º ESO (15-16 años) y 234 cursaban 2º Bachillerato (17-18 años) a tareas planteadas que se corresponden con el lanzamiento de una moneda. Se demanda al estudiante escribir cuatro valores probables para la situación de cada tarea, donde la diferencia radica en el tamaño de la muestra. En el enunciado de la primera tarea (Figura 1) se proporciona el resultado de lanzar 100 monedas, mientras que en el segundo caso solamente se describe el fenómeno aleatorio para el caso en que el tamaño de la muestra es de 10 monedas.

Figura 1. *Tareas propuestas a los participantes del estudio.*

Tarea 1. Un profesor vacío sobre la mesa un paquete de 100 monedas obteniendo los siguientes resultados: 53 caen con la cara hacia arriba y 47 caen con la cruz hacia arriba
Supongamos que el profesor pide a 4 niños repetir el experimento. Cada niño lanza las 100 monedas y obtendrá algunas con la cara hacia arriba y otras con cruz hacia arriba.
Escribe en la siguiente tabla un resultado que te parezca probable para cada niño:

Elena	Clara	Matías	Rosa
Cara:	Cara:	Cara:	Cara:
Cruz:	Cruz:	Cruz:	Cruz:

Tarea 2. Un profesor pide a 4 niños lanzar 10 monedas sobre la mesa y contar el número de caras y cruces obtenidos. Escribe en la siguiente tabla un resultado que te parezca probable para cada niño:

Silvia	Javier	Miguel	Carmen
Cara:	Cara:	Cara:	Cara:
Cruz:	Cruz:	Cruz:	Cruz:

Elaboración de los autores.

Para analizar las respuestas de los estudiantes, a continuación, se describen las categorías empleadas, que emergen del estudio de la distribución del estadístico en la muestra.

En el caso de la representatividad muestral, se ha considerado la distribución muestral de la media de una muestra de cuatro valores del fenómeno aleatorio estudiado, y también se han caracterizado una serie de posibles sesgos asociados, emanados de la revisión de los antecedentes. La clasificación utilizada se describe a continuación:

- *Estimación normativa del valor esperado.* El valor medio de las cuatro estimaciones proporcionadas por el estudiante en el ítem es muy próximo al valor teórico (pertenece al intervalo central de la distribución muestral que teóricamente contendría al 68% de los valores de las medias muestrales). Los estudiantes que proporcionan respuestas cuyo valor medio se sitúan dentro de dicho intervalo comprenden la propiedad de representatividad muestral.
- *Estimación aceptable del valor esperado.* En el caso de que el valor medio de las cuatro estimaciones dadas por el estudiante se encuentra fuera del intervalo central de la distribución muestral que contendría al 68% de los valores de las medias muestrales, pero dentro del intervalo que contendría al 95% de dichos valores.
- *No completa.* Consideramos en esta categoría a aquellos estudiantes que no responden a un ítem.

El análisis de la variabilidad muestral se fundamenta en el estudio del rango de los cuatro valores, definido como la diferencia del valor máximo y el mínimo. En este caso, la distribución muestral del rango se ha simulado en el programa Fathom para cada una de las dos situaciones descritas en las tareas. A partir de esta distribución muestral empírica, se han calculado los diferentes percentiles que determinan los intervalos considerados para clasificar las respuestas de los estudiantes. A continuación, se describen las categorías utilizadas para el análisis de la percepción de la variabilidad en el muestreo de los estudiantes.

- *Estimación normativa de la variabilidad muestral.* Es la respuesta óptima y dicho rango corresponde a los valores más probables de los rangos de cuatro valores en la distribución binomial considerada en el enunciado de la tarea.
- *Estimación aceptable de la variabilidad muestral.* Estos valores tienen menor probabilidad en la distribución, pero no serían extremadamente raros.

- *Estimación excesiva de la variabilidad muestral.* El estudiante no percibe que la variabilidad de la distribución muestral es menor que la de la población.
- *Alta concentración*. En este caso, subyace una concepción determinista del muestreo, esperando la replicación de los resultados en las diferentes muestras. No se muestra comprensión intuitiva de la variabilidad del muestreo.

Tabla 1. *Características de las tareas.*

	Tarea 1	Tarea 2
Tamaño de la muestra	100	10
Probabilidad del suceso de interés	0,5	0,5
Estimación de la probabilidad	Clásica	Clásica
Número esperado de éxitos	50	5
Desviación típica	σ =5	σ =1,58
Intervalo que contiene el 68% de medias muestrales	[47,5-52,5]	[4,2-5,8]
Intervalo que contiene el 95 % de medias muestrales	[45-55]	[3,4-6,6]
Rango normativo	[6-15]	[2-5]
Rango aceptable	[3-20]	[1-6]

Elaboración de los autores.

La Tabla 1 sintetiza las características de las dos tareas planteadas. Se destaca que ambas se apoyan en el significado clásico de la probabilidad, fundamentado en la aplicación de la regla de Laplace. Además, se incluye el intervalo que contienen el 68% y el 95% que se corresponden con las respuestas normativas y aceptables, respectivamente, los cuales se obtienen desde el análisis descrito anteriormente sobre la distribución muestral de cada estadístico.

Resultados

En esta sección se describen los resultados del análisis cuantitativo sobre las muestras aportadas por los estudiantes para cada tarea.

La Tabla 2 presenta los resultados del análisis del valor medio en las respuestas de los estudiantes. En primer lugar, se observa que la mayoría de los estudiantes proporcionan muestras cuyo valor medio se sitúa en el intervalo aceptable. Si analizamos los resultados según el tamaño de la muestra, en el caso de la Tarea 1 que demanda considerar muestras de mayor tamaño, identificamos que todos los grupos proporcionan muestras con estimación normativa o aceptable, siendo este porcentaje cercano al 70% tanto para los estudiantes de 4ºESO como los 2ºBachillerato y cercano al 50% para 2ºESO. En cualquier caso, el porcentaje de estudiantes que proporcionan muestras con un valor medio normativo es superior que aquellos que proporcionan muestras con un valor medio aceptable, independientemente del curso escolar. Por otro lado, se observa cómo influye el curso escolar en el grado de precisión de los valores proporcionados por los estudiantes, puesto que tanto para los estudiantes de 4ºESO como los 2ºBachillerato la diferencia con respecto al grupo de 2ºESO es de 20 puntos porcentuales.

En la segunda tarea, que se corresponde con la generación de muestras de tamaño 10, observamos que el grupo de estudiantes participantes proporciona mejores respuestas que en el caso de la Tarea 1, manteniendo también la tendencia por curso. De hecho, si comparamos el porcentaje de respuestas situadas en el intervalo normativo, la diferencia es de al menos 20 puntos porcentuales de diferencia con los resultados a la tarea 1.

Al comparar los resultados de las dos tareas, se observa una mejora en la realización de la tarea en la que se demanda generar muestras de menor tamaño al comparar las respuestas de cada grupo. Por tanto, se concluye que los tres grupos presentan una comprensión de la representatividad muestral adecuada, sobre todo cuando el tamaño de las muestras que se generan es menor.

Tabla 2. *Porcentaje de estudiantes por grupo, según el valor medio de las estimaciones.*

Valor medio de las cuatro estimaciones	Tamaño de la muestra (n=100) Tarea 1			Tamaño de la muestra (n=10) Tarea 2		
	2ºESO (n=157)	4ºESO (n=145)	bachillerato (n=234)	2ºESO (n=157)	4ºESO (n=145)	bachillerato (n=234)
Estimación normativa [47,5-52,5]	31,2	46,2	47,7	56,7	67,6	71,5
Estimación aceptable [45-55][1]	19,1	23,4	21,3	26,8	16,6	13,1
Menores que el aceptable (< 45)	16,6	9,7	15,2	2,5	3,4	7,8
Mayores que el aceptable (>55)	25,5	15,9	11,1	5,1	4,1	2,9
No completa	7,6	4,8	4,7	8,9	8,3	4,7

[1]Fuera del intervalo normativo

Elaboración de los autores.

A continuación, se presenta el análisis de la variabilidad en las respuestas de los estudiantes, el cual queda fundamentado en el estudio del rango de las cuatro muestras generadas. Análogo al caso del estudio del valor medio, en la Tabla 3 se presenta el porcentaje de estudiantes en función de las categorías de sus respuestas, descritas en el apartado anterior.

En primer lugar, si analizamos las diferencias en los porcentajes según la tarea, observamos que la mayoría de los estudiantes de la tarea 2 proporcionan muestras cuyo rango se sitúa en el intervalo normativo, mientras que estos porcentajes decaen en el caso de la tarea 1, donde solamente un cuarto de la muestra de estudiantes de 2ºESO y 4ºESO proporcionan muestras con variabilidad adecuada (normativa o aceptable), siendo este porcentaje superior para el caso de 2ºBachillerato. En particular, se identifica una tendencia por estos grupos en sobreestimar la variabilidad, puesto que más de la mitad de la muestra de estudiantes de 2ºESO y 4ºESO proporcionan muestras cuyo rango es excesivo.

Por tanto, se infiere una comprensión insuficiente de la variabilidad muestral cuando el tamaño de la muestra es mayor, siendo los resultados mejores para el caso de Bachillerato. Estos resultados aportan evidencias de las dificultades de los estudiantes en identificar la relación entre la variabilidad muestral y el tamaño de la muestra, que son conceptos fundamentales en la comprensión de la probabilidad frecuencial.

Tabla 3. *Porcentaje de estudiantes por grupo, según el rango de las estimaciones.*

Rango de las cuatro estimaciones	Tamaño de la muestra (n=100) Tarea 1			Tamaño de la muestra (n=10) Tarea 2		
	2ºESO (n=157)	4ºESO (n=145)	Bachillerato (n=234)	2ºESO (n=157)	4ºESO (n=145)	Bachillerato (n=234)
Estimación normativa [6-15]	17,8	17,2	30,6	66,9	66,2	72,6
Estimación aceptable [3,20][1]	8,3	9,7	15,2	8,9	7,6	5,1
Estimación excesiva (>20)	58,6	59,3	37,4	10,2	13,8	7,8
Alta concentración (<3)	7,7	9,0	12,1	5,1	4,5	9,8
No completa	7,6	4,8	4,7	8,9	8,3	4,7

[1]Fuera del intervalo normativo.

Fuente: Elaboración de los autores

Contraste de diferencia entre grupos

Para completar el análisis de las respuestas de los estudiantes, según los datos que observamos en las Tablas 2 y 3 en cuanto a las diferencias por el curso en que se encuentran los estudiantes que participan en nuestro estudio, así como debido a la tarea que se propone, en este apartado se describen los resultados del análisis realizado sobre las diferencias observadas, en torno a valorar si son estadísticamente significativas. Por tanto, se ha realizado la prueba del análisis de varianza, tomando el grupo de estudiantes como variable independiente o factor.

En el caso de la tarea 1, en la Tabla 4 se observa que los resultados obtenidos son estadísticamente significativos, tanto en la diferencia de estimaciones de las medias como en la diferencia de estimaciones de los rangos, cuyo valor p es menor que 0,05.

En los resultados de las pruebas de Tukey de diferencias de medias, cuyos resultados se presentan en la Tabla 5, se observa una diferencia significativa de la estimación de la media al comparar los estudiantes de bachillerato con los otros dos grupos. Esta diferencia también es significativa en el caso del rango. Por tanto, desde el análisis de los resultados se observa una mejora en la comprensión del proceso de muestreo según progresa el estudiante atendiendo a su curso escolar.

Tabla 4. *Resultados del análisis de varianza en la tarea 1.*

		Suma de cuadrados	g.l.	Media cuadrática	F	Sig.
Media	Inter-grupos	2346,854	2	1173,427	9,861	,000
	Intra-grupos	61166,626	514	119,001		
	Total	63513,480	516			
Rango	Inter-grupos	14535,070	2	7267,535	14,579	,000
	Intra-grupos	257223,867	516	498,496		
	Total	271758,936	518			

Elaboración de los autores.

Tabla 5. *Prueba post-hoc de diferencias de medias para la media y el rango de las estimaciones en la tarea 1.*

		Diferencia de medias (I-J)	Error típico	Sig.
Media	Diferencia con 2º	-4,6109*	1,1529	,000**
	Diferencia con 4º	-3,8578*	1,1708	,003**
Rango	Diferencia con 2º	-11,685*	2,355	,000**
	Diferencia con 4º	-9,201*	2,391	,000**
** Muy significativo				

Elaboración de los autores.

De igual modo, la Tabla 6 muestra los resultados obtenidos al realizar el análisis de la varianza para la segunda tarea. En este caso, el análisis señala que las diferencias son estadísticamente significativas donde además las pruebas de Tukey (Tabla 7) muestran que la diferencia de los estudiantes de bachillerato es estadísticamente significativa con respecto a los otros dos cursos tanto para la estimación de la media como el rango.

Tabla 6. *Resultados del análisis de varianza en la tarea 2.*

		Suma de cuadrados	g.l.	Media cuadrática	F	Sig.
Media	Inter-grupos	24,053	2	12,026	7,680	,001
	Intra-grupos	793,916	507	1,566		
	Total	817,969	509			
Rango	Inter-grupos	97,334	2	48,667	12,084	,000
	Intra-grupos	2054,034	510	4,028		
	Total	2151,368	512			

Elaboración de los autores.

Tabla 7. *Prueba post-hoc de diferencias de medias para la media y el rango de las estimaciones en la tarea 2.*

		Diferencia de medias		
Media	Diferencia con 2º	-,4525*	,1328	,002**
	Diferencia con 4º	-,4162*	,1359	,007**
Rango	Diferencia con 2º	-,8168*	,2117	,000**
	Diferencia con 4º	-,9296*	,2179	,000**
** Muy significativo				

Elaboración de los autores.

Conclusiones

En este trabajo se describen los resultados de nuestro estudio con estudiantes de educación secundaria y bachillerato en España, cuyo objetivo es analizar la comprensión sobre las ideas básicas que subyacen al concepto del muestreo: representatividad y variabilidad muestral. El interés por el tema y la pertinencia sobre su estudio se justifica por las evidencias de la literatura previa, en donde se nos muestran los errores y dificultades de los estudiantes sobre el muestreo, reclamando la necesidad de mejorar la comprensión de los conceptos fundamentales de representatividad y variabilidad muestral (Gómez, Batanero y Contreras, 2014; Green, 1983; Valdez, 2016), puesto que, aunque aparentemente son conceptos antagónicos, el sentido en el muestreo exige coordinar ambos.

Las tareas planteadas presentan un contexto cercano al estudiante, lo que facilita evaluar su comprensión, ya que el lanzamiento de una moneda es un fenómeno aleatorio que aparece en los libros de texto como introducción del significado clásico de la probabilidad, así como está presente en contextos cotidianos. Por tanto, podemos esperar que los estudiantes tengan un conocimiento previo del fenómeno aleatorio, lo cual les puede ayudar a identificar la probabilidad del suceso interés desde el enfoque clásico, así como desde el enfoque frecuencial, puesto que en la tarea 1 se proporciona el resultado de realizar el experimento. Este hecho explica que la mayoría de los estudiantes presentan una comprensión adecuada de la representatividad muestral, alcanzando el nivel proporcional de razonamiento sobre muestreo en la clasificación de Shaugnessy et al. (2004) y un nivel intermedio según el trabajo de Valdez (2016). Además, el porcentaje de respuestas adecuadas (normativa o aceptable) es mejor con respecto aumenta el nivel del curso, por lo que se aprecia un progreso gradual en la comprensión de la esperanza matemática, en nuestro caso particular, en la situación de lanzamiento de monedas.

En el diseño del estudio, el interés por analizar la comprensión sobre la variabilidad conduce a que se demande la generación de cuatro muestras para identificar la variabilidad a partir del rango concedido, estudiando así mismo si se tiene en consideración cómo afecta el tamaño de la muestra a dicha variabilidad. El análisis de los resultados pone en relieve una dificultad en el concepto de variabilidad y en la percepción del efecto del tamaño de la muestra sobre dicha variabilidad. Estos resultados también se identifican en los trabajos de Gómez et al. (2014) y en Shaugnessy et al. (2004).

Aunque el análisis estadístico revela diferencias significativas con respecto a los grupos de estudiantes, en concreto respecto a los estudiantes de 2ºBachillerato, las dificultades observadas en la comprensión de la variabilidad persisten, siendo estas dificultades más relevantes en la generación de muestras grandes. Los estudiantes de 2º Bachillerato han recibido una enseñanza en contenidos de estadístico y probabilidad, puesto que están presentes en las pruebas de acceso a la Universidad (López-Martín, Batanero, Díaz-Batanero, Gea, 2016). El hecho de que permanezcan los obstáculos en los estudiantes que cursan el curso previo al acceso de la universidad exige la necesidad de reflexionar sobre el diseño de procesos de enseñanza y aprendizaje que ayuden a los estudiantes a superarlas. El trabajo del docente exige el diseño de tareas que pongan en relieve la relación entre la representatividad y la variabilidad muestral. En este sentido y siguiendo a Huerta (2015), el trabajo de la simulación en el aula es recomendada para trabajar la probabilidad y la inferencia estadística. Por otro lado, consideramos necesario la introducción de la probabilidad desde sus diferentes significados y, en particular, siguiendo las directrices curriculares que se sitúan en sintonía con la investigación en Didáctica de la Probabilidad, consideramos relevante proporcionar situaciones al alumnado en las que se calcule la probabilidad desde el enfoque frecuencial, porque pone en relieve que las muestras de mayor tamaño estiman mejor la probabilidad del suceso.

En conclusión, los resultados de la investigación realizada pueden resultar de ayuda a la investigación porque muestra que las dificultades identificadas en torno al muestreo en las literatura previa aparecen en nuestro estudio; así como proporcionar información al docente sobre los posibles obstáculos que pueden presentar los estudiantes y que es necesario atender e intentar dar respuesta a través de un proceso de instrucción que contemple el trabajo de la probabilidad desde los primeros cursos, desde el enfoque frecuencial y apoyado en la simulación (Parraguez, Gea, Díaz-Levicoy y Batanero, 2017).

Agradecimientos

Proyecto PID2019-105601GB-I00 / AEI / 10.13039/501100011033, Grupo FQM126 (Junta de Andalucía) y Grupo S60_20R.

Referencias bibliográficas

Batanero, C. (2013). Del análisis de datos a la inferencia: Reflexiones sobre la formación del razonamiento estadístico. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 8*(11), 277-291.

Batanero, C., Begué, N. y Gea, M. M. (2018). ¿Cómo desarrollar el sentido del muestreo en los estudiantes?, *3° Encuentro Colombiano de Educación Estocástica. Poyapan,* Colombia, Octubre, 2018.

Batanero, C. y Díaz, C. (2015). Aproximación informal al contraste de hipótesis. En J. M. Contreras, C. Batanero, J. D. Godino, G.R. Cañadas, P. Arteaga, E. Molina, M.M. Gea y M.M. López (Eds.), *Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria, 2,* 135-144.

Ben-Zvi, D., Bakker, A. y Makar, K. (2015). Learning to reason from samples. *Educational Studies in Mathematics*, *88*(3), 291-303

Burrill, G. y Biehler, R. (2011). Fundamental statistical ideas in the school curriculum and in training teachers. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education – A joint ICMI/IASE study* (pp. 57-69). Dordrecht: Springer

Gómez, E., Batanero, C. y Contreras, C. (2014). Conocimiento matemático de futuros profesores para la enseñanza de la probabilidad desde el enfoque frecuencial. *Bolema*, *28*(48), 209-229.

Green, D. R. (1983). A Survey of probabilistic concepts in 3000 pupils aged 11-16 years. En D.R. Grey et al. (Eds.), *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics* (Vol.2, pp. 766-783). Universidad de Sheffield: Teaching Statistics Trust.

Huerta, M. P. (2015). La resolución de problemas de probabilidad con intención didáctica en la formación de maestros y profesores de matemáticas. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds), Investigación en Educación Matemática XIX (pp. 105-119). Alicante: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

López-Martín, M.M., Batanero, C., Díaz-Batanero, C., Gea, M.M. (2016). La inferencia estadística en las pruebas de acceso a la universidad en Andalucía, *Revista Paranaense de Educaçao Matemática*, vol. 5, 8, pp. 33-59.

MECD (2015). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.* Madrid: Autor.

Parraguez, R., Gea, M. M., Díaz-Levicoy, D., y Batanero, C. (2017). ¿ Conectan los futuros profesores las aproximaciones frecuencial y clásica de la probabilidad?. *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet*, *17*(2). https://doi.org/10.18845/rdmei.v17i2.3077

Rubin, A., Bruce, B. y Tenney, Y. (1991). Learning about sampling: Trouble at the core of statistics. En D. Vere-Jones (Ed.), *Proceedings of the third international conference on teaching statistics* (Vol. 1, pp. 314-319). Otago, Nueva Zelanda: International Statistical Institute.

Shaughnessy, J.M., Ciancetta, M. y Canada, D. (2004). Types of student reasoning on sampling tasks. En M.J. Høines y A.B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the InternationalGroup for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.4, pp. 177-184). Bergen, Noruega: International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Valdez, J. C. (2016). *Las grandes ideas de probabilidad en el razonamiento informal de estudiantes de bachillerato.* Tesis Doctoral. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México

UN ESTUDIO DE LA COMPRENSIÓN DE ELEMENTOS BÁSICOS EN ANÁLISIS DE VARIANZA POR ESTUDIANTES DE PSICOLOGÍA
A STUDY ON THE UNDERSTANDING OF VARIANCE ANALYSIS BASIC ELEMENTS BY PSYCHOLOGY STUDENTS

Osmar D. Vera
Universidad Nacional de Quilmes. (Argentina)
osmar.vera@unq.edu.ar

Resumen
En este trabajo analizamos la comprensión que alcanzan los estudiantes de Psicología sobre algunos objetos elementales del análisis de varianza, su aplicación en la resolución de problemas relacionados después de haberse enseñado el tema. Utilizamos un cuestionario de evaluación formado por seis ítems de respuesta múltiple. Trabajamos dentro del Enfoque Ontosemiótoco de la instrucción Matemática, como marco teórico de la investigación. Este estudio se justifica por el gran número de estudiantes que se enfrentan al aprendizaje de este tema, así como por los resultados de la investigación didáctica sobre la comprensión de la inferencia estadística. Confirmamos que este objeto de estudio plantea problemas de comprensión en estos estudiantes, indicando la existencia de sesgos y errores en la inferencia estadística que se han trasladado y ampliado para el análisis de varianza. Encontramos dificultades en la interpretación de la interacción, y en la elección del mejor modelo estadístico adecuado de acuerdo con el problema que se desea estudiar.

Palabras clave: Inferencia estadística, nivel universitario, comprensión, análisis de la varianza

Abstract
In this work, we analyze Psychology students' understanding about some elementary objects of variance analysis, their application in solving related problems once the topic have been taught. We used an evaluation questionnaire, made up of six multiple-choice items. We work within the Onto-semiotic Approach of Mathematical instruction, as the theoretical framework of the investigation. This study is justified by the large number of students who face up to learning this topic, as well as by the results of the didactic research on the understanding of statistical inference. We confirmed that this object of study raises comprehension problems in these students, indicating the existence of biases and errors in statistical inference that have been transferred and expanded for variance analysis. We found difficulties in interpreting the interaction, and in choosing the best appropriate statistical model according to the problem to be studied

Key words: statistical inference, university level, understanding, variance analysis

Introducción

Asistimos en la actualidad al interés de desarrollar el sentido estadístico en todos los profesionales que le permita alcanzar estas competencias, tener una actitud crítica ante la información estadística que encuentra en su día a día y poder tomar decisiones adecuadas en situaciones de incertidumbre. Ello es debido a la sobreabundancia de información accesible a los ciudadanos y al auge de la tecnología (Engel, 2017). Dicho sentido estadístico, que engloba la cultura y razonamiento estadístico, junto con unas buenas actitudes (Batanero, 2019), incluye el conocimiento de los conceptos y técnicas estadísticas básicas para cada profesión. Las ciencias experimentales como la Psicología, la Química, o la Medicina se apoyan en la recogida, análisis e interpretación de datos para poder obtener nuevo conocimiento, partiendo de teorías previas y de experimentos que se deben controlar y contrastar. Esto hace que, en dichas ciencias la actualidad y los métodos estadísticos sean la herramienta metodológica básica para la realización de nuevas investigaciones o para generalizar a diferentes contextos o situaciones de resultados ya confirmados (Batanero, 2000).

Esta necesidad fuerza la reflexión y el debate de los profesores y de los diseñadores curriculares acerca de cuáles son los contenidos estadísticos básicos para la formación de los profesionales de cada rama científica. Un acuerdo generalizado entre los expertos es la necesidad de una formación suficiente en inferencia estadística y en diseño experimental, que permita al graduado en el futuro leer la literatura científica de su área de conocimiento e igualmente recoger con las debidas garantías sus propios datos y analizarlos. Dicha formación le permitirá obtener elementos para discernir entre las falsas teorías y las mejor fundamentadas y le proporcionará bases metodológicas suficientes para utilizar y seleccionar los instrumentos requeridos en su profesión y aplicarlos significativamente (Díaz, 2007). Una de estas ciencias empíricas es la Psicología, donde la formación estadística a nivel de grado, máster y doctorado incluye elementos básicos de inferencia estadística y que ha contribuido a la creación de algunos métodos estadísticos, como el análisis factorial (Díaz, Batanero y Wilhelmi, 2008).

Uno de los métodos estadísticos que se enseña en la mayoría de las universidades que forman a los psicólogos es el análisis de la varianza, que extiende los contrastes de comparación de medias al caso de varias muestras en presencia de un factor o más aun con varios factores. Este método permite ajustar una amplia variedad de modelos, incluso combinando con la regresión. Es por lo expuesto una técnica muy versátil y se emplea con frecuencia en la investigación en Psicología, como lo muestran los trabajos que analizan los métodos estadísticos en los artículos publicados en revistas científicas (Pardo, Garrido, Ruiz y San Martín, 2007). Sin embargo, ha habido muy pocas investigaciones sobre el grado de comprensión o la capacidad de aplicación de esta técnica por parte de los estudiantes que se preparan en esta especialidad, aunque si hay tradición de análisis de la comprensión de otros métodos estadísticos por parte de estudiantes de Psicología, por ejemplo, centradas en las tablas de contingencia (Cañadas, 2012) o la inferencia bayesiana (Diaz, 2007).

Con ánimo de contribuir a la investigación en didáctica de la estadística en el nivel universitario, y con la intención de profundizar sobre la inferencia estadística, nos hemos interesado para este trabajo en particular por el análisis de varianza, en su nivel elemental. El interés de realizar un estudio al respecto se deduce no sólo del gran número de estudiantes que siguen cursos de análisis de varianza, sino de los resultados de la investigación didáctica sobre la comprensión de algunos perrequisitos para su comprensión que indican la existencia de sesgos y errores (descritos, por ejemplo, en Batanero, 2000 y Harradine, Batanero y Rossman, 2011). Por otro lado, aunque la investigación empírica sobre la comprensión o aplicación de este objeto estadístico es muy escasa, encontramos algunos trabajos que incluyen sugerencias didácticas o describen la experiencia de profesores en su enseñanza, así como sobre su uso en la investigación científica (Green, 2007; Pardo, Garrido, Ruiz y San Martín, 2007).

Marco referencial

Nuestra investigación utiliza algunas nociones del EOS (Enfoque Ontosemiótico). Se trata de un marco teórico para la didáctica de la matemática desarrollado en la Universidad de Granada, que ha servido de apoyo al desarrollo de muchos trabajos de educación estadística en dicha universidad. Dicho marco teórico (Godino, Batanero y Font, 2007; 2019) concibe el significado de un objeto matemático como conjunto de prácticas (interiorizadas o no) que se realizan para resolver problemas en relación con dicho objeto. Estas prácticas pueden ser individuales o compartidas dentro de una Institución, por lo que se diferencia entre el significado institucional y personal del objeto. Se define la comprensión como la concordancia entre el significado institucional asignado por una persona a un objeto matemático (en nuestro caso, el análisis de varianza) y dicha comprensión puede ser parcial. En nuestro trabajo se evalúa la comprensión de parte del significado del análisis de la varianza, en concreto, la elección de un modelo adecuado para una situación, la comprensión de los supuestos de aplicación y de los cálculos realizados y la descomposición de la varianza en un modelo concreto.

Además del marco teórico nos hemos basado para la elección de los ítems y la interpretación de los resultados en la investigación previa. Presentamos a continuación un resumen de dichas investigaciones que nos sirven de referencia y que están centradas sobre la enseñanza y el aprendizaje de los objetos estadísticos que se incluyen en el cuestionario. Estos trabajos se han identificado mediante algunos trabajos de síntesis como los de Batanero (2000), Castro Sotos *et al.*, (2007), Díaz, Batanero y Wilhelmi (2008) y Harradine, Batanero y Rossman (2011) que realizan una exploración muy exhaustiva de la literatura con la finalidad de reunir publicaciones que reporten estudios con evidencia empírica sobre la existencia de errores conceptuales en la interpretación de los conceptos y dificultades de aplicación de la inferencia entre estudiantes e investigadores.

Para la comprensión del análisis de varianza, en primer lugar, los estudiantes han de comprender la variabilidad aleatoria y la necesidad de medirla y controlarla, y cómo se logra esto mediante la estadística (Estepa y Del Pino, 2013, Reading y Reid, 2005, Reading y Shaughnessy, 2004). En particular, es importante que se comprenda bien el concepto de varianza como medida de la variabilidad en una distribución de datos o de probabilidad.

Otro punto de referencia son las distribuciones muestrales (Alvarado, 2007, Chance, delMas y Garfield, 2004; Moses, 1992), pues el estudiante ha de diferenciar claramente la distribución de la población, la distribución de los datos en la muestra seleccionada y la distribución muestral. Además, debe estar familiarizado con las distribuciones que se utilizan en el análisis de varianza y comprobar sus propiedades; por ejemplo, algunos estudiantes tienen dificultades en la lectura de las tablas de la distribución F o en conocer sus grados de libertad (Vera, 2008, 2015).

El análisis de varianza es un tipo particular de contraste de hipótesis, por lo que las dificultades asociadas a este procedimiento, que se describen, por ejemplo, en Batanero (2000), Vallecillos (1994) y Vera (2011) pueden trasladarse al trabajo con el análisis de varianza. En estos trabajos se describen dificultades relacionadas con la interpretación del nivel de significación y también con el planteamiento correcto de las hipótesis.

El último punto considerado en los antecedentes es el específico del objeto análisis de varianza, donde hemos encontrado pocas investigaciones. Uno de los primeros trabajos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje del análisis de varianza es el de Rubin y Rosebery (1990), quienes implementaron y evaluaron un proceso de enseñanza del tema con estudiantes universitarios con objeto de estudiar las dificultades en la interpretación de algunas ideas básicas del diseño experimental, que tiene conceptos comunes con el análisis de varianza. Sus resultados sugieren que los estudiantes no distinguen fácilmente la diferencia entre variables dependientes, independientes y extrañas; además de no comprender el papel de la aleatorización en el diseño de experimentos.

Por otro lado, Trigo, López, Martínez y Moreno (2005) analizan las propiedades psicométricas de un conjunto de ítems de opción múltiple utilizadas en evaluaciones oficiales de una asignatura relacionada con el análisis de varianza en la Licenciatura en Psicología, la finalidad fue construir un banco de ítems depurados que se pueda muestrear para futuras pruebas. Para ello analizan 465 ítems utilizados en exámenes de diferentes convocatorias de la asignatura, los autores concluyen que las preguntas sobre pruebas de hipótesis fueron más fáciles que las de análisis de varianza y las relacionadas con su interpretación más difíciles que el resto.

Uno de los puntos que ha sido más analizado es el concepto de interacción. Cuando se realiza un análisis de varianza de varios factores, la interpretación de cada uno de ellos no puede hacerse aisladamente, sino teniendo en cuenta la interacción entre ellos. Por su parte Rosnow y Rosenthal (1991) encontraron dificultades en dicha interpretación, por lo que consideran que este es uno de los conceptos peor comprendidos en el campo de la Psicología. Un error frecuente es analizar e interpretar la interacción de cada efecto simple por separado, aunque para evaluar el efecto del tratamiento, se ha de comparar la diferencia observada después de analizar el efecto de la interacción. Estos resultados son confirmados por Green (2007), quien observa en una muestra de estudiantes universitarios ciertas dificultades en la interpretación de la interacción.

Otros autores como Pardo *et al.* (2007) han analizado el uso del análisis de varianza en las principales revistas de Psicología. Los autores señalan que el porcentaje de errores en la interpretación que se realiza sobre la interacción entre factores en artículos de investigación asciende aproximadamente al 75%. Los autores sugieren que este error puede ser debido al uso frecuente del paquete estadístico SPSS para el análisis, ya que este no permite realizar un estudio de la interacción en forma directa, ni efectuar los contrastes que aíslan el efecto de la interacción en los diseños factoriales

Metodología

3.1. Muestra

La muestra estuvo formada por un total de 224 estudiantes de segundo año de la Licenciatura en Psicología en la Universidad de Huelva, España, que cursaban la asignatura de Análisis de Datos II, que es obligatoria en el segundo curso de estudios. Los estudiantes habían cursado estadística descriptiva y probabilidad en la asignatura Análisis de Datos I y acababan de finalizar el estudio del análisis de la varianza. El cuestionario fue parte de la evaluación de la asignatura para asegurar que estudien el tema.

3.2. Cuestionario

Para analizar su comprensión se les dio un cuestionario, que estuvo formado por seis ítems de opción múltiple (tres opciones por ítem). Dicho cuestionario se elaboró en forma rigurosa a partir de una definición semántica del constructo “comprensión del análisis de varianza”, delimitando las unidades de contenido que se evaluaban. A partir del estudio del marco referencial y de ítems disponibles en pruebas de evaluación realizadas con anterioridad a estudiantes similares a los que participan en el estudio se construyó un banco de ítems (tres ítems para cada contenido evaluado). Se mandó el banco de ítems a un total de 10 investigadores expertos en inferencia estadística y su didáctica y se seleccionaron los utilizados mediante juicio de expertos. Previo a su uso con los estudiantes, se realizó una prueba piloto. Los estudiantes resolvieron el cuestionario individualmente y por escrito. A continuación, se presentan los ítems analizados en el trabajo, donde se han marcado las opciones correctas con cursiva:

Ítem 1 Para mejorar la psicomotricidad de los niños de primaria, una maestra cree que ayudarán unas nuevas actividades físicas. La maestra divide aleatoriamente su grupo de trabajo en tres partes iguales. A cada grupo le aplica un tipo de ejercicio diferente, pues desea saber qué tipo de ejercicios le dará mejores resultados. De las técnicas estadísticas que siguen, ¿cuál debería aplicar la maestra para comprobar si los métodos que aplica son diferentes?

a. Contraste de hipótesis t sobre medias independientes.
b. Contraste de hipótesis t sobre medias relacionadas.
c. Análisis de varianza de un factor completamente aleatorizado.

Ítem 2 Un investigador utilizará un análisis de varianza de dos factores, efectos fijos y completamente aleatorizado cuando:

a. En el estudio haya dos variables dependientes.

b. En el estudio haya una variable independiente, con dos niveles seleccionados al azar.
c. En el estudio haya dos variables independientes, cada una con dos o más niveles.

Ítem 3 Los supuestos de aplicación del análisis de varianza de dos factores, efectos fijos y completamente aleatorizado son:

a. Independencia de las observaciones, normalidad de las distribuciones, y aditividad
b. Independencia de las observaciones, igualdad de varianza y aditividad.
c. *Independencia de las observaciones, normalidad de las distribuciones e igualdad de varianzas.*

Ítem 4 El análisis de varianza de dos factores, con efectos fijos, descompone la variabilidad total en los siguientes componentes:

a. Variabilidad total = V. entre grupos + V. error
b. Variabilidad total = V. entre grupos + V. entre sujetos + V. error
c. Variabilidad total = V. factor A + V. factor B + V. interacción + V. error

Ítem 5 Si en un Análisis de varianza de un factor, y medidas repetidas encuentro que la F empírica u observada toma un valor de 8,16 esto quiere decir que:

a. CM entregrupos / CM error = 8,16
b. CM entresujetos / CM error = 8.16
c. CM entregrupos / CM intrasujetos = 8,16

Ítem 6 A partir de la información de la Tabla (ítem 6) se quiere estudiar el efecto de ciertas variables motivacionales sobre el rendimiento en tareas de logro. Se manipularon dos variables: “tipo de entrenamiento motivacional” (A1: instrumental; A2: atribucional y A3: control) y “clima de clase” (B1: cooperativo; B2: competitivo y B3: individual). Se seleccionaron a 45 sujetos y se dividieron en grupos para cada condición experimental.

Tabla 1. *(ítem 6).*

Fuente de variación SC GL CM *F* Factor A 70 Factor B 20 Interacción AB 3,91 Error 46 1,278 Total 176 44	El valor del sumatorio cuadrado para el Factor B (Tabla ítem 6) es: a. 15,65 b. 35 *c. 40*

Elaboración del autor.

En la Tabla 2 se describe el contenido evaluado por cada ítem y a continuación describimos brevemente la solución esperada en cada uno de ellos.

Tabla 2. *Especificaciones del contenido del cuestionario por ítem.*

Contenidos de análisis de varianza	Ítems					
	I1	I2	I3	I4	I5	I6
Selección adecuada de un modelo de análisis de varianza para resolver un problema	X	X				
Diferencia entre variable dependiente e independiente		X				
Reconocimiento de los supuestos del modelo			X			
Interacción en análisis de varianza				X	X	
Descomposición de la varianza en un modelo				X		
Cálculos utilizados para la tabla ANOVA					X	X

Elaboración del autor.

El *ítem 1* evalúa la comprensión de los estudiantes acerca de las situaciones en que debe emplearse el modelo de análisis de varianza con un factor y completamente aleatorizado, y de las diferencias entre las situaciones en que se usaría en su lugar una prueba *t* de diferencia de medias. Para esto se propone el enunciado de un problema de investigación y se presentan tres técnicas estadísticas, preguntando cuál debería aplicarse para resolver el problema del enunciado.

El *ítem 2* permite evaluar si el alumno comprende cuándo un investigador aplicará un análisis de varianza de dos factores con efectos fijos, así como también la diferencia entre variables dependientes e independientes y el rol que estas juegan, dependiendo del modelo que se escoja. Rubin y Rosebery (1990) advierten sobre la dificultad de distinguir entre variables dependientes e independientes en un modelo de análisis de varianza.

La pregunta que se hace en el *ítem 3* pretende evaluar la comprensión de los supuestos que deben cumplir las observaciones para aplicar el análisis de varianza. Dichos supuestos son la independencia de las observaciones, la normalidad de la distribución de la variable analizada y la igualdad aproximada de la varianza en cada grupo. El no cumplimiento de alguno de estos supuestos puede invalidar los resultados de la prueba, de ahí el interés de evaluar su conocimiento.

En el *ítem 4* queremos evaluar la capacidad de los estudiantes para asociar un modelo estadístico, de acuerdo con el estudio que se desea realizar de los datos. En este caso, se trata de un modelo de análisis de varianza de dos factores fijos completamente aleatorizado, que es el modelo más sencillo donde aparece el análisis del efecto de la interacción. Se ha evaluado la comprensión de este punto debido a que varios autores señalan a la interacción entre factores como el resultado peor interpretado entre los estudiantes de Psicología (Rosnow y Rosenthal, 1991; Pardo *et al*., 2007), así como dificultades para comprender su relación con la interpretación de los efectos principales (Green, 2007).

Una vez elegido un modelo de análisis de varianza es necesario realizar una serie de cálculos a partir de los datos para estimar los diferentes componentes de la tabla de análisis de varianza y realizar los contrastes de hipótesis requeridos. Los *ítems 5* y *6* evalúan la comprensión de los estudiantes de los pasos que se deben seguir en dichos cálculos. En el *ítem 5* evaluamos la comprensión de algunos de los cálculos realizados para interpretar una tabla de análisis de varianza en el diseño de un factor con medidas repetidas. Más concretamente, se estudia si el alumno comprende los conceptos de cuadrado medio entre e intra sujetos y del error, así como el modo en que intervienen en el cálculo del estadístico *F*. Mientras que en el *ítem 6*, se realizan preguntas sobre el cálculo de los valores que forman una tabla de análisis de varianza de dos factores.

En lo que sigue se realiza un resumen de los principales resultados obtenidos mediante este cuestionario.

Análisis de resultados

En la Tabla 2 se presenta una síntesis de los resultados obtenidos por ítem y en cada una de sus posibles opciones en la muestra de 224 estudiantes a los que se les pasó el cuestionario, donde se ha resaltado en negrita la solución correcta. Hacemos notar una comprensión media-alta del análisis de varianza en este grupo de estudiantes, donde, salvo el ítem 4, más de la mitad de la muestra y alrededor del 60% en algunos ítems dieron las respuestas correctas. A continuación, analizamos los resultados para cada ítem.

Notamos (Tabla 2) que el 50,9% de los estudiantes contestan correctamente al *ítem 1*, lo que nos indica que poseen una capacidad media de escoger el modelo que mejor se adecua al problema. Un 23,7% de la muestra, elige el distractor (a); aunque este grupo es capaz de diferenciar en el problema entre muestras independientes y relacionadas (Rubin y Rosebery, 1990), piensa que el problema se resuelve mediante el test t de comparación de dos muestras, es decir, no elige el procedimiento adecuado.

Otro 7,6 %, además de elegir incorrectamente el contraste *t*, confunde las muestras independientes y relacionadas. Un 17,9% parece no conocer el método que se debe elegir, ya que no responde al reactivo.

Tabla 3. *Distribución de las respuestas en porcentaje por ítem y distractor.*

Distractores	Ítems del cuestionario					
	I1	I2	I3	I4	I5	I6
a	23.7	4.9	11.2	5.8	**57.1**	3.6
b	7.6	9.8	4.0	12.5	7.1	4.0
c	**50.9**	**63.8**	**43.3**	**69.2**	21.9	**72.3**
Sin respuesta	17.9	21.4	41.5	12.5	13.8	20.1

Elaboración del autor.

Hemos encontrado un 63,8% de respuestas correctas en el *ítem 2* (Tabla 3), lo que supone una dificultad de baja a moderada, a pesar de que Rubin y Rosebery (1990) advierten sobre la dificultad de distinguir entre variables dependientes e independientes en un modelo de análisis de varianza. Otro 4,9% de sujetos (distractor a) desconoce los supuestos del modelo de análisis de varianza de dos factores, confundiéndolo con la prueba *t* de muestras relacionadas, que podría aplicarse frente a esta tipología de datos Un 9,8% (distractor b) confunde el modelo de análisis de varianza de dos factores con el de un factor con efectos fijos completamente aleatorizado. Es bastante alto el porcentaje de estudiantes que no responden el ítem (21,4%).

La importancia del cumplimiento de los supuestos del análisis de varianza dependerá del tipo de incumplimiento, pues si se viola la homogeneidad de varianzas, la prueba *F* sólo se verá afectada ligeramente en el modelo balanceado (el mismo tamaño de muestra en todos los tratamientos) con efectos fijos (Montgomery, 2005), pero es grave en caso de un modelo de efectos aleatorios. En el *ítem 3* nos encontramos con un 43,3% de respuestas correctas

(Tabla 2), lo que muestra una dificultad moderada baja. Un 11,2% olvida que para aplicar este modelo es necesario que las varianzas tomadas para cada nivel deben ser estadísticamente iguales (principio de homocedasticidad). También un 4% olvida el supuesto de normalidad. A la hora de decidir la importancia del cumplimiento de este supuesto, se debe tener en cuenta que una desviación moderada de la normalidad no es motivo de gran preocupación para los modelos de efectos fijos (Montgomery, 2005). El ítem presenta un alto porcentaje de no respuesta (41,5%). No hemos encontrado investigaciones que evalúen la comprensión por parte de los estudiantes de los supuestos en las pruebas de análisis de varianza.

Obtuvimos un 69,2% (Tabla 2) de respuestas correctas en el *ítem 4*. Un 5,8% de la muestra confunde la descomposición de la variabilidad total de los datos con la de un modelo de análisis de la varianza de un factor. También un 12,5% de la muestra confunde la descomposición de la variabilidad de un modelo de dos factores con el que corresponde a un modelo de un factor y medidas repetidas, mientras que 12,5% de la muestra no responde.

Si bien más de la mitad de la muestra evaluada es capaz de asociar un modelo estadístico adecuado al análisis de varianza de dos factores, un 21% no está asociando la existencia de interacción con el modelo completo de análisis de la varianza de dos factores fijos. Al respecto, varios autores señalan a la interacción entre factores como el resultado peor interpretado entre los estudiantes de Psicología (Rosnow y Rosenthal, 1991; Pardo *et al*., 2007), así como dificultades para comprender su relación con la interpretación de los efectos principales (Green, 2007). Somos conscientes, en consecuencia, que se debe continuar tratando el tema con mayor profundidad, sobre todo al tratarse de estudiantes de la carrera Psicología, los cuales no tienen costumbre de manejar en su vida académica modelos matemáticos.

El *ítem 5* resultó con un nivel medio de dificultad, ya que un 57,1% (Tabla 2) lo responde correctamente. Un 7,1% elige el distractor (b), confundiendo la varianza entre grupos con la varianza entre sujetos. En tanto que el 21,9% piensa que en el análisis de varianza de medidas repetidas se debe observar la interacción entre las variables sujeto-grupo, coincidiendo con la dificultad observada en la investigación de Green (2007). No contamos con antecedentes para esta pregunta, por lo que se trata también de un aporte de nuestra investigación.

Con un nivel medio bajo de dificultad resultó el *ítem 6*, se observa un 72,3% de respuestas correctas (Tabla 2). Un 3,6% elige el distractor (a) que da el valor del F observado para ese factor, confundiéndolo con la suma de cuadrados. Otro 4% confunde el valor del sumatorio cuadrado para el factor B con el de la media cuadrática para el otro factor. Existe un alto porcentaje que no responde a la pregunta (20,1%). Es posible notar que en este ítem la mayoría de los estudiantes recuerda y ha comprendido el cálculo, pero una proporción importante no lo recuerda, puesto que no lo resuelve.

Conclusiones e implicaciones

En nuestro trabajo se han observado dificultades de los estudiantes en la comprensión de algunos elementos del análisis de varianza.

La mayor cantidad de respuestas correctas la encontramos en la descomposición de la variabilidad total en un modelo de análisis de varianza de dos factores fijos completamente aleatorizado (69,2%), aunque el 20% no tuvo en cuenta el papel fundamental de la interacción coincidiendo con Pardo *et al*. (2007). El porcentaje más bajo de aciertos (43,3%) se obtuvo en relación con los supuestos de aplicación, con un porcentaje muy alto de no respuesta (41,5%). Respecto la elección de un modelo en un problema contextualizado, el principal problema fue la interpretación de la diferencia entre muestras independientes y dependientes y un 50,9% respondió exitosamente.
Respecto al cálculo, resultó más difícil (57,1%) interpretar un modelo de medidas repetidas que uno de dos factores (72,3%), debido a la cantidad de pasos que se deben cumplimentar para obtener el valor de una F empírica a partir de una suma de cuadrados o la media de cuadrados de alguna fuente de variación. Todas estas dificultades muestran

puntos en que se debe reforzar la enseñanza, si se quiere que los futuros profesionales apliquen correctamente este método estadístico.

Como en otros trabajos previos (e.g., Cañadas, 2012; Díaz, 2007) estos resultados confirman que la inferencia estadística plantea problemas de comprensión en los estudiantes de Psicología, quienes no poseen una base matemática tan amplia como en carreras científicas o técnicas. Sugerimos que la enseñanza debiera complementarse con actividades basadas en la simulación, que es hoy día un instrumento didáctico potente para explorar conceptos o métodos estadísticos abstractos, plantear trabajos basados en proyectos usando datos reales como fuente de interpretación de los diseños estadísticos Puesto que las mismas dificultades se pueden hallar entre estudiantes de Educación, Sociología, Antropología, entre otros, por lo que pensamos que parte de los resultados que hemos encontrado se pueden extender a estudiantes de otras ramas de las Ciencias Sociales.

Referencias bibliográficas

Alvarado, H. (2007). *Significados del teorema central del límite en la enseñanza de la estadística en ingeniería*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Batanero, C. (2019). Statistical sense in the information society. En K. O. Villalba-Condori, A. Adúriz-Bravo, F. J. García-Peñalvo y J. Lavonen (Eds.), *Proceedings of the Congreso Internacional Sobre Educación y Tecnología en Ciencias – CISETC* (pp. 28-38). Aachen, Germany: CEUR-WS.org.

Batanero, C. (2000). Controversies around the role of statistical tests in experimental research. *Mathematical Thinking and Learning*, *2*(1-2), 75-98.

Cañadas, G. (2012). *Comprensión intuitiva y aprendizaje formal de las tablas de contingencia en alumnos de psicología*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Castro Sotos, A. E., Vanhoof, S., Van den Nororgate, W., Onghena, P. (2007). Student´s misconceptions of statistical inference: A review of the empirical evidence form research on statistical education. *Educational Research Review, 2* (2), 98-113.

Chance, B. L., delMas, R. C., y Garfield, J. B. (2004). Reasoning about sampling distributions. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning, and thinking* (pp. 295-324). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Díaz, C. (2007). *Viabilidad de la enseñanza de la inferencia bayesiana en el análisis de datos en psicología*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Díaz, C., Batanero, C. y Wilhelmi, M. R. (2008). Errores frecuentes en el análisis de datos en educación y Psicología. *Publicaciones.* 35, 109-133.

Engel, J. (2017). Statistical literacy for active citizenship: A call for data science. *Statistics Education Research Journal, 16*(1), 44-49.

Estepa, A. y del Pino J. (2013). Elementos de interés en la investigación didáctica y enseñanza de la dispersión estadística. *Números,* 83, 43-63.

Green, K. E. (2007). Assessing understanding of the concept of iteraction in analysis of variance. Trabajo presentado en la *IASE/ISI-Satellite Conference on Assessing Student Learning in Statistics*. Guimarães, Portugal: International Statistical Institute.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39*(1-2), 127-135.

Godino, J. D.; Batanero, C.; Font, V. (2019), The onto-semiotic approach: implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics, 39*(1), 38-43.

Harradine, A., Batanero, C. y Rossman, A. (2011). Students and teachers' knowledge of sampling and inference. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education* (pp. 235-246). New York: Springer.

Montgomery, D. (2005). *Diseño y análisis de experimentos*. Mexico: Limusa.

Moses, L. E. (1992). The reasoning of statistical inference. In D. C. Hoaglin y D. S. Moore (Eds.), *Perspectives on contemporary statistics* (pp. 107-122). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Pardo, A., Garrido, J., Ruiz, M.A. y San Martín, R. (2007). La interacción entre factores en el análisis de la varianza: error de interacción. *Psicothema 19* (2), 343-349.

Reading, C. y Reid, J. (2005). Consideration of variation: A model for curriculum development. En G. Burrill y M. Camden (Eds.), *Curricular Development in Statistics Education: International Association for Statistical Education 2004 Roundtable* (pp. 36-53). Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

Reading, C., & Shaughnessy, J. M. (2004). Reasoning about variation. In D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 201–226). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Rosnow, R. L. y Rosenthal, R. (1991). If you're looking at the cell means, you're not looking at only the interaction (unless all main effects are zero). *Psychological Bulletin, 110*, 574-576.

Rubin, A. y Rosebery, A. S. (1990). Teachers' misunderstandings in statistical reasoning; evidence from a field test of innovative materials. En A. Hawkins (Ed.) T*raining teachers to teach Statistics* (pp, 72-89) Voorburg, The Netherlands: ISI.

Trigo, M. E., López, J., Martínez, R. y Moreno, R. (2005). Propiedades psicométricas de un conjunto de pruebas en función del contenido, tipo y número de opciones de respuesta. *Iberpsicología, 10*, 8-14.

Vallecillos, A. (1994). *Estudio teórico experimental de errores y concepciones sobre el contraste de hipótesis en estudiantes universitarios*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Vera, O. (2008). *Dificultades de estudiantes universitarios en algunos conceptos de diseño experimental*. Tesis de Master. Universidad de Granada.

Vera, O. (2015). *Comprensión de conceptos elementales del análisis de varianza por estudiantes universitarios.* Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Vera, O. D., Díaz, C. y Batanero, C. (2011). Dificultades en la formulación de hipótesis estadísticas por estudiantes de Psicología. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 27*, 41-61.

VOL 34, NÚMERO 2, AÑO 2021

ESQUEMA DE DESARROLLO DEL PENSAMIENTO Y LENGUAJE VARIACIONAL

DEVELOPMENT SCHEME OF VARIATIONAL THINKING AND LANGUAGE

Luis Manuel Cabrera Chim, José David Zaldívar Rojas
Universidad Autónoma de San Luis Potosí, Universidad Autónoma de Coahuila (México)
luis.cabrera@uaslp.mx, david.zaldivar@uadec.edu.mx

Resumen
En los últimos años se ha investigado y evidenciado la importancia de que los estudiantes desarrollen habilidades y competencias para el estudio del cambio. Se han reportados las dificultades que presentan para enfrentar situaciones que exigen del análisis del cambio, y se han establecidos niveles de desarrollo respecto estas formas de razonamiento y/o pensamiento. Sin embargo, ha habido poca sistematización de los elementos que intervienen para su desarrollo en el aula de clases. Situándonos en el enfoque teórico del Pensamiento y Lenguaje Variacional, en este documento se discute una propuesta en construcción de un esquema, que presenta elementos clave y sus relaciones, para guiar el desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional. Este es producto de una revisión documental de trabajos que han evidenciado algunos de dichos elementos y relaciones, y busca sintetizarlos bajo una estructura que pueda servir de fundamento para el diseño de situaciones de aprendizaje para el aula. Así, se tiene un aporte teórico fundamentado en la empíria de los trabajos revisados.

Palabras clave: pensamiento y lenguaje variacional, esquema, socioepistemología

Abstract
In recent years, the importance of developing skills and competencies for the study of change on the part of students has been researched and highlighted. The difficulties students present in facing situations that require the analysis of change have been reported; and levels of development have been established with respect to these forms of reasoning and/or thinking. However, there has been little systematization of the elements involved in their development in the classroom. Within the theoretical approach to Variational Thinking and Language, this paper discusses a proposal under construction of a scheme, which presents key elements and their relationships, to guide the development of Variational Thinking and Language. This is the result of a documentary review of works that have highlighted some of these elements and relationships and seeks to synthesize them under a structure that can serve as a basis for the design of learning situations for the classroom. Thus, this research shows a theoretical contribution based on the empirical evidence of the reviewed works.

Key words: variational thinking and language, scheme, socio-epistemological theory

Introducción

En los últimos años ha cobrado un importante impulso el desarrollo de propuestas didácticas y de investigación que tienen como objetivo el desarrollo, por parte de los estudiantes y las personas en general, de habilidades para el estudio del cambio (Arias, Leal & Organista, 2011; Artola, Mayoral y Benarroch, 2016; Báez, Martínez-López, Pérez y Pérez, 2017; Caballero, 2018; Cantoral, 2019; Carlson, Jacobs, Coe, Larsen y Hsu, 2002; Johnson, 2015; Martínez-López y Gualdrón-Pinto, 2018; Maury Mancilla, Palmezano Sarmiento, y Cárcamo Barriosnuevo, 2016; Thompson y Carlson, 2017). Esto como un objetivo de formación en sí mismo o como un mecanismo para la construcción de saberes matemáticos (Cantoral, 2019; Thompson & Carlson, 2017).

Las investigaciones sobre este tema no son nuevas. Thompson y Carlson (2017) señalan que, si bien la covariación ha sido una forma de razonamiento en matemática desde alrededor del año 1000 d.C., sólo se hizo explícito como constructo teórico hasta finales de la década de 1980 y a principios de 1990 en las obras de Jere Confrey y Pat Thompson. A partir de ese momento, se han desarrollado multitud de trabajos sobre el razonamiento covariacional (Carlson et al., 2002; Ellis, Özgür, Kulow, Williams & Amidon, 2015; Johnson, 2015; Thompson y Carlson, 2017; Thompson, Hatfield, Yoon, Joshua y Byerley, 2017).

En otra línea de desarrollo se encuentra el trabajo de Cantoral (2001), que dio evidencia de que la noción de predicción, en los fenómenos de flujo continuo de la naturaleza, se ubica en la base de significación primaria para el concepto matemático Serie de Taylor, lo cual ha sido sustituido dentro del discurso Matemático Escolar prevaleciente en la actualidad por un enfoque analítico. Estos resultados han cimentado diferentes estudios (Caballero, 2018; Caballero-Pérez y Moreno-Durazo, 2017; Cantoral, 2019; Hernández-Zavaleta y Cantoral, 2017) que proponen que el desarrollo de habilidades para estudiar el cambio enmarcado dentro de la práctica social de la predicción (Preadicere) es un acercamiento pertinente para la construcción de saberes matemáticos propios de la variación y el cambio (Cantoral & Farfán, 1998).

Sin embargo, el desarrollo de las capacidades y habilidades para el estudio del cambio no es sencillo. Cantoral (2019), Carlson et al., (2002) y Maury Mancilla et al. (2016) señalan que al privilegiarse en la enseñanza de matemáticas los algoritmos y procedimientos, el pensamiento de lo que cambia queda opacado o no se desarrolla, por tanto, muchos estudiantes no adquieren las estructuras y códigos variacionales para desarrollar dicho pensamiento. Por su parte, Caballero (2012) evidencia las dificultades de un grupo de profesores de bachillerato para enfrentar situaciones variacionales, es decir, aquellas que requieren del estudio de la variación y el cambio. Para realizar esto, los profesores plantean funciones o procedimientos algorítmicos conocidos que se aproximan o modelan, lo mejor posible, a las situaciones que se plantean. De este modo, el análisis variacional se sustituye por un trabajo algebraico no variacional.

Otro tipo de trabajos sobre esta temática se han enfocado en establecer niveles de razonamiento variacional y covariacional (Thompson y Carlson, 2017) o niveles de desempeño del pensamiento variacional (Báez et al., 2017). Estos se enfocan en caracterizar los tipos de análisis, comprensión o respuestas que plantean los estudiantes al enfrentar situaciones dinámicas o variacionales que requieren del estudio del cambio y, en su caso, determinar el nivel alcanzado por los estudiantes. Sin embargo, presentan poco énfasis en establecer cómo desarrollar ese razonamiento o pensamiento.

En el caso particular del Pensamiento y Lenguaje Variacional (Cantoral, 2019), enfoque teórico en el que se enmarca este trabajo, se han generado interesantes resultados teóricos y empíricos sobre cómo las personas enfrentan las situaciones variacionales y los significados que las personas construyen, a partir del uso, de los saberes matemáticos implicados (Caballero, 2018; Cantoral, 2019; Caballero-Pérez y Moreno-Durazo, 2017; Hernández-Zavaleta y Cantoral, 2017). Sin embargo, existe una falta de articulación de estos diferentes resultados, constructos y elementos que permitan, de forma clara y orientada, dar dirección o fundamento a los esfuerzos didácticos para el desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional en las personas, en particular, en el contexto escolar. Esta situación es señalada por Cantoral (2019) como el desafío actual dentro de esta línea de investigación.

En este documento se presentan los avances de un trabajo de investigación que busca incidir sobre la situación anterior y, más aún, establecer elementos para promover y evaluar el desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional. Para esto, se ha percibido como necesario tener un modelo de su desarrollo que sirva como referente contra el cual contrastar el desempeño de los estudiantes con fines de evaluar esto (De la Orden, 2009). Así, este documento tiene como objetivo presentar y reflexionar sobre una propuesta de esquema que articula aquellos elementos y relaciones clave que intervienen para el desarrollo de dicho pensamiento. Se pretende que en primera instancia sirva de base para orientar el diseño de secuencias didácticas o de intervención en el aula, es decir, generar trayectorias hipotéticas de aprendizaje (Simon y Tzur, 2004), y que posteriormente sea la base para establecer criterios y estándares para desarrollar procesos de evaluación sobre el desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional.

Fundamento teórico

El Pensamiento y Lenguaje Variacional, como línea de investigación, postula al estudio del cambio y la variación, cuando deviene en el marco del desarrollo de prácticas predictivas, como elementos que fundamentan la construcción y significación de los saberes matemáticos (Cantoral, 2019). Estas prácticas predictivas ponen el énfasis en determinar, en un sentido amplio, estados o comportamientos desconocidos de la situación o fenómeno bajo estudio.

Esta línea de investigación se enmarca en la construcción social del conocimiento matemático (Cantoral, 2016). Este proceso se realiza a través de prácticas y se sintetiza en el modelo de anidación (Figura 1):

Figura 1. *Esquema de anidación de prácticas.*

Fuente: (Cantoral, 2016).

Este modelo establece que las acciones directas de un individuo ante un medio evolucionan y se organizan como una actividad humana situada socioculturalmente y, posteriormente, dan lugar a prácticas socialmente compartidas. Estas prácticas son reguladas y estructuradas por prácticas de referencia, que a su vez son normadas por prácticas sociales (Cantoral, 2016). Estas relaciones pueden analizarse en dos sentidos: de abajo hacia arriba o de arriba hacia abajo. En el primer sentido la construcción social del conocimiento comienza con la acción del sujeto sobre el medio y en el segundo comienza por la norma que regula las acciones del individuo como parte de una comunidad.

Por su parte, por Pensamiento y Lenguaje Variacional, como una forma de pensamiento matemático, se entenderá a la forma de pensar y comunicar el análisis de las variaciones que intrínsecamente determinan el comportamiento y las leyes que rigen a un fenómeno o situación de cambio, con la finalidad de su comprensión y/o, en su caso, realizar estimaciones, anticipaciones o predicciones sobre el mismo (Cabrera, 2014). Así, es a partir de comprender qué cambia, cómo cambia, cuánto cambia, cómo cambia ese cambio y así sucesivamente, que podemos generar una comprensión profunda de las particularidades de dichos fenómenos o situaciones. Para esto se pueden emplear medios gráficos o icónicos, analíticos, gestuales, numéricos, verbales, entre otros. Como puede notarse, el desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional implica, según el caso, el desarrollo de los razonamientos variacional y covariacional.

Se entenderá por cambio a la modificación de las variables de una situación o fenómeno; mientras que, por variación, a la forma como cambian dichas variables. De este modo, se puede percibir el cambio, sin que esto implique que se es consciente de la variación. Para comprender esta idea, tomemos como ejemplo la situación del llenado de un recipiente cilíndrico. Una persona puede ser consciente que conforme pasa el tiempo la altura del agua en el recipiente no es la misma, es decir, percibe el cambio. Pero, puede no ser consciente de las particularidades con las que se produce ese cambio, es decir, no ser consciente de su variación. Sin embargo, para comprender la variación es necesario ser consciente del cambio.

Aspectos metodológicos

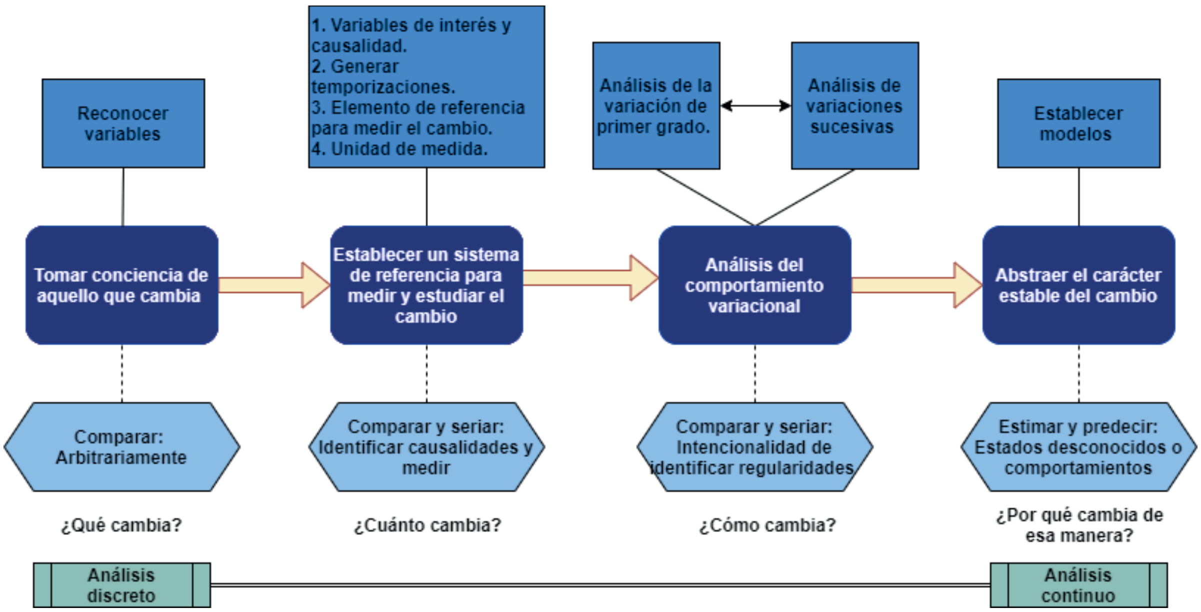
Para identificar aquellos elementos clave y sus relaciones, que intervienen para el desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional, se realizó una revisión de trabajos o reportes de investigación en dos niveles. En el primero se revisaron aquellos trabajos o reportes más relevantes de los últimos 5 años que tuvieran como objetivo evidenciar, analizar o teorizar sobre este proceso de desarrollo, bajo en enfoque teórico descrito en la sección anterior. Esto tomando en consideración que los elementos más relevantes deberían ser considerados así por la comunidad de investigación sobre esta temática y, por tanto, deberían estar presentes en los trabajos de vanguardia. El segundo nivel de análisis lo constituyó el rastreo, según fue necesario, de trabajos anteriores a este tiempo para comprender los contextos en los que surgieron los elementos o relaciones identificados en el primer nivel y, con ello, tener mayor claridad sobre estos.

Al tiempo que se realizaba la revisión anterior, se fueron articulando los elementos y sus relaciones, estableciendo una cierta progresión de desarrollo. En un primer momento, esto se realizó con base en el propio contexto de los trabajos revisados. Posteriormente, se fueron deconstruyendo dichas relaciones para establecer relaciones más precisas y articuladas de los diferentes elementos reportados en diferentes trabajos, conformándose una nueva racionalidad en las relaciones de los elementos.

Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional

Para el desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional se propone un esquema conformado por 4 estadios (Figura 2): ***tomar conciencia de aquello que cambia***; ***establecer un sistema de referencia para medir y estudiar el cambio***; ***análisis del comportamiento variacional***, y ***abstraer el carácter estable del cambio***. Estos estadios constituyen elementos básicos o clave que deben operacionalizarse de acuerdo con las *prácticas de referencia* y la *epistemología de prácticas* (Montiel y Buendía, 2012) en las que se enmarque el estudio del cambio. Los conceptos u objetos matemático y no matemáticos que emergen al estudiar el cambio y la variación pueden tomar significados diversos de acuerdo con la práctica de referencia en la que se ubican.

Figura 2. *Esquema de desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional.*



Elaboración de los autores.

En el corazón del enfoque teórico se plantea el tratamiento de la variable y su variación para la elaboración de predicciones. Esto tomando en consideración que el estudio del cambio se realiza a través de la comparación de estados de un fenómeno, lo cual implica establecer la diferencia de los valores de la variable en dichos estados (Cantoral, 2019). Esto queda de manifiesto en el modelo teórico propuesto por Caballero y Cantoral (2013) que señala que el estudio de la variación en una situación específica se realiza a partir de las estrategias variacionales de comparación, seriación, predicción y estimación.

- *Comparación*. Acción de establecer las diferencias entre dos estados de un mismo fenómeno o dos estados equivalentes de fenómenos diferentes, con la intención de cuantificar o cualificar el cambio. Esta constituye la primera estrategia que se pone en funcionamiento al estudiar el cambio y posibilita el desarrollo de la siguiente estrategia.
- *Seriación.* Consiste en establecer las diferencias entre un conjunto finito de comparaciones (variación de primer orden <primeras diferencias>) de modo que se pueda analizar y determinar la lógica del comportamiento de estados consecutivos de un fenómeno. En caso necesario, los resultados de las comparaciones se pueden considerar nuevos estados y se pueden poner en práctica de nueva cuenta la comparación y la seriación. Esto llevará a establecer análisis del comportamiento variacional de las variables.

Con base en la información obtenida a partir de las estrategias anteriores se posibilitan las siguientes estrategias.

- *Predicción*. Acción de anticipar un estado o valor específico desconocido de una variable, con base en el carácter estable del cambio.
- *Estimación.* Acción de anticipar comportamientos o tendencias de las variables de un fenómeno en un intervalo, con base en el carácter estable del cambio.

Caballero-Pérez y Moreno-Durazo (2017) señalan que es posible establecer una evolución pragmática jerárquica de las estrategias variacionales, lo cual se refleja en la figura 3 en la siguiente anidación de prácticas.

Figura 3. *Anidación de prácticas para el pensamiento y lenguaje variacional.*

Práctica social	Preadiciere
Práctica de referencia	Toxicología Física Etc.
Práctica socialmente compartida	Predicción Estimación
Actividad	Comparación Seriación
Acción	Ordenar Medir Girar Etc.

Fuente: (Caballero-Pérez y Moreno-Durazo, 2017)

De este modo, para estudiar el cambio es necesario primero ser conscientes de él (primer estadio), reconocer *qué es lo que cambia* a partir de reconocer modificaciones de estado de la situación o fenómeno bajo estudio (Cantoral, 2019). Para lograr esto se requerirá, por un lado, que el sujeto pueda actuar sobre su medio para explorar la situación que se estudia y, por el otro, poder comparar diferentes estados. Esto implica también la toma de decisión sobre aquello que interesa analizar. En otras palabras, determinar aquellas variables pertinentes para comprender cómo cambia la situación o fenómeno bajo estudio.

Al pensar, por ejemplo, en una situación de llenado de recipientes con agua, se puede notar que están involucradas variables como la velocidad con la que se vierte el agua en el recipiente, el volumen del agua en el recipiente, la altura que el agua alcanza y el tiempo que transcurre. Sin embargo, podría resultar complejo manejar todas las variables a la vez, por lo que será necesario determinar aquellas que se consideran adecuadas para los análisis a realizar. Esto significa establecer un primer nivel de lo que Cantoral (2019) denomina de constantificación de las variables.

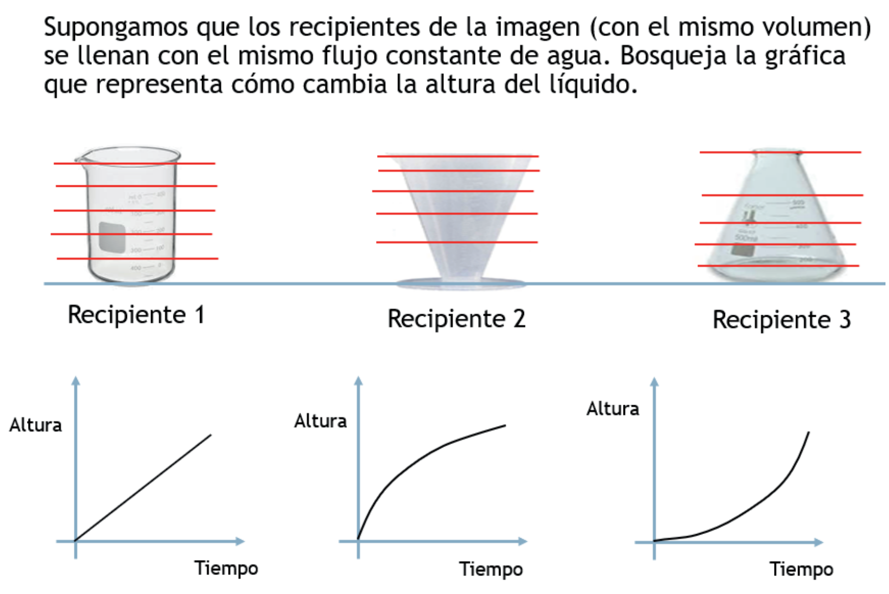
Posteriormente, será necesario generar elementos mínimos que permitan estudiar *cuánto cambian las variables* (segundo estadio), lo cual se traduce en el establecimiento de un sistema de referencia variacional (Caballero, 2018): *la relación causal de las variables*, *un elemento de referencia pertinente que permita reconocer y medir el cambio*, *la unidad de medida para establecer la intensidad del cambio*, y *la temporización de los estados de la situación o variables para reconocer su evolución*. En este estadio se establecen aquellos elementos básicos que permitirán determinar diferentes estados o momentos del fenómenos o situación de interés (temporización) y compararlos entre sí para estudiar el cambio implicado de un estado a otro. En otras palabras, determinar el valor (elemento de referencia y unidad de medida) de las variables de interés en esos momentos y luego determinar la intensidad del cambio (comparación). A su vez, esto podrá ayudar a reconocer las relaciones causales entre dichas variables (comparación), entendiendo cómo los resultados de la comparación se comportan (seriación). En resumen, se establecen los elementos para estudiar el cambio.

Retomando el ejemplo del llenado de recipientes y el bosquejo gráfico de cómo varía la altura del agua dentro el recipiente, es necesario determinar qué variables son las pertinentes para esto. Por ejemplo, se podría establecer que la altura depende del volumen del agua en el interior del recipiente o que la altura depende del tiempo transcurrido (relaciones causales). Si bien, las variables independientes en estos casos están relacionadas, la forma de razonar sobre la situación es diferente en cada uno. Pero, para medir la altura del agua en el recipiente es necesario tomar la base del recipiente como el elemento a partir del cual realizar esto (elemento de referencia). Los resultados de la medición podrían expresarse en centímetros u otra unidad arbitraria que ser tomada como unidad de comparación (unidad de medida). Además, para realizar la medición será necesario determinar ciertos momentos o estados que se producen durante el desarrollo del llenado, lo cual constituye la temporización de la situación. Se habla de temporización y no tiempo, pues no siempre es necesario que esté involucrada la variable tiempo en las situaciones o fenómenos bajo estudio. Por ejemplo, si se eligen la altura del agua con respecto a su volumen en el recipiente, como las variables de interés, entonces la medición de la altura se realizará cuando haya cierto volumen en el recipiente.

Solo hasta que se haya establecido el sistema de referencia variacional, ya sea consciente o inconscientemente, es que se posibilitará analizar los patrones de comportamiento de las variables de interés. Para esto será necesario analizar las variaciones de primer orden y, en caso necesario, las variaciones sucesivas (Hernández-Zavaleta & Cantoral, 2017). Así, se está en condiciones de describir *cómo cambian las variables*, en otras palabras, su comportamiento variacional (tercer estadio). De este modo, en este estado se pasa de determinar los cambios de la situación o fenómeno de interés a reconocer comportamientos o regularidades en esto, es decir, se transita hacia la variación. Así, no basta la comparación de estados, se requiere realizar seriaciones para determinar alguna regularidad en estos cambios. Esto podría ocurrir en la primera comparación (variación de primer orden) o requerirá comparar los resultados de las comparaciones (variación de segundo orden) y así sucesivamente (variación de orden mayor). Así, esto implica tomar decisiones sobre qué orden de variación es pertinente para identificar dicho comportamiento, es decir, se establece un segundo nivel de constantificación (Cantoral, 2019).

Retomando el ejemplo del llenado de recipientes (Figura 4), al hacer la temporización del proceso de llenado en diferentes momentos (líneas rojas en los recipientes de la Figura 1) y seriar los cambios que se producen en estos momentos sucesivos, se puede identificar que para el recipiente 1 (cilindro) los cambios son constantes, pero para el recipiente 2 (cono invertido) los cambios son cada vez menores y para el recipiente 3 (cono) los cambios son cada vez mayores. Esto puede realizarse desde la primera variación.

Figura 4. *Llenado de recipientes y análisis de los cambios de altura del líquido.*

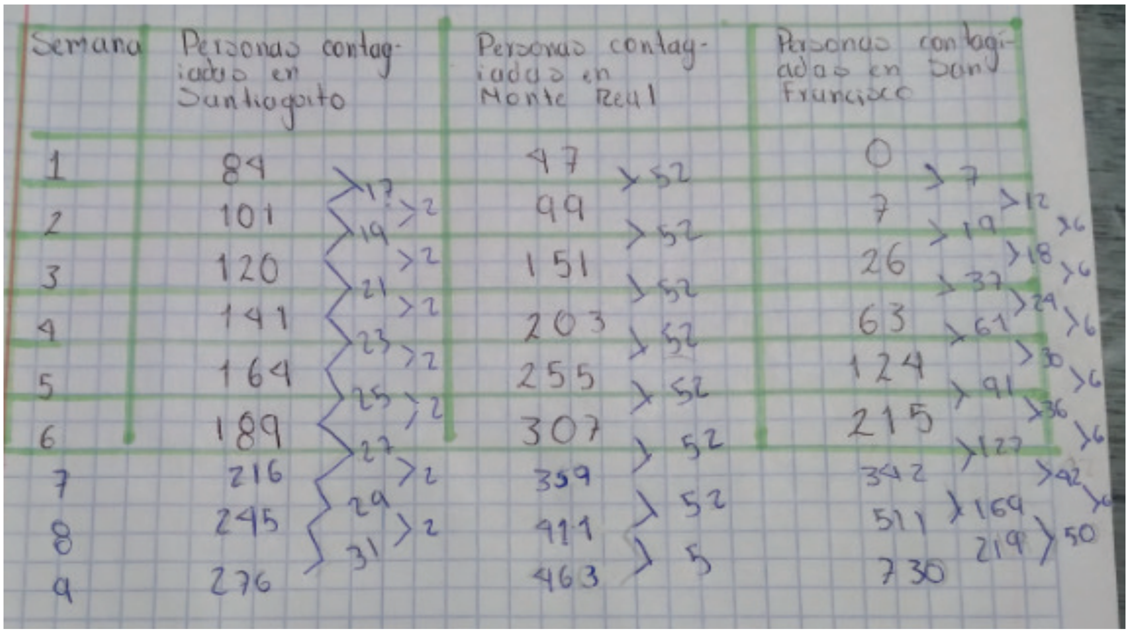


Elaboración de los autores.

No obstante, en ocasiones se requerirá de variaciones sucesivas. Para esto, reflexionemos sobre la situación de la Figura 5. En las tablas se presenta el número de personas (casos), por semana, que se han contagiado de COVID-19 en tres poblaciones y se solicita calcular el número de personas que se espera estén contagiadas en las semanas 7 y 9 en cada población si se continúa con las tendencias de las tablas.

En este ejemplo, los estudiantes argumentan que es posible notar que las diferencias son constantes luego de realizar cierta cantidad de diferencias. Así, se reconoce este patrón de comportamiento como algo que caracteriza a cada conjunto de valores en las tablas.

Figura 5. Método de las diferencias para calcular valores desconocidos de la secuencia.



Estrategia propuesta por un alumno de tercero de secundaria (14 años).

Los estadios dos y tres se desarrollan enmarcados en el segundo nivel (de abajo hacia arriba) del modelo de anidación de prácticas. Esto tomando en consideración que la búsqueda de regularidades (comparación y seriación) para comprender diferentes situaciones y fenómenos es una *actividad humana* (Cantoral, 2019). Esto se realiza normados por la necesidad de las sociedades (*prácticas socialmente compartidas*) de predecir o estimar comportamiento de situaciones o fenómenos de interés (Cantoral, 2019). Sobre esto se sustenta el desarrollo del cuarto estadio.

Una vez que se ha establecido el comportamiento variacional de las variables debe reconocerse que este permite explicar *por qué las variables cambian en la forma en que lo hacen*, es decir, abstraer el carácter estable del cambio (cuarto estadio): aquella regularidad que determina el comportamiento de los estados ulteriores del fenómeno (Cantoral, 2019).

En el ejemplo de la Figura 5, una vez identificado el patrón de comportamiento de cada conjunto de valores, se emplea este para realizar el cálculo de los valores solicitados. Es decir, el tomar conciencia de que este patrón se seguirá repitiendo, proporciona la racionalidad necesaria sobre la que descansa la estrategia para calcular los valores desconocidos de interés.

Si bien los ejemplos que se han señalado hasta ahora no buscan ser exhaustivos, sino solo ilustrar las ideas que se discuten, permiten evidenciar cómo la práctica social de Preadicere, que está detrás del diseño de tales ejemplos, norma las acciones y racionalidades que se encuentran detrás de las estrategias para enfrentarlas. Además, se debe tomar conciencia que dichos ejemplos se enmarcan en prácticas de referencia que dan sentido a dichas racionalidades y a los significados de los saberes que se construyen.

Es importante señalar que los estadios no son necesariamente lineales, sino pueden tener un diseño espiralado, es decir, es posible avanzar y retroceder en caso necesario y de acuerdo con la situación variacional. Por ejemplo, si pensamos en una situación variacional que parte de una tabla de valores, es muy probable que en la tabla ya se resuma el sistema de referencia y el estudiante podría no ser demasiado consciente de él. Por otra parte, en la situación de llenado de recipientes, es probable que los estudiantes puedan describir verbalmente el cambio, teniendo que establecer para esto sistemas de referencia, pero si se solicita graficar ese comportamiento (estadio 4) deberán traducir a los sistemas de referencia del plano cartesiano ese análisis variacional, es decir, regresar al estadio 2. Esto también plantea que no basta que los estudiantes alcancen el último estadio para un reducido número de situaciones o comportamientos variacionales “sencillos”, sino que debe lograrse esto para una diversidad de situaciones donde los comportamientos variacionales son cada vez más complejos (de acuerdo con los objetivos formativos y/o del nivel educativo).

Además de los estadios anteriores, el desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional precisa tomar consciencia de cómo se analiza el cambio, es decir, la variación. Esto puede realizarse desde una perspectiva discreta o una perspectiva continua (Castiblanco, Urquina y Acosta, 2004; Thompson y Carlson, 2017). Por lo general, los primeros análisis del cambio se realizan de forma discreta, aun cuando el fenómeno bajo estudio sea continuo, por tanto, se requiere que las personas transiten hacia la toma de consciencia de que el cambio es válido en diferentes puntos o momentos del fenómeno cuando este es continuo. Sin embargo, el trabajo con fenómenos discretos es una puerta de entrada para el estudio de la variación (Ellis et al., 2015), pues el análisis continuo del cambio es más complejo que el análisis discreto (Thompson y Carlson, 2017).

Un último aspecto a considerar dentro el esquema de la Figura 2, es el relativo a la importancia de trabajar variadas formas de representación o registros semióticos (Duval, 1999). Cabe aclarar que esta importancia radica en el hecho de que las representaciones de tales registros son los medios que permiten representar las relaciones de las variables bajo estudio y los cambios de estas, lo que posibilitará el estudio del cambio, es decir, de la variación. Así, el énfasis no se ubicará en promover las actividades cognitivas de formación, tratamiento y conversión de los registros, sino en considerar que estos registros son la forma a través de la cual se comunicará y estudiará el cambio. Esto puede vislumbrase en los ejemplos discutidos antes y en las Figuras 4 y 5.

Conclusiones

El esquema que se presenta en este trabajo para el desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional, en su estatus de propuesta, tiene la intención de contribuir a la sistematización de los elementos que en la revisión documental se han identificado como claves para este fin, con la finalidad de tener una base que pueda irse robusteciendo a la luz de la investigación que se desarrolle. Así, este esquema representa un aporte teórico que se sustenta en los resultados empíricos reportados en tales trabajos.

Se pretende que dicho esquema sirva de base para el diseño de trayectorias hipotéticas de aprendizaje que contribuyan a desarrollar el Pensamiento y Lenguaje Variacional de los estudiantes y generar a su vez conocimientos para mejorar dicho esquema y, a futuro, elaborar un modelo robusto sobre esto. Por tanto, los siguientes pasos en la investigación asociada con este desarrollo son dos. El primero es generar diseños didácticos para su implementación en contexto de aula. El segundo es analizar los resultados de las implementaciones para determinar si los elementos y relaciones que se expresan son suficientes para promover y explicar el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional o en su caso establecer los ajustes necesarios.

Es importante señalar que para la construcción del esquema se tuvo la intención de integrar aquellos elementos mínimos clave para el objetivo planteado. Esto llevó a que algunos elementos reportados no fueran integrados, no por no ser relevantes, sino para mantener cierta simplicidad que favoreciera su posible aplicación en diferentes prácticas de referencia. Cada posible práctica de referencia tiene particularidades y significados que de buscar integrarlos en un mismo esquema harían demasiado complejo o estático dicho esquema, limitando su posibilidad de generalización. Sin embargo, como se indicó antes, resulta importante generar investigación que ayude a validar, refinar o integrar más elementos a este esquema. Esto con la intención de alcanzar de manera óptima el objetivo que se tiene.

Como toda investigación en proceso, el resultado parcial que se presenta aquí debe seguir fortaleciéndose con más resultados empíricos y teóricos.

Referencias Bibliográficas

Arias, C., Leal, L. & Organista, M. (2011). La modelación de la variación, un análisis del uso de las gráficas cartesianas en los libros de texto de biología, física y química de secundaria. *Revista de Ciencias, 15*, 93-118.

Artola, E. C., Mayoral, L. E., & Benarroch, A. (2016). Dificultades de aprendizaje de las representaciones gráficas cartesianas asociadas a biología de poblaciones en estudiantes de educación secundaria. Un estudio semiótico. *Revista Eureka Sobre Enseñanza y Divulgación de Las Ciencias*, *13*(1), 36–52. https://doi.org/10.25267/rev_eureka_ensen_divulg_cienc.2016.v13.i1.04

Báez, A. M., Martínez-López, Y., Pérez, O. L., & Pérez, R. (2017). Propuesta de tareas para el desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de ingeniería. *Formacion Universitaria*, *10*(3), 93–106. https://doi.org/10.4067/S0718-50062017000300010

Caballero, M. (2012). *Un estudio de las dificultades en el desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional en profesores de bachillerato* (Tesis de maestría). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Caballero, M. y Cantoral, R. (2013). Una caracterización de los elementos del Pensamiento y Lenguaje Variacional. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 26*, 1007 – 1015.

Caballero, M. (2018). *Causalidad y temporización entre jóvenes de bachillerato. La construcción de la noción de variación y el desarrollo del Pensamiento y Lenguaje variacional* (Tesis de doctorado). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Caballero-Pérez, M. & Moreno-Durazo, G. (2017). Diseño de una situación de aprendizaje para el desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 30*, 1066 -1074.

Cabrera, L. (2014). *El estudio de la variación en la práctica del profesor de Cálculo. Un estudio de caso.* (Tesis de doctorado). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México

Cantoral, R. & Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis*. Revista Epsilon, 14* (3), 353 – 369.

Cantoral, R. (2001). *Matemática Educativa. Un estudio de la formación social de la analiticidad*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R. (2016). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Barcelona, España: Editorial Gedisa.

Cantoral, R. (2019). *Caminos del saber. Pensamiento y Lenguaje Variacional*. España: Editorial Gedisa.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(5), 352–378. https://doi.org/10.2307/4149958

Castiblanco, A., Urquina, H., & Acosta, E. (2004). *Pensamiento Variacional y Tecnologías Computacionales.* Bogotá, Colombia: Enlace Editores Ltda.

De la Orden, A. (2009). Evaluación y calidad: análisis de un modelo. *Estudios sobre Educación, 16*, 17-36

Duval, R. (1988). "Graphiques et Equations: l'articulation de deux registres". *En Annales de Didactique et de Sciences Cognitives 1*, 235–255.

Ellis, A. B., Özgür, Z., Kulow, T., Williams, C. C., & Amidon, J. (2015). Quantifying exponential growth: Three conceptual shifts in coordinating multiplicative and additive growth. *Journal of Mathematical Behavior*, *39*, 135–155. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.06.004

Hernández-Zavaleta, J. & Cantoral, R. (2017). El desarrollo del Pensamiento y Lenguaje variacional y las acciones en las prácticas predictivas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 30*, 1009-1017.

Johnson, H. L. (2015). Together yet separate: Students' associating amounts of change in quantities involved in rate of change. *Educational Studies in Mathematics*, *89*(1), 89–110. https://doi.org/10.1007/s10649-014-9590-y

Martínez-López, L. G., & Gualdrón-Pinto, E. (2018). Fortalecimiento del pensamiento variacional a través de una intervención mediada con TIC en estudiantes de grado noveno. *Revista de Investigación, Desarrollo e Innovación, 9*(1), 91-102. doi: 10.19053/20278306.v9.n1.2018.8156.

Maury Mancilla, E. A., Palmezano Sarmiento, G. J., & Cárcamo Barriosnuevo, S. J. (2016). Sistema de tareas para el desarrollo del pensamiento variacional en 5° grado de educación básica primaria. *Escenarios,* 10(1), 7. https://doi.org/10.15665/esc.v10i1.721

Montiel G. & Buendía, G. (2012). Un esquema metodológico para la investigación socioepistemológica: Ejemplos e ilustraciones. En A. Rosas y A. Romo (Eds.), *Metodología en Matemática Educativa: Visiones y reflexiones* (pp. 61-88). México: Lectorum.

Simon, M. A., & Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in concpetual learning: an elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 91-104.

Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421-456). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Thompson, P. W., Hatfield, N. J., Yoon, H., Joshua, S., & Byerley, C. (2017). Covariational reasoning among U.S. and South Korean secondary mathematics teachers. *Journal of Mathematical Behavior*, *48*(July), 95–111. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.08.001

Clame Acta Latinoamericana de Matemática Educativa

SECCIÓN 2 / PROPUESTAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

VOL 34, NÚMERO 2, AÑO 2021

ETNOMODELACIÓN COMO UNA ACCIÓN PEDAGÓGICA PARA LAS ETNOMATEMÁTICAS

ETHNOMODELLING AS A PEDAGOGICAL ACTION TO ETHNOMATHEMATICS

Daniel Clark Orey, Milton Rosa
Universidade Federal de Ouro Preto (Brasil)
oreydc@gmail.com, milton.rosa@ufop.edu.br

Resumen
Es importante buscar enfoques metodológicos alternativos, mientras las prácticas matemáticas occidentales son aceptadas a nivel mundial, para registrar formas históricas de ideas y procedimientos matemáticos que se dan en diferentes contextos culturales. Un enfoque metodológico alternativo es la etnomodelación, que consideramos como una aplicación práctica de la etnomatemática que agrega la perspectiva cultural a conceptos de modelación matemática. En eso contexto, sofisticadas ideas y prácticas matemáticas, que incluyen principios geométricos en trabajo artesanal, conceptos arquitectónicos y prácticas, son encontrados en actividades y artefactos de muchas culturas locales y globales. Estos conceptos están relacionados con las relaciones numéricas que se encuentran en la medición, cálculo, juegos, adivinación, navegación, astronomía, modelado y en una amplia variedad de otros procedimientos matemáticos, tanto como en artefactos culturales a través del desarrollo de la etnomodelación.

Palabras clave: acción pedagógica, etnomatemáticas, etnomodelación, etnomodelos, modelación

Abstract
It is important to seek for alternative methodological approaches, while Western mathematical practices are accepted worldwide to record historical forms of mathematical ideas and procedures that occur in different cultural contexts. An alternative methodological approach is ethnomodelling, which we consider as the practical application of ethnomathematics that adds the cultural perspective to the concepts of mathematical modelling. In this context, sophisticated mathematical ideas and practices, including geometric principles in craftwork, architectural concepts and practices, are found in activities and artifacts of many local and global cultures. These concepts are related to numerical relationships found in measurement, calculation, games, divination, navigation, astronomy, modelling and in a wide variety of other mathematical procedures, as well as in cultural artifacts, through the development of ethnomodelling.

Key words: pedagogical action, ethnomathematics, ethnomodelling, ethnomodels, modelling

Consideraciones Iniciales

Las matemáticas son frecuentemente presentadas como una asignatura universal que posee un lenguaje propio. Sin embargo, las diferencias culturales, linguísticas y procedimentales para la resolución de los problemas matemáticos, enfrentados por estudiantes en las escuelas, es una cuestión educacional que necesita ser investigada. Si estas diferencias no son discutidas, serán adicionadas a las dificultades que los estudiantes encuentran en las salas de clase.

De acuerdo con Rosa y Orey (2006), la vida cotidiana de los miembros de diferentes grupos culturales puede ser percibida como siendo representaciones de la propia realidad, que son generadas, vía inferencias, con la utilización de representaciones mentales a través de la modelación em una perspectiva de las etnomatemáticas.

En este sentido, la utilización de las ideas, procedimientos y prácticas matemáticas que están presentes en el cotidiano de estos miembros tienen por objetivo la ampliación y el perfeccionamiento de su conocimiento matemático, pues visa el fortalecimiento de la identidad cultural de los individuos, como seres autónomos y capaces. Entonces, es importante que los individuos desarrollen sus propias prácticas matemáticas.

Sin embargo, es fundamental que ellos también tengan una comprensión de la institución socio-pedagógica de la matemática por medio de acciones pedagógicas que fomenten la conexión de las prácticas matemáticas presentes en la comunidad con los contenidos matemáticos enseñados en las escuelas, en una reinterpretación del currículo matemático escolar (D'Ambrosio, 1990).

Para Rosa y Orey (2017), es necesario buscar enfoques metodológicos alternativos, mientras las prácticas matemáticas occidentales son aceptadas a nivel mundial, para registrar formas históricas de ideas matemáticas que se dan en diferentes contextos culturales. Así, un enfoque alternativo es la etnomodelación, que es una aplicación práctica de las etnomatemáticas que agrega la perspectiva cultural a los conceptos de modelación.

Consecuentemente, la etnomodelación proporciona a los estudiantes una acción pedagógica que conecta estas prácticas matemáticas a las prácticas proporcionadas por la adquisición de los conocimientos de las matemáticas escolar y académica. La propuesta de la etnomodelación es interpretada como una metodología que permite valorar y presentar las matemáticas presentes en el día a día de los estudiantes en situaciones motivadoras.

Delineando un Camino para la Acción Pedagógica de la Etnomodelación

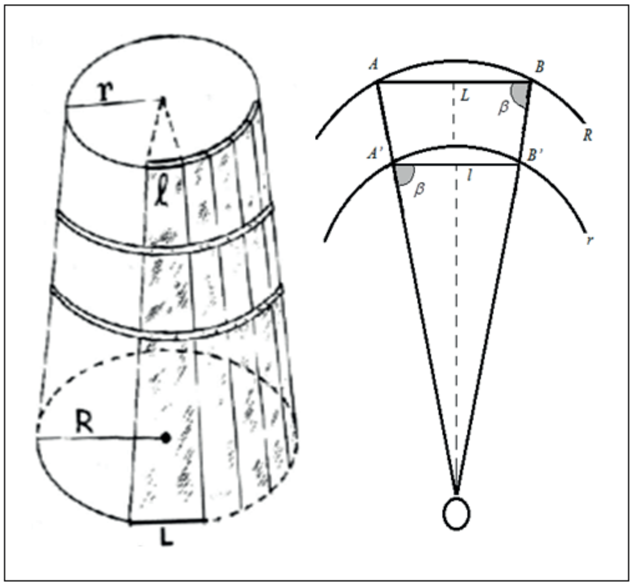
Para que podamos delinear un camino para la acción pedagógica de la etnomodelación, existe la necesidad de:
a) Realizar un trabajo de investigación de campo para que podamos entender cuales ideas, procedimientos o prácticas matemáticas, presentes en la comunidad, pueden ser considerados como objetos de estudios pedagógicos.
b) Determinar cuál propuesta educacional debe ser considerada para la elaboración de este currículo matemático escolar.

Delante de estas pretensiones debemos entender que el proceso pedagógico de la etnomodelación está relacionado con los abordajes propuestos por Eglash (2002) que delinearán esta acción pedagógica. Estos abordajes están relacionados con los sistemas de conocimiento que están profundamente encuadernados al cotidiano de los miembros de cada grupo cultural y que pueden ser *matematizados* y traducidos al lenguaje de las matemáticas académicas.

Así, entendemos que *matematizar* determinadas ideas, procedimientos y prácticas matemáticas presentes en el cotidiano de diferentes grupos culturales es trabajar con las etnomatemáticas (Rosa y Orey, 2010). Entonces, existe la necesidad de destacar el proceso de la modelación por medio de ejemplos de la utilización de técnicas matematizadoras que son desarrolladas por los miembros de diferentes grupos culturales y también su encuentro natural con las etnomatemáticas (Bassanezi, 2002).

Por ejemplo, un grupo de estudiantes participando en un curso de especialización in Brasil, buscaron comprender, entender, y saber cuáles eran las *matemáticas* utilizadas por el Señor Joaquim, en Ijuí, Rio Grande do Sul, que producía vinos y construía sus propios toneles, utilizando ideas, procedimientos y prácticas matemáticas que fueron transmitidas por sus antepasados italianos. La figura 1 muestra na matematización del tonel de vino.

Figura 1. *Matematización del tonel de vino.*



Fuente: Bassanezi (2002).

En otro estudio, Rios (2000) también buscó entender y comprender el proceso mental de idealización de *ponchos* (vestimentas utilizadas como abrigos o casacos) y *aguayos* (vestimentas usadas como mantillas), que son confeccionados por las campesinas bolivianas. La figura 2 muestra los ponchos y aguayos bolivianos.

Figura 2. *Pochos y aguayos bolivianos.*

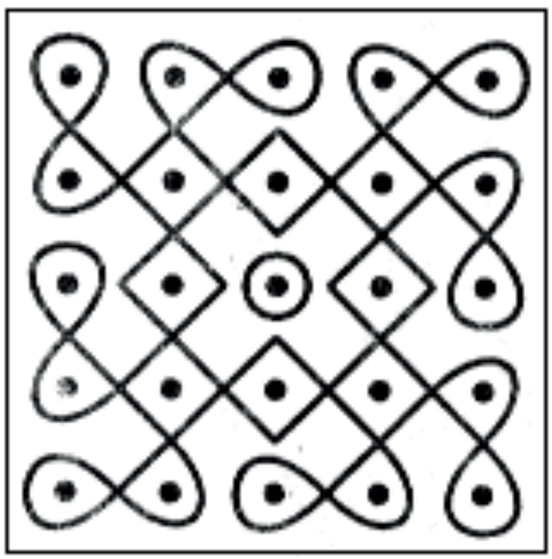
Fuente: Rosa y Orey (2017).

En esta investigación, Rios (2000) describió las prácticas *matematizadoras* que son utilizadas en la confección de estos tipos de vestimentas y, observó que, durante este trabajo, las campesinas están constantemente evaluando y analizando los resultados, alterándolos, en caso de que el modelo obtenido no esté de acuerdo con las representaciones mentales que fueron previamente concebidas.

De forma similar, Knijnik (1993) también utilizó un abordaje etnomatemático para *matematizar* el conocimiento de los trabajadores del *Movimiento Sin Tierra*, in Brasil, para evaluar áreas de tierras y calcular el volumen de troncos de árboles. Para desarrollar este proceso de *cubación*, esta investigadora elaboró una traducción de este conocimiento para el lenguaje matemático demostrando el valor de ese conocimiento y su utilización para la práctica pedagógica.

En esta misma línea de estudio, Gerdes (1993) *matematizó* los dibujos de arena, denominados Sona, que son elaborados por los nativos de Angola y Zambia, legitimando y valorando el reconocimiento de esta práctica cultural, traduciendo estos conocimientos para el currículo escolar con la utilización de la matemática académica. La figura 3 muestra uno dibujo de arena denominado sona.

Figura 3. *Dibujo de arena denominado sona.*



Fuente: Rosa y Orey (2017).

Estos estudios revelan que la *matematización* de la realidad, elaborada por miembros de diferentes grupos culturales es vista como siendo representaciones de la propia realidad que son generadas, vía inferencias, con la utilización de representaciones mentales que son basadas en los conocimientos matemáticos locales.

Es importante resaltar que estas investigaciones también demuestran que, de acuerdo con Monteiro y Pompeu Jr. (2003), la propuesta etnomatemática puede ser interpretada como um program que permite reconocer y presentar las matemáticas presentes en el día a día de los estudiantes en situaciones didácticas motivadoras.

Etnomatemáticas + Modelación = Etnomodelación

Partiendo del principio de que la *matematización* es una de las etapas más importantes de la modelación, pues hay la traducción de las situaciones-problema para el lenguaje matemático académico. Así, entendemos que la modelación es una de las posibles propuestas para iniciar la acción pedagógica del programa etnomatemáticas por meio de la etnomodelación.

En este sentido, la utilización de las etnomatemáticas que están presentes en el cotidiano de los miembros de los grupos culturales tiene por objetivo la ampliación y el perfeccionamiento de su conocimiento matemático, pues visa el fortalecimiento de la identidad cultural de los individuos, como seres autónomos y capaces (Rosa y Orey, 2006).

Del mismo modo, la modelación es una de las posibles estrategias de enseñanza que puede posibilitar la aproximación y la relación entre los *haceres y saberes* escolar y el cotidiano (Monteiro, 2004). Este aspecto también considera las exploraciones pedagógicas sobre los modos por los cuales podamos conectar la matemática formal al contexto cultural, en el currículo matemático (Orey, 2000).

Consecuentemente, la modelación posibilita, a los educandos, la utilización de instrumentos comunicativos, analíticos y materiales, que son esenciales para el ejercicio de los derechos y deberes, que son necesarios a la práctica de la ciudadanía y a la lectura crítica y reflectante de los fenómenos que ocurren en el mundo globalizado (D'Ambrosio, 2000).

En eso contexto, las etnomatemáticas ofrecen una visión más amplia de las matemáticas, pues abarca las ideas, nociones, procedimientos, procesos, métodos y prácticas arraigadas en entornos culturales distintos. Este aspecto conduce a una mayor evidencia de los procesos cognitivos, capacidades de aprendizaje y actitudes que los procesos de aprendizaje directo que ocurre en las aulas (Rosa, 2010).

Además, mediante la reflexión sobre las dimensiones sociales y políticas de la etnomodelación, otro aspecto importante de este campo de estudio es la posibilidad de que la aplicación de enfoques innovadores para el desarrollo de una sociedad dinámica y *glocalizada*[1].

Etnomodelación

Para Rosa y Orey (2017), las prácticas matemáticas que se refieren a las relaciones numéricas que son encontradas en la medición, clasificación, cálculo, medición, juegos, adivinación, la navegación, la astronomía, la modelación y, también, en una amplia variedad de otros procedimientos matemáticos son empleados en la producción de los artefactos culturales por los miembros de grupos culturales distintos.

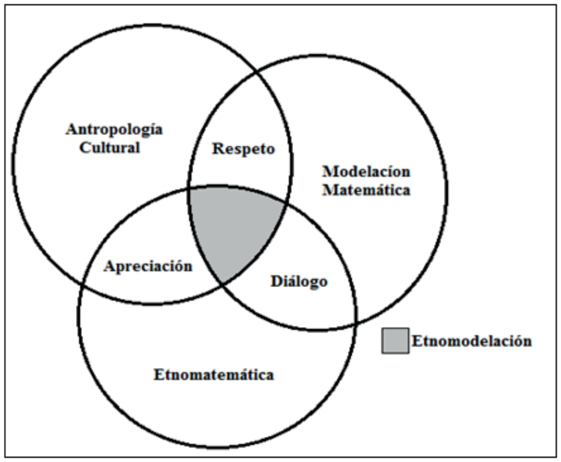
Este contexto permite el desarrollo de una definición de etnomodelación como la traducción de las ideas locales matemáticos, los procedimientos y las prácticas en las que el prefijo etno se refiere al conocimiento matemático específico desarrollado por los miembros de grupos culturales distintos (Rosa y Orey, 2017). Por lo tanto, es necesario comenzar con el contexto social, la realidad y los intereses de los estudiantes y no mediante la aplicación de un conjunto de valores externos que se ven obligados en ellos (D'Ambrosio, 1990).

En este sentido, Rosa y Orey (2012) afirman que el aspecto principal de la etnomodelación es resolver los problemas presentes en su vida diária, bien como promover la creación de una sencilla comprensión de los sistemas matemáticos alternativos, sino también para que los estudiantes puedan entender mejor más acerca de la importancia y el papel de las matemáticas en su sociedad y contexto.

[1]Para Rosa y Orey (2017), la glocalización (***glo****bal* + *lo****cal***) es un abordaje dialógico que considera la interacción entre los conocimientos matemáticos *locales* (desde dentro/émicos/*insiders*) y globales (desde fuera/éticos/*outsiders*). Este enfoque también está relacionado con la aceleración e intensificación de la interacción e integración entre los miembros de grupos culturales distintos que componen la sociedad.

En esta dirección, con la utilización de la etnomodelación como una herramienta en la acción pedagógica del programa Etnomatemática, los estudiantes han demostrado que aprenden cómo encontrar y trabajar con situaciones auténticas y problemas de la vida real (Rosa y Orey, 2010). Entonces, la etnomodelación es el elemento esencial en el ámbito de la antropología cultural, la etnomatemática y la modelación matemática. La figura 4 muestra la intersección entre estos tres campos de estudio.

Figura 4. *Etnomatemática como la intersección entre tres campos de estudio.*



Fuente: Rosa y Orey (2012).

La traducción es la descripción de los procesos de modelación de sistemas locales (culturales), los cuales pueden tener una representación matemática en la cultura occidental y viceversa. Por ejemplo, para Rosa y Orey (2006), la etnomatemática hace uso de la modelación a fin de establecer relaciones entre los marcos conceptuales locales y las matemáticas incluidas en los diseños globales. En nuestro punto de vista, esto no es diferente a la traducción de palabras, términos, ideas y conceptos del español al inglés ou al portugués.

Etnomodelación y los Conocimientos Émicos y Éticos

El conocimiento matemático puede ser visto como un resultado de origen émico (desde dentro) más que ético (desde fuera) (Eglash, 2006). Por ejemplo, Lewis (2018) sostiene que perspectiva parece razonable, ya que las etnomatemáticas (émico) aplican la modelación (ético) para establecer relaciones entre el marco conceptual entre el conocimiento local (émico) y lo conocimiento matemático académico (ético).

Conocimiento Matemático Émico

Para Rosa y Orey (2012), el conocimiento matemático émico está relacionado con las cuentas, las descripciones y los análisis e las prácticas matemáticas que son expresadas en términos de las categorías y esquemas conceptuales que se consideran significativos y apropiados por los miembros de diferentes grupos culturales. Este conocimiento matemático está de acuerdo con las percepciones e interpretaciones consideradas apropiadas por la cultura desde adentro.

Consecuentemente, este conocimiento está relacionado con los *saberes y haceres* matemáticos desarrollados por los miembros de estos grupos desde dentro de la cultura por meio de uma visión interna de este conocimiento. Es importante resaltar que la validación del conocimiento émico trae consigo una cuestión de consenso de la población local que debe estar de acuerdo con que estas construcciones coinciden con las percepciones compartidas que retratan las características de su cultura.

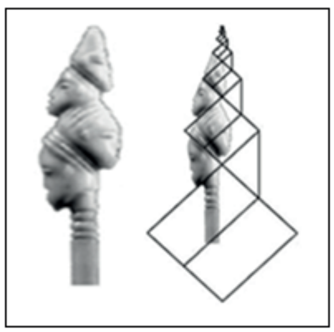
Uno Ejemplo de Conocimiento Matemático Émico

La escultura de Marfil Mangbetu do Zaire (**Babbitt et al.,** 2011) tiene una técnica de construcción que usa un ángulo de 45 grados con las propiedades de escalamiento de la talla de marfil puede revelar su estructura subyacente que tiene tres características geométricas interesantes:

- En primer lugar, cada cabeza es mayor que la de abajo, y mira en la dirección opuesta.
- En segundo lugar, cada cabeza está enmarcada por dos líneas, una formada por la mandíbula y una formada por el pelo; estas líneas se intersecan aproximadamente a 90 grados.
- En tercer lugar, hay una asimetría: el lado izquierdo muestra un ángulo cerca de 20 grados distinto de la vertical (Babbitt et al., 2011).

Esta secuencia de cuadrados que se van encogiendo puede ser construida por un proceso iterativo, bisecando la longitud del lado de un cuadrado para crear la longitud del lado del cuadrado siguiente. En esta escultura, el lado izquierdo está a unos 20 grados de la vertical. En la estructura iterativa de cuadrados, el lado izquierdo está aproximadamente a 18 grados de la vertical (Babbitt et al., 2011). La figura 5 muestra escultura de Marfil Mangbetu do Zaire y la secuencia de cuadrados.

Figura 5. *Escultura de marfil Mangbetu y la secuencia de cuadrados.*



Fuente: Eglash (Babbitt et al., 2011).

El algoritmo de construcción se puede continuar indefinidamente, y la estructura resultante se puede usar en una amplia variedad de aplicaciones de la enseñanza de matemáticas, desde simples procedimientos de construcción hasta trigonometría.

Conocimiento Matemático Ético

De acuerdo con Rosa y Orey (2017), el conocimiento matemático ético está relacionado con las cuentas, descripciones y análisis de las ideas, conceptos, procedimientos y prácticas matemáticas expresadas en términos de las categorías que se consideran significativos y apropiados por la comunidad de observadores científicos. Este tipo de conocimiento debe ser preciso, lógico, completo, replicables e independiente de los observadores externos, que tienen una vision desde fuera y exterior (Rosa y Orey, 2017). La validación del conocimiento ético es una cuestión de análisis lógico y empírico, en particular, de que la construcción cumple con los estándares de integralidad y consistencia lógica.

Un Ejemplo de Conocimiento Matemático Ético

La modelación de una pared en una escuela en Ouro Preto, Minas Gerais, Brasil (Rosa y Orey, 2010) fue realizada para comprobar si se podía demostrar que la forma geométrica mostrada era una serie de curvas exponenciales, parábolas o catenarias. Lo que sucedió fue algo totalmente sorprendente, y al final, los resultados, por importantes que sean, fueron eclipsados por la oportunidad de discutir y debatir acerca de las curvas exponenciales, parabólicas y catenarias que se dieron entre los profesores y los estudiantes. La figura 6 muestra la pared da la escuela, las curvas y el etnomodelo gráfico (Rosa y Orey, 2010).

Figura 6.: *Pared de la escuela, las curvas y el etnomodelo gráfico.*

Fuente: Rosa y Orey (2010).

Después de examinar los datos recolectados al medir varias curvas en la pared y tratar de adaptarlos a las funciones exponencial, cuadrática y catenaria, a través de modelos matemáticos, llegamos a la conclusión de que las curvas de la pared se aproximan a una curva catenaria.

Etnomodelos

La elaboración de etnomodelos que representan estos sistemas son representaciones que ayudan a los miembros de diferentes grupos para entender y apropiarse de la realidad mediante el uso de pequeñas unidades de información, denominadas etnomodelos, émicos o éticos, que vinculan su patrimonio cultural con el desarrollo de sus prácticas matemáticas (Rosa y Orey, 2017).

Por ejemplo, Cortes (2017) afirma que los etnomodelos émicos están fundamentados en las informaciones matemáticas que son importantes para los miembros de la propia comunidad, pues representan el pensamiento matemático de estos miembros, que buscan traducir su forma de pensar matemáticamente utilizando ejemplos que se encuentran en su propia realidad.

Por outro lado, Cortes (2017) sostiene que los etnomodelos éticos se basan en la visión de los observadores externos acerca de la realidad que se está modelando, pues representan cómo los modeladores piensam que el mundo funciona a través de sistemas tomados de la realidad.

La Perspectiva Dialógica (Émica-Ética)

La perspectiva dialógica presenta un dinamismo cultural entre los conocimientos émico y ético. Por ejemplo, la perspectiva ética juega un papel importante en la investigación en etnomodelación, sin embargo, la perspectiva émica debe tenerse en cuenta en este proceso también, ya que las características émicas acentúan la cuestión de lo que debe incluir un modelo basado en agentes para servir a objetivos prácticos en la investigación de etnomodelos (Rosa y Orey, 2017).

Así, para Cortes (2017), el abordaje dialógico puede considerarse como la aceleración e intensificación de la interacción e integración entre los miembros de grupos culturales distintos. La interrelación entre la cultura local y las ideas matemáticas pueden ser mutuamente reforzadas por la utilización de actividades matemáticas culturalmente relevantes.

Estas actividades ayudan a los estudiantes a perceber la relevancia de las matemáticas y auxilien a los profesores a utilizar esta conexión para enseñar más matemáticas mediante el uso de las prácticas matemáticas a través de las etnomatemáticas y de los artefactos culturales.

Etnomodelos Dialógicos

Las ideas y procedimientos matemáticos son éticos si pueden ser comparados entre diferentes culturas que utilizan definiciones, categorias y métricas comunes, mientras que el énfasis del análisis locales de estos aspectos es émico si las ideas y procedimientos y matemáticos y, también, las prácticas son desarrolladas exclusivamente pelos miembros de un subconjunto de culturas que tienen sus raíces en las diversas formas en que las actividades éticas se llevan a cabo en un entorno culturalmente específico (Cortes, 2017).

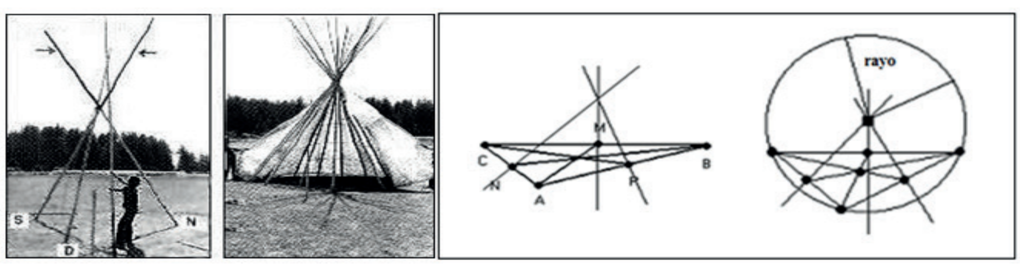
En este enfoque, la perspectiva ética reconoce que el conocimiento de los miembros de cualquier grupo cultural determinado no tiene prioridad sobre sus contendientes afirmaciones émicas y viceversa. Consecuentemente, hay una necesidad de la realización de “actos de *traducción* entre las perspectivas émica y ética (Eglash et al, 2006).

En esse sentido, Rosa y Orey (2010) sostienen que el conocimiento matemático de los miembros de diferentes grupos culturales se combina con el sistema de conocimiento matemático occidental para resultar en una perspectiva dialógica en educación matemática por medio del dinamismo cultural.

Uno Ejemplo de Conocimiento Matemático Dialógico

La base trípode del Tipi dos los indígenas Sioux de los Estados Unidos parece ser perfectamente adaptada para el duro ambiente en el que se utiliza (Orey, 2000). La figura 8 muestra el Tipi, su base trípode y sus matematizaciones.

Figura 8. *Tipi, su base trípode y sus matematizaciones.*



Fuente: Orey (2000).

Para Orey (2000), a Tipi tiene la ventaja de proporcionar una estructura estable, pues resiste los vientos y el clima extremadamente variable que impera en esta región. En eso contexto, los habitantes determinaban el centro de la base circular del Tipi usando la idea del triángulo existente formado por el trípode. El centro del Tipi tiene un poder y santidad definido, es algo más que solo necesidad o estética, pasa a ser la selección del centro de la casa Sioux.

Un Currículo para la Etnomodelación

La utilización de la *matematización* que está presente en la cotidianeidad de los miembros de grupos culturales tiene por objetivo la ampliación y el perfeccionamiento del conocimiento matemático, pues conduce al fortalecimiento de la identidad cultural de los individuos, como seres autónomos y capaces (Rosa y Orey, 2012).

La etnomodelación es una de las posibles estrategias para la enseñanza que posibilitará aproximar y relacionar los saberes escolares (ético) y el cotidiano (émico) por meio del dinamismo cultural, pues puede ser considerada como el estudio de los fenómenos matemáticos dentro de una cultura y se trata de una construcción social culturalmente delimitada (Cortes, 2017).

Así, Rosa y Orey (2017) afirman que los desarrolladores de currículos escolares han hecho caso omiso de las perspectivas émicas en las actividades curriculares escolares y que, tal vez, esta es una de las principales razones del fracaso de muchos sistemas educativos en el mundo.

Entonces, es necesario incorporar elementos matemáticos ancestrales de la comunidad local en el currículo escolar porque la etnomodelación es una metodología científica que tiene como característica la organización de las estrategias de enseñanza en una vertiente pedagógica, que tiene como objetivo la reorganización del currículo matemático, pues visa atender las demandas del mundo moderno (Rosa y Orey, 2017).

Una perspectiva dialógica (émica-ética) incluye el reconocimiento de otras epistemologías, y de la naturaleza holística e integrada del conocimiento matemático de los miembros de diversos grupos culturales que se encuentran en muchos centros urbanos (Rosa y Orey, 2012). Sin embargo, Rosa (2010) afirma que la organización de situaciones didácticas en una perspectiva etnomatemática utiliza la modelación como uno de los posibles caminos para concretizarse un trabajo centrado en una perspectiva etnomatemática en salas de clase.

Consideraciones Finales

Con la creciente preocupación de la incorporación de la perspectiva etnomatemática en los currículos de matemáticas, existe la necesidad de desarrollar una práctica etnomatemática dirigida a la acción pedagógica. Entonces, un objetivo alternativo para la investigación debe ser la adquisición de conocimiento tanto émico como ético en etnomodelación.

El conocimiento émico es una valiosa fuente de inspiración para la hipótesis ética y viceversa. El conocimiento ético es esencial para la comparación intercultural, el componente esencial de la etnología. Debido a que es una construcción social vinculada culturalmente, y una parte esencial de la etnomatemática; la etnomodelación se define como el estudio de los fenómenos matemáticos dentro de una cultura.

Sin olvidar que éstos están permeados o que están íntimamente relacionados con la cosmovisión de los pueblos. Así mismo, hacer un llamado a los programas de los diferentes grados académicos que incorporen a sus programas la reflexión sobre la etnomatemáticas. Por otra parte, se hace necesario que los investigadores acompañen de manera más cercana y comprometida a los docentes en este proceso de recuperación y conservación del patrimonio matemático autóctono de las comunidades locales.

En nuestro punto de vista, el programa etnomatemáticas no puede preocuparse solamente con la vertiente antropológica y etnográfica de la descripción de diferentes pensamientos matemáticos, pues este programa también debe asumir una perspectiva dirigida a los aspectos pedagógicos del currículo escolar. Así, la etnomodelación debe proporcionar a los estudiantes una acción pedagógica que conecte las prácticas matemáticas locales a los conocimientos de la matemática académica.

Es importante que los individuos desarrollen sus propias prácticas matemáticas, sin embargo, es fundamental que también tengan una comprensión de la institución socio-pedagógica de la matemática académica por medio de acciones pedagógicas curriculares que fomenten la conexión de las prácticas matemáticas presentes en la comunidad con las prácticas matemáticas enseñadas en las escuelas, en una reinterpretación del currículo matemático escolar.

En eso contexto, según D'Ambrosio (2000), los individuos, esperan, en esta fase de la evolución de nuestra especie, que toda la arrogancia, envidia y gran poder ceda lugar al respeto por los diversos pueblos, que, en solidaridad, contribuirán a la preservación del patrimonio común.

Referencias bibliográficas

Babbitt, L., Lyles, D., y Eglash, R. (2011). From ethnomathematics and ethnocomputing: indigenous algorithms in traditional context & contemporary simulation. In: Mukhopadhyay, S., y Roth, W. M. (Eds.). *Alternative forms of knowing (in) mathematics: celebrations of diversity of mathematical practices* (pp. 215-219). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Bassanezi, R. C. (2002). *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*. São Paulo, SP: Editora Contexto.

Cortes, D. P. O. (2017). *Re-significando os conceitos de função: um estudo misto para entender as contribuições da abordagem dialógica da etnomodelagem*. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática). Instituto de Ciências Exatas e Biológicas - ICEB. Departamento de Educação Matemática - DEEMA. Ouro Preto, MG: UFOP. 2017.

D'Ambrosio, U. (1990). *Etnomatemática*: arte ou técnica de explicar e conhecer. São Paulo, SP: Editora Ática.

D'Ambrosio, U. (2000). Etnomatemática e modelagem. *Anais do Primeiro Congresso Nacional de Etnomatemática – CBEm1* (pp. 142-143). São Paulo, SP: FEUSP.

Eglash, R. (2002). *African fractals*: modern computing and indigenous design. New Brunswick, NJ: Rutgers University Press.

Eglash, R. (2006). Culturally situated designed tools: ethnocomputing from field site to classroom. *American Anthropologist*, *108*(2), 347-362.

Gerdes, P. (1993). *Geometria Sona, reflexões sobre uma tradição de desenhos em povos, cultura, matemática, educação*. Maputo, Moçambique: Instituto Superior Pedagógico.

Knijnik, G. (1993). O saber popular e o saber acadêmico na luta pela terra. *A Educação Matemática em Revista*, *1*(1), 28-42.

Lewis, S. T. (2018). *Theorizing teaching practices in mathematical modeling contexts through the examination of teacher scaffolding. Graduate School*. Doctorate Dissertation. Columbus, OH: The Ohio State University.

Monteiro, A. (2004). A etnomatemática em cenários de escolarização: alguns elementos de reflexão. In: G. Knijnik, F. Wanderer, y C. Oliveira (Eds.), *Etnomatemática: currículo e formação de professores* (pp. 432-446). Santa Cruz do Sul, RS: EDUNISC.

Monteiro, A., y Pompeu Jr., G. P. (2003). *A matemática e os temas transversais*. São Paulo, SP: Editora Moderna

Orey, D. C. (2000). The ethnomathematics of Sioux tipi and cone. In Selin, H. (Ed.), *Mathematics across cultures: the history of non-western mathematics* (pp. 239-253). Norwell, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Rios, D. P. (2000). Primero etnogeometría para seguir con etnomatemática. In: Domite, M. C. (Ed.), *Anais do Primeiro Congresso Brasileiro de Etnomatemática – CBEm-1* (pp. 367-375). São Paulo, SP: FE-USP.

Rosa, M. (2010). *A mixed-method study to understand the perceptions of high school leaders about English language Learners (ELLs):* the case of mathematics. College of Education. Tese de Doutorado Educação - Liderança Educacional. Sacramento, CA: California State University - CSUS.

Rosa, M., y Orey, D. C. (2006). Abordagens atuais do programa etnomatemática: delinenando-se um caminho para a ação pedagógica. *BOLEMA*, *19*(26), 19-48.

Rosa, M. y Orey, D. C. (2010). Ethnomodeling as a pedagogical tool for the ethnomathematics program. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *3*(2), p. 14-23.

Rosa, M., y Orey, D. C. (2012). O campo de pesquisa em etnomodelagem: as abordagens êmica, ética e dialética. *Educação e Pesquisa*, *38*(4), 865-879.

Rosa, M., y Orey, D. C. (2017). *Etnomodelagem*: a arte de traduzir práticas matemáticas locais. São Paulo, SP: Editora Livraria da Física.

AVANCES EN LA CARACTERIZACIÓN DEL PENSAMIENTO GEOMÉTRICO A TRAVÉS DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS TRIGONOMÉTRICOS NO RUTINARIOS

ADVANCES IN THE CHARACTERIZATION OF GEOMETRIC THINKING THROUGH NON-ROUTINE TRIGONOMETRIC PROBLEM SOLVING

Margarita Pinzón Cardozo
Universidad Antonio Nariño. (Colombia)
mpinzon32@uan.edu.co

Resumen
Esta investigación se realiza con el fin de contribuir a la caracterización del pensamiento geométrico en estudiantes de grado décimo de la educación media. Partiendo de estudios reportados en la literatura sobre enseñanza y aprendizaje de la trigonometría, autores como Bressoud (2010), Altman y Kidron (2016) y Gomes (2013), evidencian que existe una dicotomía entre la trigonometría triangular y la trigonometría circular, conocimientos insuficientes en geometría y álgebra, la no familiaridad en las construcciones con regla y compás, no permiten una buena comprensión en el momento de aprender trigonometría. Observando las dificultades anteriores se propone elaborar un diseño instruccional, basado en la resolución de problemas, el pensamiento geométrico, el modelo DNR (dualidad, necesidad y razonamiento repetido) y el uso del software dinámico GeoGebra como una herramienta didáctica, que ofrezca experiencias de aprendizaje de los conceptos y teoremas básicos de la trigonometría.

Palabras clave: trigonometría, pensamiento geométrico, resolución de problemas

Abstract
This research aims to contribute to the characterization of tenth grade middle school students' geometric thinking. It is based on studies of the literature about the teaching and learning of trigonometry by authors such as Bressoud (2010), Altman and Kidron (2016), and Gomes (2013), who show that there is a dichotomy between triangular and circular trigonometry; insufficient knowledge of geometry and algebra, and lack of familiarity with constructions via ruler and compass, all of which hinders a good understanding when learning trigonometry. Taking into account the aforementioned difficulties, this work suggests creating an instructional design based on problem solving, geometric thinking, the DNR model (duality, necessity and repeated reasoning), and the use of GeoGebra dynamic software as a didactic tool, that offers learning experiences on trigonometry basic concepts and theorems.

Key words: trigonometry, geometric thinking, problem solving

Introducción

La trigonometría es una rama de la matemática, cuyo nombre se deriva de los términos griegos *trigonos* que significa triángulo y *metron* que significa medida, es decir medida de los triángulos. La trigonometría surgió inicialmente con los trabajos de los babilonios, los egipcios, y los griegos quienes vieron la necesidad de resolver problemas de la astronomía y otras disciplinas, aplicando relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo. Posteriormente se definen las funciones trigonométricas empleadas para resolver problemas en otros campos del conocimiento como la mecánica, electricidad, termodinámica, entre otras.

En Colombia, el estudio de la trigonometría se lleva a cabo en la educación media como lo establecen los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998), los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas (EBCM, 2006), creados por el Ministerio de Educación Nacional (MEN), donde se hace énfasis en los cinco tipos de pensamiento matemático, cuyo estudio es de suma importancia debido a que:

De esta manera, la percepción geométrica se complejiza y ahora las propiedades de los objetos se deben no sólo a sus relaciones con los demás, sino también a sus medidas y a las relaciones entre ellas. El estudio de estas propiedades espaciales que involucran la métrica son las que, en un tercer momento, se convertirán en conocimientos formales de la geometría, en particular, en teoremas de la geometría euclidiana. (p. 61)

En los últimos años, el Ministerio de Educación Nacional (MEN) reafirma la importancia del proceso enseñanza y aprendizaje de la trigonometría en la educación básica secundaría y la media vocacional con la creación e implementación de los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA, 2016) y la Matriz de Referencia (MR, 2016), donde se plantean aspectos fundamentales en el aprendizaje de la trigonometría como: reconocer el significado de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente en un triángulo rectángulo para los ángulos agudos, calcular valores de las razones trigonométricas seno y coseno para ángulos no agudos, auxiliándose de los ángulos de referencia inscritos en el círculo unitario y reconocer algunas aplicaciones de las funciones trigonométricas en la modelación de fenómenos de variación periódica, como: movimiento circular, movimiento del péndulo, movimiento de un pistón, ciclo de la respiración, entre otros.

Por otro lado, en la literatura se encuentran investigaciones en educación matemática, con el propósito de identificar las dificultades que presentan los estudiantes cuando aprenden trigonometría. Bressoud (2010), afirma que “El estudio de la trigonometría adolece de una dicotomía básica que presenta un serio obstáculo para muchos estudiantes” (p. 107), Altman y Kidron (2016) parten de estudios reportados en la literatura, especialmente sobre las dificultades que tienen los estudiantes al no relacionar la trigonometría triangular y circular, además, observaron que los estudiantes acceden a la universidad sin el conocimiento firme de la trigonometría, especialmente en relación con el círculo trigonométrico. Por otra parte, Gomes (2013), afirma que la no familiaridad de las construcciones geométricas con regla y compás, y conocimientos insuficientes en geometría y álgebra, originan la baja comprensión en el aprendizaje de la trigonometría.

Teniendo en cuenta los referentes teóricos del Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN) y diferentes investigaciones en el campo del proceso y enseñanza de la trigonometría, la presente investigación plantea el siguiente problema de investigación a través de la pregunta: ¿Cómo avanzar en la caracterización del pensamiento geométrico en estudiantes de grado décimo de la educación media a través de la resolución de problemas de trigonometría?

El objetivo general es lograr avances en la caracterización del pensamiento geométrico, manifestado por los estudiantes en el grado décimo de la educación media al resolver problemas de trigonometría, basado en dos aspectos:

Elaborar un diseño instruccional, basado en la resolución de problemas, que ofrezca experiencias de aprendizaje de los conceptos fundamentales de la trigonometría.

Describir los procesos que siguen los estudiantes cuando resuelven problemas de trigonometría, en el marco del diseño instruccional presentado.

Marco teórico
A continuación, se precisa los referentes teóricos que son parte fundamental en el desarrollo de la investigación.

Resolución de problemas

Durante muchos años la resolución de problemas ha sido un tema abordado por diferentes investigadores en el campo de la educación matemática. A continuación, se presenta brevemente los aportes de algunos autores.

Polya (1954), plantea que resolver problemas es una cuestión de habilidad práctica, como por ejemplo el nadar. La habilidad se adquiere mediante la imitación y la práctica. Al tratar de resolver problemas hay que observar, imitar lo que hacen otras personas en casos semejantes y así aprender a resolver problemas.

Falk (1980), señala que para que un problema sea motivante para el estudiante debe tener tres características "…que sea una situación que estimula el pensamiento, que sea interesante para el estudiante, y que la solución no sea inmediata" (p.16)
Santaló (1981), señala que "enseñar matemáticas debe ser equivalente a enseñar a resolver problemas. Estudiar matemáticas debe ser lo mismo que pensar en la solución de algún problema"

Schroeder y Lester (1989, pp. 32-33) escribieron sobre el desarrollo de la comprensión matemática a través de la resolución de problemas desde tres enfoques distintos que son:

- Enseñanza sobre la resolución de problemas.
- Enseñanza para la resolución de problemas.
- Enseñanza a través de la resolución de problemas.

Cuando un estudiante aborda un problema, sin que se le dé a conocer los conceptos matemáticos que puede emplear en la resolución del problema, requerirá poner en juego todas sus habilidades y conocimientos, tener confianza en sí mismo, conocer los alcances y limitaciones de sus estrategias y valorar la necesidad de aprender nuevos conceptos.

Los estudiantes de hoy van a vivir en un mundo donde se van a enfrentar a situaciones cada vez más complejas. Por lo tanto, la resolución de problemas debe ser uno de los instrumentos principales en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, puesto que permite el desarrollo de habilidades intelectuales en los estudiantes cuando se enfrentan a situaciones complejas. De acuerdo con lo anterior, la resolución de problemas debe plantearse como uno de los objetivos para la educación en este milenio.

Pensamiento matemático

Falk (1994) propone un modelo, a partir de ideas de Leone Burton, que se describe en cuatro procesos del pensamiento matemático que considera centrales: especializar, conjeturar, generalizar y convencer, y los describe de la siguiente manera.

Especializar: cuando se está frente a un problema o pregunta, una forma valiosa de explorar su significado es examinando modelos particulares. Esta es la clave desde una mirada inductiva en el aprendizaje y se observa de manera natural en los niños.

Conjeturar: Cuando se examinan suficientes modelos o ejemplos, automáticamente se hacen conjeturas acerca de las relaciones que los conectan, a través de este proceso se explora y se ratifica un patrón subyacente.

Generalizar: Cuando se reconoce una regularidad o un patrón subyacente, desencadena en la afirmación de una generalización. Estas afirmaciones, son los elementos usados por los aprendices para dar orden y significado entre una cantidad abrumadora de información, el comportamiento depende de dichas generalizaciones.

Convencer: Para llegar a una generalización sólida, no es suficiente con verificar, es cuestionar hipótesis o supuestos, dudar y sondear la generalización, para llegar a producir una demostración.

Drijvers, P. et al (2019), señalan que la resolución de problemas, el modelado y la abstracción, se convierten en elementos importantes para el desarrollo del pensamiento matemático. A su vez, de manera análoga y con acompañamiento del docente permite el redireccionamiento a través de trayectoria de aprendizaje prevista por el docente para consolidar nuevas y mejores estructuras del pensamiento matemático del estudiante.

Finalmente, en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas de Colombia (2006), señalan que los problemas tomados de textos escolares, suelen ser solo ejercicios de rutina, pero plantear y analizar problemas suficientemente complejos y atractivos, para que los estudiantes formulen y resuelvan, es clave para el desarrollo del pensamiento matemático.

Modelo DNR (Dualidad, necesidad y razonamiento repetido)

La enseñanza basada en el modelo DNR, desarrollada por Guershon Harel (2010) en matemáticas, parte de tres principios: dualidad, necesidad y razonamiento repetido.

El Principio de Dualidad: los estudiantes desarrollan formas de pensar a través de la producción de formas de comprensión y, las formas de comprensión que producen se ven afectadas por las formas de pensar que poseen. Además, lo que los estudiantes saben se constituye en una base para robustecer lo que aprenderán en el futuro.

El principio de necesidad: para que los estudiantes aprendan las matemáticas que pretendemos enseñarles, deben tener una necesidad, donde la "necesidad" aquí referida es la necesidad intelectual.

El principio de razonamiento repetido: Los estudiantes deben practicar para interiorizar las formas deseables de entender y de pensar. Por lo tanto, un solo problema no es suficiente para que los estudiantes interioricen completamente las formas de pensar. El maestro debe proporcionarles a los estudiantes situaciones que requieran la aplicación de una forma de pensar específica y asegurarse de que sus estudiantes interioricen, retengan y organicen el conocimiento.

Las TIC como herramienta didáctica en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas
Real (2013), reflexiona sobre la era de la tecnología que se están viviendo las instituciones educativas. El uso de diferentes recursos tecnológicos por parte de los estudiantes y docentes, pueden llegar a jugar un papel importante en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, si se utilizan correctamente. Las TIC no son el centro del proceso enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Es una herramienta que le permite al docente facilitar el proceso, sin olvidar que son solamente un recurso didáctico.

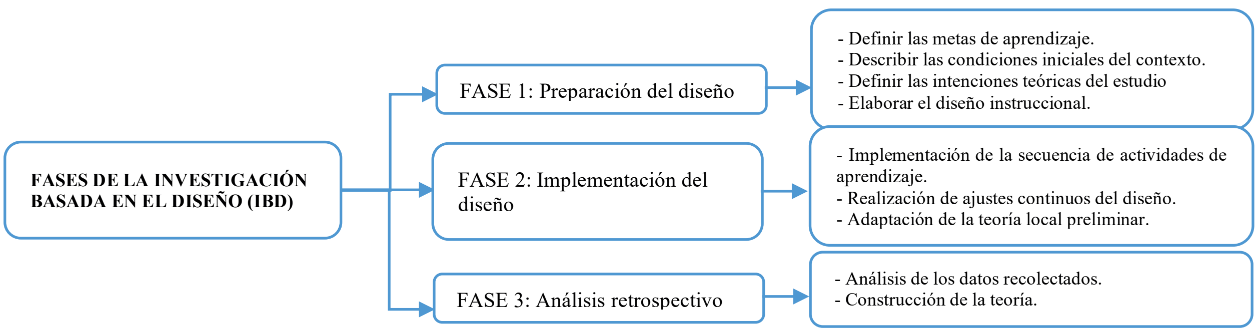
Moreno (2018), afirma que representar una idea matemática, un concepto matemático, es una manera de darle existencia material a dicho concepto, siempre teniendo en cuenta que, un concepto se puede representar de varias formas, como: una gráfica, una tabla, una expresión algebraica, etc. Por lo tanto, tener un sistema de representación como el suministrado por GeoGebra, permite cerrar la grieta entre la intuición y la capacidad deductiva.

Concluyendo, el uso de las herramientas TIC como una herramienta pedagógica y de apoyo en el aula, le permite al estudiante representar, generar conclusiones, comunicar, conjeturar, hacer demostraciones, modelar y resolver problemas, favoreciendo el aprendizaje de la trigonometría en el estudiante.
Metodología

Esta investigación se desarrolla a través de la metodología de investigación basada en el diseño (IBD). Bell (como citó Gibelli, 2014) afirma que este tipo de metodología IBD se centra en el diseño y exploración de todo tipo de innovaciones educativas, a nivel didáctico y organizativo, considerando también posibles herramientas digitales tales como los softwares, que contribuyen a la innovación y consecuentemente al mejoramiento de la comprensión de la naturaleza y condiciones del aprendizaje.

El siguiente esquema muestra un resumen de las tres fases con los subprocesos de la metodología IBD. (Figura 1).

Figura 1. *Fases de la Investigación Basada en el Diseño (IBD).*



Fuente: Elaboración propia con base en el trabajo de Gravemeijer y Prediger, (2016).

Condiciones iniciales del contexto: la propuesta está dirigida a un grupo de 10 estudiantes de grado décimo que oscilan en edades entre 14-15 años del Instituto Técnico Nueva Familia del municipio de Duitama-Colombia. Antes de implementar la intervención, se determina la situación del grupo en cuanto a conceptos fundamentales de la geometría a través de una prueba de entrada que consta de ocho problemas. Se obtuvieron los siguientes resultados:

La mayoría de los estudiantes resolvieron los problemas propuestos por impresión visual o por intuición. Cabe resaltar, que las gráficas son el medio principal que utilizan los estudiantes para resolver los problemas de geometría y con frecuencia usan términos como en la gráfica se observa que son: “iguales”, “es el doble de”, “equivale a la suma de”.

Uso de lenguaje y notación inapropiados para realizar conjeturas o para explicar la solución de los problemas.

Dificultad para aplicar las expresiones algebraicas y sus operaciones básicas, que son necesarias en la resolución de problemas de tipo geométrico.

La mayoría de los estudiantes no reconocen qué conceptos de la geometría deben usar cuando resuelven problemas no rutinarios, como son: Generalidades de los ángulos, ángulos en el triángulo, desigualdad triangular, teorema de Thales, criterios de semejanza entre dos triángulos y teorema de Pitágoras, entre otros.

Diseño instruccional: para la elaboración del diseño instruccional y la estructura de las actividades se propone una adaptación al modelo DNR, en cuanto al orden de los principios que propone Harel (2008).

Los tres principios del modelo adaptado es NDR, se estructuran mediante tres momentos: la motivación, la intervención del docente y la interiorización del conocimiento a través de repetición. El siguiente esquema muestra un resumen del diseño instruccional. (Figura 2)

Para Bressoud (2010), existe la tradición donde primero se enseña la trigonometría triangular de una forma simple y básica antes de profundizar en la trigonometría circular. Históricamente, se evidencia que este proceso se desarrolló en dirección opuesta, además se presentan varias dificultades que presentan cuando abordan las dos trigonometrías desde dos enfoques distintos. Por esto se tomó la decisión de diseñar una secuencia de actividades partiendo de la geometría, trigonometría del círculo y trigonometría del triángulo donde se evidencie la integración de las dos trigonometrías.

Figura 2. *Principios fundamentales del Modelo NDR.*

Fuente: Elaboración propia con base en el trabajo de Harel (2008).

Ejemplos, análisis y resultados

A continuación, se presentarán el análisis de los resultados de la aplicación de segunda actividad a través del diseño instruccional presentando, teniendo en cuenta que la primera actividad que se propuso fue sobre conocimientos fundamentales de geometría.

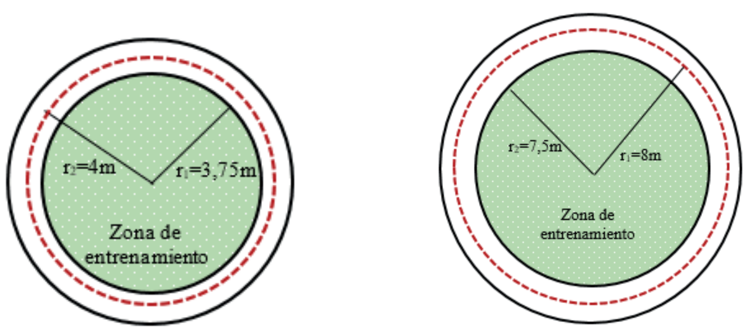
Actividad No. 2 de trigonometría
Tema: Medición de ángulos, arcos, cuerdas y circunferencia unitaria.
Título: “Siguiendo a los griegos”
Objetivo del profesor: Caracterizar el pensamiento de los estudiantes cuando resuelven problemas aplicando temática: medición de ángulos, medición de arcos, longitud de cuerdas con ángulos notables y circunferencia unitaria.
Momento 1. Motivación: Se le proponen cuatro problemas a los estudiantes dentro de un contexto real, con el propósito de despertar el interés, la voluntad y el deseo de aprender algo nuevo. No se les informa los temas que van a aprender, para que ellos los resuelvan de manera autónoma.

El docente analiza los resultados obtenidos para identificar los recursos con los que cuentan los estudiantes y las temáticas que deben aprender para realizar su intervención.
Análisis de los resultados del momento motivacional
Para el análisis de los resultados obtenidos de las actividades en las fases motivacional y razonamiento repetido, se proponen cuatro componentes que permiten avanzar en la caracterización del pensamiento geométrico.

Primer componente: Creación de códigos
Para la construcción de los códigos se tiene en cuenta el número del problema y las definiciones o teoremas que debe contar el estudiante para resolverlo. (Ej. P1T1: Problema 1 y temática 1).
P1T1: Perímetro del círculo
P1T2: Área del círculo
P2T1: Aplicación del Teorema de Pitágoras
P2T2: Área sombreada entre la circunferencia y un cuadrado inscrito.
P3T1: Ángulos entre rectas perpendiculares y ángulos complementarios.
P3T2: Ángulos opuestos por el vértice.
P4T1: Ángulos sobre una recta forman dos ángulos rectos.
P4T2: Planteamiento y solución de ecuaciones lineales.

Segundo componente: Análisis de las soluciones propuestas por los estudiantes
Para ejemplificar el análisis se presentará el esbozo de los resultados obtenidos en dos de los cuatro problemas propuestos.
Problema 1. La gráfica representa dos pistas circulares de atletismo para entrenamiento de niños y jóvenes. (Figura 3)

Figura 3. *Pistas de entrenamiento de atletismo para niños y jóvenes.*

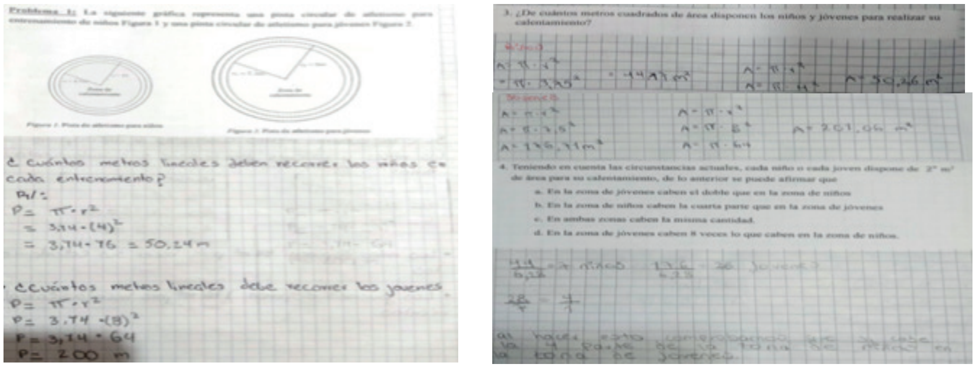


Elaboración de la autora.

1. La línea punteada de color rojo representa el recorrido de los atletas en cada entrenamiento. Si los niños y jóvenes deben realizar 10 vueltas en su respetiva pista de entrenamiento.
¿Cuántos metros lineales deben recorrer cada niño en cada entrenamiento?
¿Cuántos metros lineales debe recorrer cada joven en cada entrenamiento?
¿De cuántos metros cuadrados de área disponen los niños y jóvenes para realizar su calentamiento?

Análisis de la solución del problema 1: El 40% los estudiantes confunden el algoritmo de perímetro del círculo con el algoritmo del área del círculo, la resolución que proponen es incorrecta, además este error no les permite establecer una relación de proporcionalidad correcta entre el perímetro y el radio del círculo. El 80% los estudiantes conocen el algoritmo del área del círculo, lo aplican de forma correcta en la resolución del problema, establecen una relación de proporcionalidad entre el área y el radio del círculo y lo explican con detalle. (Figura 4)

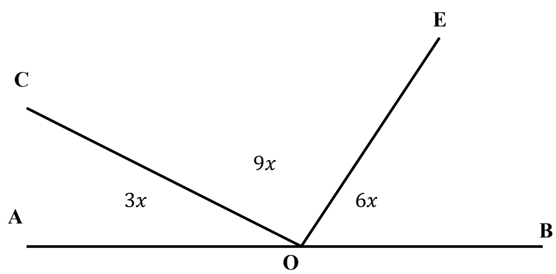
Figura 4. *Soluciones propuestas por dos estudiantes al problema 1.*



Elaboración de la autora.

Problema 4: Observa la gráfica de la derecha, los ángulos 3x, 9x y 6x están sobre la recta $\overleftrightarrow{AB}$. (Figura 5) ¿Teniendo en cuenta los datos de la gráfica, se puede afirmar que uno de los tres ángulos es recto? Si la respuesta es afirmativa o negativa, explique por qué. ¿Cuál es la medida de los ángulos $\sphericalangle COA$, $\sphericalangle EOC$ y $\sphericalangle BOE$?

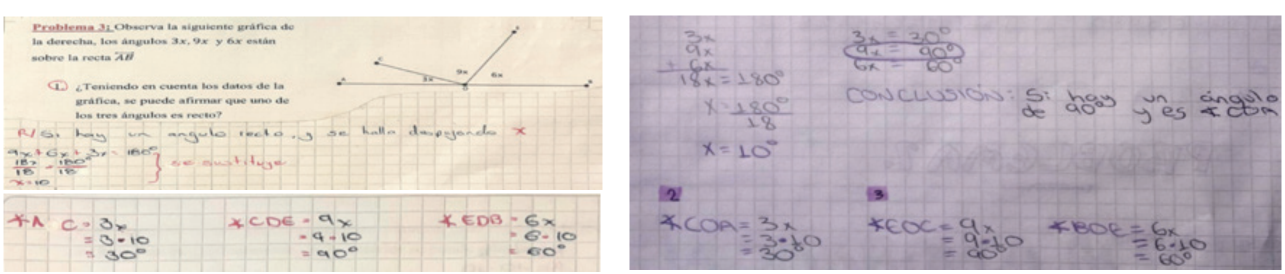
Figura 5. *Ángulos sobre la recta.*



Elaboración de la autora.

Análisis de la solución del problema 4: El 100% de los estudiantes identifican que los ángulos que están sobre una recta forman dos ángulos rectos, plantean el sistema de ecuaciones y explican con detalle la resolución del problema, hay similitud en los procesos que siguen los estudiantes. (Figura 6).

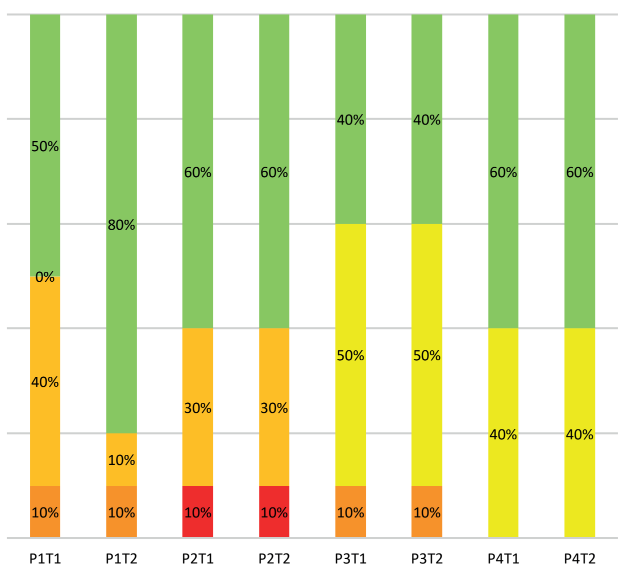
Figura 6. *Soluciones propuestas por dos estudiantes al problema 2.*



Elaboración de la autora.

Tercer Componente: Ubicación del grupo de estudiantes en niveles de desempeño
Después de analizar las soluciones propuestas por los estudiantes en el componente dos, se proponen cinco (5) niveles de desempeño, cada nivel se identifica con un color y con indicadores de desempeño. A través de una gráfica y la tabla se muestra los resultados obtenidos por el grupo en el momento uno. (Figura 7)

Figura 7. *Niveles de desempeño grupal en cada uno de los aprendizajes.*



Nivel	Indicadores de desempeño
1	Es estudiante no propone solución a los problemas.
2	La solución que propone es incorrecta porque - Desconoce definiciones y/o algoritmos - Utiliza gráficos o imágenes y por impresión visual resuelve de forma incorrecta.
3	La solución que propone es incorrecta porque - Conoce las definiciones y algoritmos, los aplica de forma incorrecta - Conoce las definiciones y algoritmos, pero los confunde en el momento de aplicarlos. - Utiliza gráficos e imágenes como ayuda visual, pero hace conjeturas de forma incorrecta.
4	La solución que propone es correcta porque - Utiliza gráficos e imágenes como ayuda visual para hacer conjeturas de forma correcta pero no explica la resolución del problema.
5	La solución que propone es correcta porque - Conoce definiciones, teoremas y algoritmos, los aplica de forma correcta en la resolución del problema y explica con detalle la resolución del problema. - Utiliza gráficos e imágenes como ayuda visual para hacer conjeturas y explicar con detalle la resolución del problema.

Elaboración de la autora.

Cuarto Componente: Recursos con los que cuentan los estudiantes en la fase motivacional
De acuerdo con los resultados obtenidos en los dos componentes anteriores, se identifican los recursos con los que cuentan los estudiantes y los recursos en los que presentaron dificultades o no cuentan los estudiantes. (Tabla 1)

Tabla 1. *Recursos con los que cuenta los estudiantes en la fase motivacional*

Recursos con los que cuentan los estudiantes	Recursos en los que tienen dificultades o no cuentan los estudiantes.
• Área del círculo y relación de proporcionalidad entre el área del círculo y el radio. • Ángulos entre rectas perpendiculares. y ángulos complementarios. • Ángulos opuestos por el vértice. • Ángulos sobre una recta forman un ángulo de 180º. • Planteamiento y solución de ecuaciones lineales con una variable para resolver problemas que involucran ángulos.	• Perímetro del círculo y relación de proporcionalidad entre el perímetro del círculo y el radio. • Aplicación del Teorema de Pitágoras para hallar la longitud de una cuerda de 90º. • Área sombreada entre la circunferencia y un cuadrado inscrito.

Elaboración de la autora.

Momento 3. Interioriza en conocimiento a través de la repetición
En este momento se proponen problemas no rutinarios para que los estudiantes a través de la aplicación de los conocimientos aprendidos en la intervención del docente y en nuevos escenarios puedan fortalecer el pensamiento geométrico, robustecer los conceptos y teoremas de forma autónoma.

Análisis de los resultados del momento de interiorización del conocimiento a través de la repetición
Primer componente: Creación de códigos

P1T1: Ángulos en grados, radianes y vueltas, conversiones.
P1T2: Cálculo de arcos.
P2T1: Longitud de cuerdas y arcos para un ángulo de 60º.
P2T2: Construcción de arcos y cuerdas en GeoGebra para comparar resultados.
P3T1: Longitud de cuerdas y arcos para un ángulo de 30º.
P3T2: Construcción de arcos y cuerdas en GeoGebra para comparar resultados.
P4T1: Coordenadas de puntos sobre la circunferencia unitaria para ángulos con múltiplos de 30º.
P4T2: Conversión de ángulos de grados a radianes.
P4T3: Ubicación de puntos sobre la circunferencia unitaria en GeoGebra para comparar resultados.
P5T1: Para todo punto (x, y) que pertenece a la circunferencia unitaria se cumple que

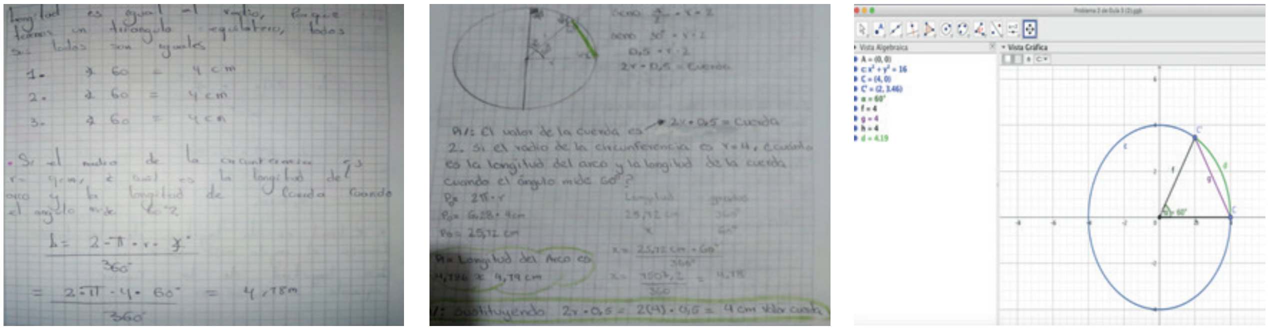
$$x^2 + y^2 = 1 \ \text{ o } \sqrt{x^2 + y^2} = 1$$

P6T1: Aplicación del Teorema de Pitágoras para hallar la longitud de una cuerda a partir del diámetro o radio.
Segundo componente: Análisis de las soluciones propuestas por los estudiantes
Para ejemplificar el análisis se presentará el esbozo de los resultados obtenidos en dos de los seis problemas propuestos.

Problema 2. Si el radio de una circunferencia es r, responde:
¿Cuál es la longitud de la cuerda en función de r cuando el ángulo mide 60º?
Si el radio de la circunferencia es $\mathrm{r} = 4\mathrm{cm}$, ¿cuál es la longitud del arco y la longitud de cuerda cuando el ángulo mide 60º?
Realizar la gráfica en GeoGebra la circunferencia con un $\mathrm{r} = 4\mathrm{cm}$, el arco y la cuerda para un ángulo de 60º. Compara las respuestas obtenidas del problema con los obtenidos en GeoGebra.
Análisis de la solución del problema 2: El 80% los estudiantes resolvieron de forma correcta el problema, se observaron dos procesos para hallar la longitud de la cuerda:

1) Construyeron una circunferencia con dos radios y la cuerda para el ángulo de 60º, y dedujeron que la longitud es igual al radio de la circunferencia.
2) Aplicaron el algoritmo $2r \cdot sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, compararon el resultado con GeoGegra y como obtuvieron el mismo resultado, dedujeron que se podía aplicar. En la entrevista con el docente se les preguntó qué si entendían el algoritmo, comentaron que no sabían que representaba el seno pero que entendieron como sustituir en el algoritmo para resolver el problema. El 20% de los estudiantes lo resolvieron de forma incorrecta, se observa que conocen las definiciones de cuerda y arco, pero en el momento de resolver el problema las intercambiaron. (Figura 8)

Figura 8. *Soluciones propuestas por dos estudiantes al problema 2, gráfica de un estudiante en GeoGebra.*



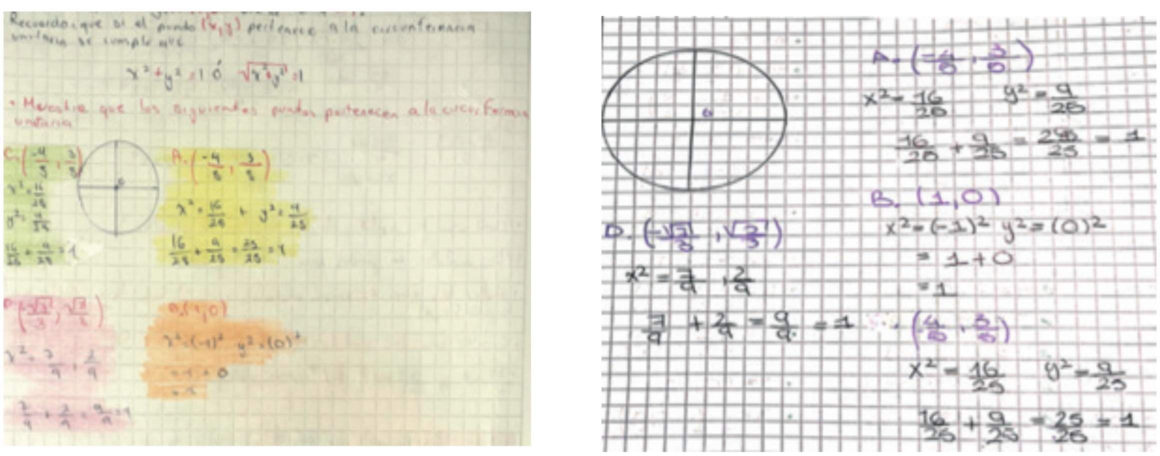
Elaboración de la autora

Problema 5: Sobre una circunferencia unitaria, se ubican cuatro puntos A, B, C y D.
Muestre si los puntos pertenecen a la circunferencia unitaria.

A$\left(-\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$ B (-1,0) C$\left(-\frac{\sqrt{7}}{3},\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$ D$\left(\frac{\sqrt{5}}{5},-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$

Análisis de la solución del problema 5: El 100% los estudiantes resolvieron de forma correcta el problema, se observó en las soluciones presentadas que comprenden que si un punto (x, y) pertenece a la circunferencia unitaria de cumple que que si el punto (x, y) pertenece a la circunferencia unitaria se cumple que $x^2 + y^2 = 1$ o $\sqrt{x^2 + y^2} = 1$. (Figura 9)

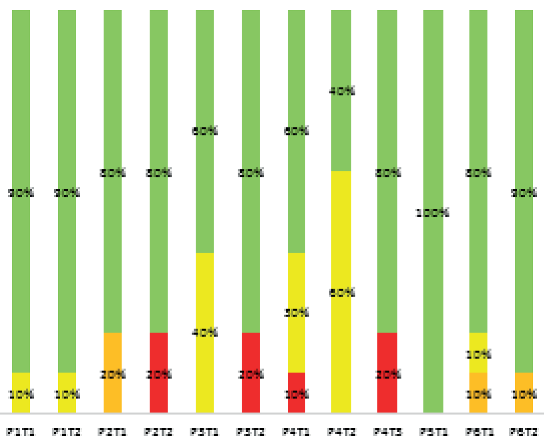
Figura 9. *Soluciones propuestas por dos estudiantes al problema 5.*



Elaboración de la autora.

Tercer Componente: Ubicación del grupo de estudiantes en niveles de desempeño al finalizar la actividad (Figura 10)

Figura 10. *Niveles de desempeño grupal en cada uno de los aprendizajes.*



Nivel	Indicadores de desempeño
1	Es estudiante no propone solución a los problemas.
2	La solución que propone es incorrecta porque - Desconoce definiciones y/o algoritmos - Utiliza gráficos o imágenes y por impresión visual resuelve de forma incorrecta.
3	La solución que propone es incorrecta porque - Conoce las definiciones y algoritmos, los aplica de forma incorrecta - Conoce las definiciones y algoritmos, pero los confunde en el momento de aplicarlos. - Utiliza gráficos e imágenes como ayuda visual pero hace conjeturas de forma incorrecta.
4	La solución que propone es correcta porque - Utiliza gráficos e imágenes como ayuda visual para hacer conjeturas de forma correcta pero no explica la resolución del problema.
5	La solución que propone es correcta porque - Conoce definiciones, teoremas y algoritmos, los aplica de forma correcta en la resolución del problema y explica con detalle la resolución del problema. - Utiliza gráficos e imágenes como ayuda visual para hacer conjeturas y explicar con detalle la resolución del problema.

Elaboración de la autora.

Cuarto Componente: Recursos con los que cuentan los estudiantes al finalizar la actividad y en los que presentan dificultades al finalizar la actividad. (Tabla 2)

Tabla 2. *Recursos con los que cuenta los estudiantes al finalizar la actividad.*

Recursos con los que cuentan los estudiantes	Recursos en los que tienen dificultades o no cuentan los estudiantes.
• Medición de ángulos en el sistema sexagesimal, cíclico y conversiones. • Longitud de arcos. • Longitud de cuerdas con ángulos de 30º, 45º, 60º y 90º. • Circunferencia unitaria. • Cálculo de coordenadas para los puntos sobre la circunferencia unitaria con ángulos notables (0º, 30, 35º, 60º, 90º y múltiplos en los cuatro cuadrantes). • Aplicación del teorema de Pitágoras para hallar longitudes de cuerdas a partir del diámetro o radio. • Construcciones en el software GeoGebra de: ángulos en posición estándar, circunferencias unitarias, puntos sobre la circunferencia unitaria, cuerdas y arcos entre otros.	• Longitud de arcos y cuerdas. • Construcciones en el software GeoGebra de: ángulos en posición estándar, circunferencias unitarias, puntos sobre la circunferencia unitaria, cuerdas y arcos entre otros. Área sombreada entre la circunferencia y un cuadrado inscrito.

Elaboración de la autora.

Conclusiones

Para la preparación del diseño, se propone conocer las condiciones iniciales del grupo a través de una prueba de entrada sobre conceptos fundamentales de geometría. De acuerdo con los resultados encontrados, se observó que el grupo de estudiantes presenta conocimientos insuficientes en geometría, ratificando de esta forma lo que afirma Gomes (2013). Por lo anterior se toma la decisión de diseñar la primera actividad sobre el sobre conceptos fundamentales de geometría.

La aplicación de las actividades a través del diseño instruccional presentado les ha permitido a los estudiantes en el *momento uno* identificar los conocimientos que poseen y si los están aplicando de forma correcta en la resolución de problemas, para despertar el interés y la necesidad por aprender cosas nuevas. En el *momento dos,* los estudiantes de forma activa y el docente como mediador del conocimiento plantea aprender cosas nuevas sobre la trigonometría del círculo y del triángulo a través de la resolución de problemas, y por medio de las construcciones en GeoGebra han podido visualizar, comparar resultados, realizar conjeturas y verificar la solución obtenida en los problemas. En el *momento tres,* cuando los estudiantes hacen uso del principio de razonamiento repetido, resuelven problemas no rutinarios aplicando los conocimientos aprendidos en nuevos escenarios y de forma autónoma, le permiten fortalecen el pensamiento geométrico e interiorizan los conocimientos adquiridos, corroborando la teoría de Harel (2010).

Por otro lado, los estudiantes manifiestan que este proceso de enseñanza y aprendizaje les ha permitido salir del confort, al aplicar los conocimientos en diferentes escenarios y proponer diferentes estrategias de solución. Además, informan que interactuar con el software GeoGebra, les dio la oportunidad hacer construcciones geométricas reales, comparar resultados, hacer conjeturas y los motiva a aprender geometría y trigonometría.

Referencias bibliográficas

Altman, R. & Kidron, I. (2016). Constructing knowledge about the trigonometric functions and their geometric meaning on the unit circle. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 47*(07), 1048-1060.

Bressoud, D. (2010). Historical Reflections on Teaching Trigonometry. *The Mathematics Teacher, 104*(2), 106-112.

Drijvers, P., Kodde-Buitenhuis, H. & Doorman, M. (2019). Assessing mathematical thinking as part of curriculum reform in the Netherlands. *Educational Studies in Mathematics*. 102, 435-456.

Falk de Losada, M. (1980). *La enseñanza a través de problemas.* Bogotá, Colombia: Universidad Antonio Nariño.

Falk de Losada, M. (1994) Enseñanzas acerca de la naturaleza y el desarrollo del pensamiento matemático extraídas de la historia del álgebra. *Boletín de Matemáticas*; 1(1), 39-59.

Gravemeijer, K. & Prediger, S. (2016). Topic-Specific Design Research: An Introduction. Kaiser, G. & Presmeg,. *Compendium for Early Career Researcher in Mathematics Education.* 33-57. Hamburgo, Alemania: ICME-13.

Gomes, S. (2013). Teaching trigonometry using an historical approach: an educational product. *Bolema, Boletim de Edecação Matemática,27*(46), 563-577.

Harel, G. (2010) DNR-Based Instruction in Mathematics as a Conceptual Framework. In: Sriraman B., English L. (eds). *Theories of Mathematics Education*. Advances in Mathematics Education. 343-367.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2006). *Estándares Básicos de Competencias.* Bogotá, Colombia: Imprenta Nacional de Colombia.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2016). *Derechos Básicos de Aprendizaje.* Bogotá, Colombia: Panamericana formas e impresos S.A.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2016). *Matrices de referencia.* Bogotá, Colombia: Panamericana formas e impresos S.A.

Moreno, L. (2018). La geometría en el mundo moderno. Revista Praxis, Educación y Pedagogía. 2, 96-123.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas. 215 pp.

Real, M. (2013*). Las TIC en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. Jornadas de Innovación docente. Facultad de Matemáticas. Universidad de Sevilla.

Santaló, L.A. (1981), *Enseñanza de la matemática en la escuela media*. Buenos Aires: Docencia.

Schroeder, T. & Lester, F. (1989). Developing Wlderstanding in mathematics via problem solving. In P.R. Trafton (Ed) *New directions for elementary school mathematics*, 1989 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics. pp 31-42. Reston, VA: NCTM.

DIFICULTADES DE ALUMNOS DE TELESECUNDARIA AL OBTENER PROPIEDADES ENTRE PUNTOS ALINEADOS EN EL PLANO EUCLIDIANO

DIFFICULTIES OF TELE-SECUNDARY STUDENTS WHEN OBTAINING PROPERTIES BETWEEN POINTS ALIGNED ON THE EUCLIDIAN PLANE

Vicente Carrión Miranda, Gabriela Legorreta Velázquez
Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav del IPN, (México)
vcarrion@cinvestav.mx, gabriela.legorreta@cinvestav.mm

Resumen
Se investigan los desempeños y producciones de un grupo de alumnos de primer grado de telesecundaria, basados en actividades que muestran la forma en que abordan algunos conceptos geométricos para encontrar propiedades surgidas de la semejanza de triángulos para obtener propiedades de colinealidad de puntos del plano. Se indagan causas que originan que los alumnos cometan algunos errores al realizar actividades matemáticas sobre la colinealidad de puntos utilizando los conceptos de semejanza y proporcionalidad. Del análisis de las respuestas de las preguntas se obtuvieron conclusiones sobre dificultades, errores y aciertos relacionados con aspectos cognitivos relevantes de la investigación.

Palabras clave: semejanza de triángulos, proporcionalidad, colinealidad de puntos

Abstract
The performances and productions of a group of tele-secondary first-year students are researched based on activities that show how they approach some geometric concepts to find properties arising from the similarity of triangles in order to obtain collinearity properties of points in the plane. The causes that lead students to make some mistakes when carrying out mathematical activities on the collinearity of points using the concepts of similarity and proportionality are also researched. From the analysis of the answers to the questions, conclusions were obtained about difficulties, errors and successes related to relevant cognitive aspects of the research.

Key words: similarity of triangles, proportionality, collinearity of points

Introducción

La evolución de las diferentes civilizaciones ha requerido del uso de una variedad de propiedades asociadas al tema de la recta. Múltiples situaciones que diariamente ocurren en actividades sociales y en contenidos tratados en las ciencias se basan en este concepto. Son ejemplos de la física la velocidad, la aceleración, la densidad y la presión; si estos conceptos son constantes. Análogamente, existen conceptos dentro de la misma matemática definidos como cocientes de números reales, o como cocientes de diferencias de números reales. Están estrechamente relacionados con la proporcionalidad directa y con la pendiente de una recta. Lo anterior es razón suficiente para valorar la importancia que tienen la recta y sus propiedades para que, con un tratamiento adecuado, se incluyan en los programas de estudio de secundaria.

El objetivo del trabajo que se expone es indagar la forma en que alumnos de telesecundaria aprenden algunas propiedades que intervienen en la determinación de la colinealidad puntos del plano mediante propiedades de semejanza de triángulos. Se pretende encontrar cómo utilizan conceptos aritméticos y geométricos preliminares para precisar por qué una colección de puntos del plano se encuentra sobre una recta y, recíprocamente, cómo trasladar puntos del plano de manera que estén sobre una recta. También, saber cuáles son las causas inmediatas que originan que los alumnos cometan algunos errores al realizar actividades matemáticas que proponen la intervención de propiedades de la colinealidad de puntos.

Marco Teórico

De manera general, el enfoque teórico del trabajo se fundamenta en la teoría de sistemas semióticos de representación (Duval, 1999), tomando en cuenta aspectos relevantes de su teoría. Una forma de establecer interrelaciones entre objetos matemáticos es con el uso de signos y representaciones ante la imposibilidad de ser accesibles sólo por medios tangibles (Duval, 2006). Sin embargo, el interés no sólo está en indagar la forma en que se interrelacionan objetos matemáticos presentados en diferentes representaciones, sino en los procesos cognitivos participantes en la adquisición del conocimiento matemático por parte de los alumnos cuando realizan actividades previamente diseñadas.

Duval, R. (1999), afirma que en las actividades cognitivas se necesitan utilizar sistemas de expresión y representación diferentes al lenguaje natural, otros sistemas de escritura y notaciones simbólicas para los objetos. Son lenguajes paralelos al lenguaje natural como las escrituras algebraica y lógica, para expresar las relaciones y las operaciones, figuras geométricas, gráficas cartesianas y diagramas.

Las representaciones semióticas presentan carácter intencional, cumplen una función de objetivación y un descubrimiento del mismo sujeto de algo que hasta entonces no presuponía. Así, su carácter intencional es el papel fundamental de la significación en la determinación de los objetos que pueden ser observados por un sujeto. Además, a través de una presente significación se hace una aprehensión perceptiva o conceptual del objeto. Por otro lado, las representaciones son externas porque cumplen funciones de comunicación, adquisición de realidad objetiva y de tratamiento. De este modo, los registros de representación son externos y fomentan la reflexión y existe una intencionalidad previa para que estén presentes. Esto conduce a considerar los dos conceptos: semiosis, aprehensión o producción de una representación semiótica y noesis, actos cognitivos como la aprehensión conceptual de un objeto. Otro aspecto fundamental por señalar es que los distintos registros de representación se diferencian no sólo por la naturaleza de sus significantes sino por el sistema de reglas y por el número de formas en que puede efectuarse la asociación de elementos que intervienen en la formación y utilización de las diferentes formas de representación.

Las actividades cognitivas fundamentales en el empleo de varios registros de expresión para un concepto matemático, inherentes a la semiosis, son las siguientes: *a*) la presencia de una representación identificable, *b*) el tratamiento de los elementos internos de esa representación, o sea, la transformación de la representación dentro del mismo registro y *c*) la conversión de una representación incluida en un registro en otra representación de otro registro en la que se conserva el significado de la representación inicial (Duval, 1999).

¿Por qué utilizar varias representaciones y cuál es el interés de esta diversidad de registros para el funcionamiento del pensamiento humano? La existencia de varios registros posibilita interrelacionar entre los elementos que conforman cada registro y la interacción de sus elementos entre uno y otro. Ese cambio favorece efectuar los tratamientos de una manera consistente. El lenguaje no ofrece las mismas posibilidades de representación que una figura o que un diagrama. Toda representación es cognoscitivamente parcial con referencia a lo que representa y, por lo general, en el establecimiento de relaciones entre elementos equivalentes de dos registros no siempre son representados los mismos aspectos de contenido. La conceptualización implica una coordinación de representaciones. Si el registro de representación es elegido correctamente, otras representaciones de ese registro son suficientes para permitir la comprensión del contenido conceptual representado. Esto parece justificarse por la estructura misma de la representación (Duval, 1999). Por ejemplo, en geometría es necesario combinar el uso de, al menos, dos sistemas de representación, uno para la expresión verbal de propiedades o para la expresión numérica de magnitud y el otro para la visualización. Una figura geométrica siempre asocia representaciones tanto discursivas como visuales.

Es necesario relacionar estrechamente las investigaciones en matemática educativa con la práctica docente. Es un fundamento para establecer relaciones que consoliden una práctica educativa reflexiva en el docente, orientada a tomar decisiones fundamentadas para establecer un proceso dialéctico adecuado entre la práctica y la teoría, involucrando logros surgidos de la investigación en esta disciplina. Los profesores tienen la responsabilidad de crear un entorno que conduzca a desarrollar la comprensión de los conceptos matemáticos y a formular hipótesis a partir de las construcciones conceptuales de los alumnos, teniendo en cuenta las posibles estrategias didácticas para mejorar esas construcciones, Malara (2002).

En México la Secretaría de Educación Pública incluye en el Modelo Educativo para la Educación Obligatoria las siguientes variantes: Secundaria General, Secundaria Técnica y Telesecundaria. La característica esencial de la Telesecundaria, modalidad donde se realiza la investigación, es que un profesor, como mediador, se responsabiliza de todas las asignaturas de un grupo de alumnos de un mismo grado escolar (SEP, 2018). Antes, se utilizaron los modelos de telesecundaria 1993 y 2006 donde se asentaron las bases consideradas en el modelo 2018.

En la investigación se utilizan instrumentos impresos que fundamentados en los contenidos matemáticos concernientes a las propiedades geométricas que subyacen en puntos alineados. Los alumnos desarrollan las actividades utilizando diversas formas de expresión: geométrica y numérica, mediadas por la lengua natural escrita.

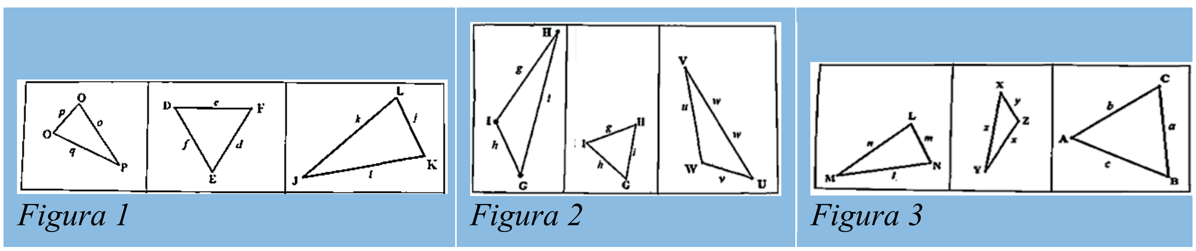
Metodología

Como ha quedado establecido, con la investigación se pretende indagar los procesos cognitivos y las formas en que veinticuatro alumnos de una escuela, modalidad telesecundaria, interrelacionan y emplean algunos de los siguientes conceptos geométricos para determinar propiedades que deben tener colecciones de puntos del plano que se encuentran sobre rectas: paralelismo, perpendicularidad, proporcionalidad y semejanza de triángulos. En otras palabras, la investigación consistió en examinar los desempeños de los alumnos, basados en las realizaciones de actividades que muestran la forma en que encuentran y utilizan propiedades de puntos. Del análisis de las respuestas de los reactivos incluidos en los instrumentos aplicados, de las explicaciones surgidas de la entrevista de un alumno y de las videograbaciones individuales y de grupos pequeños se obtuvieron conclusiones sobre las dificultades, errores y aciertos en las actuaciones de los alumnos, relacionadas con aspectos cognitivos, relevantes para la investigación. Además, se pretende investigar comportamientos de los alumnos sobre los procesos cognitivos que ponen en práctica para establecer correspondencias entre los elementos conceptuales incluidos en las actividades cuando se expresan en las formas verbal, geométrica y aritmética.

En la investigación se utiliza una metodología de carácter cualitativo. Se propusieron varias sesiones de clase en el aula, se aplicó un cuestionario de diagnóstico y otro para identificar los aprendizajes adquiridos después de un proceso de enseñanza. Se realizó una entrevista con un alumno y se hicieron videograbaciones individuales y de grupos pequeños. Las acciones anteriores condujeron a tener la información siguiente: *a*) saber el nivel de conocimientos preliminares individualmente de los alumnos, *b*) conocer la base común de saberes preliminares de los participantes en la indagación para tomarla en cuenta en el diseño de los instrumentos de investigación y *c*) realizar indagaciones sobre los procesos cognitivos y las formas en que aprenden y utilizan algunas propiedades de colecciones de puntos del plano que están sobre rectas, con base en relaciones métricas de ángulos, de segmentos de recta y conceptos geométricos asociados a la proporcionalidad.

Las actividades se basaron en nueve triángulos de diferentes clases trazados en diferentes posiciones, *figuras 1*, *2* y *3*.

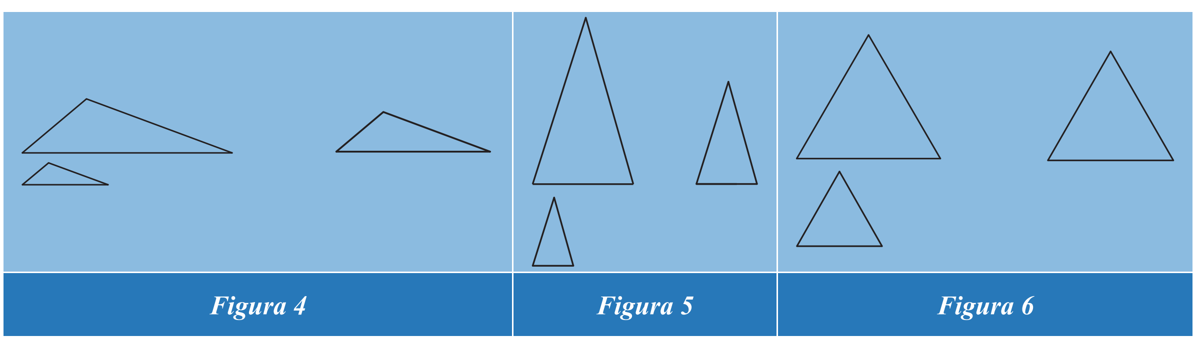
Figura 1, 2 y 3. *Triángulos y posiciones.*



Elaboración de los autores.

Los alumnos obtuvieron tres grupos de tres triángulos; cada grupo se formó con triángulos semejantes. Los clasificaron de acuerdo con la medida de sus lados, tres equiláteros, tres isósceles y tres escalenos. Utilizando regla y compás trazaron otra colección de triángulos congruentes con los que se les propusieron inicialmente. Los ordenaron del más pequeño al de mayor tamaño, de tres en tres, de acuerdo con la semejanza. Colocaron el lado de mayor medida en forma horizontal, la base del triángulo, *figuras 4*, *5* y *6*. Asignaron letras mayúsculas a los vértices y letras minúsculas a los lados, siguiendo el orden positivo: en forma contraria al movimiento de las manecillas de un reloj.

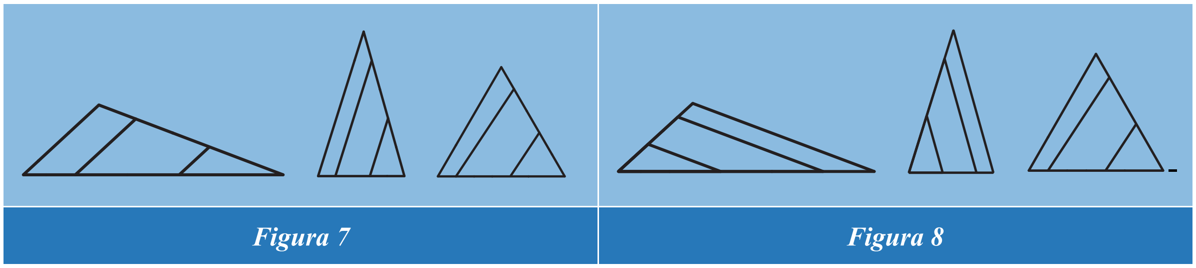
Figura 4, 5 y 6. *Clasificación de Triángulos.*



Elaboración de los autores.

Enseguida, trazaron los triángulos superponiéndolos, coincidiendo uno de sus vértices y los lados que concurren en el vértice común quedan colocados sobre dos rectas que se intersecan en ese mismo vértice. Algunos alumnos recortaron los triángulos, los superpusieron convenientemente y, después, los dibujaron. Tres vértices de cada triángulo, y otros tres por separado, están alineados. Los tres lados correspondientes restantes son paralelos, *figuras 1, 2* y *3*.

Figura 7 y 8. *Líneas paralelas en el triángulo.*



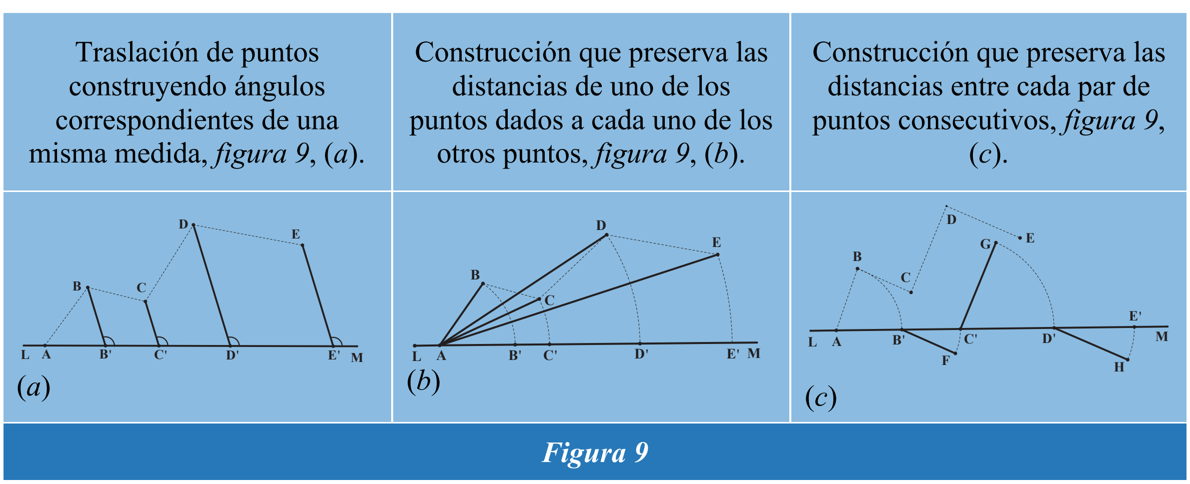
Elaboración de los autores.

Se espera que algunas de las respuestas de los alumnos sobre este tema queden incluidas en la lista de propiedades expuesta enseguida.

a) Se tienen tres parejas de triángulos semejantes.
b) Se determinan seis parejas de rectas paralelas intersecadas por una transversal con todas las propiedades de pares de ángulos inherentes a estas configuraciones.
c) Cada configuración de tres triángulos, en todos los casos, tiene un vértice común.
d) Sobreponiendo los triángulos convenientemente los lados opuestos al vértice común son paralelos.
e) Las dos tercias de lados que se superponen quedan sobre dos rectas que se intersecan el vértice común. Esto significa que las dos ternas posibles de lados concurren en un punto.
f) Los dos extremos de los tres lados superpuestos, en cada caso, se encuentran en una misma recta.

Un aspecto relevante relacionado con la alineación de puntos es establecer formas de llevar a una recta una colección de puntos ubicados en cualquier posición. Al menos uno de los puntos no debe pertenecer a la recta. No todos los puntos pueden pertenecer a la recta propuesta. En los tres casos de la *figura 9* sólo un punto está sobre la recta. Se presentan varias maneras de llevar varios puntos a una recta. Primeramente, hay que precisar las transformaciones y propiedades geométricas que sustentan los cambios de puntos.

Figura 9. *Transformaciones y propiedades de los cambios de puntos.*



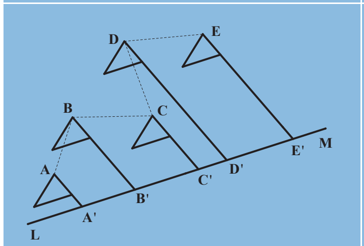
Elaboración de los autores.

Se traza un triángulo cualquiera donde uno de sus vértices es uno de los puntos dados; además, uno de sus lados es paralelo a la recta dada, o está sobre la misma recta.

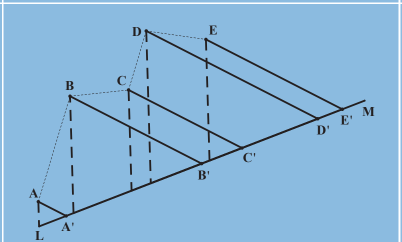
Figura 10. *Transformaciones y propiedades de los cambios de puntos*

.

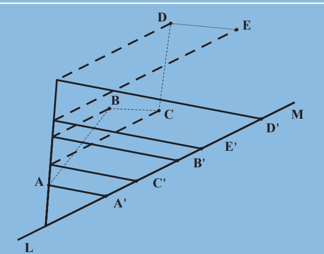
Se traslada este triángulo a cada uno de los puntos y se prolonga uno de los lados paralelos de cada triángulo y las intersecciones con la recta dada son los puntos que corresponden al planteamiento inicial, *figura 10*, (*a*).	Por cada uno de los puntos dados se trazan rectas paralelas a uno de los lados del triángulo base. Las intersecciones de estas paralelas con la recta inicial son los puntos solución de la situación planteada, *figura 10*, (*b*).	Se traza una recta no paralela a la inicial. Por cada punto dado se trazan paralelas a esta recta. Por cada intersección de estas rectas con la primera se trazan paralelas a otro lado del triángulo base. Las intersecciones de las paralelas con la recta inicial son los puntos buscados, *figura 10*, (*c*).



(*a*)



(*b*)



(*c*)

Figura 10

Elaboración de los autores.

Desempeño de los alumnos

Una vez que los alumnos superpusieron los triángulos y midieron cada uno de los lados y encontraron las razones de proporcionalidad. A continuación, se muestra una parte de la entrevista realiza al alumno Daniel, *figura 11*.

Figuras 11 y 12. *Entrevista realizada a Daniel.*

Profesor: ¿Qué figura es?, ¿cómo está formada?, ¿para qué te ha servido?

Daniel: Bueno, pues este es un triángulo escaleno porque nos damos cuenta de que este lado es diferente a éste, no tiene las mismas medidas, todos sus lados son desiguales.

Daniel: Otra es que tenemos tres triángulos sobrepuestos. Aquí encontramos el triángulo… a ver. Está así:

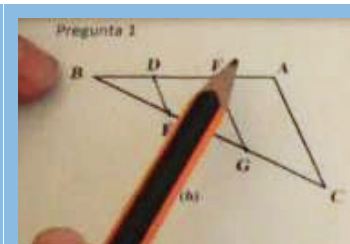


Figura 11

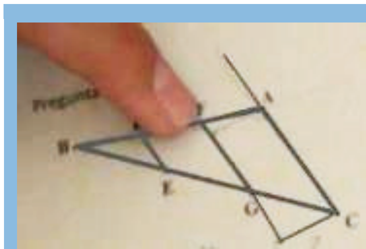


Figura 12

Encontramos el triángulo más pequeño, **BED**, el mediano es **BGF** y el más grande es **BCA** y nos damos cuenta de que estos tres triángulos tienen la misma medida, pero en ángulos: este… éste es correspondiente a éste y a éste. Si tuviéramos una recta así, y así, tenemos ángulos correspondientes en estas tres paralelas de aquí, estas son paralelas. Los puntos están alineados en dos de los lados y los lados correspondientes de los tres triángulos son paralelos.

Fuente: Entrevista a Daniel, fotografías obtenidas por los autores.

Al dibujar los triángulos superpuestos, la mayoría no lo hizo en forma correcta. Algunos no utilizaron instrumentos geométricos. Hicieron a mano los trazos. Esto ocasionó que no pudieran realizar las mediciones en forma precisa y que no contestaran las preguntas como fueron planteadas, a partir de las figuras realizadas por ellos mismos *figuras 13*, *14* y *15*.

Figuras 13, 14 y 15. *Elaboraciones realizadas por los estudiantes respecto a los triángulos.*

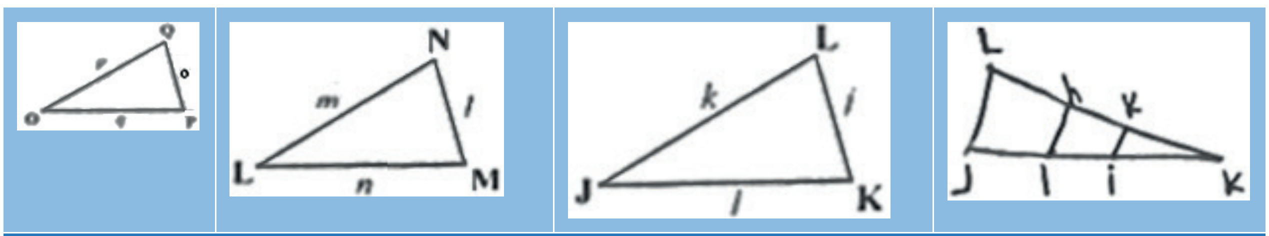


Figura 13

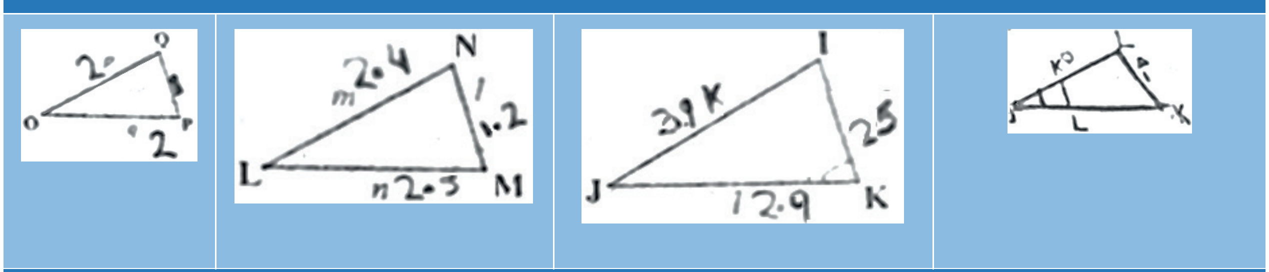


Figura 14

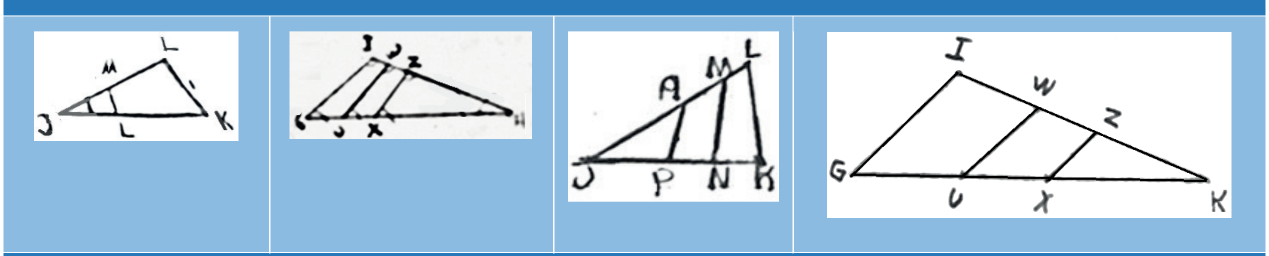
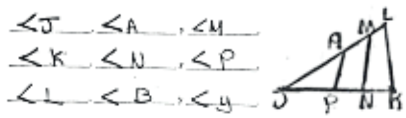


Figura 15

Fuente: Elaboración de los estudiantes.

La mayoría respondió bien al solicitarles que escribieran los ángulos de los triángulos de la *figura 7* que son de una misma medida, ángulos correspondientes; sin embargo, hubo varios casos que no contestaron correctamente. Una causa fue el desconocimiento de las propiedades de las relaciones métricas entre ángulos determinados por dos paralelas intersecadas por una recta transversal o por no trazar los dibujos con precisión, *figura 16*.

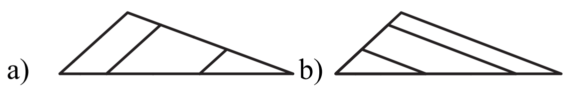
Figura 16. *Representación de los estudiantes.*



Fuente: Elaboración de los estudiantes.

Cuando dibujaron los triángulos superpuestos todos los alumnos eligieron por vértice común el que está frente al ángulo de menor medida. Entonces los lados paralelos son los lados de menor longitud de los triángulos, *figura17*, (*a*). Ninguno utilizó un dibujo como el de la *figura17*, (*b*), donde los lados paralelos de los triángulos son los lados de mayor longitud.

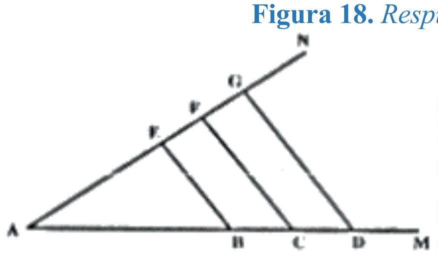
Figura 17. *Representación esperada de los estudiantes*.



Elaboración de los autores.

Una actividad consistió en medir longitudes segmentos de recta incluidos en los diagramas de triángulos superpuestos. Muy pocos respondieron en forma correcta, *figura 18*.

Figura 18. *Respuestas de los estudiantes.*



AD = 5.7 cm.	AC = 4.7 cm.	AB = 3.6 cm.
AG = 9.1 cm.	AF = 3.7 cm.	AE = 2.8 cm.
FG = 0.9 cm.	CD = 1.1 cm.	EF = 0.9 cm.
BC = 1.1 cm.	EG = 1.8 cm.	BD = 2.2 cm.

Elaboración de los autores.

Figura 19. *Elección de unidad de medida de los estudiantes.*

Todos los participantes eligieron al centímetro como unidad de medida. Sólo uno consideró al metro como unidad para expresar las medidas de los lados de los triángulos o para las longitudes de segmentos de recta incluidos en las configuraciones geométricas, *figura 19*.

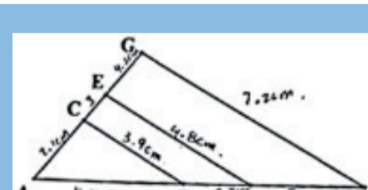
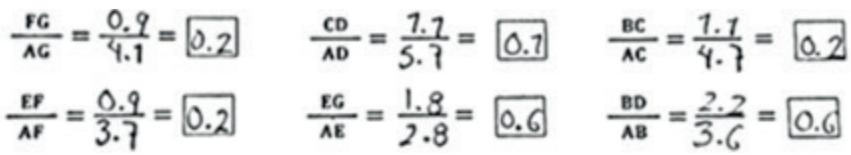


Figura 19

Elaboración de los autores.

Después, encontraron razones para establecer relaciones de proporcionalidad que llevan a explicar la colinealidad de puntos.

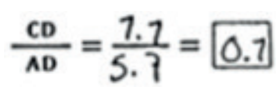
Figura 20. *Respuestas de los estudiantes.*



Elaboración de los autores.

Está presente en todos los alumnos desconocimiento de la aproximación de números decimales, al operarlos y al presentar los resultados Sólo utilizan la aproximación por corte de cifras. Sólo lo hacen para reducir el número de cifras decimales, sin conocer las reglas de aproximación. Desconocen la aproximación por redondeo. Además, utilizan diferentes números de decimales dentro de un mismo proceso de cálculo. La expresión siguiente, que por unos milésimos es 0.2, al hacer el corte en la segunda cifra decimal, aproximan el resultado a 0.1 y esto hace se desestabilice la regularidad que presentan los otros valores encontrados. El cociente 1.1/5.7 es igual a 0.1929824561… y la aproximación más conveniente es, por redondeo, 0.2. El alumno, por corte, eligió 0.1.

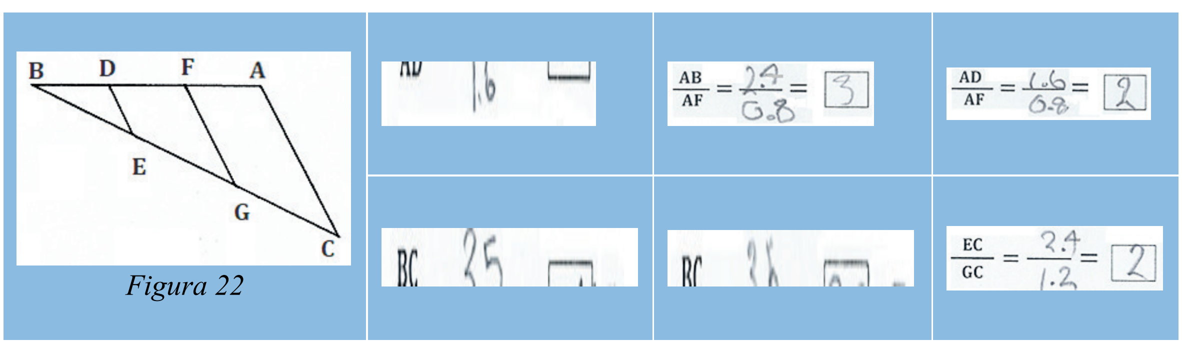
Figura 21. *Respuestas de los estudiantes.*



Elaboración de los autores.

Al obtener las siguientes razones se ve que una alumna calcula cocientes de números decimales y los expresa con números enteros, con decimales finitos y con decimales infinitos. En los resultados numéricos correspondientes a la *figura 22* se observa que utiliza la notación para representar números decimales periódicos, $2.96\overline{6}$.

Figura 22. *Respuestas de los estudiantes*



Elaboración de los autores.

Se les exhortó a que encontraran todas las propiedades y relaciones posibles en las razones numéricas obtenidas. Algunas respuestas son las siguientes. Algunas son respuestas equivocadas, otros, se aproximaron a alguna propiedad expresada en forma correcta. Relacionaron los resultados con la proporcionalidad, el paralelismo de lados de triángulos, medidas de ángulos; sin embargo, muy pocos alumnos relacionaron estos conceptos con la colinealidad de puntos.

Figura 23. *Respuestas de los estudiantes*

¿Qué relaciones encuentras en las razones numéricas que has obtenido?

Qué van siendo proporcionales por que hay una constante de proporcionalidad por que son parecidos algunas razones se aproximan hasta incluso son las mismas razones del mismo resultados.

En el tema se incluyen fracciones, proporcionalidad, angulos, rectas entre paralelos, longitudes, segmentos, lados, correspondientes.

Que unos son constantes de proporcionalidad o unos se acercan a ser proporcionales por los cocientes

Que en las seis razones las cantidades son diferentes pero se aproximan

1.6 BC 25

pues que dan diferente resultado pero tanto como en la primera columna y tanto como en la segunda columna se aproximan los resultados. también que estamos trabajando con paralelas, fracciones y otras y otros elementos más.

en este ejercicio en este tema e visto que si se encuentra paralelismo en los triangulos sobrepuestos tiene proporsionalidad es decir tiene un patron

Elaboración de los autores.

En vista de que en las actividades anteriores los alumnos no explicaron las razones básicas para que un conjunto de puntos esté sobre una recta, explícitamente, se les propusieron dos reactivos adicionales. En el primero se pide que expliquen por qué cuatro puntos que se les proponen no son colineales. En el segundo reactivo se pide que expliquen por qué cuatro puntos dados son colineales. Algunas respuestas son las siguientes.

Figura 24. *Respuestas de los estudiantes.*

Se les pidió escribir las propiedades que encuentren en los triángulos de la *figura 23*.

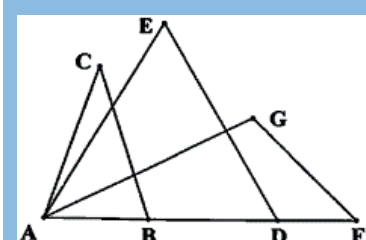


Figura 23

Que tienen en comun el punto A que los puntos A, B, D, F están en una línea recta.

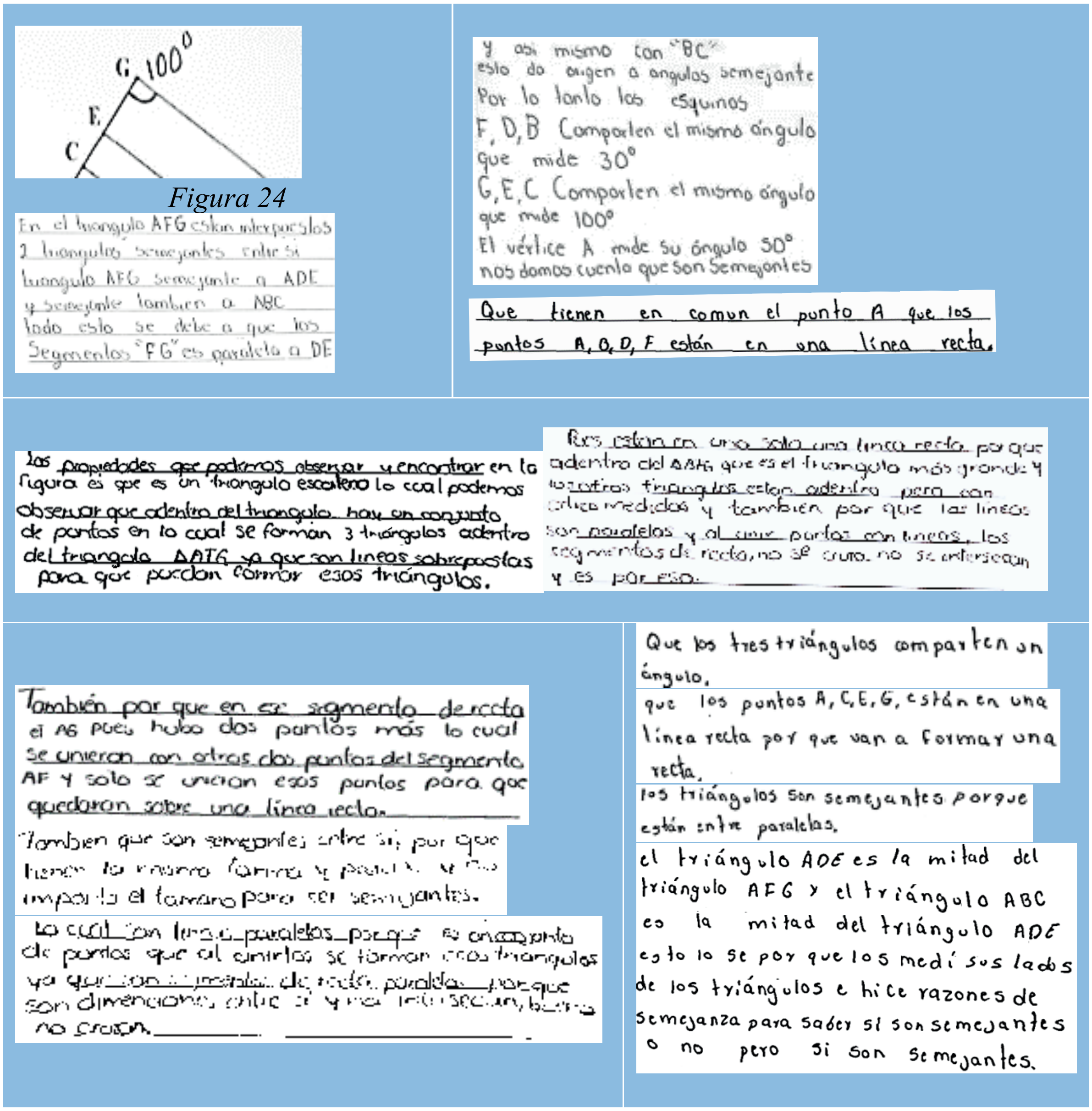
También se les solicita que expliquen por qué los puntos **A**, **C**, **E** y **G** no están en una recta. Una respuesta fue la siguiente:

Por que los triángulos no tienen los mismos ángulos y medidas y no tienen la misma forma por eso los puntos no están alineados

Elaboración de los autores.

Finalmente, con base en la *figura 24* se les propusieron las mismas preguntas de la *figura 23*.

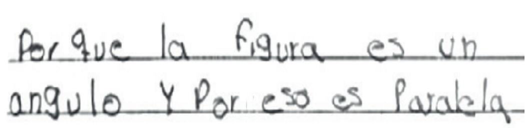
Figura 25. *Respuestas de los estudiantes.*



Elaboración de los autores.

Un respuesta elocuente para explicar el paralelismo de los lados de los triángulos es la siguiente:

Figura 26. *Respuestas de los estudiantes.*



Elaboración de los estudiantes.

Resultados

Ocho participantes tuvieron bajo desempeño en las actividades académicas por sus inasistencias constantes porque no asisten regularmente a clases. El 33.3% de los alumnos contestaron correctamente los contenidos del cuestionario preliminar. El 29.1% dieron respuestas aproximadas basados en propiedades de triángulos. El 37.5% contestó de manera incorrecta, con respuestas ajenas a lo solicitado. Al encontrar las relaciones existentes entre los ángulos formados por dos rectas paralelas intersecadas por una transversal el 33.3% contesta correctamente la mayoría los reactivos propuestos; el 25% los contesta en forma aproximada; y el 41.6% presenta confusión. Al obtener propiedades sobre proporcionalidad entre los lados de cada triángulo, el 41.6% mostró conocimiento correcto del tema, mientras que el 33.3% tuvieron errores aritméticos. En general, un poco más de la mitad de los alumnos encontró que la semejanza de triángulos se relaciona directamente con el paralelismo de los lados y con la igualdad de razones entre las longitudes de los lados. Con relación a las propiedades de colecciones de puntos se observó que todos los estudiantes tienen dificultades para explicar por qué un conjunto de puntos está en una línea recta.

Algunos evadieron las indicaciones, otros, dieron explicaciones triviales utilizan lenguaje verbal sin recurrir a justificaciones dentro de lineamientos geométricos o aritméticos. Los que intentaron mejores acercamientos lo hicieron de manera imprecisa. Todos los participantes presentan dificultades para expresar los conceptos geométricos con orientaciones relacionadas directamente con la asignatura. Finalmente, los pocos alumnos que llevaron puntos del plano dispuestos en diversas posiciones a una recta sólo lo hicieron trasladándolos sin seguir un procedimiento que se justifique geométricamente. Sólo “arrastran” irregularmente los puntos explicando los movimientos con recursos verbales.

Conclusiones

De lo antes expuesto surgen dos reflexiones, una se relaciona con el uso de los conceptos matemáticos que han incorporado los alumnos y, otra, con las formas que tienen para apropiarse de nuevos conceptos, poniendo en juego los conocimientos adquiridos. Estas reflexiones favorecen obtener las siguientes conclusiones.

Partiendo de la importancia del concepto de recta, sus aplicaciones en actividades cotidianas, en ciencia y dentro de la misma matemática, se hace necesario que, desde los niveles escolares básicos, se incorpore convenientemente su estudio.

Toda vez que se estudian los conceptos ligados a propiedades de puntos alineados es necesario que el alumno entienda bien la base de conceptos matemáticos involucrados en proposiciones relativas al tema. Igualmente, se requiere dar la misma atención a los recíprocos de estas proposiciones para saber dónde utilizarlas y cómo hacerlo. Asimismo, conviene, y se necesita, que los alumnos formen estructuras sencillas con los conocimientos matemáticos porque se propicia, por un lado, entender cabalmente las ideas y, por otro, darle un atinado uso a la base de conceptos, al conformar y organizar un cuerpo de conceptos básicos para afrontar y resolver problemas sencillos.

Los resultados de las respuestas de las actividades manifiestan que les hace falta información sobre conceptos preliminares. Existe heterogeneidad en la interpretación de los conceptos matemáticos.

En pocos alumnos no se observó la comunicación esperada porque es difícil la interrelación con sus compañeros en trabajo colaborativo: En la mayoría se logró uniformar un poco la interpretación de los conceptos. Esto se debió al intercambio de ideas por trabajar colaborativamente en grupos pequeños.

Con relación a las causas que dan origen a los errores cometidos por los alumnos al establecer y emplear propiedades de colinealidad de puntos, a partir de triángulos semejantes, utilizando la proporcionalidad, se observó que hace falta interpretar correctamente el teorema de Tales y su recíproco y las proposiciones sobre ángulos incluidos en dos paralelas intersecadas por una transversal. Lo anterior conduce a no poder usar estos conceptos para explicar por qué un conjunto de puntos está en una recta o cómo utilizarlos para llevar puntos del plano a una recta.

Referencias

Duval, R. (1999). Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos de aprendizajes intelectuales. Cali, Colombia: Universidad del Valle.

Duval, R. (2006) Un tema crucial en la educación matemática. La habilidad para cambiar el registro de representación Duval, R. (2006) Localización: Gaceta de la Real Sociedad Matemática española, ISSN 1138-8927, Vol. 9, Nº 1, 2006, págs. 143-168.

Malara, N. A., & Zan, R. (2002). The problematic relationship between theory and practice. In L. English (Ed.), Handbook of international research in mathematics education (pp. 553– 580). Mahwah, NJ: Erlbaum.

SEP (2018). Matemáticas Primer grado. Telesecundaria, 2018. Ciudad de México. Secretaría de Educación Pública. https://telesecundaria.sep.gob.mx/. Consultada septiembre 2018.

ABORDAJE DE ESTRUCTURAS MULTIPLICATIVAS BASADO EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

APPROACHING MULTIPLICATIVE STRUCTURES BASED ON PROBLEM RESOLUTION

Paloma Ferreira do Santos, José Fernandes Silva, Douglas Silva Tinti
Universidad Federal de Ouro Preto. (Brasil)
ferreirapaloma780@gmail.com, jose.fernandes@ifmg.edu.br, tinti@ufop.edu.br

Resumen
Se presenta en ese artículo parte de una investigación cuyo objetivo fue analizar las repercusiones del abordaje de estructuras multiplicativas basado en la Resolución de Problemas. El estudio contó con la participación de siete estudiantes del 6º grado de la Enseñanza Primaria II. El presente texto tiene como objetivo apuntar los principales eventos que suscitaron discusiones a lo largo del recorrido investigativo, en que los participantes demostraron sus fragilidades y avances. Siendo la investigación cualitativa, la propuesta se fundamentó en la realización de cinco talleres centrados en la resolución de problemas en el contexto de las estructuras multiplicativas, abordando la organización rectangular, razonamiento combinatorio y proporcionalidad. Con la investigación fue posible observar avances en la perspectiva de resignificación de los conocimientos que engloban las estructuras multiplicativas.

Palabras clave: campo multiplicativo, resolución de problemas, resignificación de conocimientos, campo conceptual

Abstract
This article presents an excerpt from a study aimed at analyzing the impact of the multiplicative structure approach based on Problem Solving. Seven-grade students of elementary school II participated in the study. This paper aims to point out the main events that caused discussions along the course of the research, in which the participants showed their weaknesses and progress. Being qualitative research, the proposal was based on carrying out five workshops focused on problem solving in the context of multiplicative structures, approaching rectangular organization, combinatorial reasoning and proportionality. By the study, it was possible to observe progress in the perspective of the resignification of the knowledge that encompasses the multiplicative structures.

Key words: multiplicative field, problem solving, resignification of knowledge, conceptual field

Introducción

El proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática es reconocido por sus desafíos y, cada vez más, somos llamados a reflexionar sobre el papel de esta Ciencia en la constitución de la vida escolar y social de los estudiantes. En especial, hay mucho por hacer en lo que atañe a la enseñanza de los conceptos básicos/estructurantes, como es el caso de las operaciones elementales que demandan un aprendizaje sólido, basado en problemas y no en el proceso de algoritmización (Vergnaud, 2009). No obstante, tenemos el desafío de reflexionar sobre la realidad del aprendizaje de la Matemática, en el aula, entendiendo al estudiante de forma integrada, inmersa, respetando su realidad natural y social, así como sus interacciones (D'Ambrósio, 2005).

Una de las posibilidades para fomentar la aproximación entre el estudiante y la Matemática es la Resolución de Problemas, puesto que esta se basa en la perspectiva del protagonismo en la construcción del conocimiento (Allevato y Vieira, 2016). Ante lo expuesto, es un hecho que la enseñanza que prioriza el abordaje de los contenidos, disociados de situaciones problemas, conspira para que los estudiantes permanezcan al margen de los conocimientos matemáticos (Silva, Silva y Freitas, 2019).

El interés por esta investigación deriva de las relaciones establecidas entre los investigadores y las escuelas de educación básica a través de prácticas de Pasantía Supervisada y Residencia Pedagógica, en las cuales los profesores relataban que el 6º grado de la Enseñanza Primaria II (estudiantes de 11 años) es una etapa de ruptura en el contexto escolar. Esa ruptura, según los docentes, ocurre dado que los estudiantes salen del 5º grado (10 años de edad) donde poseen la figura de un único maestro y, en el 6º grado, pasan a tener contacto con varias disciplinas aisladamente, siendo estas impartidas por varios profesores específicos. Asimismo, en este contexto, quedó resaltada, por los profesores, la dificultad de los estudiantes para lidiar con la lectura, interpretación y escritura de tareas relacionadas con la multiplicación.

En consonancia con lo expuesto, el presente trabajo presenta como objetivo analizar las repercusiones del abordaje de la enseñanza de estructuras multiplicativas, a alumnos del 6º grado de la Enseñanza Primaria II, basada en la Resolución de Problemas.

Fundamento teórico

Campo Conceptual de las Estructuras Multiplicativas

Gerard Vergnaud, en 1977, desarrolló la Teoría de los Campos Conceptuales - TCC, la cual fue definida como “un conjunto informal y heterogéneo de problemas, situaciones, conceptos, relaciones, estructuras, contenidos y operaciones de pensamiento, conectados unos con los otros y, probablemente, entrelazados durante el proceso de adquisición” (Vergnaud, 1982, p. 40).

Así, el aprendizaje debe ser visto, conforme Moreira (2002), como un sistema complejo dotado de idas y vueltas donde las experiencias anteriores poseen papel de relevancia. En las palabras del citado autor, Gerard Vergnaud, en la organización de la TCC, destacó tres importantes perspectivas:

Un concepto no se forma dentro de un solo tipo de situaciones - Esto significa que en la perspectiva de la TCC un modelo de situación solamente no es suficiente para construir un conocimiento sólido acerca de un tema. De este modo, para la formación de un individuo, éste necesita vivenciar situaciones diversas que le proporcionen el contacto con el concepto inmerso en contextos distintos;

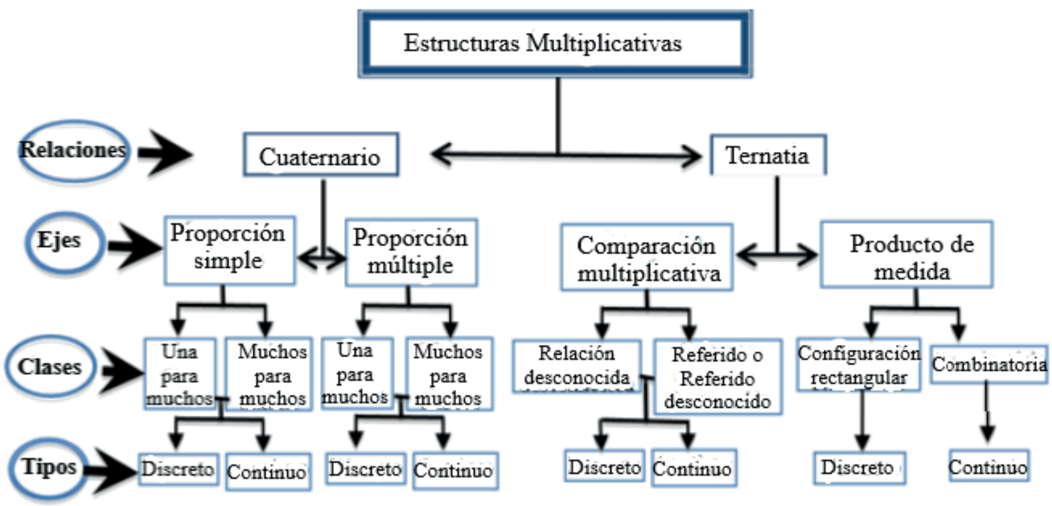
Una situación no se analiza con un solo concepto - Esto es, una situación problema no será comprendida/solucionada teniendo por base un único concepto. Así, conceptos distintos pueden estar interconectados para llegar a una solución. En otras palabras, la génesis de los contenidos debe ser tenida en cuenta en el proceso de construcción de los conocimientos; la construcción y apropiación exige tiempo de asimilación - Ello significa que los aprendizajes de las propiedades y conceptos demandan un tiempo para su maduración.

Corroborando con la discusión, Santana y Lima (2017, p. 15) afirman que la "Teoría de los Campos Conceptuales brinda un cuadro teórico para trabajar con elementos que forman parte del desarrollo cognitivo del individuo, tales como el lenguaje, el razonamiento, la percepción y la memoria".

Tal base teórica, en la perspectiva de Mello (2018) es fundamental para las discusiones que engloban los campos aditivos y multiplicativos, dado que, para la citada autora, Vergnaud propuso reflexiones sobre los aprendizajes matemáticos basándose en los problemas y no en la algoritmización. Así, el abordaje de la multiplicación, en el ámbito de la educación primaria, adquiere una nueva dimensión, que va más allá de ser considerada una operación utilizada para simplificar una suma de *n* partes.

En relación con el abordaje de las estructuras multiplicativas Magina, Merlin y Santos (2012) elaboraron un esquema organizado en relaciones cuaternarias y ternarias caracterizándolo de la siguiente forma:

Figura 1: *Esquema del Campo Conceptual Multiplicativo.*



Fuente: (Magina, Merlin y Santos 2012).

Como puede ser observado, la primera y segunda parte poseen dos ejes en los cuales están la proporción simple y proporción múltiple, y comparación multiplicativa y producto de medidas, respectivamente. Luego, cada eje origina ocho clases y las cantidades discretas y continuas.

En este trabajo adoptamos la noción de multiplicación explorada por las vertientes de la proporcionalidad (conceptos de magnitudes, siendo una forma inicial de introducir la idea de regla de tres), de la combinatoria (procesos de conteo formando agrupamientos posibles de acuerdo con situaciones dadas), de la organización rectangular (análisis dimensional) y de la comparación entre razones (proporcionalidad).

Resolución de problemas

Pólya (1978) aborda cuatro etapas para que ocurra de modo significativo a la resolución de un problema, siendo estas:
Comprender el enunciado - este primer momento se destina a la lectura y comprensión del problema, a fin de identificar lo que el enunciado propone:

Planear la resolución - la etapa de planeamiento de la solución resulta fundamental, dado que en este momento son definidos cuáles caminos serán trazados en búsqueda de la solución. Resolver el problema - es el momento en el cual el problema es solucionado, en esta fase se pone en práctica la estrategia que fue definida en la etapa de planeamiento;
Verificar la solución - la última etapa de la resolución de un problema puede ser vista como un período de verificar en un análisis criterioso si la forma como el problema fue resuelto está correcta.

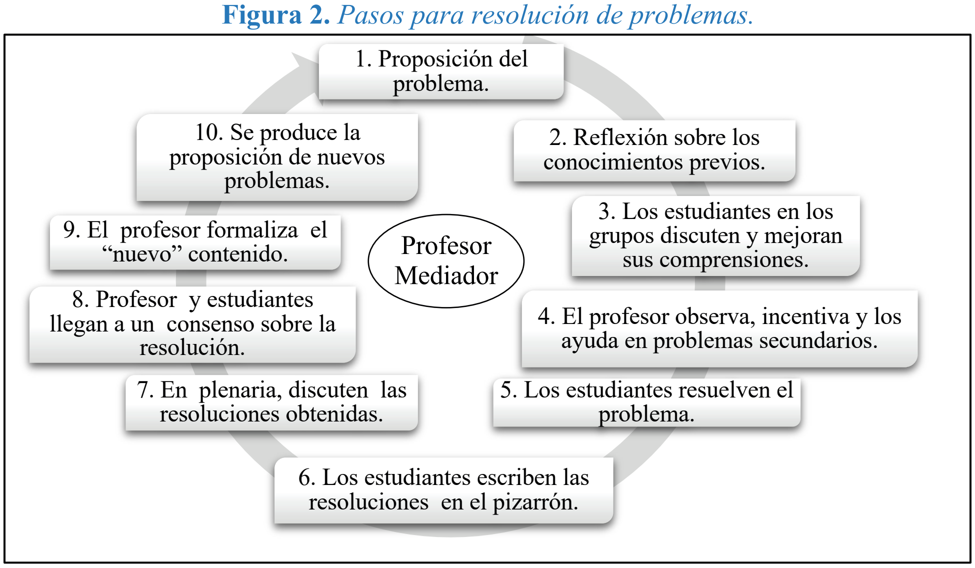
Las autoras Smole, Diniz y Cândido (2000), defienden la Resolución de Problemas como una metodología que permite el desarrollo de habilidad, como el razonamiento y también traen al contexto escolar una posibilidad de instigar el deseo de los estudiantes en la búsqueda de conocimiento:

Uno de los mayores objetivos para el estudio de la Matemática en la escuela es desarrollar la habilidad de resolver problemas. [...] no solo por su importancia como forma de desarrollar varias habilidades, sino especialmente por posibilitar al alumno la alegría de vencer obstáculos creados por su propia curiosidad, vivenciando así lo que significa hacer matemática (Smole, Diniz y Cândido, 2000, p. 13).

Aportando al debate, Dante (2003) alude algunas ventajas de la práctica educativa en Matemática en la perspectiva de la Resolución de Problemas:
Inducir el alumno al pensamiento productivo;
Desarrollar acciones que los conduzcan al razonamiento;
Enseñar al alumno a enfrentar situaciones nuevas;
Propiciar para el alumno oportunidades de desarrollarse con las aplicaciones matemáticas;
Tornar las clases de Matemática más interesantes y desafiadoras;
Dotar al alumno de estrategias para resolver problemas;
Ofrecer una buena base Matemática a las personas.

Para este trabajo adoptamos los pilares de la Resolución de Problemas discutidos por Onuchic y Allevato (2011) y Allevato y Vieira (2016), que destacan ser el problema el punto de partida para la construcción de nuevos conceptos matemáticos. Para esos autores, los estudiantes precisan protagonismo en el proceso de aprendizaje y al profesor cabe la figura de mediador de las reflexiones y acciones. Importantes proposiciones y guías han sido elaborados por los investigadores del área con el objetivo de dar apoyo a la práctica pedagógica basada en la resolución de problemas. Una de las guías fue perfeccionada y sistematizada por Allevato y Vieira (2016):

Figura 2. *Pasos para resolución de problemas.*



Fuente (Allevato y Vieira, 2016 - adaptado por los autores).

De acuerdo con lo expuesto, cada etapa posee un papel importante en el proceso de la resolución del problema. De esta manera, en el momento de la preparación del problema es importante que el profesor busque una perspectiva generadora, pues a partir de este, podrá llegar a diferentes reflexiones que pueden encaminarse para la formalización de un concepto Matemático. Además, es importante explorar la lectura, el debate, el trabajo colaborativo y el proceso de la mediación pedagógica. Tal hecho consagra un nuevo orden, o sea, “alumnos autónomos con un problema en manos como punto de partida para hacer Matemática y un profesor gestionando el proceso recursivo de enseñar, aprender, evaluar, reenseñar, reaprender...” (Bicalho, Allevato y Silva, 2020, p. 23).

Metodología

La investigación realizada es de corte cualitativo, dado que de acuerdo con Minayo (2003, p. 22) “se ahonda en el mundo de los significados de las acciones y relaciones humanas, un lado no perceptible y no captable en ecuaciones, medias y estadísticas”.

Los participantes del estudio fueron siete estudiantes del 6º grado de la Enseñanza Primaria II denominados A, B, C, D, E, F y G con edades en torno de los 11 años. Para la recolección de datos fueron realizados cinco talleres, en junio de 2019, en momentos autorizados por la escuela pública donde estudiaban en régimen a tiempo completo, siendo esta localizada en el Estado de Minas Gerais, Brasil. En estos talleres fueron trabajados problemas relacionados con la multiplicación teniendo como foco la lectura, el trabajo colaborativo, el diálogo y la formalización de conceptos. El proceso investigativo abordó doce situaciones problema, siendo discutidas en este reporte las cuatro propuestas que fueron consideradas como las que propiciaron discusiones significativas.

De acuerdo con los datos, el análisis fue organizado teniendo en cuenta las nociones de multiplicación presentes en los siguientes campos: organización rectangular, razonamiento combinatorio y proporcionalidad.

Resultados

Desde el inicio se buscó promover un espacio que propiciase para los participantes un movimiento de sensibilización, en el sentido de percibirse como sujetos constructores de sus conocimientos. Fue abierta la discusión, dando voz a los participantes, de modo que estos pudiesen presentar sus visiones acerca de la Matemática y del contexto en que ella les era presentada.

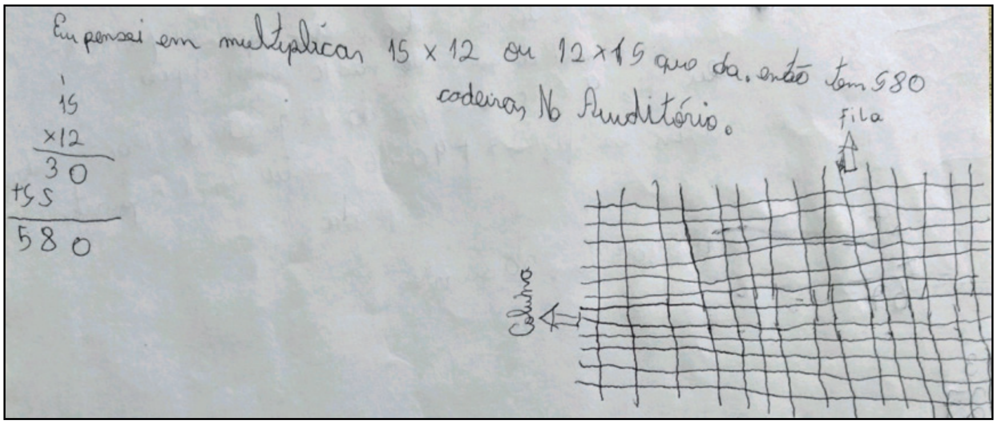
Luego de ese contacto inicial, fueron propuestos los problemas volcados a los conceptos del campo multiplicativo. Las discusiones en relación a multiplicación como una noción derivada de organización rectangular emergieron a partir de problemas como el del punto I:

I) Problema propuesto sobre organización rectangular
En el auditorio de la escuela las sillas están dispuestas en 15 hileras y 12 columnas. ¿Cuántas sillas hay en el auditorio?
Fuente: Silva (2016)
Luego de la distribución del problema, los investigadores orientaron a los participantes a realizar la lectura, las reflexiones en sus grupos y la retirada de las informaciones importantes para la resolución. Sin embargo, inmediatamente, los participantes iniciaron los cuestionamientos:

¿Cómo hacer? (A y C).
¿Profesores, la cuenta es de más o de menos? (D).
Tales cuestionamientos pusieron de manifiesto que los participantes presentaban dificultades para lidiar con características de la estructura multiplicativa y, también, con el formato de clases basadas en la investigación y exploración. O sea, si el contenido no fuese explicado previamente, ellos no “sabrían” hacer las tareas propuestas.

Tal hecho muestra que la práctica con resolución de problemas es un desafío y requiere nuevas posturas (Onuchic y Allevato, 2011).
Constatada esa situación, los investigadores conscientes de la condición de mediadores, incentivaron a los participantes al proceso de relectura y reinterpretación, enfatizando que podrían usar diferentes estrategias para la resolución.
El participante B, luego, compartió su proceso de construcción de la resolución, conforme es presentado en la Figura 3.

Figura 3. *Resolución de problema propuesto.*



(Archivo del investigador)

El participante B, al buscar una resolución para el problema, desarrolló un pensamiento matemático que le permitió crear una importante estructura de resolución. Podemos observar que el participante realizó la multiplicación de las columnas por las filas, pero al efectuar la operación resolutiva cometió un error, esto es, multiplicó 15 por 12 y encontró 580 sillas.

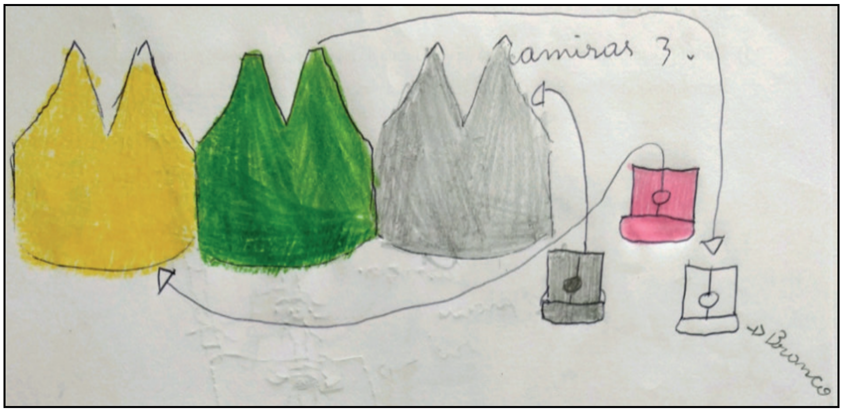
En el proceso de analizar reflexivamente la búsqueda de la respuesta de este participante, se retorna a las ideas de Allevato y Vieira (2016) que defienden la valorización del proceso de enfrentamiento de la situación-problema y el manejo de los datos. De este modo, analizando a través de las lentes de las autoras, es posible notar un avance en la construcción del pensamiento multiplicativo.

Se cree que, al vivenciar esa reconstrucción del concepto de multiplicación, los participantes lleven un tiempo para asimilar los aprendizajes (Moreira, 2002).
Buscando promover una discusión sobre los conceptos de multiplicación resultantes de la combinatoria, el problema del punto II fue propuesto a los participantes:

II) Problema propuesto sobre combinatoria
A Paulo le gusta mucho usar gorros. Él tiene 3 gorros: uno negro, uno blanco y uno rosa. Él pretende usarlos con tres camisas: una amarilla, una verde o una gris. ¿De cuántas maneras diferentes Paulo puede vestirse?
Fuente: Silva (2016)

Este problema desencadenó un importante debate acerca de los métodos que podrían ser utilizados para la resolución. Tales reflexiones fueron mediadas por los investigadores en un movimiento colaborativo para que la resolución fuese
construida. Así, la Figura 4 presenta una de las resoluciones que fueron producidas

Figura 4. *Resolución de problema propuesto.*

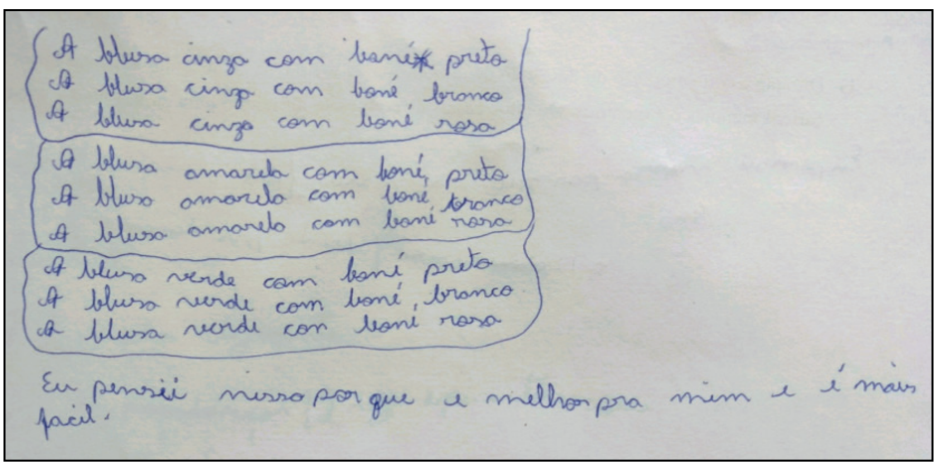


(Archivo del investigador)

Es posible observar que el participante C utilizó el recurso del dibujo para encontrar una solución, asociando cada uno de los gorros a una blusa, presentando como resolución que sería posible formar 3 maneras diferentes de combinaciones, entre las prendas. Como sabemos, la resolución presentada se encuentra incorrecta, pero como los talleres fueron basados en la perspectiva de la colaboración y valorización de la participación, valorizamos el empeño encomendado e invitamos el participante a ver la presentación de los compañeros A y E que también habían resuelto el problema.

En la Figura 5 se observa que A y E buscaron, por medio de una construcción textual, representar todas las posibilidades de combinaciones de las prendas.

Figura 5. *Resolución de problema propuesto.*


A blusa cinza com boné preto
A blusa cinza com boné branco
A blusa cinza com boné rosa
A blusa amarela com boné preto
A blusa amarelo com boné branco
A blusa amarelo com boné rosa
A blusa verde com boné preto
A blusa verde com boné, branco
A blusa verde com boné rosa

Eu pensei nisso porque e melhor pra mim e é mais fácil.

(Archivo del investigador)

Durante las discusiones, acerca de la situación problema propuesta, el participante C que presentó la resolución indicada en la Figura 4, notó su equívoco, haciendo las debidas correcciones. Notamos, de esta forma, la importancia del aliento de los estudiantes para que participen de las plenarias promovidas.

El pensamiento multiplicativo abordando los conceptos de proporcionalidad fue contemplado en las situaciones problema del punto III, siendo este problema definido en la teoría de Vergnaud (1990) como un problema de partición, en que son atribuidos en el enunciado valores por unidad de cierto ítem, es propuesto el cálculo total a ser pagado por cierta cantidad del mismo ítem.

III) Problema propuesto envolviendo proporcionalidad

Laura va a comprar cuatro paquetes de bizcochos. Cada paquete cuesta R$ 3,50. ¿Cuánto pagará ella por los cuatro paquetes?
Fuente: Silva (2016)

Figura 6. *Resolución de problema propuesto.*

(Archivo del investigador)

En la Figura 6 se retrata a la participante B, que se dispuso a compartir su resolución, presentando correctamente el razonamiento y también la realización del cálculo matemático. Cuando indagada acerca de los motivos por los cuales la resolución estaría correcta, la participante demostró seguridad al realizar la explicación.

Al observar que los participantes habían comprendido el problema y su resolución, fue posible constatar que el conocimiento referente a la idea de proporcionalidad fue asimilado de forma concreta. Tal hecho nos lleva a entender que fue respetado el tiempo necesario para que ellos internalizaran las informaciones relacionadas al campo multiplicativo (Vergnaud,1990). Además de ello, conforme argumentan Onuchic y Allevato (2011) el profesor necesita ocupar el espacio de mediador e incentivador en el proceso de aprendizaje.

Con el fin de fomentar en los participantes el desarrollo de la capacidad de elaboración de problemas, fue planteada la siguiente propuesta:
IV) Problema propuesto sobre proporcionalidad

Elabore y resuelva un problema sobre medidas proporcionales.

Fuente: Silva (2016)
El participante C se dispuso voluntariamente a presentar el problema que había elaborado. En esta propuesta hubo un razonamiento que presentaba una discusión acerca de cuántos litros en total estarían presentes en dos botellas con capacidad total de 2 litros cada una. Al explicar su resolución, el participante demostró tener la comprensión de que realizando la multiplicación 2 por 2 sería igual a 4. O sea, el total serían 4 litros.

$$2 \times 2 = 4$$

No obstante, este participante también usó una segunda forma de resolver el problema, valiéndose de la suma:

$$2 + 2 = 4$$

Se puede observar en la Figura 7 la resolución elaborada por el participante:

Figura 7. *Resolución de problema propuesto.*

(Archivo de los investigadores)

Discutiendo el problema algunas cuestiones fueron identificadas, con respecto a cuál sería la forma más simple de resolución. El participante señaló a la multiplicación como la forma más simple, dado que, haciendo uso de la suma, si el problema presentase un gran número de botellas, la resolución sería inviable debido a las muchas partes que serían agregadas a la operación.

Conclusiones

El estudio se propuso analizar las repercusiones del abordaje de estructuras multiplicativas basado en la Resolución de Problemas, teniendo como público objeto del estudio a alumnos del 6º grado de la Enseñanza Primaria II.

Analizando los hallazgos producidos en el estudio, se destacaron algunos puntos como la necesidad de que los espacios educacionales sean proporcionados a los estudiantes, el papel de protagonistas en la construcción de sus conocimientos. De esta forma, es necesario promover una educación anclada en las bases de la emancipación de los involucrados, siendo el profesor el agente mediador que apoya e incentiva a su estudiante.

Otro punto destacado quedó en evidencia en el estudio: los alumnos presentaban un historial de rechazo de los contenidos de Matemática, siendo la asimilación de los conceptos volcados al campo multiplicativo construida de forma fragilizada. Planteado esto, señalamos la necesidad de que la enseñanza de las operaciones elementales, en especial la multiplicación, sea guiada por perspectivas teóricas como la Teoría de los Campos Conceptuales, puesto que históricamente la enseñanza de tales operaciones ha valorizado los aspectos algorítmicos, simbolizados en los llamados “hechos fundamentales” que priorizan aspectos de memorización a través de la repetición, en detrimento de la resolución de problemas.

El proceso investigativo se centró en proporcionar un espacio de acogimiento, dando voz a los participantes y valorizando los razonamientos presentados por los mismos, por creerse que de este modo el hacer pedagógico genera el resultado esperado, de construcción del conocimiento.

Se tiene consciencia de que el estudio no tiene fin en sí mismo; con esta investigación surgen nuevas posibilidades de investigaciones futuras que se centren sobre los aportes en lo atinente a la construcción de los saberes del campo multiplicativo.

Referencias bibliográficas

Allevato, N. y Vieira, G. (2016). Do ensino através da resolução de problemas abertos às investigações matemáticas: possibilidades para a aprendizagem. *Quadrante*, *25*(1), 113-131.

Bicalho, J. B. S., Allevato, N. S. G. y Silva, J. F. (2020). A Resolução de Problemas na formação inicial: compreensões de futuros professores de Matemática. *Educação Matemática Debate*, *4*(10), 1-26.

D'Ambrosio, U. (2005). Sociedade, cultura, matemática e seu ensino. *Educação Pesquisa*, *31*(1), 99-120.

Dante, L. R. (2003). *Didática da Resolução de Problemas de Matemática*. São Paulo: Ática.

Magina, S., Merlin, V., Santos, A. (2012). A Estrutura Multiplicativa sob a Ótica da Teoria dos Campos Conceituais: uma visão do ponto de vista da aprendizagem. *3º SIPEMAT*, Fortaleza.

Melo, J. O. (2004). *Campo Multiplicativo: Um Estudo Diagnóstico de Aprendizagem*. 2018. 107 f. Dissertação de Mestrado não publicada, Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Brasil.

Minayo, M. C. S. (Org.) (2003). *Pesquisa Social*: *teoria, método e criatividade.* Petrópolis: Vozes.

Moreira, M. A. (2002). A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área. *Investigações em Ensino de Ciências*, *7*(1), 7-29.

Onuchic, L. R. y Allevato, N. S. G. (2011). Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. *Revista Bolema*, *25*(41), 73-98.

Polya, G. (1978). *A arte de Resolver Problemas*. Rio de Janeiro: Interciência,

Santana, E. R. S. y Lima, D. C. (2017). Teoria dos Campos Conceituais. En Santana, E. R. S., Castro Filho, J. A. y Lautert, S. L. (org.). *Ensinando multiplicação e divisão no 4o e 5o ano* (pp. 15-44), Itabuna: Via Litterarum

Silva, J. F. y Silva, V. M. y Freitas, G. J. (2019). Diálogo entre Matemática e Biologia no Exame Nacional do Ensino Médio. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 32, 347-354.

Silva, S. V. P. (2016). *Ideias/Significados da Multiplicação e Divisão: O processo de aprendizagem via resolução, exploração e proposição de problemas por alunos do 5º ano do ensino fundamental*. Dissertação de Mestrado não publicada, Universidade Estadual da Paraíba. Brasil.

Smole, K. S., Diniz, M. I. y Cândido, P. T. (2000). *Resolução de Problemas*. Porto Alegre: Artmed.

Vergnaud, G. A (1982). Classification of Cognitive Tasks and Operations of Thought Involved in Addition and Subtraction Problems. En T. Carpenter, T. Romberg y J. Moser (Eds.). *Addition and Subtraction*: a cognitive perspective (pp. 39-59), New Jerssey: LawrenseErlbaun.

Vergnaud, G. (1990). La théorie de champs conceptuels. *Recherches en Didactique de Mathématiques*, *10*(23), 133-170.

Vergnaud, G. (2009). *A criança, a Matemática e a realidade: problemas do ensino da Matemática na escola elementar*. Curitiba: Ed. da UFPR.

VOL 34, NÚMERO 2, AÑO 2021

UNA APROXIMACIÓN A LA CONSTRUCCIÓN DE LA NOCIÓN DE SIMETRÍA EN EDUCACIÓN INFANTIL

AN APPROACH TO THE CONSTRUCTION OF THE SYMMETRY NOTION IN EARLY CHILDHOOD EDUCATION

Carla Rosell Charles, Yuly Vanegas Muñoz, Joaquín Giménez
Universidad de Lleida, Universidad de Barcelona, (España)
crc8@alumnes.udl.cat, yuly.vanegas@udl.cat, quimgimenez@ub.edu

Resumen
El estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en edades tempranas es actualmente un tema de interés para la investigación en Educación Matemática. El presente trabajo tiene como finalidad identificar la comprensión sobre la noción de simetría que tienen niños de Educación Infantil. Considerando el enfoque de las trayectorias de aprendizaje se diseña una secuencia de tareas en la que se introduce el arte como contexto específico. Se describe la implementación de la experiencia y el análisis posterior. Se observa que los niños pueden identificar algunos ejes de simetría y que esto les permite hacer clasificaciones de figuras. Además, se constata que el camino seguido en la secuencia de tareas puede constituirse en un ejemplo de trayectoria de aprendizaje de la simetría para la educación infantil.

Palabras clave: enseñanza de la geometría, trayectorias de aprendizaje, edades tempranas, simetría

Abstract
Mathematics teaching and learning process at early childhood is currently a topic of interest for research in mathematics education. The present work aims to identify the understanding of symmetry notion of children in early childhood education. Taking into account the approach of learning trajectories, a sequence of tasks is designed in which art is introduced as a specific context. The implementation of the experience and the subsequent analysis is described. It is observed that children can identify some symmetry axes, what allows them to classify figures. Furthermore, it is found that the path followed in the sequence of tasks can be an example of a learning path of symmetry for early childhood education.

Key words: geometry teaching, learning trajectories, early ages, symmetry

Introducción

La preocupación por una enseñanza de las matemáticas de calidad desde la Educación Infantil, cada vez toma mayor relevancia. Muestra de ello, es el desarrollo de investigaciones tanto a nivel de los grados, como de máster y doctorado en las que se buscan estudiar elementos que favorezcan un mejor aprendizaje de las matemáticas por parte de niñas y niños o la consideración de aspectos clave en la formación de los futuros docentes que se espera potencien el desarrollo del pensamiento matemático en esta etapa escolar. Por otra parte, también podemos constatar el aumento de publicaciones en las que se describen experiencias didácticas que buscan el desarrollo de los actuales planteamientos curriculares centrados en un enfoque competencial.

Las habilidades de pensamiento espacial y el razonamiento geométrico juegan un papel fundamental en el desarrollo de las habilidades de resolución de problemas, el aprendizaje matemático y la comprensión de lectura para los niños (Van den Heuvel y Buys, 2012). La geometría es fundamental en la educación infantil (Chamorro, 2003), pero su, enseñanza normalmente es ignorada o minimizada en la educación infantil, debido a la concepción de los maestros que suponen que los niños no pueden aprender ciertas nociones, por ejemplo, la simetría, por su complejidad y por las dificultades de abstracción, (Clements y Sarama, 2009). Según De Castro y Quiles (2014), la simetría tiene una presencia continua en la naturaleza, el arte, en el entorno. Es una noción que los niños reconocen de manera natural e intuitiva (Eberle, 2014). Lo que la convierte en una herramienta importante para comprender ciertos aspectos de la realidad. Diversos fenómenos del mundo real nos evocan la idea de simetría. Así, la observación del espacio se constituye en un proceso fundamental a ser desarrollado en la Educación Infantil para iniciar y promover la construcción de las ideas matemáticas de los niños (Vanegas y Giménez, 2019).

Promover un aprendizaje significativo de las nociones matemáticas en edades tempranas implica conocer, entre otros aspectos, las maneras como niños y niñas construyen su conocimiento y cómo significan determinado tipo de situaciones. Consideramos como Sarama, Clements, Barret, Hudyma y Vanegas (2021), que mediante la comprensión de las trayectorias de aprendizaje es posible mejorar las estrategias de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y favorecer el desarrollo del pensamiento matemático de los niños. Es necesario y relevante analizar cómo aprenden los niños las nociones geométricas y cómo enfrentan las tareas que implican una actividad geométrica Así, el objetivo de esta comunicación es describir las trayectorias de aprendizaje seguidas por un grupo de niños de 5-6 años, en una experiencia orientada a la construcción de significados de la noción de simetría, cuando trabajan actividades matemáticas en contextos artísticos.

Marco teórico

Brenneman, Stevenson-Boyd y Frede (2009) subrayan que los niños aprenden y desarrollan habilidades matemáticas desde una edad temprana. Según Canals (1997) el conocimiento geométrico no se adquiere recibiendo información, ni consiste en reconocer determinadas formas y saber su nombre correcto, implica desarrollar capacidades muy diversas en cada persona. Supone un largo proceso, que requiere: explorar, comparar, descomponer y recomponer, visualizar y expresar verbalmente e interiorizar. Los alumnos desarrollan ideas matemáticas de forma natural a partir de sus experiencias cotidianas, por ello el docente debe ser consciente de la potencialidad de dichas experiencias para incorporarlas en el aula y apoyar la construcción de las nociones matemáticas de los niños (NCTM, 2000).

El currículum de Educación Infantil en Cataluña (Generalitat de Catalunya, 2016) apunta que la matemática es una herramienta imprescindible para ayudar a los niños a conocer el entorno. Involucrar a los niños y niñas en actividades que implican cuantificar, medir, localizar hacer predicciones, comprobaciones y generalizaciones les posibilita el avance del simple conocimiento físico a la significación de nociones y llegar a la abstracción. Para entender el mundo es necesario desarrollar un buen conocimiento del espacio y las formas. Situarse en el espacio resulta imprescindible para construir el conocimiento geométrico, así como conocer determinadas figuras y sus características. De acuerdo con el NCTM (2000) la geometría es un tópico de las matemáticas que permite el desarrollo natural de las habilidades de razonamiento y justificación en los estudiantes, lo que es fundamental en la estructuración de su pensamiento matemático. Según Canals (1997) hay tres nociones que es primordial abordar con los niños desde las primeras edades: la posición, las formas y los cambios de posición y forma.

La simetría es una parte fundamental de la geometría, la naturaleza y de las formas. Se relaciona con la creación de patrones que nos ayudan a organizar nuestro mundo conceptual (Knuchel, 2004). Abordar la simetría desde edades tempranas ofrece oportunidades para conectar las matemáticas con el mundo real. Además, tal y como se ha mostrado en estudios como el desarrollado por Jones (2002) el reconocimiento y comprensión de la simetría ayuda a los estudiantes a "simplificar" informaciones complejas, ya que las figuras simétricas son identificadas más rápidamente, discriminadas con precisión y muchas veces más fácilmente recordadas que las figuras no simétricas. Varias investigaciones muestran que las cuestiones culturales son referentes importantes para la enseñanza y aprendizaje de la simetría (Freudenthal, 1983; Giménez y Vanegas, 2019). Una mirada a los contextos artísticos puede ser un escenario apropiado para estudiar características de los objetos y empezar a reconocer las propiedades de las transformaciones (Giménez y Vanegas, 2019; Antón y Gómez, 2016). Según Fernández y Reyes, (2003; Antón y Gómez, 2016), la expresión artística disfruta de un extraordinario contenido matemático. Por esta razón, las obras artísticas, pueden ser utilizadas como recurso didáctico para la enseñanza de las matemáticas en varios niveles educativos.

Al igual que Clements y Sarama (2009), consideramos que es clave reconocer los caminos que siguen los niños en su aprendizaje de diversas nociones matemáticas. Estos caminos constituyen la base de lo que estos autores denominan trayectorias de aprendizaje (TA). Según Clements y Sarama (2009) la idea teórica de trayectoria de aprendizaje se puede entender cómo un camino hipotético por el que los estudiantes pueden progresar en su aprendizaje de un concepto matemático concreto. El constructo Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (en adelante THA), fue introducido por Simon (1995), como parte de su modelo de ciclo de enseñanza. Según este autor, una THA se construye en torno a tres elementos: a) el objetivo de aprendizaje, b) las tareas matemáticas que se usarán para promover el aprendizaje y c) las hipótesis acerca del proceso de aprendizaje. De esta manera se busca establecer una predicción de cómo los alumnos pueden ir aprendiendo un determinado contenido matemático en función de sus conocimientos y experiencias previas.

Clements y Sarama (2015) afirman que los niños siguen procesos naturales de desarrollo en el aprendizaje de las matemáticas. Estas rutas de desarrollo son la base para las trayectorias de aprendizaje. De forma semejante a lo planteado por Simon (1995), estos autores consideran que las trayectorias de aprendizaje involucran tres componentes esenciales: *una meta matemática; una trayectoria de desarrollo;* y, un *conjunto de actividades o tareas instructivas propias de los niveles de pensamiento de la trayectoria*. La comprensión de dichas trayectorias puede ayudar a responder cuestiones relevantes de los procesos de enseñanza y aprendizaje: los objetivos que hay que establecer; por dónde empezar; cómo decidir la dirección del siguiente paso; y cómo lograr ese siguiente paso, entre otras. Respecto a las nociones geométricas Clements y Sarama (2015) proponen diferentes trayectorias de aprendizaje, por ejemplo: la trayectoria de aprendizaje para formas y la trayectoria para la composición y descomposición de figuras 2D.

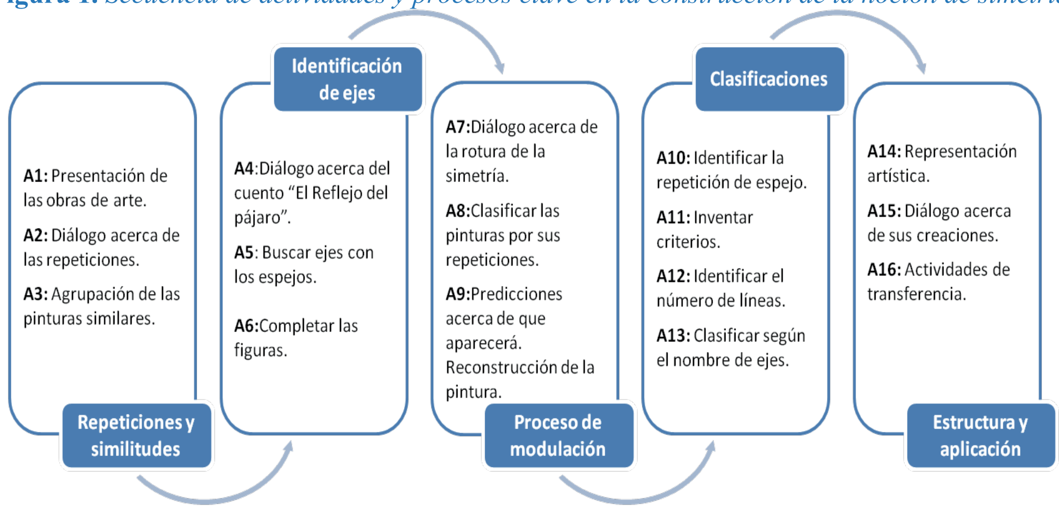
Metodología

Este estudio se basa en la observación cualitativa como un estudio de caso y en un proceso de investigación basado en el diseño (Confrey, 2006). Los participantes de esta investigación corresponden a dos grupos de 25 estudiantes de 5-6 años de una escuela pública en España. La experiencia escolar desarrollada con los participantes se registró audiovisualmente y posteriormente se digitalizaron y realizaron las transcripciones de cada sesión. Estos registros (textuales y visuales) se constituyen en los datos de nuestro estudio.

Para responder al objetivo, se diseña una secuencia de actividades. Esta secuencia consta de 16 actividades las cuales consideran los componentes de la trayectoria de aprendizaje (Figura 1). En el diseño de las actividades se considera que la construcción de la noción de simetría en la educación infantil involucra los siguientes procesos (Vanegas, Rosell y Giménez, 2021): identificación de fenómenos de repetición; identificación de líneas de simetría; visualización de elementos para una simetría "rota" y creación de módulos; clasificación según número de ejes y construcción y estructuración de ideas utilizando representaciones personales.

La estructuración de la secuencia contempló cinco etapas: 1) revisión de estudios acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la noción de simetría en los ciclos iniciales de formación; 2) estudio de investigaciones sobre los niveles de progresión en el aprendizaje y las THA y TA; 3) construcción de la versión piloto de la secuencia; y, 4) construcción de la versión final de la secuencia.

Figura 1. *Secuencia de actividades y procesos clave en la construcción de la noción de simetría.*



Elaboración de los autores.

Las actividades incluyeron el uso de una amplia variedad de materiales educativos, manipulativos (fotos de obras de arte, espejos, cuentos y recursos digitales, entre otros). Para presentar la propuesta a los alumnos se realizó un juego de cartas con gran formato para dar oportunidades a los niños de ver detalles y manipularlos al usar los espejos. A modo de ejemplo, en la Tabla 1, se presenta la actividad 1 de la secuencia. Junto a la tarea, se presenta su objetivo, descripción y una serie de preguntas que orientan el diálogo durante su implementación.

Tabla 1. *Actividades de la secuencia de tareas.*

	Objetivo	Tarea	Descripción	Imagen	Dialogo
A_1	Introducir un conjunto de obras artísticas como provocación de hallazgos de nociones geométricas	Discusión inicial sobre las percepciones y emociones evocadas	Los niños/as hablan sobre las obras artísticas y su significado		¿Por qué has elegido ese cuadro? ¿Qué crees que ha querido plasmar el pintor?

Elaboración de los autores.

Se definieron como unidades de análisis, fragmentos de las sesiones de clase en definidos por diálogos generados entre la maestra y los alumnos o entre alumnos y alumnos. En cada unidad de análisis se identifican las acciones y argumentaciones de los niños que dan cuenta de diferentes aspectos asociados a la noción de simetría. Finalmente, para sistematizar los datos y realizar el análisis inicial se elabora un cuadro de registro para cada actividad, como el que se muestra en la Figura 2.

Figura 2. *Cuadro de registro del análisis inicial.*

Actividad 5: Identificar los ejes de simetría		
Imagen	**Unidad de análisis**	**Observaciones**
	*Maestra*: ¿Cómo has hecho para que se vea la mitad en el espejo? *Alumno1*: He puesto el espejo en la mitad y estoy viendo la otra mitad. *Alumno2*: He puesto el espejo en el medio y se ha reflejado	Las alumnas experimentan con el espejo y logran determinar un eje de simetría. Hablan de la idea de "reflejo" y observan la importancia de "la mitad" para determinar la posición del espejo que les permita visualizar la totalidad de la obra

Elaboración de los autores.

Resultados

A continuación, en la Tabla 2 se describen las principales acciones realizadas por los niños a lo largo de las diferentes sesiones de la experiencia, resaltando los procesos clave definidos en la trayectoria.

Tabla 2. *Resultados relacionados con los procesos.*

Proceso	**Resultados**
Visualización	Al analizar las obras artísticas, los alumnos realizan visualizaciones simples, localizan los cuadrados, triángulos, círculos y rectángulos. Muestran dificultades para nombrar las formas por su nombre, en un primer momento hablan de "esto", "aquí", "allí" o lo señalan. Más adelante, mediante el diálogo con el docente se les anima a expresarse con mayor precisión.
Reconocer	En las primeras actividades los niños reconocen de manera global las formas que observan en las obras artísticas. Reconocen figuras geométricas, pero no se fijan en el tamaño, posición u orientación. En aquellas obras de arte simétricas son capaces de indicar similitudes y repeticiones que mantienen la posición, pero en el lado contrario "arriba y abajo" y "en un lado y en el otro". En el transcurso de la secuencia identifican la idea de reflejo mediante la repetición del espejo y pueden explicar cambios de orientación asociándolos a la línea del horizonte cuando se analiza una ilustración.

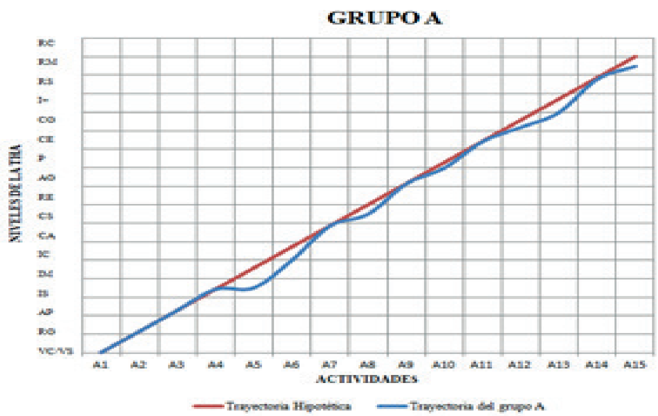
Asociación	La asociación que efectúan los alumnos es en un inicio por partes, ya que realizan agrupaciones según aquellas obras de arte que tienen mayor número de repeticiones y aquellas que no. Se fijan en las repeticiones sin tener en cuenta el tamaño, la orientación ni la posición. A medida que avanzan las actividades sus agrupaciones cambian, ya que ahora si tienen en cuenta las características de la simetría nombradas anteriormente. Finalmente son capaces de identificar los elementos que rompen la simetría.
Identificación	Se observa en las acciones de los niños que identifican la línea del horizonte como el primer eje simétrico central. Con ayuda del espejo, y usando la estrategia de ensayo y error, son capaces de encontrar el otro eje central, pero esta vez vertical. Si nos fijamos en los ejes verticales observamos que los alumnos necesitan la guía del docente para identificarlos. Una vez identificados los cuatro ejes los alumnos remarcan que las cuatro líneas se encuentran en el medio de la pintura. Se quiere destacar que no hay ningún alumno que llegue a identificar más de cuatro ejes.
Composición	En este nivel se destaca la variedad de acciones que llevan a cabo los alumnos. La mayoría se encuentran en un nivel de composición asimétrica, aunque tienen en cuenta la idea de reflejo no han respetado la orientación. Otros, han respetado la orientación, pero no el tamaño. Y finalmente hay unos pocos que han valorado el eje interno, la distancia con este, la medida, la posición y la orientación, por lo tanto, se considera que se encuentran en un nivel de composición simétrica.
Predicción	A pesar de la dificultad que supone realizar una visualización abstracta los alumnos son capaces de hacer sus predicciones sobre si con un pequeño extracto de las obras de arte se puede volver a formar toda la pintura. Les cuesta poner palabras a sus predicciones sin una comprobación. Pero cuando esta se lleva a cabo con los espejos, argumentan, confirman o rechazan sus decisiones.
Clasificación	Se observa que elegir criterios de clasificación es una tarea difícil para los niños En las actividades de clasificación los alumnos propusieron criterios, los cuales en su mayoría aludían a elementos naturales, colores y formas. No es, hasta que los docentes dan más indicaciones, que los niños siguen criterios geométricos para sus clasificaciones.
Representación	Cuando se les da la oportunidad a los alumnos de ser creadores artísticos aparecen distintos niveles de representación simétrica. La mayoría no tienen en cuenta las propiedades y los atributos de la simetría, ya que manifiestan que dibujaron aquello que más les gustaba. Otros representan elementos simétricos, pero no son capaces de argumentar sus dibujos. Finalmente, algunos, tienen en cuenta las repeticiones, los cambios de posición y los ejes de simetría.

Elaboración de los autores.

Para visualizar de manera global los caminos seguidos por los niños se elaboran unos gráficos en donde se compara la THA con la trayectoria seguida por los niños. En la Figura 3 se muestra a manera de ejemplo, el gráfico correspondiente a los resultados globales de uno de los grupos de niños participantes.

Se observa que la trayectoria del grupo es similar a la THA. Se puede ver que los niños pasan de un nivel a otro siguiendo el orden previsto en la THA. Aquellos niveles que muestran más diferencia con la trayectoria hipotética se presentan en las actividades centradas en los procesos: a) *identificar*, ya que como se ha comentado, el reto de identificar los ejes es una tarea difícil para los alumnos. Y, b) *componer* por la dificultad

Figura 3. *Trayectoria hipotética de aprendizaje de la simetría del grupo A.*



Elaboración de los autores.

Consideraciones finales

La implementación de la secuencia de aprendizaje ha permitido que se cuente con diferentes tipos de evidencias para aproximarnos de mejor forma a las comprensiones de los niños sobre la noción de simetría, identificando, sus acciones, sus explicaciones, sus preguntas, entre otros aspectos. Además, la identificación de los caminos seguidos por los niños es una fuente importante para el diseño y/o adecuación de nuevas propuestas escolares que brinden oportunidades a los niños para progresar en sus procesos de aprendizaje (Vanegas, Prat y Rubio, 2019).

Los resultados indican que la secuencia diseñada muestra un camino por el cual los niños de educación infantil pueden progresar en su aprendizaje de la noción de simetría. Consideramos como Clements y Sarama (2009) que diseñar y estructurar una secuencia de aprendizaje organizada a partir del enfoque de las trayectorias de aprendizaje, no solo posibilita una mejor estructuración y organización de las actividades, sino que brinda elementos para desarrollar una mejor gestión en el aula al considerar posibles formas de razonamiento y/o prever dificultades que los niños pueden tener en la construcción de su conocimiento geométrico.

Plantear actividades abiertas, experimentales, centradas en el diálogo y enmarcadas en contextos artísticos favorecen un ambiente de experimentación y significación para los niños. Y propicia a maestros e investigadores un escenario para reconocer la diversidad de maneras como los niños interpretan determinadas situaciones y construyen significados de nociones y procesos matemáticos. Según Fernández y Reyes (2003), la expresión artística goza de un extraordinario contenido matemático. La contextualización artística favorece la observación, el análisis e interpretación de formas, la distribución espacial, etc. La manipulación y la elaboración de obras de arte facilitan la exploración y la experimentación de los conceptos y también facilitan el desarrollo natural de aprendizaje (Antón y Gómez, 2016). Además, plantear propuestas escolares que permitan conexiones entre las matemáticas y el arte brinda la posibilidad de desarrollar unos aprendizajes más significativos y globalizados, aspectos que se resaltan en los planteamientos curriculares actuales para la educación infantil.

La simetría es una noción poco explorada en educación infantil, pero sabemos que su abordaje es relevante si queremos favorecer el desarrollo del pensamiento matemático de los niños. Debemos seguir indagando en propuestas escolares que exploren esta noción tanto en contextos artísticos como en otros. Y discutir con maestros en formación y en ejercicio sobre estas propuestas para que reconozcan su viabilidad y la importancia de incorporarlas en sus aulas.

Agradecimientos

Trabajo en colaboración con los equipos de los proyectos: PID2019-104964GB-100 y PGC2018-098603-B-I00 (MICINN); y los equipos de los grupos de investigación: SGR-2017-101 y SGR-2017-1181.

Referencias bibliográficas

Antón, A. y Gómez, M., (2016). La geometría a través del arte en educación infantil. *Enseñanza & Teaching. Revista interuniversitaria de didáctica*, 34(1), 93-117. doi: 10.14201/et201634193117

Brenneman, L., Stevenson-Boyd, J., y Frede, E. (2009). *Math and science in preschool: Policies and practice.* Preschool Policy Brief, 19, 1-12.

Canals, M.A. (1997). Geometría en las primeras edades escolares. *Suma- Revista para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*, 25, 32.

Chamorro, M.C. (2003) *Didáctica de las matemáticas para primaria*. Madrid: Pearson Educación.

Clements, D. H., y Sarama, J. (2015). *El aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas a temprana edad: El enfoque de las trayectorias de aprendizaje.* Learning Tools LLC.

Clements, D. H. y Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*. Routledge.

Confrey, J. (2006). The evolution of design studies as methodology, In Sawyer, R.K. (Ed.). *The Cambridge Handbook of the Learning Sciences*, pp. 135-152. Nueva York: Cambridge University Press.

De Castro y Quiles, O. (2014). Construcciones simétricas con 2 i 3 años. La actividad matemática emergente del juego infantil. *Aula de Infantil*, 77, 32-36.

Eberle, R. S. (2014). The role of children's mathematical aesthetics: The case of tessellations. *The Journal of Mathematical Behavior*, 35, 129-143. doi: 10.1016/j.jmathb.2014.07.004

Fernández, I. y Reyes, E. (2003). *Geometría con el hexágono y el octógono*. Granada: Proyecto Sur.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Dordrectht: Kluwer Academic Publishers.

Generalitat de Catalunya. (2016). *Currículum i orientacions educació infantil segon cicle*. Departament d'ensenyament.

Giménez, J. y Vanegas, Y. (2019). Contextualizações de transformações geométricas na Educação Infantil. *Perspectivas da Educação Matemática*, *12*(28), 56-73.

Jones, K. (2002). Issues in the teaching and learning of geometry. In L. Haggarty (Ed) *Aspects of teaching secondary mathematics* (pp. 121-139). London: Routledge.

Knuchel, C. (2004). Teaching symmetry in the elementary curriculum. *The Montana Mathematics Enthusiast*, 1(1), 3-8.

National Council of Teachers of Mathematics – NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: National Council of teacher of Mathematics.

Sarama, J., Clements, D. H., Barrett, J. E., Cullen, C. J., Hudyma, A., y Vanegas, Y. (2021). Length measurement in the early years: teaching and learning with learning trajectories. *Mathematical Thinking and Learning*, 1-24. Doi:10.1080/10986065.2020.1858245

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(2), 114–145. Doi: 10.2307/479205

Van den Heuvel-Panhuizen, M., y Buys, K. (2012). *Young children learn measurement and geometry: A learning-teaching trajectory with intermediate attainment targets for the lower grades in primary school.* Brill Sense. Doi:10.1163/9789087903985

Vanegas, Y., Rosell, C. y Giménez, J. (2021). Insights about constructing symmetry with 5-year-old children in an artistic context. In M. van den Heuvel-Panhuizen & A. Kullberg (Eds.), *Proceedings of the ICME-14 Topic Study Group 1 Mathematics education at preschool level* (pp. 11-15). Shanghai, China, ICME- 14.

Vanegas, Y., Prat, M., y Rubio, A. (2019). Characterisation of the learning trajectory of children aged six to eight years old when acquiring the notion of length measurement. In U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen, & M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2381 – 2388). Utrecht, the Netherlands: Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME.

VOL 34, NÚMERO 2, AÑO 2021

O PROGRAMA FOMENTO FLORESTAL DE EUCALIPTO – PFFE: EDUCAÇÃO AMBIENTAL, SUSTENTABILIDADE E MATEMÁTICA

THE EUCALYPTUS FORESTRY FOSTERING PROGRAM: ENVIRONMENTAL EDUCATION, SUSTAINABILITY AND MATHEMATICS

Valquíria Marçal e Silva, José Fernandes Silva, Cinara Rodrigues de Almeida
Universidade Cruzeiro do Sul, Instituto Federal de Minas Gerais, Secretaria de Estado da Educação de Minas Gerais (Brasil)
valquiriamarcalsilva@gmail.com, jose.fernandes@ifmg.edu.br, cinaraalmeidajf@hotmail.com

Resumo
Estudo teve objetivo investigar as possibilidades de discussão da Educação Ambiental, Sustentabilidade e Matemática no âmbito do Programa Fomento Florestal de Eucalipto - PFF para alunos do Ensino Médio na região do Vale do Rio Doce, Estado de Minas Gerais, Brasil. Esta investigação é qualitativa, com recursos de coleta de dados baseados em estudos bibliográficos e documentais. Os dados mostram que dada a importância do PFF, na citada região, faz-se necessário discuti-lo no âmbito escolar, em especial, no âmbito da Biologia e da Matemática buscando a formação de jovens críticos e capazes de agirem em defesa da natureza.

Palavras-chave: sustentabilidade; educação ambiental crítica; matemática; etnomatemática

Abstract
The study was aimed at researching the possibilities to discuss environmental education, sustainability and Mathematics in the scope of the Eucalyptus Forestry Fostering Program - EFFP for high school students in the region of Vale do Rio Doce, State of Minas Gerais, Brazil. This research is qualitative-type, with data collection resources based on bibliographic and documentary studies. Data show that, given the importance of the EFFP in the aforementioned region, it must be discussed within the school environment, especially in the context of Biology and Mathematics, looking to train critical young people capable of playing a role in defense of nature.

Key words: sustainability, critical environmental education, mathematics, ethno-mathematics

Introdução

Este artigo tem o objetivo de discutir o Programa Fomento Florestal de Eucalipto – PFFE, relacionando as abordagens de Educação Ambiental, Sustentabilidade e Matemática.

É recorrente o desafio dos professores que ensinam Ciências e Matemática em relação à promoção do diálogo entre os conteúdos lecionados em sala de aula e os contextos sociais, políticos, econômicos e culturais dos estudantes. Tal dissociação entre a teoria e o mundo dos discentes corrobora para altos índices de reprovação, evasão e descontentamento destes com o universo científico.

O Programa Fomento Florestal de Eucalipto – PFFE tem presença marcante no Brasil, em especial, no Vale do Rio Doce, região Leste do Estado de Minas Gerais. Este traz vantagens econômicas para pequenos produtores rurais, pois a manutenção da vida no campo para eles é um desafio constante, uma vez que os incentivos governamentais para a pequena propriedade não são suficientes para financiar um desenvolvimento sustentável. Na citada região, parte dos estudantes da Educação Básica, especialmente aqueles da zona rural, vivenciam situações que os ligam, direta, ou indiretamente, a esta prática econômica. Desta forma, refletir sobre este universo é fundamental para compreender formas de promover debates sobre como aliar a realidade destes estudantes ao contexto do ensino de Ciências e Matemática.

O Programa de Fomento Florestal de Eucalipto - PFFE implanta, em parceria com produtores rurais, florestas de eucalipto comerciais em áreas não aproveitáveis para a agricultura ou para pecuária. Sua presença é marcante no Leste do Estado de Minas Gerais, Brasil, em especial, no Vale do Rio Doce, o que torna esta região forte produtora e exportadora de celulose. O PFFE é uma das principais fontes de renda dos produtores rurais do Vale do Rio Doce, sendo ele uma oportunidade de diversificação da cadeia produtiva nesta região (ABRAF, 2006).

Importante destacar que as políticas públicas para o setor rural evoluíram a partir dos anos 2000, porém, ainda não atingem a todos os produtores nos quesitos financeiros e suporte técnico para alavancar as diversas cadeias produtivas que o campo pode propiciar.

Com a ausência de recursos financeiros e suporte técnico, o pequeno produtor rural acaba deixando suas terras improdutivas, o que traz prejuízo pessoal e ambiental, pois muitas destas terras improdutivas levam ao desgaste e à erosão.

Uma das alternativas para os produtores rurais de diversos municípios do Brasil e, em especial, para os Municípios do Vale do Rio Doce, têm sido os programas de fomentos florestais. Neste sentido, tais programas são instrumentos estratégicos que promovem a integração dos produtores rurais na cadeia produtiva incluindo aspectos econômicos, sociais e ambientais.

Discutir criticamente aspectos positivos e negativos das contribuições destes programas de fomento florestal é importante, pois eles se fazem presentes em diversos municípios do Vale do Rio Doce. Assim, debatê-los no âmbito escolar, levando em consideração suas potencialidades e seus impactos ambientais, contribui para o desenvolvimento sustentável da região, conexão entre os currículos e o mundo do trabalho dos estudantes, estabelecimento de reflexões sobre a importância da Matemática para a tomada de decisões e suas potencialidades para o exercício da cidadania.

Ademais, os currículos escolares precisam dialogar com as problemáticas do mundo contemporâneo, em especial, a questão ambiental. Um dos questionamentos a respeito da silvicultura é o impacto ambiental causado pelas florestas de eucalipto (e/ou monoculturas em geral), como a degradação do solo, alteração na biodiversidade: fauna e flora e, com maior ênfase, o impacto do eucalipto sobre a umidade do solo, os aquíferos e lençóis freáticos, conforme apontam Resende, Camelo e Rabelo (2011).

Em contrapartida, as empresas que promovem o fomento florestal alegam, segundo Negra, Silva e Negra (2014, p. 7), que para o plantio, as propriedades rurais devem garantir o mínimo de 20% da área total como área de preservação ambiental. Neste sentido,

[...] em vista a legislação atual a empresa exige que a reserva legal esteja averbada na matrícula do imóvel que será implantado a floresta. Após a vistoria prévia do local e devidas liberações por parte da empresa e do IEF é feito o levantamento topográfico da área a ser plantada (denominado pré-plantio). Após levantamento e documentações analisadas é firmado o contrato de parceria entre a empresa e o produtor rural.

Estudos dos citados autores demonstram que as empresas de fomento florestal, afirmam, em suas políticas, que mantém, em cada região fomentada, uma área de reserva de mata nativa, onde há uma diversidade de fauna e flora, mantendo, também, matas ciliares que auxiliam na recomposição dos mananciais. Diante do exposto, é importante que pesquisas, neste contexto, sejam realizadas, pois se constituem uma oportunidade de apontar convergências e divergências entre o proposto pela legislação, os estudos teóricos e a realidade encontrada nas propriedades rurais que participam do Programa Fomento Florestal. Tais pesquisas são importantes para as práticas pedagógicas dos professores que ensinam Ciências e Matemática, pois estas devem ser campos profícuos para os debates das problemáticas que envolvem a vida social e cultural dos estudantes.

É fato que os jovens estudantes precisam refletir sobre as potencialidades do campo, porém visando não somente a área econômica, mas também a preservação dos recursos naturais, a relação entre o homem e o meio ambiente e as práticas matemáticas que subsidiam suas atividades de subsistência. Isso posto, juntamente com políticas públicas destinadas à fixação da população no campo, poderá mitigar a prática histórica do êxodo rural, tanto do campo para as cidades da região, quanto para países desenvolvidos, com destaque para os Estados Unidos da América (EUA), conforme nos aponta Alves e Siqueira (2020).

Aliado às políticas públicas é importante ressaltar que o desenrolar do currículo das disciplinas escolares busque dialogar e valorizar os conhecimentos advindos dos contextos sociais. Destarte, as práticas educativas podem fortalecer o processo de organização, sistematização e consolidação de conhecimentos baseando-se na inter-relação entre as ciências. Diante do exposto, Mendes (2016, p. 2) comenta:

[...] as propostas educacionais enunciam que o processo de ensino e aprendizagem em matemática deve ser condutor do alcance de autonomia e aquisição ou desenvolvimento de competências e habilidades para leitura, compreensão e explicação da vida, da natureza e da cultura, de modo que o aluno possa seguir de forma cidadã, a sua vida. O que queremos, na verdade, é que nossos alunos obtenham formação do campo conceitual, do campo procedimental e do campo atitudinal, que contribuam efetivamente para a sua formação cidadã.

Conforme apontam Silva, Silva e Freitas (2019), é mister a promoção do diálogo entre as áreas do conhecimento, em especial, a Matemática e a Biologia, para o desenvolvimento dos domínios lógicos e o avanço dos níveis conceituais.

Marco teórico

Fomento Florestal

O fomento florestal de eucalipto é uma das principais fontes de renda dos produtores rurais do Vale do Rio Doce, sendo ele uma oportunidade de diversificação da cadeia produtiva nesta região. Tal perspectiva é abordada no boletim informativo da Associação dos Resinadores do Brasil (ARESB):

O fomento florestal é um instrumento estratégico que promove a integração dos produtores rurais à cadeia produtiva, proporcionando-lhes vantagens econômicas, sociais e ambientais. Com as restrições e estruturas de incentivo impostas pelo ambiente institucional, para as empresas industriais do setor florestal que dependem da silvicultura como fonte de matéria-prima, é comum o desenvolvimento de arranjos organizacionais que buscam o suprimento de madeira e as parcerias com proprietários de terras, para o cultivo de florestas. Neste contexto, o fomento florestal foi desenvolvido para suprir essa demanda e, ao mesmo tempo, promover a repartição de benefícios advindos da atividade de florestas plantada e de fortalecer a atuação social das empresas regionalmente junto aos pequenos e médios produtores rurais nas áreas de influência. (ARESB, 2018, p. 1).

De acordo com Sant'Anna (1996), o Programa de Fomento Florestal é um sistema de fornecimento de matéria-prima (eucalipto) utilizado pelas empresas de celulose e pelas siderúrgicas com o objetivo de garantir sua base de produção. Para fins de produção de celulose, de acordo com Oliveira (2003), são repassados aos produtores: mudas, fertilizantes, defensivos, recursos financeiros e assistência técnica.

Reafirmando o exposto, a Associação Brasileira de Produtores de Florestas Plantadas (ABRAF), em relatório publicado em 2006, o Fomento Florestal, no Brasil, tem as seguintes características: doação e venda de mudas de espécies florestais, programa de renda antecipada para o plantio florestal, parcerias que permitem combinações de pagamento antecipado e a garantia da compra da madeira pela empresa na época da colheita. Complementando tais características de um Programa de Fomento Florestal, Souza (2013, p. 127) destaca que as estratégias devem ser compostas por:

Assistência técnica, da concepção dos projetos até a colheita; Custeio do projeto e fornecimento de insumos: mudas, fertilizantes, iscas formicidas, recursos financeiros e consignação de implementos para implantação e manutenção dos cultivos florestais fomentados; Limitação das áreas para implantação dos cultivos florestais nas PPR; Compra periódica de madeira em produção e Garantia de compra integral ou parcial da produção florestal.

Além destas estratégias, Souza (2013) destaca a importância do diálogo entre as políticas das parcerias privadas com as políticas públicas nos diversos âmbitos administrativos.

Neste sentido, o fomento florestal consiste em contratos formais de produtores rurais e empresas de celulose e carvão vegetal. Tais contratos criam vínculos entre as partes, pois o produtor recebe assistência técnica da empresa e, em contrapartida, tem a venda garantida ao final do contrato. Além disso, este isentou as empresas do setor da aquisição de terras em grande quantidade. Tal fato possui razões diversas que precisam ser discutidas. A primeira delas consiste na diminuição de gastos da empresa com a manutenção e pagamento de impostos por grandes propriedades rurais; a segunda, de certa forma, está relacionada à primeira, pois ao delegar a responsabilidade da plantação para o pequeno produtor, a empresa isenta-se de gastos com mão de obra e responsabilidades ambientais (proteção de nascentes, incêndios florestais, reserva de mata nativa, segurança em geral, gastos trabalhistas, cuidado e manejo do solo, entre outros).

Por outro lado, a implementação PFFE trouxe mudanças no meio rural, pois produtores que antes usavam as matas nativas para produção ilegal de carvão vegetal, hoje vê a oportunidade de produzir a madeira através da floresta plantada em áreas improdutivas, ou áreas de pastagens sem a necessidade de desmatamento, com a possibilidade de seguir as normas vigentes da lei. De acordo com o Instituto Estadual de Floresta de Minas Gerais (IEF):

Levantamento divulgado pela Diretoria de Desenvolvimento e Conservação Florestal (DDCF) do Instituto Estadual de Florestas (IEF), órgão que integra o Sistema Estadual de Meio ambiente e Recursos Hídricos (Sistema), revela que o consumo de carvão vegetal de origem nativa pelos grandes consumidores do Estado teve uma redução de aproximadamente 61% com relação aos últimos quatro anos Os dados mostram que em 2008 o consumo de carvão de mata nativa em Minas Gerais era de 8.252.160,97 de metros cúbicos. Em 2011 esse consumo baixou para 3.160.981,10 metros cúbicos. Em 2009 o consumo foi de 6.278.903,29 e em 2010 de 4.325.823,95 metros cúbicos de carvão de mata nativa. Em 2011, do total de carvão produzido e consumido no Estado de Minas, apenas 4,4% são de origem nativa, demonstrando uma contínua redução da fração produzida no Estado. (IEF, 2012, s. p.)

Como citado, houve uma redução na produção de carvão vegetal originado de madeira nativa. É provável que o amplo plantio de eucalipto, via fomento florestal, tenha tido impacto nessa redução. Além disso, as leis ambientais e aumento de fiscalização com apoio tecnológico contribuem para que produtores rurais diminuam o desmatamento.

Há que se destacar o papel da Lei 18.365/2009 - que dispõe sobre as políticas florestal e de proteção à biodiversidade no Estado no Estado de Minas Gerais – contribuiu de forma significativa na redução progressiva do consumo legal de produtos ou subprodutos originados da vegetação nativa, em especial o carvão vegetal.

Educação Ambiental e sustentabilidade

A contemporaneidade apresenta desafios ao contexto educacional. Vivemos numa sociedade cuja principal característica é a complexidade social, econômica, cultural, política e ambiental. Os sistemas educacionais têm sido cobrados por não debater de forma consistente as principais temáticas da sociedade, em especial, aquelas que tangem o universo do desenvolvimento sustentável. Neste sentido, é importante que as escolas de educação básica revisitem suas práticas no que concerne ao Ensino de Ciências/Biologia/Matemática, buscando fomentar práticas que discutam as noções de Educação Ambiental e Sustentabilidade em estreita relação com os arranjos locais.

A Educação Ambiental possui diferentes vertentes de abordagens, entre elas destacam: a conservacionista, a pragmática e a crítica. Adotamos para esta investigação as concepções críticas, pois estas estão baseadas numa perspectiva transformadora, popular, emancipatória e dialógica (Loureiro, 2007; Lima, 2009). Como exposto, trata-se de um modelo de Educação Ambiental que reconhece o homem como um sujeito ecológico, ou seja, suas relações sociais são fundamentais para a tomada de consciência em relação ao meio no qual ele vive (Carvalho, 2004). Nesta perspectiva:

A escola é o espaço social e o local onde poderá haver sequência ao processo de socialização. O que nela se faz se diz e se valoriza representa um exemplo daquilo que a sociedade deseja e aprova. Comportamentos ambientalmente corretos devem ser aprendidos na prática, no cotidiano da vida escolar, contribuindo para a formação de cidadãos responsáveis. Assim a Educação Ambiental é uma maneira de estabelecer tais processos na mentalidade de cada criança, formando cidadãos conscientes e preocupados com a temática ambiental. (Roos e Becker, 2012, p. 861).

Considerando a escola como espaço social os citados autores afirmam que a temática ambiental toma lugar de destaque, pois é fundamental que as crianças e jovens reflitam, desde cedo, sobre o espaço em que vivem e como cuidar dele. É fundamental que cada pessoa desenvolva as suas potencialidades e adote posturas pessoais e comportamentos sociais construtivos, colaborando para a constituição de uma sociedade socialmente justa, em um ambiente saudável e acima de tudo sustentável.

Assim, há que se refletir, o processo educativo necessita se apoiar numa perspectiva crítica, ampliando o ambiente educativo para além dos muros da escola, buscando outros métodos para abordar a educação ambiental. Em outras palavras, trata-se da escola interagir com o mundo fora dela. Isso se contextualiza no processo formativo das ações cotidianas, de constituição da realidade a qual a escola está inserida, mas sem perder o sentido que esta é influenciada e influi na constituição global.

Para tanto é desejável a criação, por nós educadores, de um ambiente educativo que propicie a oportunidade de conhecer, sentir, experimentar; ou seja, vivenciar aspectos outros aos que predominam na constituição da atual realidade socioambiental. Isso poderá potencializar uma prática diferenciada que, pelo incentivo à ação cidadã em sua dimensão política, repercuta em novas práticas sociais voltadas para a sustentabilidade socioambiental. (Guimarães, 2007, p. 92)

O autor supracitado ainda afirma que a educação ambiental, que é capaz de contribuir no enfrentamento da crise socioambiental que vivenciamos, é aquela que se faz do ambiente educativo um espaço de participação, em que a aprendizagem se dá em um processo de construção de conhecimentos de suas vivências.

A Política Nacional de Educação Ambiental (PNEA), no artigo 1º da Lei nº 9.795/99, destaca a definição da educação ambiental dada como processos por meio dos quais os cidadãos constroem valores sociais, conhecimentos, habilidades, atitudes e competências voltadas para a conservação do meio ambiente, bem de uso comum do povo, essencial à sadia qualidade de vida e sua sustentabilidade.

O termo "desenvolvimento sustentável", segundo a União Internacional para Conservação da Natureza, surgiu em meados do ano de 1980 para discutir a relação entre a preservação do planeta com as demandas das necessidades humanas. Seguindo esta linha, o termo sustentabilidade foi apresentado oficialmente na Comissão Mundial sobre Meio Ambiente e Desenvolvimento da Organização das Nações Unidas (ONU) em 1988 como "[...] a capacidade de satisfazer as necessidades do presente sem comprometer a capacidade das gerações futuras de satisfazerem suas próprias necessidades". (ONU, 1988, p. 9).

Estes termos seguem na atualidade referindo-se à procura pelo equilíbrio entre a utilização dos recursos naturais pelos seres humanos e a manutenção e conservação destes recursos para as gerações futuras. Sendo assim, visa discutir a exploração ambiental, o cuidado com o planeta e a qualidade de vida das pessoas, onde faz-se necessário o uso racional dos recursos naturais.

De acordo com Roos e Becker (2012), o princípio da sustentabilidade, portanto, surge com a globalização, em que a sustentabilidade ambiental se traduz na capacidade do sistema manter, apoiar, cuidar e conservar o seu estado constante no tempo, incorporando a complexidade entre o homem e o meio. Para isso, as discussões da Educação Ambiental são importantes bases para a sustentabilidade, pois o processo educativo tem impactos a longo prazo no âmbito da sociedade. O modelo de produção atual necessita de reflexões constantes, pois o foco no lucro tem sido fator para atitudes criminosas com a natureza.

Impactos ambientais das florestas de eucalipto

Segundo a cartilha "*Escravo, nem pensar!*", elaborada pela Organização Não Governamental (ONG) "Repórter Brasil" com o apoio da Fundação Instituto Rosa Luxemburgo Stiftung, o que mais diz respeito aos impactos ambientais em uma silvicultura de eucalipto é que consomem muita água e contribuem para a diminuição do fluxo de rios e córregos podendo chegar à seca completa (Repórter Brasil, 2011). Ainda, segundo esta ONG, as monoculturas de eucalipto não abrigam grande diversidade de espécies de plantas e animais, além disso, o uso intenso de agrotóxicos para extinguir as gramíneas e outras plantas pode inviabilizar ainda mais a biodiversidade local.

O manejo não adequado das plantações pode contribuir para a erosão e para a perda de nutrientes. Qualquer monocultura em larga escala, seja ela uma vasta pastagem, uma lavoura de soja ou uma plantação de cana-de-açúcar, contribui para o desgaste de recursos naturais – como o solo – essenciais à preservação da integridade das fontes hídricas. Não raro, o plantio de eucalipto e pinus se instala em locais de histórico desrespeito à legislação ambiental, onde os danos se encontram acumulados há décadas pelo mau uso do espaço agrícola. Devido à extensão e ao adensamento das árvores, que crescem em rápida velocidade, as fontes de água e o solo são ainda mais deteriorados. (Repórter Brasil, 2011, p, 8)

De acordo com De Vechi e Magalhães Júnior (2018) o plantio de eucalipto exige certa cautela, pois a falta de planejamento e orientações técnicas pode acarretar em problemas como o não respeito às matas ciliares e espécies nativas. Além disso, segundo os autores, é necessária atenção nos processos de adubação, controle de pragas e rotação de culturas.

Etnomatemática e os contextos socioculturais

O Programa Etnomatemática se apresenta como um programa de pesquisa sobre história e filosofia da Matemática, com importantes reflexos na educação, conforme explicitado em D'Ambrósio (2005, p. 102).

[...] é importante esclarecer que entendo matemática como uma estratégia desenvolvida pela espécie humana ao longo de sua história para explicar, para entender, para manejar e conviver com a realidade sensível, perceptível, e com o seu imaginário, naturalmente dentro de um contexto natural e cultural. Isso se dá também com as técnicas, as artes, as religiões e as ciências em geral. Trata-se essencialmente da construção de corpos de conhecimento em total simbiose, dentro de um mesmo contexto temporal e espacial, que obviamente tem variado de acordo com a geografia e a história dos indivíduos e dos vários grupos culturais a que eles pertencem — famílias, tribos, sociedades, civilizações. A finalidade maior desses corpos de conhecimento tem sido a vontade, que é efetivamente uma necessidade, desses grupos culturais de sobreviver no seu ambiente e de transcender, espacial e temporalmente, esse ambiente.

O exposto corrobora para o entendimento de que a Matemática é uma Ciência advinda das práticas sociais e culturais. Sendo assim, seu papel necessita ser muito mais amplo que resolver listas de exercícios. Seu potencial de transformação e diálogo com as outras Ciências potencializam ações para o bem estar das sociedades. Desta forma, comungamos com o citado autor quando relata:

O presente é quando se manifesta a (inter)ação do indivíduo com seu meio ambiente, natural e sociocultural, que chamo comportamento. O comportamento, que também pode ser chamado prática, fazer, ou ação, está identificado com o presente, e provoca a busca de explicações organizadas, isto é, de teorização, como resultado de uma reflexão sobre o fazer. A teorização e elaboração de um sistema de explicações é o que geralmente chamamos saber ou simplesmente conhecimento. Na verdade, conhecimento é o substrato do comportamento. Vida é ação, e comportamento e conhecimento são a essência de se estar vivo (D`Ambrósio, 2005, p. 108).

As contribuições da Etnomatemática propostas por D`Ambrósio (2005), sugerem que:
No âmbito das culturas,o conhecimento, é gerado em contexto natural, social e cultural;
As experiências são matematizadas ao longo da história;
As culturas manifestam a arte de quantificar, selecionar, organizar, inferir e outras formas de lidar com o meio;
As ações educativas precisam ser baseadas em cooperação, solidariedade, respeito, ética e paz
A Matemática necesita da contextulização;
A resolução e a modelação de problemas são necesssárias à abordagem da Matemática;
A apredizagem não é o mero domínio de técnicas, exercícios, habilidades e nem a memorização de explicações, teorias e conceitos;
A organização do conheciemento, pelos indivíduos, é histórica.
Tais reflexões podem impulsionar a escola a refletir sobre as práticas curriculares.
Método
Esta investigação é qualitativa, para tal nos baseamos em Garnica (2004, p. 86) que a caracteriza como a abordagem metodológica que tem as seguintes características:

(a) a transitoriedade de seus resultados; (b) a impossibilidade de uma hipótese a priori, cujo objetivo da pesquisa será comprovar ou refutar;(c) a não neutralidade do pesquisador que, no processo interpretativo, vale-se de suas perspectivas e filtros vivenciais prévios dos quais não consegue se desvencilhar; (d) que a constituição de suas compreensões dá-se não como resultado, mas numa trajetória em que essas mesmas compreensões e também os meios de obtê-las podem ser (re)configuradas; e (e) a impossibilidade de estabelecer regulamentações, em procedimentos sistemáticos, prévios, estáticos e generalistas

Além do exposto, o processo de pesquisa necessita de reflexões prévias para o seu empreendimento, ou seja:

Para fazer pesquisa é necessário ter uma dúvida, um questionamento, uma pergunta. Fala-se do problema, o que se quer investigar? É a partir desta dúvida ou desta pergunta inicial, que parte do senso comum, que se procura a teoria e o método que fundamentaram a pesquisa. Parece simples colocar as coisas nestes termos, tenho um problema, procuro uma teoria, uma metodologia e está resolvido o meu projeto de pesquisa. Bom, é claro que o conhecimento científico não é elaborado de forma simplista, este entendimento seria temerário e porque não dizer ingênuo. Ao propor uma discussão de base científica são necessários: clareza, rigor, domínio de conceitos, teorias e métodos. (Lara e Molina, 2011, p. 2).

Em relação aos procedimentos técnicos foi empreendida uma pesquisa bibliográfica, que, conforme Gil (1999) e Severino (2007) é aquela construída a partir de buscas em livros, artigos científicos, dissertações e teses.
Os procedimentos metodológicos foram organizados levando em consideração os passos propostos por Gil (2002)
Escolha do Tema: fase de explicitar o interesse de pesquisa;
Levantamento Bibliográfico preliminar: seu objetivo é facilitar a formulação do problema;
Formulação do Problema: não existem regras claras que possam ser aplicadas nessa etapa, porém, algumas perguntas podem ser úteis, tais como: O tema é de interesse do pesquisador? O problema apresenta relevância teórica e prática? Existe material bibliográfico suficiente e disponível para seu equacionamento e solução? O problema foi formulado de maneira clara, precisa e objetiva?;
Elaboração do plano provisório de assunto: consiste na organização sistemática das diversas partes que compõem o objeto de estudo. O plano de assunto consiste na organização, na estruturação do trabalho;
Busca de fontes: as fontes bibliográficas mais conhecidas são os livros, teses e dissertações, periódicos científicos, anais de encontros científicos e periódicos;
Leitura do material: o objetivo é identificar as informações e os dados constantes do material, estabelecer relações entre as informações e os dados obtidos com o problema proposto e analisar a consistência das informações e dados apresentados pelos autores;
Fichamento: tomada de notas, registros e ideias dos autores consultados;
Organização lógica do assunto: busca pela organização lógica das ideias em torno do tema visando facilitar a redação do texto e;
Redação do texto: etapa final do processo investigativo com foco em organizar e divulgar as informações compiladas ao longo do processo investigativo.

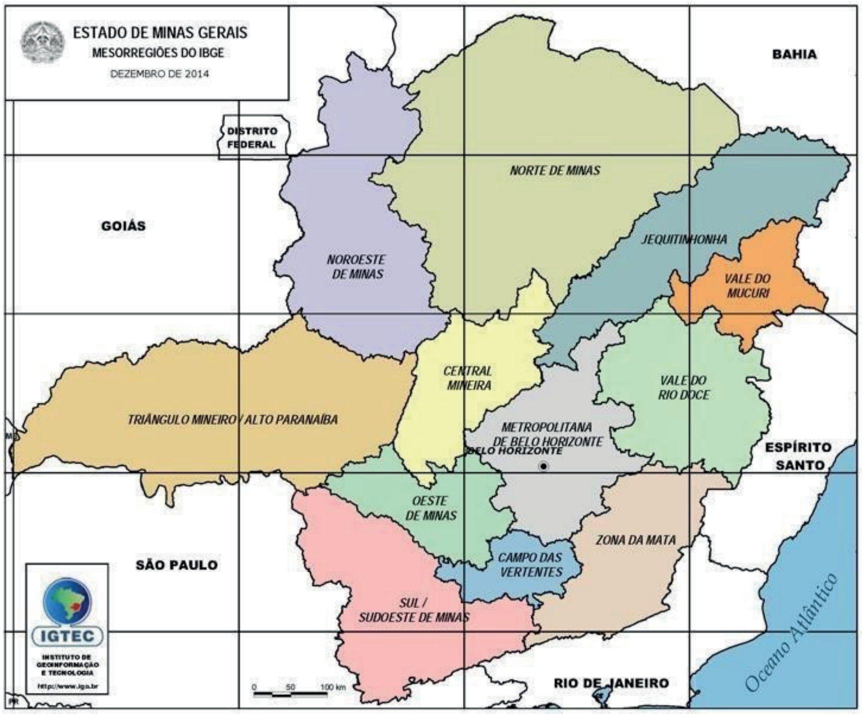
Também foi realizada uma pesquisa em documentos, pois estes, segundo Macdonald e Tipton (1993), se constituem elementos socialmente construídos e, desta forma, podem refletir registros de uma realidade, tal como acontece com os oficiais, por exemplo.

Analisou-se documentos referentes ao PFFE buscando conhecer seu contexto no Leste do Estado de Minas Gerais, Brasil, região denominada Vale do Rio Doce. Como categorias de análise adotou-se as possibilidades de discussões do citado programa nos âmbitos da Educação Ambiental, Sustentabilidade e Etnomatemática.

Resultados

O Vale do Rio Doce apresenta 151.649,06 hectares de área plantada de eucalipto. Tal dado o deixa como a quarta mesorregião com maior concentração das áreas de eucalipto em Minas Gerais.

Figura 1. *O Vale do Rio Doce no contexto do Estado de Minas Gerais.*



Fonte. https://www.mg.gov.br/conteudo/conheca-minas/geografia/localizacao-geografica
O vale do Rio Doce está dividido em seis mesorregiões:

Figura 2. *Mapa do Vale do Rio Doce – Mesorregiões.*

Fonte. http://www.sites-do-brasil.com/diretorio/index.php?cat_id=762

Os municípios com maior concentração de eucalipto são: Peçanha (19.189 ha), Sabinópolis (17.468 ha), Antônio Dias (14.793 ha), Coroaci (12.441 ha) e Guanhães (8.658 ha).

No que concerne aos aspectos de Educação Ambiental dados mostram que desde o início do cultivo da monocultura de eucalipto no mundo, há discussões sobre os impactos que ela causa (Vital, 2007). A maioria desses debates são vinculados ao empobrecimento e erosão do solo, ao impacto sobre a umidade, os aquíferos e lençóis freáticos e a baixa biodiversidade observada em monoculturas. Assim, essa problemática precisa ser refletida, pois afeta direta e indiretamente a vida das pessoas e dos outros seres vivos.

No que tange à sustentabilidade, esta refere-se à procura pelo equilíbrio entre a utilização dos recursos naturais pelos seres humanos e a manutenção e conservação destes recursos para as gerações futuras. Sendo assim, visa discutir a exploração ambiental, o cuidado com o planeta e a qualidade de vida das pessoas, onde faz-se necessário o uso racional dos recursos naturais. Nesta perspectiva, o PFFE pode ser discutido no âmbito escolar de forma entrelaçada às exortações dos objetivos sustentáveis da Organização das Nações Unidades. A implantação de Sistemas Agrossilvipastoris pode ser um caminho benéfico para amenizar a questão dos impactos ambientais causados pela monocultura de $A = \pi r^2$eucalipto, pois neste tipo de sistema há uma diversificação da produção e da renda do produtor rural, bem como fomentar os cuidados com o ambiente.

Quanto à abordagem da Matemática é importante destacar que a sua utilização deve estar entrelaçada à consciência ambiental e sustentável. Dado que os alunos do Ensino Médio do Vale do Rio Doce são potenciais participantes direta ou indiretamente, do PFFE faz-se necessário abordar o contexto de tal programa nas escolas. A Matemática empregada no PFFE é fundamental para definir não só o sucesso em questão de lucro, mas sobretudo o respeito ao meio ambiente, pois, como por exemplo, uma medição equivocada da dosagem de herbicidas e/ou formicidas pode contaminar lençóis freáticos, solos e causar envenenamentos de pessoas e animais (Silva, Silva e Silva, 2021).

Tomando como exemplo uma área de 4,5 hectares ($45000m^2$), os citados autores apresentam o uso da Matemática no contexto da plantação de eucalipto.

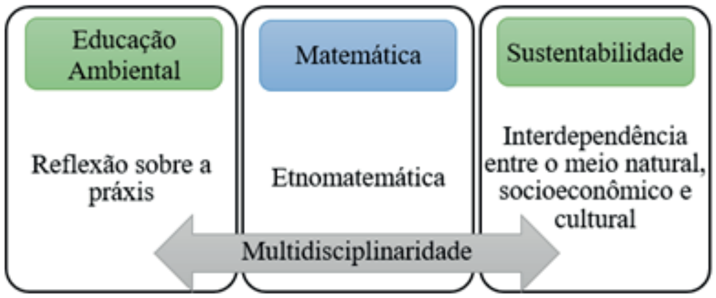
Tabela 1. *Matemática envolvida no processo de plantio do Eucalipto.*

Mudas	Adubos	Formicidas
1°. Calcula-se a área total em metros quadrados: $1\ ha = 10000m^2$ $4{,}5\ ha = 45000m^2$ 2°. O espaçamento em metros recomendado entre as mudas é de 3 x 3. Calcula-se a área ocupada por cada muda: $3m \times 3m = 9m^2$ 3°. Divide-se a área total pela área ocupada por cada muda: $\frac{45000m^2}{9m^2} = 5000$ mudas 4°. Supondo que a mortalidade das mudas é de 8%, calcula-se quantas mudas a mais é preciso comprar: 8% = 0,08. 0,08 × 5000 = 400 Logo, são necessárias 400 mudas a mais.	A adubação é feita de 0 a 25 dias após o plantio, é aplicada dentro da cova, a 15 *cm* da muda. O adubo normalmente utilizado é o NPK 06-30-06, sua dosagem é de 100g por cova, sendo metade em cada lado da muda. 1°. Adubação inicial é de 100 gramas por cova. 2°. Total de adubação inicial para as 5.000 covas. $100g \times 5000$ covas $= 500000g = 500kg$ 3°. Adubação de manutenção é de $18g$ por planta. 4°. Total de adubo necessário. $18g \times 5000$ plantas $= 90000g = 90kg$ Logo, precisa-se comprar $500kg$ de adubo inicial e $90kg$ de adubos para manutenção.	1°. Considere que área tem $5m^2$ de formigueiros. A cada m^2 de formigueiro, usa-se 10g de formicida, logo: $1m^2 = 10g$ 2°. Calcula-se agora a quantidade de formicida total: $5m^2 = 50g$ Logo, será necessário comprar um total de $50g$ de formicida

Fonte. Silva, Silva e Silva (2021) - Adaptado

Outrossim, a Matemática possui papel de destaque na perspectiva de lucros, pois o produtor pode calcular o volume de madeira por hectare, incidências de impostos, transportes da madeira até a fábrica da empresa parceira e gastos com mão de obra. Por fim, o produtor rural necessita compreender, através de especialistas, os aspectos cartográficos de seu terreno para então cumprir as medidas necessárias de proteção às nascentes e reservas legais. Em vista disso, o diálogo e a relação entre Educação Ambiental, Sustentabilidade e Matemática necessita ser aprofundado de forma a romper as fronteiras, conforme síntese da figura 3:

Figura 3. *Perspectivas críticas de Educação Ambiental, Matemática e sustentabilidade.*



Fonte. Dados dos pesquisadores.

Conclusão

A investigação permitiu compreender que discutir o PFFE no âmbito das aulas de Matemática é importante, pois este se configura uma atividade econômica de alta relevância no Vale do Rio Doce. Assim, fica a reflexão de que a escola poderá discuti-lo em seus currículos, pois enquanto monocultura, este deve alicerçar-se em pilares que visem o bem estar, não só econômico, mas social. O primeiro pilar é reconhecer os limites de precipitação da região, a preservação das matas nativas e nascentes, valorização da biodiversidade, cuidados e manejo correto dos solos, controle do uso de agrotóxicos e cuidados com o lençol freático. O segundo, consiste na observância correta dos princípios científicos e legais para o plantio do eucalipto os quais deverão ser baseados nos princípios da sustentabilidade. Tal fato é importante para o desenvolvimento da reflexão sobre o processo de reflorestamento e conservação dos recursos naturais que, historicamente, foram explorados por colonizadores, grandes empresas e pela intensa densidade demográfica após os anos 90. Reafirmamos que a escola, em especial a Biologia e a Matemática, têm papel fundamental na formação de jovens críticos e capazes de agir em defesa da natureza. Para tal, é necessário o desenvolvimento de práticas educativas que fomentem a investigação e a construção de conhecimento em estreita relação com a realidade ao entorno do estudante, promovendo uma formação emancipatória e integral. A Etnomatemática tem papel de destaque no fomento ao diálogo e ao respeito às práticas culturais dos atores envolvidos no processo de ensino e aprendizagem. Assim, a conjuntura vivenciada pelos estudantes da educação básica, em especial Ensino Médio, do Vale do Rio Doce, dentre os quais, muitos são oriundos de contextos onde as plantações de eucaliptos se fazem presentes, pode ser valorizada, discutida e colocada em destaque diante da matemática escolar.

Referências Bibliográficas

Alves, R. e Siqueira, S. (2020). As marcas da migração internacional no Vale do Rio Doce pelos utensílios domésticos. *Ideias*, 11(1), 1-25.

Associação de Produtores de Florestas Plantadas. (2006). *Anuário estatístico*. Recuperado de http://www.bibliotecaflorestal.ufv.br/handle/123456789/3894

D'Ambrosio, U. (2005). Sociedade, cultura, matemática e seu ensino. *Educação Pesquisa*, São Paulo, 31(1), 99-120.

Gil, A. C. (1999). *Métodos e técnicas de pesquisa social*. São Paulo: Atlas.

GIL, A. C. (2002). *Como elaborar projetos de pesquisa*. São Paulo: Atlas.

Guimarães, M. A. (2007). formação de educadores ambientais. 3 ed. Campinas: Ed. Papirus.

Informativo Aresb. O que é fomento florestal. Recuperado de http://www.aresb.com.br/portal/wp-content/uploads/2018/06/Jo.pdf

Instituto Estadual de Florestas -IEF. (2012). *Consumo de carvão vegetal de origem nativa cai 61% em Minas*. Recuperado de http://www.ief.mg.gov.br/noticias/1/1354- consumo-de-carvao-vegetal-de-origem-nativa-cai-61-em-minas

Lara, A. M. B. e Molina, A. A. (2011). Pesquisa Qualitativa: apontamentos, conceitos e tipologias. In: Cèzar de Alencar Arnaut de Toledo; Maria Teresa Claro Gonzaga. (Eds.), *Metodologia e Técnicas de Pesquisa nas Áreas de Ciências Humanas* (pp. 121- 247). Maringá: EEduem

Loureiro, C. F. B. (2007). *A questão ambiental no pensamento crítico: natureza, trabalho e educação*. Rio de Janeiro: Quartet.

Mendes, I. A. (2016). Práticas socioculturais históricas como objetos de significação para o ensino de conceitos matemáticos. *Anais do Encontro Nacional de Educação de Matemática.* Recuperado de http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/7341_4438_ID.pdf

Negra, E. M. S., Silva, R. K. e Negra, C. A. S. Avaliação do programa de fomento florestal da celulose nipo brasileira s/a (cenibra) sob o ponto de vista dos custos dos produtores rurais. *Anais Do Congresso Brasileiro De Custos - ABC*. Recuperado de https://anaiscbc.emnuvens.com.br/anais/article/view/3746

Ong Repórter Brasil. (2011). *Deserto Verde: Os impactos do cultivo de eucalipto e pinus no Brasil*. São Paulo: Instituto Rosa Luxemburgo Stiftung.

Programa das Nações Unidas para o Desenvolvimento (Pnud). (2015). *Agenda 2030*. Brasília: PNUD.

Roos, A. e Becker, E. L. S. (2012). Educação ambiental e sustentabilidade. *Revista Eletrônica em Gestão, Educação e Tecnologia Ambiental,* 5, 5, 857 – 866.

Sant'anna, J. C. O. (1996). *Fomento florestal como fator de integração e estratégia de diversificação em pequenas e médias empresas rurais - estudos de casos*. Lavras, MG: UFLA, 1996. Dissertação (Mestrado em Administração Rural) – Universidade Federal de Lavras, Lavras.

Severino, A. J. (2007). *Metodologia do trabalho científico*. São Paulo: Cortez.

Silva, J. F, Silva. M. V e Freitas, G. J. (2019). *Diálogo entre matemática e biologia no Exame Nacional do Ensino Médio.* Latinoamericana de Matemática Educativa 32(2) 347-354.

Silva, J. G. M., Silva, S. G. e Silva, J. F**.** (2021). A Matemática presente na produção de eucalipto através do Programa Fomento Florestal para produtores rurais. *Brazilian Journal of Development*, 7(3), 49-64.

Souza, P. G. (2013). *Fomento florestal em pequenas propriedades rurais no Brasil: estratégias e efetividade.* Curitiba, PR: UFPR, 2013. Tese (doutorado Engenharia Florestal) - Universidade Federal do Paraná, Curitiba.

Vital, M. H. F. (2007). Impacto Ambiental de Florestas de Eucalipto. *Revista do BNDES,* Rio de Janeiro, 14(28), 235-276.

UM ESTUDO DAS SITUAÇÕES-PROBLEMA ENVOLVENDO O CONHECIMENTO GEOMÉTRICO DE ESPAÇO E FORMA NO EXAME NACIONAL DO ENSINO MÉDIO (ENEM)

A STUDY OF PROBLEM SITUATIONS INVOLVING GEOMETRIC KNOWLEDGE OF SPACE AND FORM IN THE NATIONAL MIDDLE EDUCATION EXAM (ENEM)

Marger Conceição Ventura Viana, Ednardo Teixeira Leão, José Fernandes Silva
Universidade Federal de Ouro Preto, Escola Estadual Dom Pedro II, Instituto Federal de Minas Gerais, (Brasil)
margerv@terra.com.br, ednardotleao@hotmail.com, jose.fernandes@ifmg.edu.br

Resumo
Esta pesquisa objetivou analisar o desenvolvimento de habilidades auxiliares para resolução de problemas envolvendo conhecimentos geométricos sobre espaço e forma conforme Matriz de Referência do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). É uma investigação qualitativa com levantamento documental, observação e análise de protocolos escritos pelos participantes. Foram realizados cinco encontros com cinco professores da educação básica em Ouro Preto-MG. Os resultados mostram que os professores que trabalham com Geometria devem atentar para o fato de que as habilidades requeridas nesta área do ENEM vão além do formalismo clássico de fórmulas e exercícios, pois demandam habilidades de percepção, construção, representação, concepção e visualização.

Palavras chave: conhecimento geométrico, habilidade, situação-problema, avaliação da aprendizagem

Abstract
This research aimed to analyze the development of auxiliary problem solving skills involving geometric knowledge about space and form according to the National Exam of Middle Education (ENEM). It is a qualitative investigation with documentary survey, observation and analysis of protocols written by the participants. Five meetings were held with five teachers of basic education in Ouro Preto-MG. The results show that teachers who work with Geometry should pay attention to the fact that the skills required in this area of National Exam of Middle Education go beyond the classic formalism of formulas and exercises, as they require skills of perception, construction, representation, design and visualization.

Key words: geometric knowledge, skill, problem-situation, learning assessment

Introdução

O Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), por ter se tornado porta de entrada para a universidade, tem definido, de certa forma, os rumos do que se busca ensinar nas escolas do Brasil. Tal fato justifica realizar investigações sobre este exame e suas repercussões nos processos de ensino e aprendizagem da Matemática.

Um levantamento com dados oficiais fornecidos pelo Instituto Nacional de Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), revelou que a habilidade "resolver situações-problema envolvendo o conhecimento geométrico de espaço e forma" (Brasil, s/d, s/p) é uma das mais cobradas no contexto do ENEM.

E uma breve análise dos documentos oficiais, em particular, nos relatórios do ENEM (Brasil, 1999a, 2001, 2014), mostrou que em todos eles existia, implícita ou explicitamente, menção a conhecimentos geométricos, requisitados em todos os níveis da Educação Básica, mostrou que em todos eles existia, implícita ou explicitamente, menção a conhecimentos geométricos, requisitados em todos os níveis da Educação Básica.

As orientações curriculares como a Base Nacional Curricular Comum (BNCC) aponta a importância da Geometria por esta envolver um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento (Brasil, 2019).

De fato, a Geometria é importante e necessária para descrever o mundo em que se vive, "podendo ser considerada como a parte da Matemática mais intuitiva, concreta e ligada com a realidade, sendo, portanto, fundamental na formação dos alunos" (Passos, 2000, p.1).Logo, resolver situações-problema relativas à Geometria é habilidade indispensável a qualquer estudante, pois contribui até no pleno exercício da cidadania. Diante do exposto, para esta investigação foi elaborada a questão de investigação: "Como uma proposta de atividade pode possibilitar o desenvolvimento de habilidades auxiliares para a de resolver situações-problema envolvendo o conhecimento geométrico de espaço e forma, da Matriz de Referência do ENEM?"

Portanto é preciso examinar que tipos de habilidade são necessários para resolver situações-problema, particularmente as que envolvem o conhecimento geométrico de *espaço* e *forma* da Matriz de Referência do ENEM.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais, Ensino Médio, Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias (PCN) sugerem que o trabalho adequado com Geometria pode desenvolver as habilidades de visualização, desenho, argumentação lógica e de aplicação na busca de soluções para problemas, para que o aluno possa usar as formas e propriedades geométricas na representação e visualização de partes do mundo que o cerca (Brasil, 1999b).

Marco teórico

Para apresentar como surgiram os conhecimentos geométricos e sua importância, tomam-se como fundamento Machado (1998, 2009) e Gazire (2000). E, para apresentar os níveis de raciocínio hierárquicos e sequenciais do modelo de van Hiele, relacionando-os a diversas habilidades necessárias ao desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos, foram consultados diversos pesquisadores, como Lauro (2007), Hoffer (1981) e Vieira (2010).

Para Machado (1998), os primeiros conhecimentos geométricos surgiram de resultados empíricos relacionados às necessidades humanas da época, como construções arquitetônicas, cálculos de áreas e volumes, medições de terra, o que indica "que este ramo da Matemática é muito importante para a formação do cidadão" (Gazire, 2000, p. 73). De fato, este ramo da Matemática tem um significado reconhecido por diversas concepções filosóficas a partir de Platão (Machado, 1998). Além disso, nenhum assunto "presta-se mais à explicitação da impregnação entre a Matemática e a Língua Materna bem como a uma estruturação compatível da ação docente do que a Geometria" (Machado, 1998, p. 137).

Euclides realizou a sistematização dos conhecimentos geométricos em "Os Elementos", superando a simples coleta de dados e técnicas (Gazire, 2000). Segundo Machado (2009, p.31), "o sistema formal elaborado por Euclides para a Geometria (...) [tinha] como termos primitivos as noções de ponto, reta e plano, definindo novos termos a partir desses".

Machado (2009, p.31) mostra que Euclides também assumiu outros cinco princípios, os *axiomas*, mais amplos, "de natureza que julgava lógica e que seriam utilizados em todas as matérias e não somente na Geometria" (Machado, 2009, p. 31).

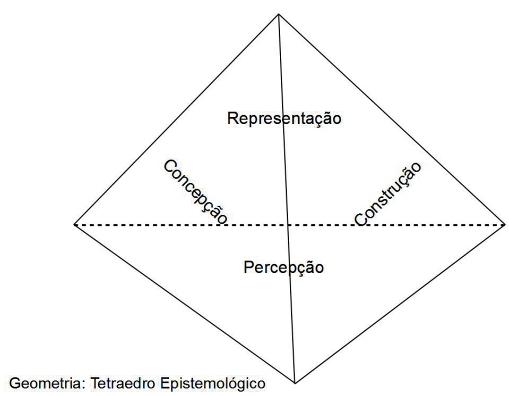
A estruturação da Geometria feita por Euclides pode ser compreendida como: Noções primitivas ⟹ Definições Postulados ⟹Teoremas ⟹

A impossibilidade de demonstrar o quinto postulado de Euclides, a partir dos outros quatro, "foi possível construir outro sistema geométrico diferente, simplesmente refutando o quinto postulado de Euclides e propondo outro em seu lugar" (Gazire, 2000, p. 113). Com isto surgiram novas Geometrias que podem subsidiar na constituição do conhecimento matemático, fundamental para a evolução da sociedade.

Machado (1998, p.142) caracteriza o desenvolvimento do conhecimento geométrico em quatro etapas, *percepção*, *construção*, *representação* e *concepção*: "articulam-se mutuamente, configurando uma estrutura a partir da qual, de modo metafórico, pode-se aprender o significado e as funções do ensino da Geometria".

Como salienta Machado (1998), as etapas não são fases que se sucedem, pois interagem e por isso podem ser representadas simbolicamente por um tetraedro, ilustrado na Figura 1.

Figura 1. *Tetraedro Epistemológico.*



Fonte: Machado (1998, p. 143).

As faces do tetraedro "alimentam-se mutuamente: são como átomos em uma estrutura com características moleculares, que não pode ser subdividida sem que se destruam as propriedades fundamentais da substância correspondente. Isoladamente, qualquer uma das faces desse tetraedro tem um significado muito restrito" (Machado, 1998, p.144).

Lauro (2007) explica cada uma das faces:

- A percepção refere-se à observação e à manipulação de objetos materiais – atividades sensoriais – e à caracterização das formas mais frequentes presentes no mundo à nossa volta. A percepção ocorre por meio de

atividades empíricas. Este processo precisa ser desenvolvido desde as séries iniciais do ensino e relaciona-se diretamente com os demais.
- A construção refere-se à produção de materiais que possam ser manipulados, ou seja, à elaboração de objetos em sentido físico. A construção pode ocorrer com a utilização de massas de modelar, sabão em pedra, madeira, acrílico, papel, varetas, por exemplo. Em certo sentido, a construção reforça a percepção, bem como esta última estimula a construção.
- A representação refere-se à reprodução, por meio de desenhos, de objetos percebidos ou construídos. Neste sentido, fazemos referência ao Desenho Geométrico, bem como à Geometria Projetiva e à Geometria Descritiva. Em qualquer um desses contextos, a representação favorece e é favorecida pela percepção e pela construção.
- A concepção refere-se à organização conceitual, à busca do conhecimento geométrico por meio do raciocínio lógico-dedutivo e da teorização. Diz respeito à sistematização do conhecimento geométrico; ao exercício da lógica, aos elementos conceituais, onde tem predomínio as definições formais, o enunciado preciso de propriedades, proposições e teoremas com suas demonstrações, sejam elas formais ou informais. A concepção é favorecida pela percepção, representação e construção, mas também favorece essas dimensões (Lauro, 2007, p.26-27).

Vieira (2010, p.25), informa que o modelo proposto por van Hiele (Pierre van Hiele e Dina van Hiele-Geoldof pesquisadores holandeses) é "um esquema de compreensão do aluno através de níveis de raciocínio hierárquicos e sequenciais: visualização ou reconhecimento, análise, ordenação ou dedução informal e dedução formal são apresentados com detalhes na tese doutoral de Nasser (1997).

Vieira (2010), em sua dissertação de mestrado, notifica que Hoffer (1981), identificou cinco tipos de habilidades que o aluno deve possuir para entender Geometria, em cada um dos níveis do modelo de van Hiele: visuais, verbais, de desenho, lógicas e aplicadas e que ao cruzar essas cinco habilidades com os cinco níveis (de Van Hiele), encontrou 25 cruzamentos, que mostram o desenvolvimento do aluno em cada habilidade e em cada nível. Estes estão dispostos num quadro encontrado em Vieira (2010).

Quanto à expressão situação-problema, esta pode ser considerada polissêmica, pois não há consenso sobre o seu significado.

[Situação-problema é] uma situação didática na qual se propõe ao sujeito uma tarefa [pergunta, problema] que ele não pode realizar sem efetuar uma aprendizagem precisa. É essa aprendizagem, que constitui o verdadeiro objetivo da situação problema, e se dá ao vencer o obstáculo na realização da tarefa (Meirieu, 1998, p.192).

Conclui-se dessa definição que a situação-problema tem como objetivo uma aprendizagem, que se dará quando o sujeito cumprir a tarefa solicitada.

Para Macedo (2002, p.120) situação-problema é "uma situação de aprendizagem [que] coloca um desafio intelectual, algo a ser superado. Ela pede antecipação dos resultados, planejamento, correr riscos, portanto, reflexão, tematização, disputa, enfrentamento de conflitos, tensões, paradoxos, alternativas diversificadas ou argumentações". E acrescenta: "as situações-problema propõem uma tarefa onde o sujeito deve mobilizar recursos, ativar esquemas e tomar decisões" (p. 125) que é mais do que resolver um problema, pois implica mobilizar valores, estabelecer raciocínios, enfrentar dilemas e decidir pelo que se julga melhor, mais justo, mais condizente para o sujeito e para a sociedade à qual pertence" (p. 127). E indicando que há relação entre situação-problema e competência, considera que "competência é saber mobilizar recursos afetivos [e] cognitivos". Isso significa:

saber agir, saber dizer, saber comunicar, saber fazer, saber explicar, saber compreender, saber encontrar a razão, ou seja, a competência é aquilo que organiza e que, portanto, dá base para que algo possa realizar-se enquanto representação, pensamento, ação, compreensão ou sentido (Macedo,2002, p.123-124).

Então, para enfrentar uma situação problema, são necessárias competências, que, por sua vez, "manifestam-se em um conjunto, por meio da articulação de diversas habilidades" (Alessandrini, 2002, p.164). E por habilidade, Oliveira (2018) compreende como:

A possibilidade de um indivíduo concretizar algo, seja isso uma operação matemática, uma interpretação de texto ou de um desenho. Assim, para que uma habilidade seja posta em prática, é preciso ofertar situações de aprendizagem que proporcionem desenvolvimento cognitivo, afetivo e social (Oliveira, 2018, p. 2).

Machado (2002) explica que uma "competência está sempre associada a uma mobilização de saberes. Não é um conhecimento 'acumulado', mas a virtualização de uma ação, a capacidade de recorrer ao que se sabe para realizar o que se deseja o que se projeta" (Machado, 2002, p. 145, grifos do autor).

Dos documentos oficiais, a BNCC (Brasil, 2019, p. 8) e o Currículo Referência de Minas Gerais (2018) definem competência "como mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana".

Entre as 10 competências gerais para a Educação Básica, indicadas pela BNCC duas delas mencionam resolver problemas (Brasil, 2019).

Porém, de qualquer forma, "competências, situações-problema, e habilidades sempre foram questões fundamentais para nossa sobrevivência em todos os sentidos" (Macedo, 2002, p.124). No contexto do ENEM, uma situação-problema define-se por uma questão que coloca um problema, ou seja, faz uma pergunta e oferece alternativas, das quais apenas uma corresponde ao que é certo quanto ao que foi enunciado. Para isso, a pessoa deve analisar o conteúdo proposto na situação-problema e recorrendo às habilidades (ler, comparar, interpretar, etc.) decidir sobre a alternativa que melhor expressa o que foi proposto (Macedo, 2005, p.30).

As competências e habilidades são requeridas no ENEM por situações-problema que são apresentadas como questões de múltipla escolha e o candidato, para resolvê-las, tem de recorrer a habilidades.

Macedo (2005) afirma que uma das características importantes de uma competência é, "segundo Perrenoud, desafiar o sujeito a mobilizar os recursos no contexto de situação-problema para tomar decisões favoráveis ao seu objetivo ou metas" (Macedo, 2005, p.29-30), isto é, resolver a questão.

Ainda se referindo a competências e habilidades, Macedo (2005) diz que não são natas. São desenvolvidas na escola, na família e na sociedade. Algumas, mais específicas, na escola. Particularmente a habilidade de resolver situações-problema envolvendo conhecimento geométrico de *espaço* e *forma,* tratada neste trabalho (Habilidade 8 da Matriz de Referência do ENEM). Portanto as situações-problema trazem um desafio, algo que só é efetivamente solucionado se o resolvente manifestar um conjunto de habilidades necessárias, consolidadas em uma competência adquirida durante sua formação.

No ENEM, "utilizam-se três eixos organizadores na elaboração dos itens da prova: a contextualização, a situação-problema e a interdisciplinaridade" (Brasil, 2006, p.67).

Método

Considerando as características de um estudo qualitativo, a pesquisa pode ser classificada como estudo de caso qualitativo, pois relacionar habilidades auxiliares para a Habilidade 8 da Matriz de Referência do ENEM pode ser considerada um estudo de caso, pois se caracterizou a peculiaridade de inserção no contexto de resolver situações-problema envolvendo o conhecimento geométrico de espaço e forma com um grupo de cinco professores.

A peculiaridade deste caso consiste, pois, na explicitação de habilidades auxiliares e a discussão de habilidades contidas na Matriz de Referência do ENEM que podem ser requeridas na resolução de determinada situação-problema.

Yin (2005) explicita que, no estudo de caso, os limites entre o fenômeno e o contexto não estão claramente definidos. Assim, ressalta-se que os limites devem ser esclarecidos, pois, para a resolução de situações-problema relacionadas com o conhecimento geométrico de *espaço* e *forma,* as habilidades da Matriz de Referência podem ser consideradas insuficientes. Então se selecionaram habilidades auxiliares com o intuito de facilitar a compreensão de aspectos relacionados à Habilidade 8.

Com o objetivo de validar a pesquisa por meio da triangulação, para a produção de dados, foram considerados compatíveis com o tipo de pesquisa quatro instrumentos/técnicas: observação, entrevista individual, grupo focal e análise documental. Para registrar as informações, foram utilizados gravação em áudio e vídeo, microdado do INEP relativo ao ENEM, anotação registrada no diário de campo, e registro documental das atividades propostas (feito no papel pelos participantes), pois na pesquisa qualitativa a palavra escrita ocupa lugar de destaque. Esses instrumentos ajudaram na captação do ocorrido durante a realização dos encontros.

Foram analisados documentos oficiais correspondentes ao assunto e feita uma pesquisa bibliográfica que destacou a revisão da literatura sobre o tema.

O conhecimento geométrico de *espaço* e *forma* foi abordado por meio de atividades que levassem ao desenvolvimento das habilidades auxiliares necessárias às habilidades para resolução de situações-problema que estivessem relacionadas ao conhecimento geométrico de espaço e forma.

Os encontros

Os pesquisadores organizaram as atividades a serem realizadas em quatro encontros. Elas eram de natureza exploratória e procuravam desenvolver habilidades relacionadas à resolução de situações-problemas envolvendo o conhecimento geométrico de *espaço* e *forma*. E trabalhar pré-requisitos necessários à resolução das situações-problema propostas em questões do ENEM. Portanto as questões selecionadas dessas provas eram propulsoras de atividades que foram pensadas para relembrar ou desenvolver habilidades relacionadas aos tópicos programados.

No primeiro encontro, após esclarecidos os objetivos da pesquisa, os professores aceitaram a participação, e, então leram, assinaram e devolveram aos pesquisadores o Termo de consentimento livre e esclarecido (TCLE).

Então a pesquisa de campo foi feita durante cinco encontros realizados no período de seis meses com a participação de 5 professores de Matemática de escolas públicas de Ouro Preto, Minas Gerais, Brasil. Nos quatro primeiros os professores realizaram as atividades propostas destinadas à resolução de duas situações-problema relacionadas à Geometria Plana e Espacial (escolhidas do ENEM) que eram analisadas, refletidas e resolvidas e que as discutiram, também, num quinto encontro destinado a um Grupo Focal sobre o trabalho realizado.

Então, os participantes elaboraram conclusões sobre a possibilidade do desenvolvimento dessas habilidades auxiliares. Foi utilizada a Análise de Conteúdo (Bardin,1997).

Resultados

No primeiro encontro foram realizadas quatro atividades: Jogo dos 7 erros; atividades de simetria; sobre construção de quadrado e triângulo; sobre cálculo de área e atividades sobre observação e cálculo. Seus objetivos eram desenvolver habilidades de desenho e reconhecer outras habilidades relacionadas ao desenvolvimento de atividades sobre triângulos. No final do Encontro foram analisadas e resolvidas duas questões do ENEM do ano de 2012.

Sobre o Jogo dos Sete Erros:

Foram distribuídos três Jogos dos Sete Erros (Leão, 2019) para que os professores participantes os encontrassem. Pode-se inferir que a habilidade de visualização estava atrelada à comparação de cada parte das figuras em cada um dos três Jogos dos Sete Erros. Posteriormente, no Grupo focal os participantes concordaram que as habilidades de visualização e comparação foram as mais importantes para o desenvolvimento desta atividade, com o que concorda Hoffer (1981) apud Vieira (2010), pela habilidade visual, as pessoas reconhecem figuras diferentes de um desenho, bem como as informações rotuladas numa figura. Foi o que ocorreu nos três Jogos dos Sete Erros.

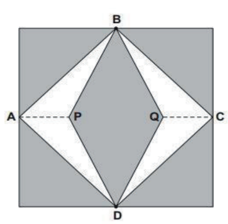
Em relação à habilidade de comparação, à qual os participantes se referiram com base no estabelecimento de paralelos entre duas figuras, infere-se que ela pode auxiliar no desenvolvimento das cobradas na Matriz de Referência do ENEM, a Habilidade 6- Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional e a Habilidade 7- Identificar características de figuras planas ou espaciais. Nos Jogos de Sete Erros vê-se a localização de objetos, as características e a representação no espaço bidimensional. Confirmam os PCN (Brasil, 1997): "o trabalho com Espaço e Forma centra-se, ainda, na realização de atividades exploratórias do espaço. (...) observando e manipulando formas, os alunos percebem as relações dos objetos no espaço" (p. 57). A atividade, além de ser lúdica, auxiliou na busca de detalhes, no exame de cada parte do todo para compará-la, não deixando de ser um exercício de lógica, pois compreendeu semelhanças e diferenças.

Comentários de alguns participantes (codificados como P1, P2, P3, P4 e P5): "Os primeiros [erros] a gente vê de cara, depois fica difícil. Tem uma coisa mínima aqui, será que é essa coisa mínima, mínima? (...) e com este colorido vai ser impossível. (...) ficará bem mais difícil de ver (P5). E P3 "elas [as atividades] são detalhes." Corroborando essa interpretação, Hoffer (1981) apud Vieira (2010) confirma que, pela habilidade lógica, as pessoas percebem que há diferenças e semelhanças entre figuras.

A figura 2 tal a seguir, contém uma das duas questões do ENEM apresentadas ao final do primeiro encontro.

Figura 2. *Primeira questão do Enem.*

Para decorar a fachada de um edifício, um arquiteto projetou a colocação de vitrais compostos de quadrados de lado medindo 1 m, conforme a figura a seguir.



Nesta figura, os pontos A, B, C e D são pontos médios dos lados do quadrado e os segmentos AP e QC medem 1/4 da medida do lado do quadrado. Para confeccionar um vitral, são usados dois tipos de materiais: um para a parte sombreada da figura, que custa R$ 30,00 o m^2, e outro para a parte mais clara (regiões ABPDA e BCDQB), que custa R$50,00om^2. De acordo com esses dados, qual é o custo dos materiais usados na fabricação de um vitral?

A) R$22,50
B) R$ 35,00
C) R$ 40,00
D) R$ 42,50
E) R$ 45,00

Fonte: Enem (2012)

Indagados sobre as habilidades julgadas necessárias para resolver a questão apresentada, os professores citaram a habilidade de visualização e conteúdos ligados à Geometria. A interpretação das respostas mostrou que os participantes tinham dificuldades no reconhecimento de habilidades, evidenciando uma lacuna no entendimento quanto à explicitação das diferenças entre conteúdos e habilidades. Inferiu-se, pois, a necessidade de "concretizar o que significa, no âmbito do ensino de Matemática, o desenvolvimento de competências e habilidades" (PCN+, 2002, p. 108), o que indicava uma formação continuada que tivesse como objeto a discussão do assunto.

Machado (1998) considera a representação uma etapa que caracteriza o desenvolvimento do conhecimento geométrico, enquanto Lauro (2007, p. 27) diz o seguinte: "a representação refere-se à reprodução, por meio de desenhos, de objetos percebidos ou construídos".

Os diálogos realizados pelos participantes mostraram que tiveram dificuldades que foram sanadas, pois, com exceção de P5, os outros realizaram a tarefa (construção de quadrados e triângulos) com sucesso, indicando que conseguiram desenhar esquemas.

Hoffer (1981) apud Vieira (2010) explica que é através da habilidade de desenho que as pessoas fazem esquemas de figuras, identificando cuidadosamente as partes dadas, em qualquer nível de aprendizagem da Geometria. De acordo com Hoffer (1981) apud Vieira (2010), pela habilidade de desenhar, no nível de análise proposto por van Hiele, as pessoas traduzem numa figura a informação verbal dada e a usam para desenhar ou construir outras figuras. No nível de ordenação ou dedução informal (como utilização dos dedos para determinação do ponto médio), as pessoas são capazes, a partir de certas figuras dadas, de construir outras relacionadas.

Pelas observações feitas pelos participantes ao responderam as questões confirma-se o que Hoffer (1981) apud Vieira (2010) explica: pela habilidade visual, no nível de dedução formal, as pessoas usam informação sobre uma figura para deduzir outras informações; pela habilidade lógica, no nível de análise, as pessoas percebem que propriedades podem ser usadas para distinguir as figuras; pela habilidade de aplicações, no nível de dedução formal, as pessoas são capazes de deduzir propriedades de objetos a partir de informações dadas ou obtidas.

Com a análise de conteúdo foi possível identificar categorias e subcategorias das habilidades desenvolvidas nas atividades propostas.

A habilidade de percepção foi desenvolvida/aprimorada nas atividades: Jogo dos Sete Erros, Construção de quadrados e triângulos, cálculo de áreas e outras desenvolvidas nos demais encontros. A habilidade se apresentou de diversas formas, denominadas subcategorias, que a compuseram e auxiliaram a realização com êxito das atividades propostas: observação de objetos, percepção de relações espaciais, relacionamento de vários objetos, manipulação de objetos, percepção de elementos geométricos e comparação. Então, à habilidade de percepção corresponderam as subcategorias: observação de objetos, percepção de relações espaciais, relacionamento de vários objetos, manipulação de objetos, percepção de elementos geométricos e comparação.

A habilidade de construção foi desenvolvida/aprimorada nas atividades: construção de quadrados e triângulos, e outras realizadas nos outros encontros. A habilidade se manifestou em formas que auxiliaram a concretização e compreensão das atividades propostas, as subcategorias: construção de figuras/sólidos, identificação de elementos geométricos e uso de materiais para construção de elementos geométricos. Assim, à habilidade de construção, corresponderam as subcategorias: reprodução de desenhos, representação de elementos geométricos e representação gráfica de conceitos.

A habilidade de representação foi desenvolvida/aprimorada nas atividades: Simetria, Construção de quadrados e triângulos e cálculo de área, e outras. A habilidade surgiu naturalmente, auxiliando o raciocínio com visualização através da produção de desenhos. À habilidade de representação corresponderam as subcategorias: reprodução de desenhos, representação de elementos geométricos e representação gráfica de conceitos.

A habilidade de concepção foi desenvolvida/aprimorada nas atividades: Cálculo da área de quadrado e triângulo, e em outras nos outros encontros. A habilidade sistematizou a percepção de padrões, auxiliando no entendimento de meios necessários para a resolução de situações oferecidas e apresentando-se em subcategorias: organização conceitual, busca do conhecimento geométrico, raciocínio lógico-dedutivo e teorização.

À habilidade de concepção corresponderam as subcategorias: organização conceitual, busca do conhecimento geométrico, raciocínio lógico-dedutivo e teorização.

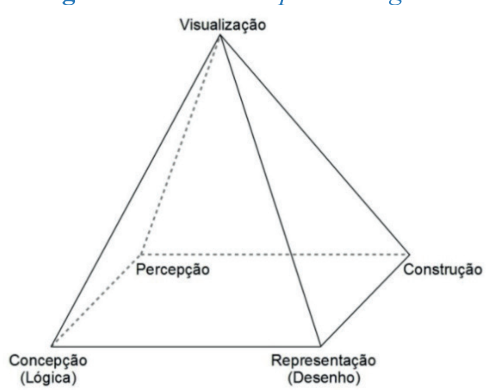
Finalmente, a habilidade de visualização foi desenvolvida/aprimorada nas atividades: Jogo dos Sete Erros, Simetria, Construção de quadrados e triângulos e outras desenvolvidas nos demais encontros. A habilidade se manifestou em duas subcategorias: visualização de elementos espaciais e visualização de elementos geométricos físicos.

Conclusões

As atividades desenvolvidas nos encontros correspondiam às habilidades: percepção, construção, representação, concepção, visualização. E a visualização se ligou diretamente às habilidades percepção, construção, representação e concepção, que, segundo Machado (2002), são as faces do Tetraedro Epistemológico, que explicam a caracterização do desenvolvimento do conhecimento geométrico.

Sendo assim, compreendeu-se que um novo sólido poderia explicar a construção do conhecimento geométrico de *espaço* e *forma*. Em vez do tetraedro apresentado por Machado (2002), em que os quatro vértices indicam faces, esta pesquisa apresenta a pirâmide de base quadrangular (figura 2) na qual os vértices da base são a concepção (ou lógica), a representação (ou desenho), a construção e a percepção. Como vértice da pirâmide está a visualização, ligada diretamente aos vértices da base, que são habilidades auxiliares necessárias a toda proposta de atividade que vise a possibilitar o desenvolvimento de aptidões auxiliares para a de resolver situações-problema envolvendo o conhecimento geométrico de espaço e forma.

Figura 3. *Pirâmide Epistemológica.*



Fonte: Leão (2019, p. 143).

As habilidades auxiliares destacadas são as ideias que guiaram as atividades propostas nos encontros, que foram desenvolvidas por professores de Matemática antes de serem programadas para os alunos. Isso porque os professores conheciam os assuntos abordados e tinham na prática um suporte para opinar sobre possíveis modificações a serem feitas. Suas observações auxiliaram o pesquisador "a ver o não visto" (Arcavi, 2003), podendo reformular ou adaptar as atividades com o intuito de elaborar de forma mais acertiva o que os alunos deviam fazer, para, além de executar um processo de aprendizagem, sentir prazer de aprender e, consequentemente, internalizar o conhecimento construído através das atividades realizadas.

Essas habilidades podem levar os alunos a ter um novo olhar para uma questão que requeira aptidões e a potencializar as chances de resolvê-la.

Um desafio, se encontra em buscar nas avaliações externas, como o ENEM, questões propulsoras para criar atividades que desenvolvam ou lapidem habilidades que possam auxiliar a construção do conhecimento matemático, seja ele geométrico ou não.

Com um currículo extenso, torna-se necessário, para construir habilidades, trabalhar com atividades que viabilizem a conexão entre aprendizados múltiplos. Elas devem ser construídas e testadas por professores e/ou pesquisadores para possibilitar nova forma de construir conhecimento evitando-se trabalhar com treinamento de questões, o que é tão difundido em certos níveis da escolaridade.

Pode haver prazer no desenrolar situações-problema e o raciocínio pode fluir mais facilmente, por poder acessar conhecimentos ou informações prévias já consolidadas em atividades construídas especificamente para isso.

Referências

Alessandrini, C. D. (2002). O Desenvolvimento de Competências e a Participação Pessoal na Construção de um Novo Modelo Educacional. In: Perrenoud, P., Thurler. M. *As competências para ensinar no século XXI.*A formação dos professores e o desafio da avaliação. Tradução de Cláudia Schilling, Cristina Dias Alessandrini. Porto Alegre: Artmed, p. 157-176.

Arcavi, A. (2003). The Role of Visual Representations in the Learning of Mathematics. In: *EducationalStudies in Mathematics*, 52, p. 215-241, 2003.

Bardin, L. (1977). Análise de conteúdo. Lisboa: Edições 70.

Brasil (1997). *Parâmetros Curriculares Nacionais*: primeiro ciclo de alfabetização. MEC/SEF: Brasília.

Brasil (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais, terceiro e quarto ciclo da alfabetização.* MEC/SEF: Brasília.

Brasil (1999a). *Relatório Final do Exame Nacional do Ensino Médio – 1998*; INEP/MEC, Brasília.

Brasil (1999b). *Parâmetros Curriculares Nacionais. Ensino Médio, Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. MEC/SEMT: Brasília.

Brasil (2001). *Relatório Pedagógico 2000.* INEP/MEC, Brasília.

Brasil (2002). *Parâmetros Curriculares Nacionais + Orientações Educacionais Complementares.* PCN+ MEC/SEMT: Brasília.

Brasil (2006). *Orientações Curriculares para o Ensino Médio*. MEC/SEB: Brasília.

Brasil (2014). *Relatório Pedagógico 2009-2010*. ENEM, INEP/MEC, Brasília.

Brasil (2019). Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. *Base Nacional Comum Curricular.* Brasília, DF: MEC/SEB. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/#/site/inicio. Acesso em: 20 abr. 2020.

Brasil (s.d). *Matrizes de Referência*. Portal do INEP, s/d, s/p. Disponível em: http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/downloads/2012/matriz_referencia_enem.pdf. Acesso em 08/10/2017.

Gazire, E. S. (2000). *O não resgaste das geometrias*. Tese de Doutorado em Educação (não publicada). Universidade Estadual de Campinas.

Hoffer, Alan. (1981). Geometry is more than Proof. Trad. Antônio Carlos Brolezzi. The Mathematics Teachers, 74(1), 11-18.

Lauro, M. M. (2007). *Percepção-Construção-Representação-Concepção. Os quatro processos do ensino da Geometria*: uma proposta de articulação. Dissertação de Mestrado em educação (não publicada). Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo.

Leão, E. T. (2019). *Um estudo das situações-problema envolvendo o conhecimento geométrico de espaço e forma no ENEM no período de 2009 a 2017*. Dissertação de mestrado Educação Matemática (não publicada). Universidade Federal de Ouro Preto.

Macedo, L. (2005). A situação-problema como avaliação e como aprendizagem. In: *Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) fundamentação teórico- metodológica.* Brasília: INEP/MEC, p.29-36.

Macedo. L, (2002). Situação-Problema: Forma e Recurso de Avaliação, Desenvolvimento de Competências e Aprendizagem Escolar. In: Perrenoud, P., Thurler. M. *As competências para ensinar no século XXI.* Tradução de Cláudia Schilling, Cristina Dias Alessandrini. Porto Alegre: Artmed, p. 113-135.

Machado, N. J. (1998) *Matemática e Língua Materna.* São Paulo: Cortez.

Machado, N. J. (2009). *Matemática e realidade*. São Paulo: Cortez.

Machado. N. J. (2009). Sobre a Ideia de Competência. In: Perrenoud, P., Thurler. M. *As competências para ensinar no século XXI.* Tradução de Cláudia Schilling, Cristina Dias Alessandrini. Porto Alegre: Artmed,137-155.

Minas Gerais (2018). *Currículo Referência de Minas Gerais*.

Minas Gerais. (2005). *Conteúdo Básico Comum, Belo Horizonte*, MG: Imprensa Oficial.

Passos, C. L. (2000). B. *Representações, interpretações e prática pedagógica:* A geometria na Sala de Aula. Tese de Doutorado em Educação. Universidade Estadual de Campinas. São Paulo.

Vieira, C. R. (2010). *Reinventando a geometria no ensino médio*: uma abordagem envolvendo materiais concretos, softwares de geometria dinâmica e a teoria de van Hiele. Dissertação (não publicada) de Mestrado Profissional em Educação Matemática. Universidade Federal de Ouro Preto, Brasil.

Yin, R. K. *Estudo de caso*: planejamento e métodos. Tradução: Daniel Grassi. 3. Ed. Porto Alegre: Bookman, 2005.

VOL 34, NÚMERO 2, AÑO 2021

MATERIAIS MANIPULÁVEIS NA CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE ÁREA DE FIGURAS PLANAS

MANIPULATIVE MATERIALS IN THE CONSTRUCTION OF THE CONCEPT OF PLANE FIGURE AREA

Danila Brígida Santana Imafuku, Maria Elisa Esteves Lopes Galvão, Rosana Nogueira de Lima
Universidade Anhanguera de São Paulo - UNIAN, Universidade de São Paulo - USP, Centro Nacional de Educação – CENAED. (Brasil)
danilaimauku@hotmail.com, elisa.gal.meg@gmail.com, rosananlima@gmail.com

Resumo
Neste estudo, teve-se como objetivo verificar as contribuições do uso de materiais manipuláveis na compreensão do conceito de área de figuras planas. A investigação desenvolveu-se em uma formação continuada para professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental, por meio de uma atividade realizada em três etapas de discussão sobre possibilidades de recobrimento de uma superfície e o cálculo de áreas com o uso de diferentes unidades de medida, quadradas ou triângulares. A análise dos dados apoiou-se na possibilidade da mobilização das apreensões figurais de Duval e na teoria dos Três Mundos da Matemática de Tall. Constatou-se que o uso do material manipulável favoreceu a compreensão do conceito e da transição do contexto geométrico para o algébrico. A mobilização das apreensões figurais conduziu ao entendimento das diferentes etapas desenvolvidas no cálculo da área mediante um percurso entre os Mundos Corporificado, Simbólico e Formal.

Palavras chaves: materiais manipuláveis, apreensões figurais, três mundos da matemática, formação de professores

Abstract
The objective of this study was to verify the contribution of manipulative materials used to understand the concept of area of plane figures. The research takes place in the continuing education of elementary school teachers of initial years through an activity carried out in three phases of discussion on the possibilities of covering a surface and on how to calculate areas by using either square or triangular measure units. Data analysis was based on the possibility of mobilizing figure apprehension by Duval and the theory of the Three Mathematics Worlds by David Tall. It was noted that the use manipulative materials favored the understanding of the concept and the transition from the geometric context to the algebraic one. The mobilization of figure apprehension led to the understanding of the different stages carried out in calculating the area through the route between embodiment, symbolism, and formalism worlds.

Key words: manipulative materials, figure apprehension, three worlds of mathematics, teacher training

Introdução

A Base Nacional Comum Curricular – BNCC (Brasil, 2018) destaca que a aprendizagem matemática está associada à apreensão de significados dos objetos matemáticos e de suas aplicações e relações interdisciplinares. Ao longo da BNCC (Brasil, 2018) é possível observar a recomendação do uso de recursos didáticos diversos nos processos de ensino e de aprendizagem dos conteúdos matemáticos.

Os significados desses objetos resultam das conexões que os alunos estabelecem entre eles e os demais componentes, entre eles e seu cotidiano e entre os diferentes temas matemáticos. Desse modo, recursos didáticos como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, livros, vídeos, calculadoras, planilhas eletrônicas e softwares de geometria dinâmica têm um papel essencial para a compreensão e utilização das noções matemáticas. Entretanto, esses materiais precisam estar integrados a situações que levem à reflexão (Brasil, 2018, p.276).

Para Alsina (2004) o uso de diferentes materiais manipuláves favorece um processo ideal de ensino e de aprendizagem, pois por meio de um ensino diversificado com diferentes estratégias o estudante pode interiorizar os conteúdos de forma significativa e aprofundar a compreensão sobre o conteúdo estudado. Nesse mesmo sentido, Lorenzato (2006) descreve que os materiais didáticos que podem ser manipuláveis permitem transformações que auxiliam os estudantes a realizar redescobertas, compreender propriedades e construir uma aprendizagem efetiva. No entanto, o autor destaca que para ter uma significativa aprendizagem é importante que ocorra uma atividade mental, e não somente a manipulação do material.

Para Passos (2006), ao utilizar o material manipulável nas aulas de matemática é importante que ocorra uma verdadeira participação por parte do estudante e não apenas uma simples reprodução do que o professor disse ou fez. A autora descreve que quando um material possibilita a modelagem de várias ideias matemáticas ele pode ser visto como um bom material didático.

Ao discutir uma abordagem acerca do cálculo de área, Silva (2016) destaca ser essencial em um processo de formação, inicial ou continuada, desenvolver trabalhos que favoreçam a discussão e a reflexão, relacionados com a prática pedagógica do professor. Para a autora, o uso de diferentes procedimentos e materiais didáticos e o apoio de resultados de pesquisas podem auxiliar o professor a (re)significar suas crenças e concepções em relação ao tema e seu ensino.

Clements e Stephan (2004) sugerem que as primeiras experiências dos alunos com a ideia de área podem envolver a construção de um espaço com duas dimensões que proporcione discussões que envolvam lacunas, unidades sobrepostas e a precisão de medidas.São destacados pelo menos cinco conceitos fundamentais envolvidos na aprendizagem da medida de área: o particionamento, a iteração da unidade, a conservação, a organização retangular e a medição linear.

Segundo a BNCC (Brasil, 2018) o ensino de área de figuras planas deve ser iniciado utilizando unidades de medidas não convencionais que podem favorecer o a compreensão do processo de comparação e medição, dando sentido à ação de medir. Entendemos que o uso de materiais manipuláves pode contribuir para essa introdução do construção do conceito de área, levando a compreensão de seu cálculo.

Tendo em vista a importância do uso de materiais manipuláveis e de uma abordagem que possibilite a compreensão dos processos envolvidos no cálculo de área, realizamos essa investigação com a participação de professores de um Curso de Pós-Graduação Lato Sensu em Educação Matemática para os anos iniciais do Ensino Fundamental na cidade de São

Paulo, a fim de verificar quais são as contribuições do uso de materiais manipuláveis na compreensão do conceito de área de figuras planas. Consideramos como questão norteadora: De que forma atividades com o uso de materiais manipuláveis pode contribuir na construção do conceito de área e na obtenção de sua medida por professores em formação continuada?

A elaboração e as análises das atividades de nossa investigação sobre os aspectos introdutórios do conceito de área foram realizadas à luz das representações figurais de Raymond Duval (1994) e da teoria dos Três Mundos da Matemática de David Tall (2013).

Marco Teórico

Para Duval (2012) o raciocínio geométrico envolve três tipos de processos cognitivos com funções epistemológicas específicas. São eles os processos: de visualização, de construção e de raciocínio. Esses processos podem ser desenvolvidos independentemente, entretanto, estão profundamente conectados, pois cada um pode apoiar o outro ao longo dodesenvolvimento das atividades geométricas.

Duval (1994) considera que os problemas geométricos apresentam um registro de representações espaciais com interpretações autônomas que são diferenciadas como: apreensão perceptiva que possibilita a identificação ou reconhecimento da figura e sua forma; apreensão discursiva que ocorre mediante a interpretação das figuras geométricas priorizando a articulação dos enunciados e considerando propriedades matemáticas da figura; apreensão sequencial que é desenvolvida em atividades de construções ou de descrições, com objetivo de reproduzir uma figura dada por meio de algum instrumento; finalmente, apreensão operatória que é centrada nas possíveis modificações que uma figura pode sofrer. Duval (1994) estabelece também uma classificação para as modificações que podem ocorrer quando se trabalha com uma figura. A modificação é denominada mereológica, quando a figura é subdividida, fracionada e reagrupada em função da relação da parte e do todo; óptica, quando a figura continua com o mesmo formato, mas ocorre uma variação no tamanho por meio de ampliação, redução ou deformação; e posicional, quando a figura é deslocada em relação a um referencial conservando seu formato e tamanho. Esses aspectos considerados por Duval estão relacionados ao papel da figura enquanto um recurso no trabalho em Geometria.

Tall (2013), por outro lado, aponta que três diferentes possibilidades podem ser identificadas no processo de desenvolvimento do conhecimento matemático: a corporificada, concebida com o recurso a objetos que podem ser manipulados ou entendidos como objetos mentais, como os entes geométricos e suas propriedades; a simbólica, associada à representação e à manipulação simbólica dos objetos matemáticos, como as representações algébricas; e a formal, que considera os axiomas, definições e teoremas, matemática enquanto ciência. O autor defende que o desenvolvimento do pensamento matemático pode ocorrer em três contextos distintos que podem ser relacionados ao longo da aprendizagem: no chamado Mundo Corporificado, que se refere às percepções e ações humanas sobre objetos matemáticos, que nos permitem observar, manipular e descrever tais objetos; no Mundo Simbólico que está relacionado à necessidade de desenvolver intervenções sobre os objetos do Mundo Corporificado associadas a uma representação simbólica; no Mundo Formal, que diz respeito à construção do conhecimento formal, organizado por meio dos axiomas, das definições e dos teoremas, que compõem o sistema axiomático da matemática.

Segundo Tall (2013) os Três Mundos da Matemática não são considerados disjuntos, ou seja, no desenvolvimento de uma atividade matemática há momentos em que são observadas características de dois ou até três mundos diferentes dependendo das possibilidades de exploração das ideias envolvidas na construção do conhecimento.

Método

Nessa pesquisa analisamos os dados qualitativamente. Para seu desenvolvimento, adotamos como metodologia o *Desing Experiment* que, segundo Coob, Confrey, diSessa, Lehrer y Schauble (2003), busca orientar os processos de aprendizagem de específicos domínios, e estabelecer hipóteses que ao longo da investigação são testadas e revistas, conduzindo a possíveis adaptações que podem ser necessárias diante de novas situações. Sendo assim, essa metodologia desenvolve uma maior compreensão de uma ecologia de aprendizagem, proporcionando meios para observação de como os participantes desenvolvem o pensamento matemático e de que forma as ferramentas utilizadas contribuem para a reflexão sobre como se dá a aprendizagem.

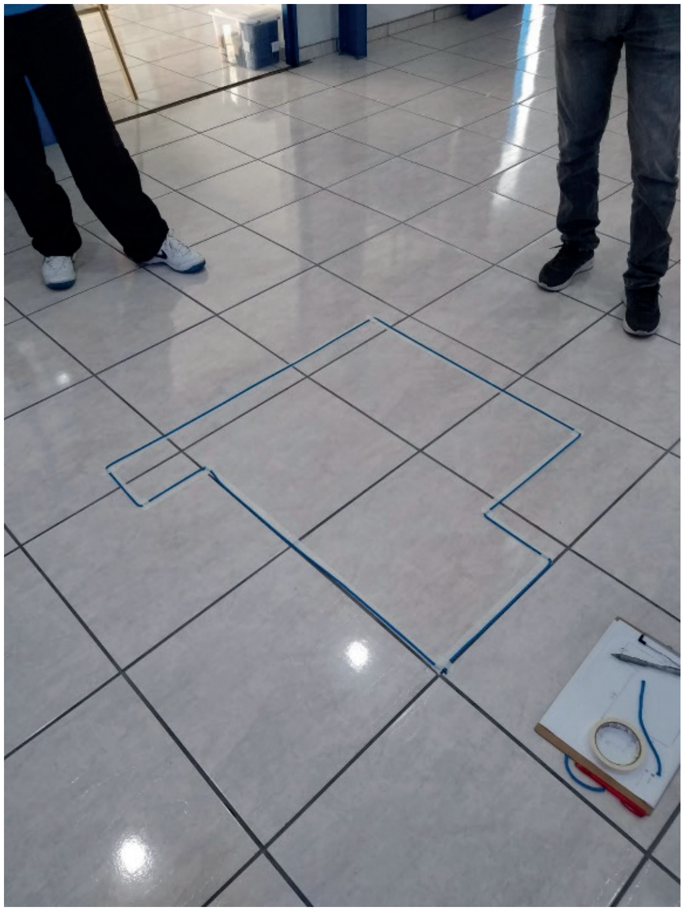
Na fase prospectiva do *Design*, foram selecionados os aspectos da construção do conhecimento sobre área de figuras planas que permitiram elaborar as atividades a serem propostas na pesquisa. Participaram da etapa de intervenção três professores que faziam parte de uma formação continuada em Educação Matemática para os anos iniciais do Ensino Fundamental. A pesquisadora principal, docente da disciplina Conceitos Fundamentais de Geometria Plana e Espacial, convidou os participantes, alunos do curso.

Um dos participantes é professor atuante nos anos iniciais do Ensino Fundamental com formação em pedagogia. Outro é licenciado em matemática, mas não atuante na sala de aula no momento da pesquisa; o terceiro participante também é licenciado em matemática, porém não tem experiência como docente, pois a sua formação é recente; destacamos que esse participante utiliza suas vivencias do trabalho como pedreiro para auxiliar o desenvolvimento das atividades. Para descrevermos a participação de cada professor participante vamos identificá-los, respectivamente, como P1, P2 e P3.

Durante a disciplina foram realizadas atividades que abordaram os conceitos de figuras planas e não planas, de ângulos, de medida de área e de simetria. Dentre esses tópicos, selecionamos para este artigo uma das atividades sobre o cálculo de área de figuras planas, descrita a seguir. Os participantes trabalharam conjuntamente, nas três etapas propostas, durante duas horas.

Para a realização da atividade a pesquisadora desenhou no chão da sala, com fita adesiva, uma figura no formato de um octógono não convexo (ver Figura 1) para que os participantes determinassem uma medida da área da superfície. Em cada etapa, foram distribuídas peças confeccionadas em placas de fibra de média densidade – MDF – com formatos diferentes, para que fossem utilizadas como unidades de medida. Na primeira etapa, os participantes precisavam calcular a medida da superfície desse octógono utilizando quadrados como unidades de medida, com o objetivo de verificar se eles compreendiam a ideia de unidade de medida e se recobririam toda a superfície sem sobreposição e/ou lacunas. Na segunda, eles deveriam determinar área da mesma figura utilizando unidades triangulares, equivalentes à metade da unidade utilizada na etapa anterior. Na última etapa da atividade eles receberam unidades que correspondiam a um quarto da primeira unidade (triângulos retângulos isósceles obtidos ao dividir as unidades quadradas em suas diagonais). Na segunda e na terceira etapa, levamos em conta os objetivos da etapa anterior, acrescidos da discussão sobre a relação inversa do tamanho da unidade com o número de unidades usadas no recobrimento da superfície. Além da representação da figura no chão da sala e das unidades de medida em MDF os participantes dispunham de folhas de papel sulfite, régua, lápis, borracha e caneta para realizar as anotações necessárias para o desenvolvimento de cada etapa da atividade.

Figura 1. *Octógono.*



Fonte: Arquivo pessoal.

O octógono foi elaborado de forma que seus lados fossem múltiplos inteiros da medida do lado da unidade quadrada e de seus submúltiplos, as unidades triangulares, que possibilitaria desenvolver interações inteiras na manipulação das unidades para o recobrimento da superfície.

Os três participantes desenvolveram conjuntamente cada etapa ativamente e, a cada etapa precisavam manusear as unidades de medidas confeccionas em MDF para recobrir a superfície apresentada.

Resultados

Na primeira etapa da atividade, os participantes receberam uma caixa contendo unidades de medidas no formato de um quadrado, logo começaram a recobrir a superfície conjuntamente como podemos observar na Figura 2.

Figura 2. *Etapa 1 - Utilizando unidades de medida quadradas.*

Fonte: Arquivo pessoal

Ao desenvolverem a primeira etapa os participantes discutiram a ideia de recobrimento total da superfície sem deixar lacunas entre as unidades e/ou sobreposições entre elas e utilizaram a contagem de unidades para obter uma área de 19 quadrados. Segundo Clements e Stephan (2004) é importante desenvolver atividades que auxiliem os estudantes a compreender o conceito de área e a sua medida. Para isso esses autores descrevem que as primeiras experiências devem estimular a análise de toda região da figura, o uso de uma unidade de medida adequada e a percepção que toda a superfície precisa ser recoberta sem lacunas ou sobreposições. Nesse processo verificamos que a mobilização da apreensão perceptiva, segundo Duval(1994), é essencial, uma vez que a resolução se apoia no reconhecimento da unidade de medida utilizada, na identificação da forma da figura desenhada no chão e na observação do recobrimento total da superfície. Verificamos, também, que o trabalho com objetos do mundo corporificado possibilitaram o desenvolvimento de conhecimentos relacionados as propriedades dos objetos matemáticos por meio da ação e percepção, e auxiliaram na compreensão de aspectos relacionados ao significado do que é medir. Nesse processo, caracteristicas do mundo simbólico foram evocadas na contagem de quantas iterações da unidade de medida foram realizadas ao recobrir a área do octógono.

Na segunda etapa, os participantes receberam unidades de medidas triangulares que correspondiam a metade da unidade utilizada na etapa anterior. Assim que receberam as unidades, começaram, em conjunto, a recobrir uma parte da superficie, aparentemente, sem elaborar uma estratégia. Observamos que nessa etapa houve a mobilização das apreensões perceptiva e operatoria, com o reconhecimento da unidade e com as modificações mereológica e posicional ao reconfigurarem as unidades para cobertura da superficie. Segundo Duval (1994), a mobilização conjunta das apreensões perceptiva e operatória é comum, pois ambas possuem as mesmas leis e parâmetros de organização que proporcionam o reconhecimento da figura.

Figura 3. *Etapa 2 - Utilizando unidades de medida triangulares, metade da unidade quadrada.*

Fonte: Arquivo Pessoal.

Verificamos que ao recobrirem a superfície os participantes foram encaixando duas unidades de forma que compunham uma região quadrada como a unidade utilizada na etapa anterior, fato que entendemos ser decorrentes da percepção da forma, características dos objetos do mundo corporificado. No entanto, para determinar a medida da área eles contaram quantas unidades triangulares recobriram a superfície toda, encontrando uma área de 38 triângulos, com características simbólicas. Os participantes observaram que ao utilizarem duas unidades obtinham uma unidade igual a utilizada anteriormente, isto é, que a unidade agora utilizada tem área igual a metade da obtida anteriormente, e o valor da a área correspondia ao dobro, relacionando características corporificadas e simbólicas.

Para a execução da última etapa, os participantes receberam unidades de medidas triangulares que correspondiam a um quarto da unidade utilizada na primeira etapa. O participante P2 iniciou a atividade colocando as unidades ao longo do contorno da figura, enquanto os participantes P1 e P3 foram juntando duas unidades para compor um quadrado, como haviam realizado na etapa anterior (ver Figura 4). Nesse momento, verificamos que a percepção e ação sobre os objetos corporificados nas atividades anteriores, pode tê-los levado a buscar uma estratégia que auxiliasse na determinação da área da superfície.

Figura 4. *Etapa 3 Utilizando unidades de medida triangulares, um quarto da unidade quadrada inicial.*

Fonte: Arquivo Pessoal.

Os participantes observaram que a estratégia escolhida inicialmente não possibilitaria recobrir a superfície toda. Na Figura 4, podemos observar que o participante P1 verificou que ao encaixar duas unidades em uma parte da superfície deixou uma lacuna que não poderia recobrir com outra unidade. O participante P3 também constatou uma lacuna em outra parte da superfície e o participante P2 observou uma sobreposição ao encaixar as unidades.

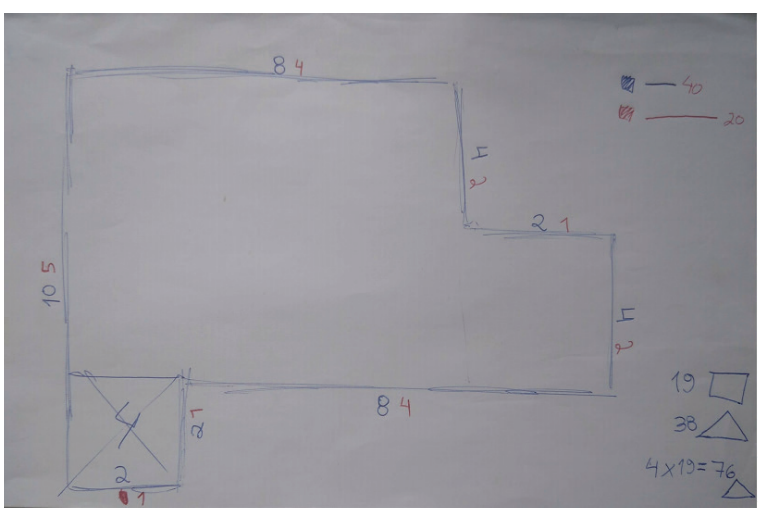
Após discutirem sobre a estratégia escolhida, o participante P1 reorganizou as unidades na parte da região que havia percebido a lacuna, encaixando quatro unidades (Figura 5); com isso o grupo optou por mudar a posição das unidades, mobilizando a apreensão operatória com a modificação posicional por meio de uma rotação das unidades para encaixar ao longo do contorno da figura, seguindo a posição do recobrimento realizado pelo participante P1. Observamos que os participantes não utilizaram a composição apresentada pelo participante P1 para completar o recobrimento total da superfície; cada um foi preenchendo a superfície de uma forma. Os participantes P2 e P3 foram encaixando as unidades conjuntamente, e o participante P1 continuou a partir da parte já recoberta por ele juntando as unidades seguindo um padrão em linha, e assim, todos chegaram à uma cobertura total da superfície da figura.

Figura 5. *Etapa 3 - Reorganizando as unidades de medida triangulares, um quarto da unidade quadrada.*

Fonte: Arquivo Pessoal.

Ao longo das etapas, o participante P1 mobilizou a apreensão sequencial representando a figura da atividade em uma folha de sulfite e anotando as observações e reflexões discutidas. Após o recobrimento da superficie, na etapa 3 da atividade, os participantes utilizaram essa representação em papel para determinar área, e diferentemente das etapas anteriores não contaram as unidades que compunham o recobrimento total. Recorreram a transitividade (Clements& Stephan, 2004) para determinar a área da superfície, relacionando as áreas obtidas em cada etapa para concluirem que a área encontrada na terceira etapa era o quádruplo do valor da área obtida com a unidade utilizada (quadrado) na etapa 1 da atividade, totalizando 76 triângulos (ver Figura 6), apresentando características simbólico-formais.

Figura 6. *Anotações da atividade.*



Fonte: Arquivo Pessoal

Entendemos que ao relacionarem o processo manipulativo com as anotações realizadas em cada etapa, identificamos características dos três mundos da matemática, de acordo com Tall (2013). Os participantes mobilizaram inicialmente a apreensão perceptiva, e posteriormente, a apreensão discursiva, pois essa apreensão possui uma natureza dedutiva, com uma função epistemológica de demonstração, que explica propriedades das figuras mediante definições, axiomas ou teoremas (Duval, 1994).

Acreditamos que a manipulação das unidades e a representação da figura analisada conjuntamente auxiliou a compreensão das resoluções e na compreensão da construção do conceito de área, pois, segundo Duval (1994), "[...] uma figura dá uma representação de uma situação geométrica mais fácil de aprender do que a sua apresentação em uma declaração verbal" (p. 121, nossa tradução).

Conclusão

Consideramos que nosso estudo ressaltou a importância do uso do material manipulável no ensino e na discussão dos conhecimentos para a aprendizagem de área de figuras planas, evidenciando que o cálculo de área mediante o seu uso pode contribuir de forma essencial na formação do conceito, pois a manipulação das unidades de medida leva ao entendimento de que no processo de iteração não pode haver lacunas e nem sobreposições. A manipulação possibilitou a discussão sobre o uso de diferentes unidades de medida, promoveu a compreensão da transitividade ao medir a superfície com unidades que são (sub)múltiplos da unidade inicial, o que responde a nossa questão de pesquisa.

Os resultados obtidos demonstram que a mobilização das apreensões perceptiva e operatória propiciada pelo material utilizado favoreceu uma rica ferramenta para a compreensão do conceito e do cálculo de área de figuras planas, auxiliando o entendimento das diferentes etapas desenvolvidas e a relação entre a área e a unidade de medida.

Acreditamos, assim como Duval (2004), que a exploração da representação figural só vai desenvolver um verdadeiro aprendizado se cada uma das quatro apreensões for considerada no desenvolvimento do ensino de um conceito.

O uso do material manipulável (as unidades de medidas) em MDF possibilitou, por meio da manipulação de objetos do Mundo Corporificado, relacionar a quantidade de unidades de medida necessárias para recobrir a superfície do octógono e chegarà área dessa superfície, passando ao Mundo Simbólico e avançando na compreensão do conceito, com características do Mundo Formal.

Referências bibliográficas

Alsina i Pastells, À. (2004). *Desenvolvimento de Competências matemáticas com recursos lúdicos-manipulativos. Para crianças de 6 aos 12 anos* (M. Rangel Trad.). Porto: Porto Editora (Obra original publicada em 2004).

Brasil. Ministério da Educação. (2018). *Base Nacional Comum Curricular – BNCC: Educação é a Base.* Recuperado em 28 janeiro, 2021 dehttp://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf

Clements, D. H., & Stephan, M. (2004). Measuremente in pre-K to grade 2 mathematics. In: D. H. Clements, J. Sarama, & A. M. DiBiase (Eds.), *Engaging young children in mathematics.*(pp.299-317). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehirer, R., Schauble, L. (2004, Janeiro/Fevereiro) Desing experiments in education research.(pp. 9-13).*Educational Researcher*, 32(1).

Duval, R. (1994). Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche geometric. (pp.121-137). *Repères - IREM*, 17.

Duval, R. (2012). Abordagem Cognitiva de Geometria em Termos de Congruência (M. T. Moretti, Trad.). *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, 7, pp.118-13(Obra original publicada em 1988).

Lorenzato, S. (2006). Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. In S. Lorenzato (Org.). *O laboratório de Ensino de Matemático na Formação de Professores* (pp. 3-37). Campinas: Autores Associados.

Passos, C. L. B. (2006). Materiais manipuláveis como recursos didáticos na formação de professores de matemática. In S. Lorenzato (Org.). *O laboratório de Ensino de Matemático na Formação de Professores* (pp. 77-92). Campinas: Autores Associados.

Silva, S. M. F (2016). *Formação de professores dos anos iniciais: uma investigação sobre os conhecimentos para o ensino de área e perímetro de figuras planas*. Dissertação de Mestrado, Universidade Anhanguera de São Paulo. Brasil.

Tall, D. (2013). *How humans learn to think mathematically.* New York: Cambridge University Press.

VOL 34, NÚMERO 2, AÑO 2021

ESTUDIO DE PRAXEOLOGÍAS RELACIONADAS CON CÁLCULO PROPOSICIONAL Y CÁLCULO DE PREDICADOS DIRIGIDAS A FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICA

STUDYING PRAXEOLOGIES RELATED TO PROPOSITIONAL CALCULUS AND CALCULUS OF PREDICATES FOR PROSPECTIVE MATHEMATICS TEACHERS

Oscar Abel Cardona Hurtado
Universidad del Tolima e Institución Educativa Liceo Nacional (Colombia)
oach76@hotmail.com

Resumen
En este trabajo se reportan resultados parciales de una investigación relativa a una tesis doctoral en Enseñanza de las Ciencias. El estudio se ubica en la problemática de la formación de profesores en lógica matemática. Como referencial teórico se adopta la Teoría Antropológica de lo Didáctico. El estudio que se propone es cualitativo, de corte descriptivo e interpretativo. La propuesta está dirigida a comprender las prácticas de profesores universitarios que orientan temas relativos al estudio en lógica matemática, para la formación de estudiantes de profesorado en matemática en una universidad colombiana. Resultados preliminares indican que los docentes formadores de estudiantes de profesorado se concentran en interpretar tareas y resolverlas mediante una única técnica, así como en formular preguntas que no resultan problemáticas. Los estudiantes, mientras el profesor explica, mantienen una actitud neutral o comunican respuestas que se restringen a las preguntas planteadas por el docente.

Palabras clave: formación, profesores, lógica, praxeología, TAD

Abstract
This work reports provisional results from research that corresponds to a doctoral thesis in a Science teaching doctorate program. The study is focused on the problems of teachers' training in mathematics logic. As a theoretical reference, the Anthropological Theory of the Didactic is adopted. It is a qualitative, descriptive and interpretive type study. This proposal is aimed at understanding practices of university professors who guide topics related to the study of mathematical logic, for the training of mathematics student teachers at a Colombian university. Preliminary results indicate that teachers in charge of training educators focus on interpreting tasks and solving them using a single technique, as well as asking questions that are not problematic ones. The students, while the teacher explains, maintain a neutral attitude or give answers that are restricted to the questions posed by the teacher.

Key words: training, teachers, logic, praxeology, anthropological theory of didactic (ATD)

Introducción

La lógica es el estudio de los principios y métodos que permiten distinguir el razonamiento correcto del incorrecto (Copi, 2013). Esta ciencia brinda herramientas al ser humano para poder establecer si un razonamiento es o no válido. La lógica matemática en particular, como rama de la lógica, y más específicamente el cálculo proposicional (en adelante CP) y el cálculo de predicados (en adelante CDP), permiten entre otras cosas representar razonamientos simbólicamente. Según Cárdenas, Reyes y Viteri (2017)

La estructuración no es la finalidad de la formalización, sino que a raíz de ella se puede avanzar en el análisis lógico y se puede validar o invalidar el razonamiento, con la aplicación de diversos métodos, ya sea la aplicación de tablas de verdad o bien el proceso de deducción. (Cárdenas, Reyes y Viteri, 2017, p. 111)

Todos los individuos, sin importar su rol en la sociedad, están abocados a tomar decisiones, para las cuales es fundamental que tengan la capacidad de establecer si una proposición o un argumento es o no valido. En la medida en que las personas gocen de herramientas que les posibiliten tomar mejores decisiones, se tendrán ciudadanos más competentes y sociedades más democráticas.

Asimismo, el CP y el CDP, que tratan sobre relaciones entre proposiciones, conectivos y cuantificadores, juegan un papel fundamental en las ciencias computacionales. Según Serna (2013), dada la importancia de estas nociones en el desarrollo de algoritmos que los especialistas en ciencias informáticas desarrollan para solucionar problemas, las instituciones de educación deben incluir en sus currículos el estudio del CP y el CDP. Las ciencias de la computación son una disciplina que sustentan el desarrollo de muchas otras; sus aportes van desde sus fundamentos teóricos y algorítmicos hasta desarrollos en robótica, visión artificial, sistemas inteligentes y bioinformática, entre otros ámbitos (Gasca y Machuca, 2018).

El CP y el CDP se estudian en Colombia en los niveles secundario y universitario. En el primero se abordan nociones introductorias, mientras que en el segundo, estos ámbitos de la lógica son estudiados de manera más amplia. En carreras universitarias, es habitual encontrar temas vinculados a CP y a CDP en los contenidos de algunas asignaturas, no solamente en programas de matemáticas sino también en campos como ingenierías, ciencias económicas, ciencias jurídicas y formación de profesores, entre otros. A pesar de la importancia de la lógica matemática en la formación de profesionales, son muy pocas las investigaciones dedicadas a su enseñanza y aprendizaje. En particular, algunos investigadores se han ocupado de estudiar el empleo de herramientas informáticas que sirvan de apoyo a los docentes en la enseñanza de la lógica matemática (Huertas, Mor y Guerrero, 2010).

El presente trabajo se ubica en la problemática de la formación de profesores en matemática; en este caso específico, de la formación en lógica matemática. En la actualidad, la formación de docentes en matemática es una problemática que ha despertado el interés de diversos investigadores (Artaud, Cirade y Jullien, 2011; Azcárate, 2004; Corica y Otero, 2016; Sierra, Bosch y Gascón, 2012; Shulman, 2006). No obstante, no se han encontrado investigaciones enfocadas a la formación de profesores en CP y en CDP. La investigación en desarrollo tiene el propósito central de tomar conocimiento de las prácticas de profesores universitarios que orientan temas vinculados al estudio de CP y CDP a estudiantes para profesor de matemática en una universidad colombiana. A partir de este estudio, se procura proponer praxeologías superadoras para la enseñanza de la lógica matemática. En este documento se reportan resultados parciales de la investigación, la cual corresponde al desarrollo de una tesis en un programa de Doctorado en Enseñanza de las Ciencias, mención matemática.

Marco teórico

Se adopta como marco teórico a la Teoría Antropológica de lo Didáctico (en adelante TAD) propuesta por Chevallard (1999). Este referente teórico es considerado como una herramienta potente para describir la actividad docente (Corica y Otero, 2012), dado que es un enfoque que considera como objeto de estudio e investigación didáctica todo el proceso que va desde la creación y la utilización del saber matemático hasta su *transposición* a las instituciones docentes. La TAD ubica la actividad matemática dentro de las actividades humanas y las instituciones sociales. La noción de *praxeología u organización matemática* es el constructo teórico fundamental. Las praxeologías surgen como respuestas a un conjunto de cuestiones, y a la vez como medio para realizar tareas problemáticas en una institución determinada. Toda praxeología consta de dos componentes inseparables: el nivel de la *praxis* o del *saber hacer*, que consta de un conjunto de *tareas* que se materializan en diferentes tipos de problemas, y de un conjunto de *técnicas* que se utilizan para llevar a cabo las *tareas* planteadas; y el nivel del *logos* o del *saber* en el que se sitúan, en un primer nivel, el discurso que describe, explica y justifica la *técnica*, denominada *tecnología*; y en un segundo nivel, la fundamentación de la *tecnología*, denominada *teoría* y que asume respecto a la *tecnología* el mismo papel descriptivo y justificativo que el de la *tecnología* respecto de la *técnica.*

El desarrollo y análisis de la actividad matemática presenta dos aspectos inseparables: las Organizaciones Matemáticas (en adelante OM) y las Organizaciones Didácticas (en adelante OD). Las primeras se refieren a la realidad matemática a estudiar, son construidas por la comunidad matemática. Las segundas, se refieren a la manera en que esto ocurre; tratan del proceso de estudio y construcción del conocimiento desde un punto de vista didáctico. Estos dos aspectos son inseparables, debido a que toda OM es generada por un estudio y a la vez, todo proceso de estudio se realiza a partir de una OM en construcción. Una OD se sitúa en un espacio determinado por seis momentos de estudio. El *primer momento* corresponde al primer encuentro con la organización. El *segundo momento* es el de la exploración del tipo de tareas y la elaboración de una técnica acorde al tipo de tareas. El *tercer momento* se refiere a la construcción del entorno tecnológico-teórico relativo a la técnica. El *cuarto momento* corresponde al trabajo de la técnica. El *quinto momento* alude a la institucionalización, cuya finalidad es precisar los elementos que componen de manera definitiva la OM. El *sexto momento* corresponde a la evaluación, relacionado estrechamente con el momento de la institucionalización, refiere a evaluar la calidad de los componentes de la OM construida.

Chevallard (1999) introdujo cuatro tipos de praxeologías según el grado de complejidad de sus componentes, esto con el objetivo de tener herramientas para analizar los procesos didácticos institucionales. A continuación, se describen los tipos de praxeologías. *Organizaciones Puntuales* (OMP): se generan en la institución, por lo que se considera como un único *tipo de tarea* y se define a partir del bloque práctico-técnico. *Organizaciones Locales* (OML): es el resultado de integrar diversas praxeologías *puntuales*. *Organizaciones Regionales* (OMR): se obtienen mediante la coordinación, articulación y posterior integración de diversas praxeologías *locales* a una teoría matemática en común. *Organizaciones Globales* (OMG): surgen al agregar varias praxeologías regionales a partir de la integración de diferentes teorías.

En particular, Fonseca (2004) establece las características de una OML para que sea considerada relativamente completa, siendo que los sistemas de enseñanza deberían, al menos, procurar la reconstrucción de una OML. En el proceso de estudio de una OML relativamente completa se distinguen dos partes: una relativa al proceso de construcción o reconstrucción de la propia OM determinada por los momentos didácticos (Chevallard, 1999), y otra, relativa al propio producto resultante. En particular, en lo que respecta al estudio del producto del proceso de construcción, se lo realiza en relación a indicadores matemáticos (Fonseca, 2004; Lucas, 2010). A continuación, se sintetizan los *indicadores*, siendo los siete primeros formulados por Fonseca (2004) y el octavo por Lucas (2010): OML1. Integración de los tipos de tareas y existencia de tareas relativas al cuestionamiento tecnológico; OML2. Diferentes técnicas para cada tipo de tareas y criterios para elegir entre ellas; OML3. Independencia de los objetos ostensivos que sirven para representar las Técnicas; OML4. Existencia de tareas y de técnicas “inversas”; OML5. Interpretación del funcionamiento y del resultado de aplicar las técnicas; OML6. Existencia de tareas matemáticas “abiertas”; OML7. Integración de los elementos tecnológicos e incidencia sobre la práctica; OML8. La posibilidad de *perturbar* la situación inicial o modificar la hipótesis del sistema para estudiar casos diferentes permite ampliar y completar el proceso de estudio.

Metodología

El estudio que se propone es cualitativo, de corte descriptivo e interpretativo (Hernández, Fernández y Baptista, 2014). La propuesta está dirigida a comprender las prácticas de profesores universitarios que orientan temas relativos al estudio de CP y CDP a jóvenes en formación para profesor de matemática en una universidad colombiana. El estudio se llevó a cabo en dos grupos diferentes de estudiantes que realizaron un mismo curso en el mismo programa universitario de una universidad. Los dos grupos son dirigidos por diferentes docentes, en uno de ellos se encontraban matriculados 20 estudiantes y en el otro 22 (la edad de los estudiantes oscila entre los 17 y 18 años). El curso tuvo una duración de 4 meses; semanalmente se realizaron dos sesiones de clase, cada una de 120 minutos. El diseño curricular de la asignatura se compone de seis unidades; la primera (la de interés para esta investigación) se denomina *nociones de lógica proposicional,* donde se abordaron temas relativos a CP y CDP.

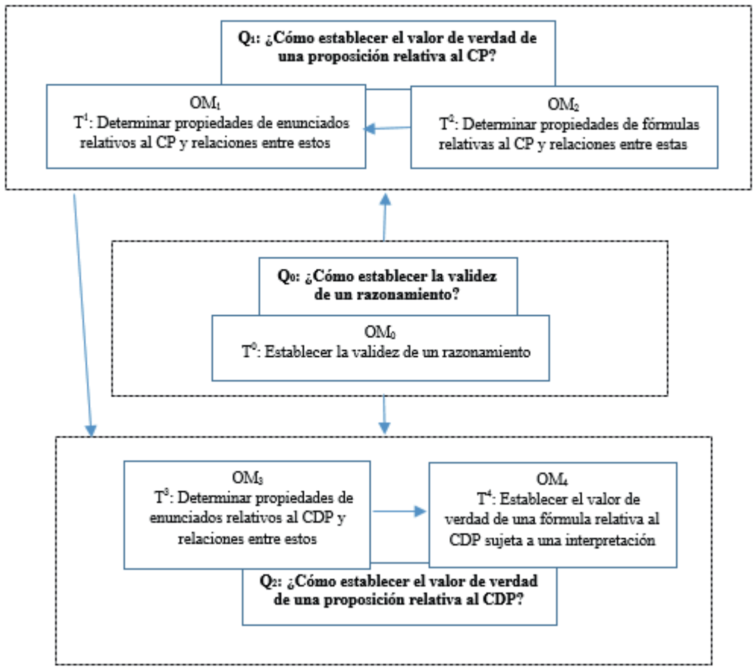
Con la finalidad de llevar a cabo las fases de la investigación, se realizaron observaciones no participantes en los dos grupos durante el estudio de nociones vinculadas a CP y CDP, y se recolectó la siguiente información: el diseño curricular del curso, las versiones en audio de las clases, los registros realizados por los profesores en el pizarrón, los talleres y exámenes propuestos por los profesores y los apuntes de clase tomados por los estudiantes. En concordancia con el referencial teórico adoptado, la investigación se desarrolla en cuatro fases. La primera de ellas corresponde a la reconstrucción de un Modelo Praxeológico de Referencia (en lo sucesivo MPR) relativo a CP y a nociones básicas de CDP. Este modelo constituye una herramienta para analizar las organizaciones matemáticas descritas en las restantes fases de la investigación. Este instrumento lo construyó el investigador a partir de sus conocimientos, los datos recolectados durante la investigación, consultas realizadas a especialistas y revisión bibliográfica especializada. En la segunda fase de la investigación se propone reconstruir la Organización Matemática Propuesta a Enseñar (en adelante OMPE), que se elabora con base en la descripción del curso y los materiales propuestos por los docentes para el desarrollo de las clases. Dado que no siempre lo propuesto a enseñar coincide con lo efectivamente enseñado, para analizar este aspecto, como tercera fase de la investigación, se propone la reconstrucción de la Organización Matemática Efectivamente Enseñada (en adelante OMEE). Para esta reconstrucción se requiere de la información recogida en el proceso de observación no participante. En la cuarta y última fase se propone el diseño de un dispositivo didáctico para un estudio funcional de CP y CDP; en este trabajo no se presentan avances de este recurso pedagógico.

Modelo praxeológico de referencia

En primer lugar, se reconstruyó el MPR en torno al estudio de CP y nociones básicas de CDP. En el marco de la TAD este modelo se emplea como referente para analizar el saber matemático antes de su transformación para ser enseñado. La descripción de este modelo se realiza mediante una red de cuestiones y respuestas que tienen estructura praxeológica, constituyendo una importante herramienta didáctica. Barquero, Bosch y Gascón (2013) afirman que un MPR, por sus características particulares, se constituye en un instrumento de emancipación de la didáctica, debido a que permite cuestionar la manera cómo las instituciones en las cuales aparecen problemáticas matemáticas y/o didácticas interpretan el saber matemático. Cabe destacar que el MPR debe ser considerado como una hipótesis provisional, lo cual implica que es susceptible de ser revisado y modificado constantemente (Fonseca, Gascón y Lucas, 2014; Quijano y Corica, 2017).

La cuestión generatriz que da origen al MPR es Q_0: *¿Cómo establecer la validez de un razonamiento*? El modelo está constituido por dos bloques: el estudio de las relaciones lógicas entre expresiones del CP y la ampliación del estudio del CP al CDP. Los dos bloques están asociados a dos preguntas Q_1 y Q_2, que se derivan de Q_0. La cuestión generatriz se considera un interrogante planteado en sentido fuerte, dado que debe ser estudiado en detalle, para lo cual se requiere abordar diversas OM compuestas por tareas, técnicas, definiciones, propiedades y teoremas que describen, explican y justifican el trabajo realizado; en la presente investigación se propone dar respuesta a esta pregunta desde dos ramas de la lógica matemática como son el CP y el CDP. En la *Figura 1* se muestra un esquema que sintetiza el MPR, el cual se compone de las preguntas generadoras junto a sus respectivas organizaciones matemáticas y tareas asociadas; también se indican las relaciones entre las mismas.

Figura 1. *Esquema general MPR.*



Fuente: Elaboración propia

Con respecto a la *Figura 1*, el bloque que alude al CP se encuentra ubicado en la parte superior de la cuestión generatriz, y el relativo al CDP está ubicado en la parte inferior. Ambos están constituidos por organizaciones matemáticas, provenientes de las preguntas Q_1 y Q_2 que se desprenden de la cuestión Q_0. Los tipos de tareas que constituyen las organizaciones matemáticas que conforman el esquema general del MPR están asociados a los géneros de tareas: *establecer* y *determinar*. El género *establecer* hace referencia a tareas en las cuales se requiere verificar o confirmar determinadas características de una proposición; el género de tareas *determinar* alude a aquellas en las cuales se hacen precisiones con base en información conocida.

Q_0 da lugar a Q_1: *¿Cómo establecer el valor de verdad de una proposición relativa al CP?,* que conduce al estudio del tipo de tareas que componen las OM_1 y OM_2. El tipo de tareas que define a OM_1 es T^1*: Determinar propiedades de enunciados relativos al CP y relaciones entre estos.* En esta OM se comprende por enunciado a una expresión del lenguaje cotidiano de la cual puede afirmarse que es verdadera o falsa, pero no las dos. OM_2 se define por el tipo de tareas T^2*: Determinar propiedades de fórmulas relativas al CP y relaciones entre éstas*. Son conocidas como fórmulas aquellas expresiones conformadas por: letras que representan variables proposicionales, símbolos que representan conectivos y, si es el caso, términos de agrupación útiles para evitar ambigüedades.

De Q_0 también se deriva Q_2*: ¿Cómo establecer el valor de verdad de una proposición relativa al CDP?* Q_2 conduce al estudio del tipo de tarea que compone a OM_3 Y OM_4. El tipo de tareas que define a OM_3 es T^3*: Determinar propiedades de enunciados relativos al CDP y relaciones entre estos;* OM_4 está representada por el tipo de tareas T^4*: Establecer el valor de verdad de una fórmula relativa al CDP sujeta a una interpretación.* Cada una de las cuatro organizaciones matemáticas que se generan a partir de OM_0 (OM_1, OM_2, OM_3 y OM_4) da lugar a una nueva red de praxeologías, que por su extensión no se describe en este trabajo.

La Organización Propuesta a Enseñar

Un segundo avance relevante en la investigación lo constituye la reconstrucción de la OMPE, que está relacionada con la etapa de la transposición didáctica (Chevallard, 1997), según la cual el saber erudito requiere ser transformado y adaptado acorde a las necesidades de cada institución educativa determinada. La OMPE en reconstrucción es producto del análisis del material utilizado por los dos docentes que enseñaron nociones de CP y CDP a estudiantes para profesor de matemáticas en una universidad colombiana. Para describir la OMPE, se utiliza la técnica de revisión de documentos (Hernández, Fernández, Baptista, 2014). Para llevar a cabo las clases, los docentes emplearon un libro de texto. Según Bravo y Cantoral (2012), los libros de texto son producto de la transposición didáctica, han sido modificados y adaptados para la enseñanza.

Se analiza el libro de texto que lleva por título *Introducción a la lógica matemática,* reimpreso en 1975*,* cuyos autores son Patrick Suppes y Shirley Hill. Este documento es el material propuesto por dos docentes que orientaron el curso en el cual enseñaron nociones de CP y CDP a estudiantes para profesor de matemática. Los dos docentes orientan el curso de manera autónoma y coincidieron en proponer el mismo libro de texto para desarrollar el curso. A lo largo de la investigación, los docentes se identifican como profesor A y profesor B, con el fin de preservar sus identidades. Es importante destacar que en este estudio no se considera el diseño curricular (o microcurrículo) del curso, debido a que la información que se presenta allí es tan sintética que no permite una clara reconstrucción de la OMPE.

Con relación al análisis del libro de texto propuesto por los docentes, para ello se estudian los capítulos en detalle; se analizan los ejemplares de tarea resueltos, se examinan los ejemplares de tarea propuestos para ser resueltos y se resuelven algunos de ellos identificando el entorno tecnológico-teórico requerido. Con la finalidad de estudiar los ejemplares de tarea propuestos para ser resueltos, éstos se organizaron en una tabla que se compone de las categorías que se indican en la *Tabla 1*. En la tabla se distinguen los *Géneros de tareas* junto a las *tareas* que los componen. También, en ella, se recoge el conjunto de acciones llevadas a cabo para resolver una cierta tarea (*Técnicas*), los elementos tecnológicos (*Bloque tecnológico- teórico*) utilizados, las tareas del libro de texto expuestos como ejemplares y los *indicadores matemáticos de completitud* propuestos por Fonseca (2004) y Lucas (2010), que permiten establecer el *grado de completitud* de una Organización Matemática Local.

Tabla 1. *Categorías para analizar tareas.*

$I_c^{a,b}$	**Genero de tareas**	**Tipo de tareas**	**Ejemplar de tarea**	**Técnica**	**Bloque tecnológico-teórico**	**I MC**

Fuente: Elaboración propia.

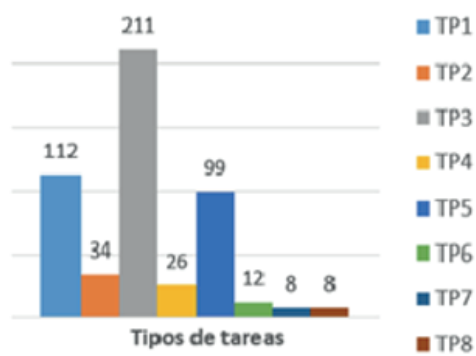
Las categorías que componen la Tabla 1 se organizan en siete columnas. En la primera se indica con exactitud cuál fue la tarea del libro de texto resuelta en la tercera columna; la expresión $I_c^{a,b}$ refiere al *ejercicio a, punto b* e *ítem c* que se aborda. En la segunda columna se describen *los géneros de tareas*. Los *tipos de tareas* son exhibidos en la tercera. En la cuarta columna se indican y resuelven ejemplares de tarea que son propuestos en el libro de texto sugerido por los docentes para ser resueltos por los estudiantes. En la quinta columna se describen las técnicas que fueron empleadas para solucionar las *tareas* de la columna anterior. Los *elementos tecnológicos (*discursos que describen, explican, justifican las *técnicas* y *tecnologías)* se describen en la sexta columna. En la séptima y última columna se señalan los *indicadores matemáticos de completitud de una OML* que se identifican en el estudio de la tarea respectiva.

A partir de la confección de la *Tabla 1*, se identificaron tipos de tareas que corresponden a seis géneros de tareas. A continuación se presentan los géneros mencionados con sus respectivas definiciones: *identificar,* hace referencia a tareas que requieren distinguir los elementos que componen las proposiciones; *representar*, alude a la demanda del uso de símbolos para encarnar enunciados o recíprocamente; c*onstruir,* incluye tareas que exigen el uso organizado de herramientas y reglas para concebir un propósito; n*egar,* alude a tareas relativas a modificar el valor de verdad de una proposición; c*ompletar,* refiere a tareas que implican añadir componentes que le faltan a una proposición; y el género r*elacionar,* engloba tareas que demandan establecer una relación entre dos proposiciones.

En la *Figura 2* se indica el número de tareas propuestas para ser resueltas según los diferentes *géneros.* El 46% de las tareas se asocian al género *representar (GP3),* el 41% refieren al género *identificar (GP1),* el 7% se asocian al género *construir* (GP2); además, las tareas *completar (GP5), relacionar (GP6) y negar (GP4), cada una se asocia al 2%.* Es decir, el 87% de las tareas del libro propuestas para ser resueltas corresponden a los géneros *representar (GP3)* o *identificar (GP1)*; el 13% restante se distribuye entre los otros cuatro géneros de tarea.

Figura 2. *Géneros y cantidad de tareas propuestas.*

Figura 3. *Tipos y cantidad de tareas propuestas.*



Elaboración de los autores.

Asimismo, en la *Figura 3* se puede apreciar el número de tareas propuestas para ser resueltas según los tipos de tarea identificados. En particular, el tipo de tareas más típico es *representar proposiciones simbólicamente (TP3)* con 211 tareas propuestos que equivalen al 41% del total; el tipo de *tareas identificar las componentes de una proposición molecular (TP1)* e *identificar el término de enlace dominante en una proposición molecular (TP5)*, cuentan con 112 y 99 tareas para resolver, que equivalen al 22% y 19% del total, respectivamente; de igual forma, el 7% se asocia al tipo de tareas *construir proposiciones (TP2)*, el 5% *se vincula con representar proposiciones en lenguaje común (TP4), y los tipos de tareas negar proposiciones (TP6), completar el espacio en blanco (TP7) y relacionar enunciados de dos columnas (TP8)* corresponden al 2% cada una. Es decir, el 82% de las tareas propuestas para ser resueltas en el capítulo del libro analizado se asocian a los tres tipos de tareas mencionados inicialmente, mientras que el 18% restante corresponde a los cinco tipos de tareas restantes.

La Organización Matemática Efectivamente Enseñada

La reconstrucción de la OMEE requirió el análisis de las clases de los dos grupos, en las que se abordaron nociones relativas a CP y CDP. En particular, se transcribieron todos los audios de cada clase y se los segmentó en episodios. Éstos se distinguen como diferentes cuando el discurso gira en torno a un determinado tipo de tareas. Con el objetivo de organizar y estudiar los datos obtenidos de cada clase, se elaboraron dos tablas. La primera tabla de análisis de datos permite realizar un análisis en profundidad del proceso de estudio, tal como lo vivieron sus protagonistas. La segunda tabla de análisis de datos es un material con el que se pretende realizar un análisis global del proceso de estudio. En la *Tabla 2* se indican las categorías que componen la primera tabla.

Tabla 2. *Categorías que componen la primera tabla de análisis de datos.*

Episodio	Género de tareas	Tipo de tareas	Ejemplar de tarea	Técnicas	Bloque tecnológico -teórico	IMC

Fuente: Elaboración propia.

La descripción de las categorías que componen la *Tabla 2* coincide con la de la *Tabla 1*, excepto la primera columna, que en este caso alude al episodio abordado en la clase. Con la segunda tabla de análisis de datos, se pretende realizar un análisis global del proceso de estudio, vinculado con el topos del alumno y el profesor. En la *Tabla 3* se indican las categorías que la componen.

Tabla 3. *Categorías que componen la segunda tabla de análisis de datos.*

<table>
<tr><th rowspan="3">Episodio</th><th rowspan="3">Noción matemática</th><th rowspan="3">Género de tareas</th><th colspan="2">Momento didáctico</th><th colspan="3">Gestos del profesor</th><th colspan="2">Gestos del alumno</th></tr>
<tr><th rowspan="2">MDP</th><th rowspan="2">MDS</th><th colspan="2">GI</th><th rowspan="2">GP</th><th rowspan="2">GA</th><th rowspan="2">GP</th></tr>
<tr><th>ISD</th><th>ISF</th></tr>
</table>

Fuente: Corica y Otero (2011).

La primera columna, *Episodio,* junto a la segunda, *Noción matemática*, y tercera *Género de tareas*, permiten realizar una primera descomposición general del proceso de estudio. En la columna *Noción matemática* se busca identificar aquellos objetos matemáticos que aparecieron de manera explícita para ser estudiados, tanto en el discurso oral del profesor como de los estudiantes. La cuarta columna, *Momento didáctico,* indica el momento predominante del estudio (MDP) dentro de cada episodio, así como los momentos secundarios (MDS). En la quinta columna se registran los *Gestos del profesor*, que pueden ser: *gestos de invitación* (GI) o *gestos de posicionamiento* (GP); los *GI* hacen referencia a estimular a los estudiantes mediante preguntas con el objetivo de que se involucren en el proceso de estudio; el docente puede realizar dos tipos de pregunta: *Invitación en sentido débil* (ISD) o *Invitación en sentido fuerte* (ISF). Los (GP) están relacionados con producir o indicar, mediante la escritura, comentarios o preguntas elementos que sirven de *camino* para situarse en las maneras de razonar y de hacer que existen en la institución en cuestión. En la sexta columna se recogen los *Gestos del estudiante,* que pueden ser: *gestos de aceptación* (GA) relacionados con el número de respuesta de los estudiantes a los gestos de invitación de los profesores; o *gestos de posicionamiento* (GP), que tienen que ver con indicar, mediante comentarios, respuestas, o formular preguntas portadoras de elementos que sirven de camino para situarse en las maneras de razonar y de hacer que existen en la institución en cuestión.

Con relación a los resultados obtenidos al confeccionar la *Tabla 2*, las tareas resueltas por los dos docentes se asocian a los géneros *establecer, representar, construir, negar, demostrar, intercambiar* e *inferir.* Particularmente, la *Figura 4* permite apreciar los *géneros* de tareas y número de ejemplares resueltos por cada profesor. Se puede advertir que los géneros *establecer (G1)*, *representar (G2), construir (G3)* y *negar (G4)* fueron abordados por los dos docentes. En contraste, los *géneros demostrar (G5)* e *intercambiar (G6)* solamente fueron considerados por el profesor B, y el *género inferir (G7)* solo lo estudió el profesor A. Asimismo, al analizar la cantidad de tareas según el *género de tarea*, se destaca que *establecer* ocupó el primer lugar para los dos profesores.

Figura 4. *Tareas resueltas por género y por profesor.*

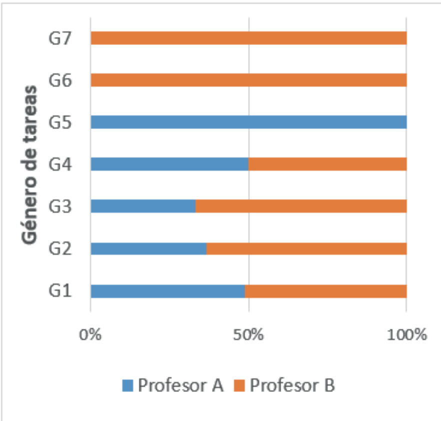
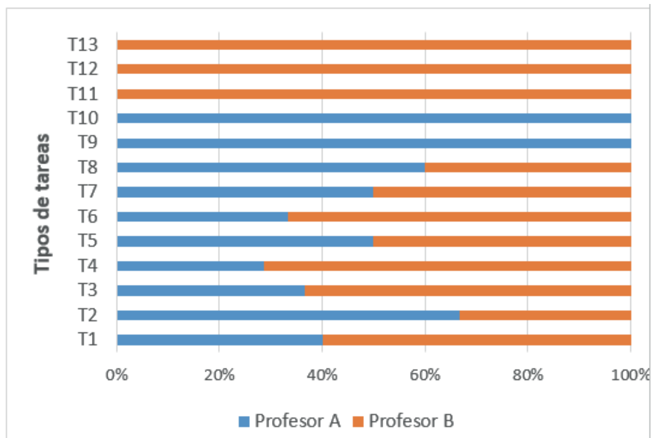


Figura 5. *Tareas resueltas por tipo y por profesor.*



Elaboración de los autores.

La *Figura 5* muestra los tipos de tareas resueltas por cada docente. Se observa que los *tipos* de tareas estudiados por los dos profesores fueron: *establecer si un enunciado es una proposición (T1), establecer si una proposición es atómica o molecular (T2), representar proposiciones simbólicamente (T3), construir proposiciones moleculares (T4), negar proposiciones (T5), establecer el valor de verdad de una proposición (T6), construir la tabla de verdad relativa a una fórmula (T7), establecer si una fórmula corresponde a una tautología (T8).* En cambio*, establecer la validez de un argumento (T9)* e *inferir la conclusión de una serie de premisas (T10)* solamente los consideró el profesor A. De igual forma, los tipos de tareas*, establecer el nivel jerárquico de los conectivos que componen una fórmula (T11), demostrar que dos fórmulas son equivalentes (T12)* e *intercambiar los cuantificadores obteniendo una proposición equivalente (T13)* fueron expuestos solo por el profesor B.

Con respecto al análisis de la *Tabla 3* confeccionada a partir de la práctica de los dos profesores, en la *Figura 6* se pone en evidencia que, durante el estudio, el momento didáctico predominante en la actividad del profesor A fue el relacionado con la *exploración del tipo de tareas y de la elaboración de una técnica* (*ETET*). Por el contrario, para el caso del profesor B, el momento didáctico predominante correspondió al *primer encuentro con la organización matemática estudiada* (*PE*). El momento de la *constitución del entorno tecnológico-teórico relativo a la técnica* (*CETT*) no ocurrió en las prácticas del profesor B, y en las del profesor A tuvo una ocurrencia muy reducida.

Figura 6. *Momento didáctico principal*

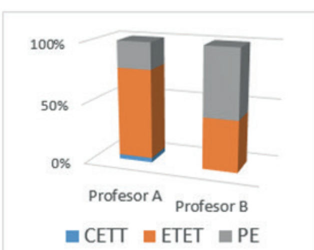
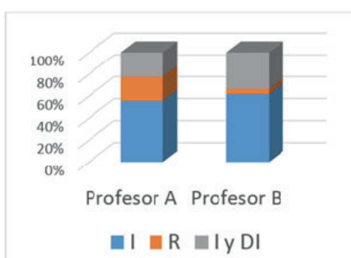
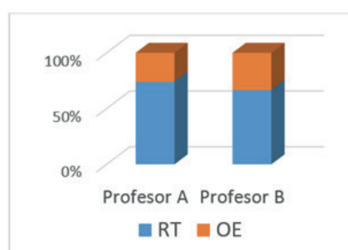


Figura 7. *Gestos posicionamiento estudiantes.*



. **Figura 8.** *Gestos posicionamiento docentes.*



Elaboración de los investigadores.

La *Figura 7* revela, sobre el comportamiento de los estudiantes durante el proceso de estudio, que el *gesto de posicionamiento* predominante con los dos docentes fue *Interpretación* (I); mientras que *Recepción* (*R*) e *Interpretación* junto con *Demanda de Información* (I y DI) tuvieron un menor suceso. Asimismo, en lo relacionado con el rol de los docentes, la *Figura 8* indica que prevaleció el *gesto de posicionamiento Resolver Tareas (RT),* comparado con *Orientación de funciones del Estudiante (OE).*

Conclusiones

En este trabajo se presentan resultados de una investigación en desarrollo, de carácter cualitativo, relacionada con la línea de investigación formación de profesores. Se busca hacer un aporte en el nivel de educación superior, tomando conocimiento de las prácticas docentes de profesores universitarios que orientan temas referentes a lógica matemática a estudiantes para profesor de matemática, y proponer praxeologías superadoras para la enseñanza de este ámbito.

A partir del estudio realizado se pone en evidencia que las organizaciones matemáticas propuestas a enseñar por los docentes presentan un *bajo grado de completitud,* según los indicadores propuestos por Fonseca (2004) y Lucas (2010). Asimismo, se puede observar una desfragmentación del saber en teórico y práctico, bajo una concepción de aplicación, primero se presenta el saber teórico y luego se proponen tareas para poder *observar* su funcionamiento. No hay instancias en las que a partir de la resolución de las tareas, se estudien las limitaciones de las técnicas empleadas, y esto dé lugar a la elaboración de nuevos entornos tecnológicos –teórico, por ejemplo. De igual forma, en las tareas sólo hay que aplicar las mismas técnicas que se proponen en los ejemplares, sólo permiten reutilizar técnicas, pero no cuestionarlas ni modificarlas.

Con respecto a las organizaciones matemáticas efectivamente enseñadas, se destaca que la actividad de los docentes se centró en interpretar las tareas y sugerir la manera de resolverlas mediante una única técnica. Por su parte, los estudiantes durante las clases respondían a preguntas que realizaban los docentes; estas preguntas las respondían de forma inmediata los jóvenes, debido a que no resultaban problemáticas para ellos. Nuestra investigación continúa en el desarrollo de un dispositivo didáctico para el estudio de CP y CDP que permita superar las dificultades detectadas y favorecer un estudio funcional de la matemática en la formación de profesores de matemática.

Referencias

Artaud, M., Cirade, G. y Jullien, M. (2011). Intégration des PER dans l´equipement praxéologique du professeur. Le cas de la formation initiale. En: BOSCH, M. et al. (Eds.). *Un panorama de la TAD, 769-794.* Barcelona: Centre de Recerca Matemàtica.

Azcárate, P. (2004). Los procesos de formación: En busca de estrategias y recursos. En E. Castro & E. de la Torre (Coord.), *Actas del Octavo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 43-60). A Coruña: Universidade da Coruña.

Barquero, B., Bosch, M. y Gascón, J. (2013). Las tres dimensiones del problema didáctico de la modelización matemática. *Educ. Matem. Pesq., Sao Paulo*. 15(1), 1-28.

Bravo, S. y Cantoral, R. (2012). Los libros de texto de cálculo y el fenómeno de la transposición didáctica. *Educación matemática*, 4(1), 5-36.

Cárdenas, W., Reyes, D. y Viteri, F. (2017). La formalización lógica del lenguaje como punto de partida para el análisis objetivo del discurso y la argumentación científica. *Sophia, colección de filosofía de la educación*, 22(1), 99-121.

Chevallard, Y. (1997). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Aique.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en didactique des mathématiques.* 19(2), 221-266.

Copi, I., Cohen, C. (2013). *Introducción a la lógica*. México: Limusa

Corica, A. y Otero, M. (2011). Análisis de la dinámica de estudio en un curso universitario de matemática. En Bosch, M. et al. *Un panorama de la TAD*. Barcelona: Centre de Recerca Matemàtica.

Corica, A. y Otero, M. (2012). Estudio sobre las praxeologías que se proponen estudiar en un curso universitario de cálculo. *BOLEMA*. 26(42B), 459-482.

Corica, A. y Otero, M. (2016). Diseño e implementación de un curso para la formación de profesores en matemática: una propuesta desde la TAD. *Boletim de Educaçáo Matemática*. 30(55), 763-785.

Fonseca, C. (2004). *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la enseñanza secundaria y la enseñanza universitaria*. Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Vigo. España.

Fonseca, C., Gascon, J. y Lucas, C. (2014). Desarrollo de un modelo epistemológico de referencia en torno a la modelización funcional. *RELIME*, 17(3), 289-318.

Gasca, G. y Machuca L. (2018). El impacto de las ciencias computacionales en el mundo real. *Risti,* 29, Editorial.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista. P. (2014). Metodología de la Investigación. 6° edición. *Mc Graw-Hill Interamericana Editores*: Ciudad de México.

Huertas, M., Mor, E. y Guerrero, A. (2010). Herramienta de apoyo para el aprendizaje a distancia de la lógica en ingeniería informática. *Revista de educación a distancia.* Número especial, 1 -10.

Lucas, C. (2010). *Organizaciones matemáticas locales relativamente completas*. Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Vigo. España.

Quijano, M. y Corica, A. (2017). Desarrollo de un modelo praxeológico de referencia en torno a lugares geométricos. *REDIMAT*, 6(2), 192 - 220.

Serna, E. (2013). Lógica en las ciencias computacionales. *Educación en ingeniería*, 8(15), 62-68.

Shulman, L. (2006). Conocimiento y enseñanza: fundamentos de la nueva reforma. *Profesorado. Revista de curriculum y formación del profesorado*, 9(2), 1 -30.

Sierra, T., Bosch, M., y Gascón, J. (2012). La formación matemática – didáctica del maestro de Educación Infantil: el caso de "cómo enseñar a contar". *Revista de Educación.* 357, 231-256.

Suppes, P. y Hill, S. (1975). Introducción a la lógica matemática. Editorial Reverté S.A.: Cuauhtémoc, México.

SECCIÓN 3

ASPECTOS SOCIOEPISTEMOLÓGICOS EN EL ANÁLISIS Y EL REDISEÑO DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR

VOL 34, NÚMERO 2, AÑO 2021

RADIO DE LA ESFERA SÓLIDA: PRUEBA DE GEOMETRÍA ESPACIAL EN LA ESCUELA DE MINAS DE OURO PRETO (1881–1883)

SOLID SPHERE RADIUS: SPATIAL GEOMETRY TESTS AT MINAS OF OURO PRETO SCHOOL (1881-1883)

Davidson Paulo Azevedo Oliveira
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais. (Brasil)
davidson@cefetmg.br

Resumen
Este estudio tiene como objetivo analizar enunciados y resoluciones de estudiantes en una prueba de Geometría Espacial del curso preparatorio de la Escuela de Minas de Ouro Preto de los años 1881 y 1883 por medio del Paradigma Indiciario. Las pruebas y resoluciones son provenientes del Archivo Permanente de la Escuela de Minas y fueron cotejadas con libros didácticos sugeridos por Gorceix, director de la institución, al emperador Don Pedro II, por medio de correspondencias (disponibles en el Museo Imperial de Petrópolis). Observamos el carácter rígido de la enseñanza que no era orientada al uso de la memoria.

Palabras clave: historia de la matemática, escuela de minas, geometría espacial

Abstract
The aim of this study is to analyze students' wordings and resolutions in a Spatial Geometry test of the preparatory course at Minas de Ouro Preto School in the academic years 1881 and 1883, through the Evidence Paradigm. The tests and resolutions come from the Permanent Archive of the school of Minas and were compared with didactic textbooks suggested by Gorceix, director of the institution, to the emperor Dom Pedro II through correspondence (available at the Imperial Museum of Petrópolis). We observed the rigid nature of teaching that was not addressed to the use of memory.

Key words: history of mathematics, Minas de Ouro Preto School, spatial geometry

Introducción

El título de este artículo, radio de la esfera sólida, es una de las consignas de la prueba de Geometría Espacial de 1881 del curso preparatorio de la Escuela de Minas de Ouro Preto (EMOP). La institución es la primera escuela superior de geología y mineralogía en el país y fue fundada por el geólogo francés Claude-Henry Gorceix (1842-1919) por invitación del emperador brasileño Don Pedro II (1825-1891), con el objetivo de preparar a ingenieros para la explotación de las minas y para el trabajo en los establecimientos metalúrgicos.

De acuerdo con Carvalho (2002), Gorceix se inspiró en algunas características de dos instituciones francesas, a saber, la Escuela de Minas de París y la Escuela de Minas de Saint-Étienne. Además de esas dos escuelas de geología y mineralogía, el fundador y director de la EMOP trae a Brasil tradiciones de la École Polytechnique y de la Escuela Normal, ambas de París, como las pruebas de selección y el curso preparatorio.

Ese curso fue requerido e instituido después de los resultados no satisfactorios de los candidatos en el primer examen de selección. Entonces, Gorceix solicita al Emperador brasileño que se inicien cursos preparatorios, del mismo modo que en la Escuela de Minas de París, inicialmente con duración propuesta de un año y reformulado en 1881, pasando a ser de dos años. Es justamente a esa esfera de pruebas del curso preparatorio que dirigimos nuestra mirada en este estudio. El objetivo es presentar y analizar la consigna del radio de la esfera sólida, así como los otros enunciados y resoluciones de dos pruebas de Geometría Espacial en la Escuela de Minas de Ouro Preto (EMOP), primera institución de enseñanza superior de mineralogía y geología de Brasil, ocurridas en 1881 y en 1883.

Metodología

A fin de alcanzar nuestro objetivo, nos basamos en el Paradigma Indiciario de Ginzburg (2012) y seguimos indicios y pistas tomados para entender y analizar los enunciados y resoluciones de cuatro estudiantes de la EMOP. Destacamos las pruebas de los años 1881 y 1883 que tuvieron lugar en el curso preparatorio, también denominado Curso Anexo porque las pruebas tienen un gran potencial para entender las matemáticas practicadas y enseñadas en Minas Gerais en el final del siglo XIX.

Los análisis fueron realizados con base en los enunciados de las pruebas (figura1 y figura 2) y de las resoluciones encontradas en el Archivo Permanente de la Escuela de Minas de Ouro Preto, y en correspondencias entre el director de la EMOP y Don Pedro II, a disposición de modo digital por *e-mail* en el Museo Imperial de Petrópolis y transcritas por Lima (1977).

Una de las pistas nos remite al año 1881, en el momento en que Gorceix retorna a Francia y contacta a sus colegas profesores de la enseñanza secundaria, dado que se preocupaba por la enseñanza brasileña de igual nivel. En octubre del mismo año él, entonces, envía una correspondencia a Don Pedro II con la sugerencia de libros a ser utilizados en el territorio brasileño. Rebière escribe a niños y les hace entender aritmética y geometría, a la vez que Combette escribe obras de aritmética, geometría y mecánica que son, de acuerdo con Gorceix, superiores a las existentes hasta el momento (Lima, 1977). En ese sentido, los enunciados y resoluciones de las pruebas fueron, también, cotejados con esos libros.

La prueba de 1881

La primera prueba de Geometría que discutiremos fue respondida por los estudiantes del Curso Preparatorio el 6 de junio de 1881. La transcripción puede ser vista en la figura1 a continuación, en la cual, también, podemos observar que ella es constituida por cuatro problemas referentes a triángulos, plano tangente, volumen de cono y esfera.

Figura 1. *Problemas de la prueba de 1881.*

1ª Questão: O perímetro de um triangulo = 6 metros, um dos ângulos = 60º, e o meio do lado [?] oposto ao ângulo dous está igualmente distante dos outros 2 lados. Pede-se: 1º construir o triangulo; 2º calcular a sua área e a do circulo inscripto; 3º calcular o comprimento do lado de um quadrado equivalente ao triangulo.

2ª Questão: Por um ponto colocado fora de um cylindro tirar um plano tangente ao cylindro. Resolva a mesma questão em relação ao cône e à esfera.

Archivo Permanente de la EMOP.

Antes de analizar las resoluciones de los estudiantes, cotejaremos los problemas de la prueba de geometría con libros didácticos que pueden haber sido utilizados por los profesores de la EMOP para la elaboración de la prueba. Como destacado anteriormente, Gorceix sugiere al Emperador brasileño Don Pedro II la utilización de los libros de Rebiérè y de Combette para que sean adoptados en la enseñanza secundaria del país. En ese sentido, comparamos los problemas de los exámenes con algunos problemas de esos libros, aunque utilizamos una versión editada en 1887 de Combette y la Rebiérè y Bos de 1881. El lector puede percibir que analizamos la prueba de geometría de 1881 de la EMOP y la cotejamos con libros de 1887. Merece explicación ese hecho, visto que una edición completa con datos anteriores a este libro no fue encontrada. La primera parte de la edición de 1881 fue comparada con la de 1887 y no hubo cambios y, por lo tanto, utilizamos la de 1887 por estar completa. Esos rastros seguidos nos llevan a analizar el texto del segundo autor que indica en uno de los ejercicios un problema del Concurso de Admisión a la École Politechinique de Paris ocurrido en 1876 que se asemeja al primer problema de la prueba que analizamos: “Construir un triángulo, conociendo dos lados y el cumplimiento de la bisectriz entre ellos” (Rebiérè y Bos, p. 300, 1881, traducción nuestra).

Además de esa semejanza, los dos libros analizados presentan un ejercicio idéntico al último problema de la prueba. En Rebiérè y Bos (p. 379, 1881, traducción nuestra) es el problema 648: “Encuentre el radio de una esfera sólida dada”. La solución presentada por los autores se inicia con el dibujo de una esfera y de una circunferencia seguido de argumentos teóricos.

En Combette (p. 460, 1887, traducción nuestra) es el problema I: “Construir el radio de una esfera impenetrable”. La resolución también es presentada recorriendo al uso de dibujos de esferas y triángulos y por medio de argumentos teóricos.

La resolución de Belarmino Martins de Menezes

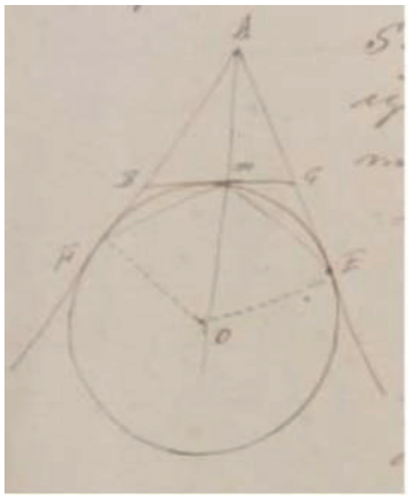
Iniciamos con la resolución de Belarmino Martins de Menezes que era estudiante de la EMOP habiéndose graduado solamente en 1893. Sin embargo, él impartía clases particulares preparatorias de aritmética, álgebra, geometría y trigonometría, cosmografía y dibujo lineal, tanto para la Escuela Politécnica de Rio de Janeiro, como para el curso anexo de la EMOP.

El estudiante no responde a las consignas en el orden en que las presentamos, siendo la primera de ellas sobre el radio de la esfera, que mostraremos inicialmente.

Para el problema de encontrar el radio de la esfera él utiliza dos dibujos de esferas y utiliza argumentos teóricos, tales como los libros que presentamos. Además de eso, su resolución es basada en conceptos de geometría plana y espacial y en técnicas de dibujo geométrico. En los dos dibujos auxiliares que él presenta podemos ver trazos imitando los realizados por compás.

El segundo problema que él resuelve es la del triángulo y para eso el estudiante, nuevamente, utiliza propiedades del dibujo geométrico como la construcción de circunferencias para demarcar distancias iguales (fig. 2). Justifica, luego, porqué el triángulo sea equilátero y calcula la superficie en metros cuadrados. Importante es notar que la unidad de medida utilizada por él para la superficie es del Sistema Decimal de Medidas, pero Belarmino justifica que podría calcularla también en brazas cuadradas si hubiese tiempo suficiente. A pesar de eso, él presenta explicaciones de cómo puede ser realizada la conversión entre las unidades. De acuerdo con el estudiante: “Para tenerse la superficie [del triángulo] expresada en brazas cuadradas bastaba dividir el número de metros cuadrados 4,84 que es el número de metros que tiene una braza cuadrada, pero no hay tiempo”.

Figura 2. *Dibujo de la prueba de Belarmino.*



Archivo Permanente de la EMOP.

Cuando observamos la resolución del estudiante en cuanto al problema del tronco de cono, nuevamente podemos ver algunas concepciones de enseñanza de Gorceix. El estudiante explica en palabras lo que sería la fórmula algébrica para calcular el volumen del tronco de cono y, enseguida, presenta la fórmula algébrica. Según el estudiante la resolución se da por la aplicación directa de la fórmula. Gorceix en el informe de los exámenes de admisión de 1876 deja claro que está interesado en que los alumnos apliquen correctamente las fórmulas. Belarmino, no obstante, no lo hace y encuentra un valor equivocado.

Resolución de Francisco de Sá

Discutiremos solamente la resolución de dos problemas del estudiante Francisco de Sá, a fin de destacar el modo en el que eran resueltas las pruebas. Era una característica común el uso del lenguaje escrito en detrimento de las fórmulas. Por ejemplo, para responder a la consigna relativa al triángulo el estudiante presenta el dibujo de un triángulo y escribe que:

Supongamos un triángulo ABC en el cual las distancias del medio O de un lado a los 2 otros lados, sean iguales. Siendo ob = AO, y on = op, los 2 triángulos rectángulos pAl y nBo, que tienen la hipotenusa y un lado del ángulo recto iguales, son iguales. y el ang A = b. Pero, en el caso actual, A + b = 120. Por lo tanto, A = b = B = 60. El triángulo es equilátero/ y a = b = c = 2 metros. (Resolución de Francisco de Sá, 1881)

Otra resolución de Francisco de Sá a destacar es el cálculo del volumen del tronco de cono. Del mismo modo que Belarmino, él substituye los valores de modo correcto, aunque se equivoca en el resultado final. Ese error puede ser atribuido a la falta de tiempo mencionada por el estudiante anterior, visto que en la resolución del volumen de cono por Francisco de Sá, la caligrafía está diferente de las otras consignas presentadas por él.

La prueba de 1883

La segunda prueba de Geometría que discutiremos fue respondida por los estudiantes del Curso Preparatorio el 24 de junio de 1881. La transcripción puede ser vista en la figura 3 a continuación en la cual, también, podemos observar que ella es constituida por dos problemas referentes a calcular el radio de un círculo circunscrito a un octógono regular y el radio de una esfera inscrita en un cono.

Figura 3. *Problemas de la prueba de 1883.*

1ª Questão: Calcular uma aproximação até 0,001 o raio de um circulo sabendo-se que a área de um octógono regular inscripto excede a do hexágono regular inscripto de um metro quadrado.

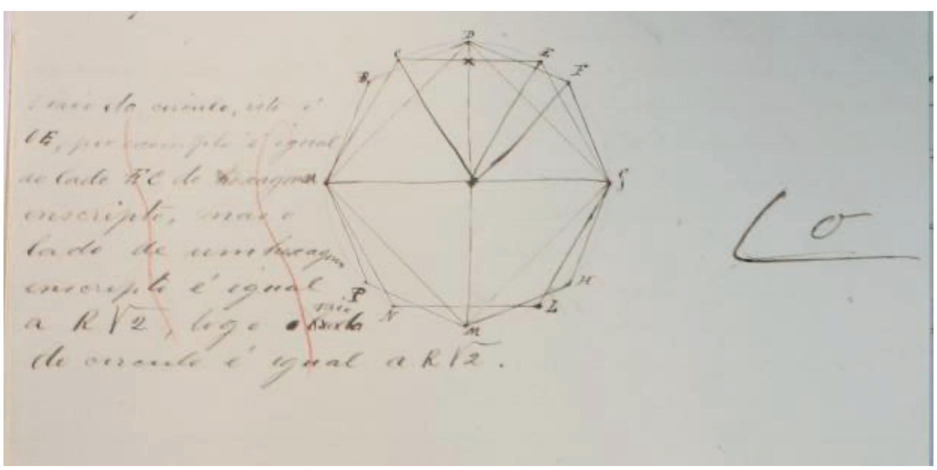
2ª Questão: Os raios das bases de um tronco de cône são respectivamente 1m e 2m, sua altura é 1m,5; pede-se calcular o raio da esfera inscripta ao cône que teria para o circulo de contacto a base superior do tronco e ainda a altura da callote superior que tem para base o circulo considerado; pede-se o volume do cône de base 1m.

Archivo Permanente de la EMOP.

La resolución de Oscar Carneiro de Mendonça Taylor

Para el cálculo del radio del círculo, Oscar Taylor hace un dibujo (figura 4) del hexágono y del octógono y cuadrado inscritos en la circunferencia. Él utiliza conocimientos en relación a la medida del radio de un círculo circunscrito a un hexágono, pero no avanza en la resolución. De acuerdo con el estudiante, en el lado izquierdo de la figura se puede leer: "El radio del círculo, esto es, OE, por ejemplo, es igual al lado EC del hexágono inscripto, pero el lado de un hexágono inscripto es igual a $R\sqrt{2}$, así el radio del círculo es igual a $R\sqrt{2}$".

Figura 4. *Primer problema de Oscar Taylor.*



Archivo Permanente de la EMOP.

Destacamos, también, en la figura anterior (figura 4) que la corrección es realizada en lápiz de color rojo. Más adelante el lector observará que también es utilizado el color azul por el profesor que corrige la prueba, y cada uno con un objetivo. Para el problema relativo al cálculo del radio de la esfera inscrita en el cono, el estudiante también hace un dibujo y algunas afirmaciones, sin embargo, como en el primer problema, obtiene una nota cero.

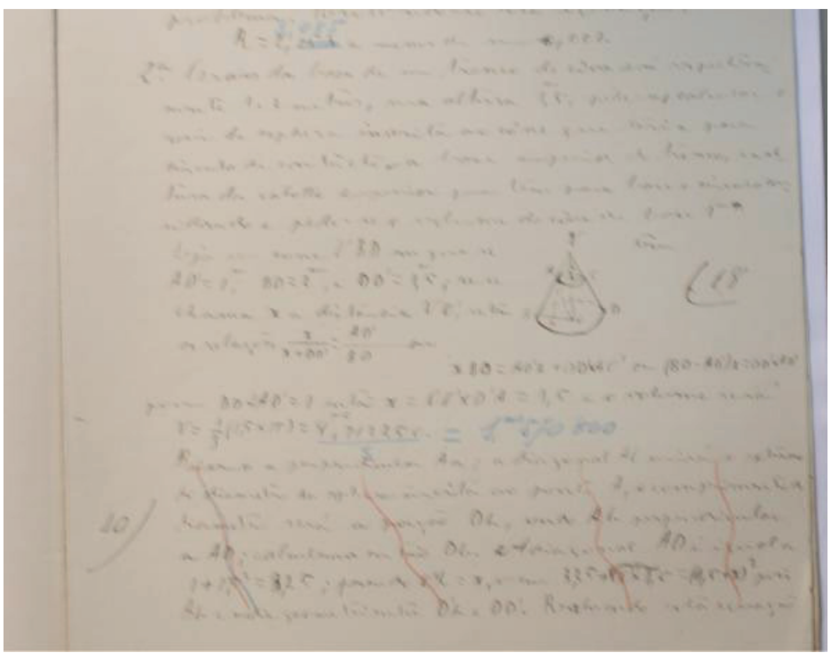
El bajo rendimiento en la prueba puede haber llevado el estudiante a abandonar del estudio en la EMOP visto que en 1885 él va a los Estados Unidos de América, donde concluye el curso de Ingeniería. Nuevamente podemos ver el nivel de rigor exigido por Gorceix en la institución brasileña.

Resolución de Theofilo Amaro da Silveira

Presentamos una parte de la resolución de Theofilo da Silveira (figura 5) a fin de destacar el modo en que fue realizada la corrección de la prueba. Dado que nuestro objetivo con la prueba de este estudiante es resaltar cómo era la corrección del evaluador, decidimos reducir la calidad de la fuente y destacar solamente los colores utilizados. En este sentido, el lector debe prestar atención a las marcas de color que contienen indicaciones de cómo se corrigieron los exámenes, y no al contenido de la figura, es decir, a lo escrito por el alumno.

Obsérvese que el profesor que corrigió la prueba hace uso de lápiz en los colores azul y rojo, conforme ya mencionamos. El color azul es utilizado para pequeños errores numéricos de modo que el estudiante pueda entender en qué se equivocó y aprender con la corrección. Y el color rojo es utilizado para la consigna como un todo sin añadir informaciones que podrían agregar conocimiento a los estudiantes.

Figura 5. *Puntos destacados de la corrección en la prueba de Theofilo Silveira.*



Archivo Permanente de la EMOP.

En la segunda intervención en azul se recuerda al estudiante que él se olvidó de dividir el volumen del cono por tres. Theofilo escribe en la fórmula el tercio, pero en los cálculos no lo hace. Inmediatamente abajo, la corrección es realizada en el color rojo siendo considerada equivocada toda ella.

Interpretaciones a partir de las pruebas

Las pruebas y resoluciones nos permiten algunas interpretaciones además de la matemática utilizada y descrita anteriormente. Tratamos, de esta manera, en las próximas secciones el Sistema Métrico utilizado en Brasil y en la EMOP, y el papel de las fórmulas en la enseñanza en que no se recurre a la memoria.

Sistema de unidades de medida

La resolución de Belarmino nos permite realizar un análisis contextual de Brasil a fines del siglo XIX, principalmente relativo a sistemas de pesos y medidas. Discutimos, anteriormente, cómo el estudiante cita una unidad de medida basada en brazas. Podemos decir que el antiguo sistema de medidas brasileño utilizaba, entre otros, brazas (2,2 metros) y palmos (22 centímetros) para unidades de longitud, alqueire (36,27 litros) y pipa (480 liros) para unidades de capacidad, y arroba (14,689 quilogramas) y octava (3,6 gramas) para unidades de peso.

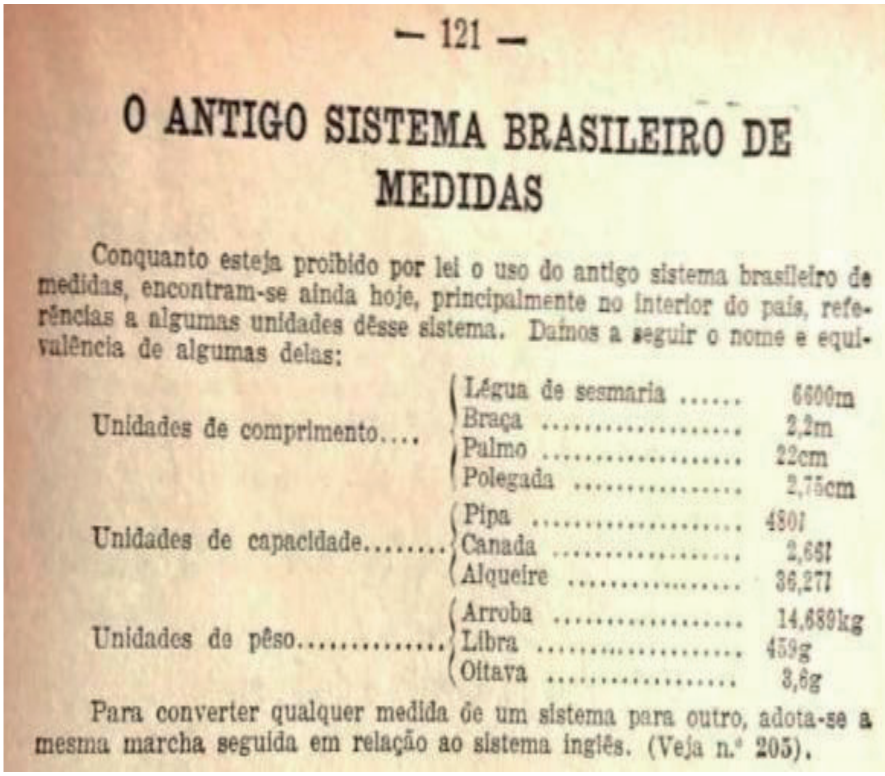
Sin embargo, la Ley 1157 del 26 de junio de 1862 substituye ese sistema de medidas por el Sistema Métrico Francés. En su artículo primero, la ley dispone que: "El actual sistema de pesos y medidas será substituido en todo el Imperio por el sistema métrico francés, en la parte concerniente a las medidas lineales, de superficie, capacidad y peso" (Brasil, 1862).

La ley establece, asimismo, que en diez años todo el sistema que no fuese Sistema Métrico Francés sería interrumpido y, dentro de ese plazo las escuelas de instrucción primaria deberían enseñar a los estudiantes el nuevo sistema. Es importante resaltar el artículo tercero de la ley que prevé multa y prisión para quien incumpla la ley: "El Gobierno, en los reglamentos que expedir para la ejecución de esta Ley, podrá imponer a los infractores la pena de prisión hasta un mes y multa hasta 100$000" (Brasil, 1862).

Como el lector puede haber percibido por la prueba de Belarmino, a pesar de las duras restricciones, la implantación del nuevo sistema de medidas no fue algo inmediato y dentro del plazo estipulado. Esto porque, como afirma Zuin (2017), la utilización de brazas, palmos, alqueires y pipas es un producto cultural y forma parte del día a día de la población. En ese sentido, la autora afirma, además, que ese quiebre cultural no puede llevarse a cabo sin conflictos de nivel social. Existía tanto el descontento ligado a la pérdida de la tradición como también aquellos que asociaban el Sistema Métrico Francés al Iluminismo y a la Revolución Francesa. Para utilizar los nuevos estándares de medidas, los comerciantes deberían alugar los parámetros, lo que acarreaba aumento de impuestos y, consecuentemente, de las mercaderías. No es difícil para el lector imaginar que diversas revueltas ocurriesen en Brasil, siendo la Revuelta de los Quebra Quilos ocurrida en 1874 la más conocida. Para más a este respecto, ver Zuin (2017).

Volviendo al punto de vista educacional, resaltamos que hasta mediados del siglo XX el Antiguo Sistema de Medidas Brasileño todavía estaba en uso (y diría que aún hoy lo está en determinadas culturas brasileñas). De hecho, en la 87ª edición del libro Aritmética Progresiva, escrito por Antônio Trajano, se resalta el Antiguo Sistema Brasileño de Medidas (figura 6) y se afirma que todavía es utilizado en el interior del país. También es posible observar cómo se efectúa la conversión de las unidades de medida. Nótese que una braza es equivalente a 2,2 m y, por lo tanto, la respuesta de Belarmino está de acuerdo con lo presentado por Trajano (1857).

Figura 6. *Unidades de medida en libro didáctico.*



— 121 —

O ANTIGO SISTEMA BRASILEIRO DE MEDIDAS

Conquanto esteja proibido por lei o uso do antigo sistema brasileiro de medidas, encontram-se ainda hoje, principalmente no interior do país, referências a algumas unidades dêsse sistema. Damos a seguir o nome e equivalência de algumas delas:

Unidades de comprimento....	Légua de sesmaria	6600m
	Braça	2,2m
	Palmo	22cm
	Polegada	2,75cm
Unidades de capacidade........	Pipa	480l
	Canada	2,66l
	Alqueire	36,27l
Unidades de pêso..............	Arroba	14,689kg
	Libra	459g
	Oitava	3,6g

Para converter qualquer medida de um sistema para outro, adota-se a mesma marcha seguida em relação ao sistema inglês. (Veja n.° 205).

Trajano, p. 121, 1957.

¿Pero qué piensa el director de la Escuela de Minas, Henry Gorceix a ese respecto? Como dicho anteriormente, él era un geólogo francés, cuyo interés era utilizar el sistema francés de unidades de medida. Ese hecho puede ser verificado, tanto en las pruebas de algunos estudiantes, como en la correspondencia que él envía a Don Pedro II en 1882, en la cual manifiesta el interés en popularizar el sistema decimal de unidades. Según transcripción realizada por Lima (1977, p. 195), Gorceix escribe que:

Envío al ministro, por lo tanto, una pequeña caja que contiene las diversas medidas del sistema métrico que pueden servir para mostrar a los estudiantes sus relaciones con la unidad principal. Sería útil que toda escuela, por lo menos los principales centros, posea estas cajas. Esta es la mejor manera que tenemos de hacer propaganda para la adopción de ese sistema (traducción nuestra).

Por lo tanto, Gorceix tenía interés en la adopción por todo el territorio brasileño del Sistema Métrico Francés, especialmente, en escuelas de enseñanza secundaria. En las pruebas que analizamos no verificamos la exigencia de transformación entre los sistemas, pero observamos que Belarmino encuentra la respuesta de acuerdo con las nuevas unidades de medida e informa cómo es realizada la transformación a las unidades de la tradición, o sea, del sistema brasileño.

Aplicación de fórmulas

Gorceix criticó diversas veces la enseñanza secundaria brasileña que era dedicada a memorización (Oliveira, 2020), pues su objetivo era formar ingenieros que supieran investigar. Para ello, en las pruebas eran entregados formularios a los estudiantes, dado que para él la aplicación de fórmulas era algo importante, como afirma Oliveira (2020).

Belarmino y Francisco de Sá substituyeron los valores correctos al calcular el volumen de un cono, aunque erraron en los cálculos y encontraron valores equivocados. A pesar de esto, ellos consiguen notas altas de acuerdo con la corrección de los profesores, lo que puede significar que estaban de acuerdo con lo que pretendía Gorceix.

De los estudiantes cuyas resoluciones discutimos, solo Francisco de Paula Rocha Lagoa calculó correctamente el volumen del tronco de cono solicitado, pero él no responde una de las consignas. Nuevamente podemos destacar el tiempo de realización de la prueba.

En el examen de selección a la EMOP de 1878 la Comisión Evaluadora destaca la necesidad de que los candidatos apliquen las fórmulas correctamente. Según ellos: “Los candidatos deben solamente hacer aplicación de las fórmulas empleadas sin ocuparse de su deducción” (Archivo Permanente de la EMOP). Esas características se preservan en los años siguientes y definen bien el interés de Gorceix y sus profesores.

Conclusiones

Encontrar el radio de una esfera sólida fue una de las consignas que discutimos en la prueba de Geometría de 1881. Sin embargo, analizar la matemática y su enseñanza en la EMOP involucra otras consignas. Además de las ya destacadas anteriormente, Oliveira (2021) analiza problemas de Cálculo contenidos en exámenes de selección, pruebas del curso preparatorio y del curso superior y resalta el alto nivel de matemática exigido de los estudiantes. Ese mismo nivel elevado de matemática y apuntado por Oliveira (2021), puede ser visto en las pruebas de Geometría Espacial aquí analizadas. Otro punto destacado es la presencia de un formulario dado a los estudiantes para que no tengan que memorizar las fórmulas necesarias para la resolución de los problemas, lo que coincide con las críticas de Gorceix a la enseñanza secundaria brasileña que, según él, priorizaba el recurso a la memoria.

Resaltamos, también, el sistema de medida utilizado por Belarmino basado en brazas, correspondiente a 2,2 metros. En Brasil, la ley de 1862 torna obligatorio el uso del sistema métrico decimal, a partir de diez años, o sea, a partir de 1872, con penalización de multa y pasible de prisión, a quien utilizase un sistema de medidas que fuese distinto del sistema métrico francés. Sin embargo, casi veinte años después vemos que son utilizados otros sistemas de medida. De hecho, en 1957, uno de los libros más utilizados en la enseñanza brasileña, presentaba cuadros de transformación entre las unidades de medida.

Se observa, también, que la utilización de logaritmos para resolver problemas relativos a triángulos esféricos tal como fue exigido, según Oliveira (2020), en los exámenes de admisión en problemas de trigonometría plana.

La enseñanza en la EMOP era vista como muy rígida para los alumnos (Carvalho, 2002), y lo mismo se puede ver por parte de los profesores. Observando detalles, conforme resalta Ginzburg (2012), que debe ser hecho en análisis historiográficos, las pruebas eran corregidas utilizándose lápiz de dos colores (rojo y azul), dependiendo del error cometido por el estudiante. Ello refleja, una vez más, la concepción de enseñanza de Gorceix, por medio de sus profesores que no estaban interesados solamente en el resultado final encontrado por los estudiantes, sino en el razonamiento que ellos usaban para la resolución de los problemas planteados, lo que coincide con su concepción sobre la enseñanza, que no debería ser libresca y orientada a la memoria.

Además, destacamos las dificultades de la investigación en los archivos brasileños que, muchas veces, están desorganizados y sin el debido cuidado con los documentos. En concreto, Oliveira y Nobre (2020) destacan el Archivo Permanente de la Escuela de Minas de Ouro Preto, una de las instituciones investigadas en el presente trabajo. La calidad de las fuentes y la dificultad para localizarlas se convierten en uno de los mayores retos del historiador, como lo fue en el informe que presentamos.

También destacamos que, debido a la falta de estudios previos sobre las matemáticas (y su enseñanza) en la EMOP, esta investigación tiene continuidad, lo que permite a los investigadores analizar los exámenes de admisión o de otras asignaturas de la institución necesarias para convertirse en ingeniero. Además del programa del curso y los cambios que ha sufrido desde el inicio de la escuela en 1876 hasta los primeros años del siglo XX.

Agradecimientos

El presente trabajo fue realizado con apoyo de la Coordinación de Perfeccionamiento de Personal de Nivel Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamiento- 001. Agradecemos, también, al Instituto Federal de Minas Gerais – Campus Ouro Preto por el apoyo brindado.

Referencias

Carvalho, J. M. (2002). *A Escola de Minas de Ouro Preto*: o peso da glória (2nd ed.). Belo Horizonte: UFMG.

Combette, M. E. (1887). *Géométrie Élémentaire a l'usage des aspirants au Baccalauréat és sciences et des candidats aus écoles du Gouvernement.* (2nd ed.). Paris.

Ginzburg, C. (2012). *Mitos, Emblemas e Sinais*: Morfologia e História. (Trad.): F. Carotti. São Paulo: Companhia das Letras.

Lei 1157 de 26 de junho de 1862. *Substitue em todo o Imperio o actual systema de pesos e medidas pelo systema metrico francez*. Brasil. (1862).

Lima, M. (1977). *D. Pedro II e Gorceix: A fundação da Escola de Minas de Ouro Preto.* Ouro Preto: Fundação Gorceix.

Nobre, S. N. e Oliveira, D. P. A. (2020). Arquivo Permanente da Escola de Minas de Ouro Preto: documentação para pesquisa em História da (Educação) Matemática no Brasil. *INTERMATHS*. p. 20 – 33.

Oliveira, D. P. A. (2020). *Um estudo de avaliações de matemática na Escola de Minas de Ouro Preto de 1876 a 1891* [Doctoral dissertation, Unesp – Rio Claro].

Oliveira, D. P. A. (2021). Zum mathematischen Unterricht in der Anfangsphase der ersten Bergbauhochschule Brasiliens. Em H. Fischer, T. Sauer, Y. Weiss (Ed.), *Exkursionen in die Geschichte der Mathematik und ihres Unterrichts* (pp. 235-245). Munster: WTM-Verlag.

Rebiérè, M. A. e Bos, H. (1881). *Éléments de Géométrie*. Paris: Librairie Hachette et G.

Trajano, A. (1957). *Aritmética Progressiva* (Curso Superior). São Paulo: Editora Paulo de Azevedo LTDA.

Zuin, E. S. L. (2017) Sistema métrico decimal como um saber escolar no Brasil: alteração das práticas escolares na segunda metade do Oitocentos. *HISTEMAT*, p.169-194.

TEJIENDO TRAMAS: AGNESI X REYNEAU EN LA BÚSQUEDA DE LA DECODIFICACIÓN DE EL ANÁLISIS CARTESIANO EN EL IMBRICADO SIGLO XVIII

WEAVING PLOTS: AGNESI X REYNEAU IN THE SEARCH FOR THE DECODIFICATION OF CARTESIAN ANALYSIS IN THE IMBRICATED 18th CENTURY

Lu Roseli Alves de Moura
UFRRJ – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. (Brasil)
rmoura@ufrrj.br

Resumen

El propósito de este trabajo es presentar un breve diálogo entre las obras *Analyse* Demontrée (1708), de Charles Reyneau, e *Istituzioni Analitiche* (1748), de Maria Gaetana Agnesi (1718-1799). Incluida en el elenco de publicaciones del grupo liderado por Nicolas Maleblanche (1638-1715), la primera, además de la posibilidad de haber influido sobre Agnesi en la composición de su obra, buscaba introducir el análisis Cartesiano y explicar las entonces nuevas técnicas infinitesimales, en esos términos. Sin embargo, la obra de Reyneau fue duramente criticada por D'Alembert en su primera disertación de 1739, en función de innumerables *errores,* y posteriormente por el historiador Truesdell (1989), al dar voz a otros trabajos enumerando críticas sobre el trabajo. La búsqueda de comprensión de las controversias sobre la relevancia del tratado de Reyneau, nos lleva a cuestionar tales planteos bajo una perspectiva epistemológica y señalan oportunidades de revisión y cuestionamientos con respecto al significado de nuestras prácticas hoy. Tales puntos de vista torna relevante traer a la luz algunos aspectos de esos tratados, entre innumerables que surgieron como referencias en el Siglo XVIII, y criticado en su mayoría, por la historiografía tradicional.

Palabras clave: Historia de la matemática, epistemología, formación de profesores, análisis cartesiano

Abstract

The aim of this paper is to present a brief dialogue between the works AnalyzeDemontrée (1708), by Charles Reyneau, and Istituzioni Analitiche (1748), by Maria Gaetana Agnesi (1718-1799). The first, included in the list of publications of the group led by Nicolas Maleblanche (1638-1715), in addition to the possibility of having influenced Agnesi in the composition of her work, sought to introduce Cartesian analysis and to explain the then new infinitesimal techniques, in those terms. However, Reyneau's work was harshly criticized by D'Alembert in his first dissertation of 1739, based on innumerable errors, and later by the historian Truesdell (1989), when giving voice to other works listing criticisms in relation to Reyneau's work. The search for understanding the controversies about the relevance of Reyneau's treatise, leads us to question such proposals from an epistemological perspective; and points out opportunities for review and questioning in relation to the meaning of our practices today. Such points of view make it relevant to bring to light some aspects of these treatises, among the innumerable that emerged as references in the 18th century, and most of which were criticized by traditional historiography

Key words: a history of mathematics, epistemology, teacher training, Cartesian analysis

Introducción

El propósito de este trabajo es presentar un breve diálogo entre las obras *Analyse Demontrée o la Methode de résoudre le problème des mathématique* (1708), de Charles René Reyneau (1656- 1728), e *Istituzioni Analitiche ad Uso Della Gioventù Italiana* (1748), de Maria Gaetana Agnesi (1718-1799), como forma de traer a la luz algunos aspectos del siglo XVIII europeo, y de suscitar reflexiones en cuanto a la contribución de la Historia de la Matemática de ese período, sobre todo en la enseñanza y en la formación de profesores.

Insertados en un contexto social, político y cultural que nos identifica, estamos sujetos a una práctica e incluidos en la *epísteme* de nuestro tiempo, enlazados y entrelazados. Enlazados, teniendo en vista que no tenemos muchas veces consciencia de nuestra propia sujeción a práctica y saberes, engendrados en nuestro espacio y tiempo, y entrelazados, en la medida que, aunque sea conscientes, solo nos es posible algún posicionamiento reactivo a posibles subyugaciones, el trabajo y reflexión de grupo. Este ejercicio de elaboración, aunque concebido a partir de reflexiones individuales y subjetivas, es pasible de dialógica, a ser establecida entre nuestros pares. Mediante tales perspectivas, nos basamos en la observación de que tales reflexiones nos impelen a considerar que diferentes *constructos* de una misma trama generan resultados distintos, en la medida que estos se fundamentan en sus respectivas relaciones de valores.

Mencionado esto, y en el ámbito de la enseñanza y formación de profesores, en este trabajo, seleccionamos dos obras matemáticas publicadas en el siglo XVIII, que nos sugieren un posible camino, entre muchos, en que la investigación de algunos aspectos y naturaleza de esas obras, aliado a la observación en cuanto contexto de sus publicaciones, favorezca el establecimiento de ese diálogo entre profesores y/o futuros profesores de matemática.

La obra de Reyneau se incluye en el elenco de publicaciones de un grupo de estudiosos, liderados por Nicolas Maleblanche (1638-1715), con el compromiso para la divulgación del conocimiento de aquella época, mediante el propósito de introducir el análisis Cartesiano, y explicar las entonces nuevas técnicas infinitesimales, en esos términos.

Sin embargo, el tratado matemático de Reyneau fue duramente criticada por D'Alembert en su disertación de 1739 para la Academia de Ciencias de París, en función de innumerables *errores,* como también por el historiador Truesdell (1989), al dar voz a otros trabajos enumerando innumerables críticas en relación con la obra.

A su vez, el tratado matemático *Istituzioni Analitiche*, de Agnesi, también se inserta en este contexto del siglo XVIII, pero publicado casi cincuenta años después. En la introducción de su obra, la estudiosa hace referencia al tratado de Reyneau, pero no lo critica, lo que acaba por fortalecer comentarios sugiriendo que haya sido influenciada por la obra.

Tales posturas tornan relevante desvendar algunos aspectos de los mencionados tratados matemáticos, entre tantos otros que surgieron en el siglo XVIII, período en que fueron producidos muchos libros de textos de matemática con propuesta, explícita o no, para la enseñanza.

Frente a tales hechos, analizamos algunos temas matemáticos explorados en ambas obras, buscando una interlocución, aunque siempre teniendo presente respetar la distancia de cincuenta años entre las producciones. Antes de efectivamente presentar los análisis y el contexto de las publicaciones de las obras aludidas, en la sección que sigue detallamos la metodología empleada para la realización de la investigación que dio origen a este artículo.

Marco Teórico

En este trabajo hemos elegimos como *corpus* una red de textos que brindan la posibilidad de establecer posibles articulaciones entre los mismos, destacándose el primer volumen de la obra *Istituzioni Analitiche ad Uso Della*

Gioventù Italiana, publicada en 1748 por Maria Gaetana Agnesi y *Analyse Demontrée o la Methode de résoudre le problème des mathématique*, publicada en 1708 por Charles Reyneau, en búsqueda de la movilización de la esfera epistemológica, a partir de un diálogo entre tales fuentes.

Además de ello, para alcanzar el objetivo propuesto, analizamos nuestro *corpus* a la luz de los estudios realizados por el historiador C. Truesdell (1989) y otros historiadores de la matemática. Desde esta perspectiva, nos basamos tanto en la lectura de historiadores clásicos de la historia de la matemática como en estudios actualizados en el ámbito de la historia de la matemática, destacándose la tesis de Moura (2017), en que nos volcamos a elaborar el artículo.

Metodología

En lo que respecta al abordaje metodológico adoptado en este trabajo, asumimos la perspectiva histórica como narrativa verídica, que de acuerdo con Paul Veynes (2008) nos remite a las trampas de la jerarquización de la historia, pasibles de causar lagunas, que son inherentes a la propia historia.

Para el análisis de los datos consideramos las tendencias historiográficas actualizadas de la Historia de la Ciencia, basada en un análisis documental, el cual, en la acepción de Alfonso- Goldfarb y Beltran (2004), parte de la articulación de las esferas epistemológica, historiográfica y contextual. Según las estudiosas, para que un documento sea debidamente contextualizado, de modo que sea restituido a la malla histórica, es necesario observar un conjunto de conocimientos y acciones compartidos por contemporáneos y que son movilizados para comprender la dimensión interna de un documento. Así, nuestra búsqueda consistió en analizar y evidenciar los criterios de la escritura de la historia, y traer a la luz aspectos que deben ser considerados, en este caso, en el ámbito de la historia de la matemática.

Análisis de Resultados

La obra *Istituzioni Analitiche*(1748) de Maria Gaetana Agnesi, es un tratado de matemática pura, constituida por dos volúmenes que conforman un total de más de mil páginas, habiendo sido publicado en Milán en 1748, con el propósito, poco detallado por Agnesi en sus escritos, de auxiliar en el aprendizaje matemático de sus hermanos, según Moura (2017).

Agnesi era la hija mayor entre 21 hermanos y desde su infancia nutrió interés por el estudio de lenguas, ciencias y matemática, favorecido por el estímulo y posición social de su padre, Pietro Agnesi.

A pesar de haber recibido sugerencias para escribir un tratado sobre matemáticas mixtas, Agnesi decidió publicarlo sobre matemática pura. Sin embargo, *Istituzioni Analitiche* no fue el único estudio de este género que circuló entre los estudiosos y matemáticos de aquella época, sino que hubo otros tantos tratados dedicados a las matemáticas mixtas. Su obra fue reconocida, en la ocasión de su publicación, como uno de los más completos materiales escritos sobre Cálculo y Análisis Matemático, más allá del escenario milanés del siglo XVIII.

Se sabe que a lo largo de la década de 1730 en la región de Lombardía específicamente, las discusiones sobre la renovación de la educación estaban estrechamente relacionadas con un movimiento político y religioso, que ansiaba por reformas. Denominado "Catolicismo Iluminado", por el historiador Mazzotti (2007), tenemos a Agnesi y sus tutores como personajes representantes de este movimiento, entre otros intelectuales, en la península itálica.

Así, en ocasión de la publicación de la obra *Istituzioni Analitiche*, Agnesi no escatimó esfuerzos en el sentido de divulgarla y, muy en función de su posicionamiento y de su amplia red de alianzas, entre innumerables homenajes, ella fue invitada a ser profesora en la Universidad de Boloña, y la obra fue indicada para traducción y publicación del segundo volumen, en Francia, en 1749. Sin embargo, además que la estudiosa no aceptó la invitación a ser profesora en Boloña, en 1752 Agnesi abandona definitivamente sus estudios y dedica el resto de su vida al asistencialismo (Moura, 2017).

En cuanto a la obra *Istituzioni Analitiche*, Agnesi comienza con una presentación y una carta al lector y, luego, una dedicatoria a la Emperatriz María Teresa de Austria (1717-1780). Además de que la dedicatoria no es muy extensa, la autora nos esclarece poco sobre su propósito al escribirla, suscitando diversas hipótesis por parte de los historiadores que se abocaron a esta cuestión. Sobre este punto, en su carta al lector, Agnesi justifica que *Istituzioni Analitiche,* en italiano, favorecería el aprendizaje matemático de sus hermanos:

> Finalmente, no era mi objetivo inicialmente, publicar esta obra por mí comenzada, pero la continué, en lengua italiana, para mi particular diversión o, como máximo, para instruir a alguno de mis hermanos más jóvenes, que presentasen inclinación por la matemática. (Agnesi, 1748, p. 2a)

Además de manifestar el interés con la instrucción de sus hermanos, nos parece que su preocupación también resida en la creencia de que había carencia de material adecuado para esta enseñanza. En efecto, Agnesi observa en su obra que:

> Nadie más tiene dudas de que es absolutamente necesario que los buenos libros sean escritos con claridad y método. Por eso es que, aunque asuntos en análisis estén siendo publicados e impresos, también están desconectados, sin orden y esparcidos, en las obras de muchos autores, principalmente, en las "Actas de Leipzig", en las "Memorias de la Academia de París", y en otros periódicos. (Agnesi, 1748, p. 1)

Las *Actas de Leipzig* sugerida por Agnesi, también eran llamadas *Acta Eruditorum*, cuya primera edición surgió en 1682 en la Universidad de Leipzig y en poco tiempo se había tornado la publicación alemana más conocida de la época. El objetivo de ese periódico era presentar artículos y resúmenes de publicaciones relevantes de la época, entre una amplia gama de asuntos. Los temas publicados en las Actas de Leipzig incluían medicina, matemática, física, derecho, historia, geografía y teología. En poco tiempo, este periódico se había tornado la publicación alemana más conocida en esa época y tornaría referencia entre los estudiosos de aquel entonces, teniendo a Leibniz entre sus editores, como profesor de aquella Universidad.

Talvez la mayor contribución de las *Actas Eruditorum* resida en el hecho de haber publicado tantos trabajos de estudiosos alemanes y de extranjeros, no solo estimulando la investigación científica en los países alemanes, sino también informando a estudiosos extranjeros acerca del aporte alemán al cuerpo del conocimiento científico. Sin embargo, es significativo que muchos de esos artículos y comentarios, cuando no se presentaban originalmente en latín, eran traducidos a este idioma.

Las *Memorias de la Academia de París*, a su vez, eran publicaciones editadas por la Academia de Ciencias de París, creadas en 1666 durante el reinado de Luis XIV (1638-1715), habiendo sido extinguida en 1793, con el cierre de todas las academias en Francia. En líneas generales, estos periódicos constituían las principales fuentes de informaciones y de conocimientos a que los estudiosos tenían acceso en aquella época.

Así, según Agnesi, aunque ya hubiese materiales escritos sobre Análisis, ellos se encontraban fragmentados y desorganizados en las *Actas Eruditorum* y en las Memorias de la Academia, en particular, lo que dificultaría el acceso a tal estudio, principalmente para los jóvenes. Aliado a esos obstáculos, los trabajos y los estudios de Análisis contenidos en esos materiales estaban en gran parte escritos en latín. El estudioso Baldini (1982) alerta en cuanto a un panorama diferenciado, y bajo muchos aspectos reactivos, con respecto “a las matemáticas” de la época, en Italia puntualmente, en esa primera mitad del siglo XVIII.

En la misma línea, y a partir de esta citación, Truesdell (1989), sugiere que Agnesi publicó su obra estimulada por el estudio del tratado de Reyneau, en función de los supuestos *errores* y por la inaccesibilidad a la mayoría de los jóvenes, principalmente como consecuencia de su difícil lenguaje. De este modo, inspirada por la obra de Reyneau, Agnesi habría probablemente escrito su tratado no solamente para beneficiar a sus hermanos, sino también a otros jóvenes italianos.

El estudioso Truesdell (1989) justifica que la obra de Reyneau fuera criticada tanto por el historiador de matemática Montucla (1802) como por D'Alembert (1717-1783), uno de los principales representantes del Iluminismo francés y uno de los articuladores y editores de la *Enciclopédie*. Sobre ello, recuerda Paty (2005), que D'Alembert, en su primera disertación de 1739, de hecho, hace una crítica apuntando algunos errores encontrados en la obra de Reyneau, inaugurando así una rica serie de estudios en Análisis Matemático.

En su crítica dura con respecto al trabajo de Reyneau, Truesdell resalta que Agnesi tenía un "estómago fuerte" por elogiar la obra del estudioso en su *Istituzioni Analitiche*:

Por eso ciertamente no podría un principiante reducir los materiales con método, aun teniendo todos los libros proveídos, a pesar del renombrado Padre Reyneau que, para el bien común, dio a la luz al utilísimo libro *L'Analise Demontrée*, trabajo digno de todas las labores. (Agnesi, 1748, p. 1a)

Agnesi, además de elogiar a Reyneau en la introducción de su obra, hace referencia al estudioso posteriormente: "[...] pienso que el renombrado padre Reyneau, en beneficio común, dio a la luz el utilísimo libro *De l'analise demonstrée*, un trabajo digno y que todos los elogios puede recibir" (Agnesi, 1748, p. 15).

Sin embargo, a pesar de la constatación de tales elogios, en ningún momento Agnesi justifica, tanto a lo largo de su obra como en las correspondencias intercambiadas con su red de correspondientes, que su motivación haya sido elaborar una obra bajo las mismas perspectivas. Además de eso, no hay indicios de que la estudiosa haya sido estimulada por la obra de Reyneau, mediante el propósito de corregir supuestos errores del estudioso, a partir de su *Istituzioni Analitiche*.

Cabe destacar, todavía, que entre las obras dedicadas al análisis y al Cálculo publicadas en aquella época, *De l'Analyse Demontrée* era el libro de texto utilizado por Agnesi en la instrucción de sus hermanos, y tal vez por ese motivo ella lo haya referenciado en sus tratados matemáticos. Sin embargo, Agnesi tuvo acceso a otras obras, también publicadas por el grupo de Maleblanche; entre ellas el *Traité Analytique des Sections Coniques*, publicado en 1696 por Guillaume de L'Hôpital, según Carrara (1918).

Además de L'Hôpital, un sinnúmero de otros estudiosos escribía sobre tales temas, en que el principal centro de actividades era Basilea, en Suiza. Se destacan los trabajos de los hermanos Jacob Bernoulli (1654-1705) y Jean Bernoulli (1667-1748), los cuales mediante utilización del simbolismo leibniziano comenzaron a publicar también en el *Acta Eruditorum*, como señala Baron y Bos (1985, p. 41). Además, sería bajo la orientación de Jean Bernoulli que L'Hôpital publicaría su *Analyse des infiniment petits,* en 1696, y que vendría a tornarse el libro más utilizado a lo largo del siglo siguiente por los estudiosos que se propondrían también estudiar y comprender las nuevas técnicas que surgían.

Sobre eso debemos también considerar los artículos de Cálculo diferencial publicados por Leibniz en el mismo periódico, entre 1684 y 1686 y que, a pesar de ser breves en su mayoría, no siempre claros y muchas veces con errores, permitieron el acceso a este nuevo "hacer matemático" que surgía, como apunta Astudillo (2011).

Cabe recordar que, además de estos escritos, otros inúmeros materiales que trataban de Análisis y de Cálculo, datando principalmente del final del siglo XVII y abordando cuestiones relacionadas con problemas mecánicos, también circularon en aquella época.

Posteriormente, ya en el siglo XVIII, fueron producidos muchos libros de texto de matemática con propuesta para la enseñanza, principalmente en la segunda mitad del siglo, en Francia. Relevante es considerar que sería el período de consolidación de las academias de ciencias, y estos trabajos surgían principalmente en consecuencia del esfuerzo de estos académicos, que no estaban necesariamente ligados de modo directo a las universidades.

Expresado esto, lo que se desprende al buscar las motivaciones de Agnesi, habida cuenta de sus pocas justificaciones en la introducción de su obra, resulta un énfasis sobre la necesidad de la enseñanza del análisis y publicación de materiales adecuados para introducir tales técnicas. Esto es notorio en el pasaje en que ella afirma que:

> [...] pido al lector que reflexione que, creciendo la ciencia día tras día, después de la edición del libro [de Reyneau], muchos son los nuevos e importantes hallazgos de otros autores en diferentes obras, como había sucedido anteriormente; así evitar que los estudiosos tengan el trabajo de buscar entre tantos libros, retomando métodos recién inventados, parece utilísima y necesaria una nueva instrucción de análisis (Agnesi, 1748, p. 2).

Así, nos parece que Agnesi estuviese más preocupada por el acceso, por parte de los jóvenes, al material matemático escrito en vernáculo, y no por corregir los supuestos errores encontrados en la obra de Reyneau.

Esta preocupación de Agnesi por tornar el análisis y el Cálculo accesibles por parte de la juventud, está relacionada, por un lado, con los ideales muratorianos de organizar "la educación de la juventud y capacitarla" (Muratori, 1749, p. 32 como citado en Venturi, 1969, p. 181). Tal aspecto, según Minoncio (2006), coincide con lo que preconizaba el programa absolutista iluminado de la emperatriz Maria Teresa d'Áustria, bajo el cual la región de Milán estaba bajo sus auspicios.

Agnesi también añade, sobre lo que desea en su obra "[...] que tenga la debida claridad, y simplicidad, omitiendo todo lo "superfluo", sin dejar de lado nada que pueda ser útil o necesario, y que proceda con aquel orden natural, en que consiste la mejor instrucción, y la mayor luz." (Agnesi, 1748, p. 2).

Notamos aquí que Agnesi primaba por orden y claridad, principalmente en lo que se refiere a los métodos, como bien observa en el extracto a continuación: "[...] en el acto de lidiar con varios métodos, desfilan en mi mente algunas extensiones, y varias otras cosas, las cuales, por ventura, no carecen de novedad e invención." (Agnesi, 1748, p. 17).

Así, nos parece en algunos extractos de la carta al lector en la obra de Agnesi, su reiterado énfasis sobre la necesidad de claridad y orden, y no necesariamente con la publicación de algo nuevo.

En este punto, recurramos a lo que Astudillo (2011) destaca acerca de la estructura de los libros de texto clásicos de aquel período, que heredaron un "hacer matemático" en los moldes de los griegos, en que observamos la autoridad de Euclides siendo evocada inúmeras veces. Sobre esto, la estudiosa destaca que, de forma general, los libros comenzaban del siguiente modo:

A partir de unas definiciones iniciales en que se establece el significado de conceptos "primarios", que van apareciendo a lo largo del texto, van sucediendo las proposiciones que caracterizan las propiedades, estructura y reglas de Cálculo en que estarían involucrados tales conceptos. A partir de cada una de las dichas proposiciones es presentado un problema o ejercicio resuelto, con la pretensión de ejemplificarlas. (Astudillo, 2011, p. 418)

Recordando que estas consideraciones fueron hechas a partir del análisis de la obra *Traité Analytique des Sections Coniques* (1696) de L'Hôpital, cuya aparición fue fruto del trabajo del grupo maleblanchiano, en los mismos moldes de la obra de Reyneau.

Según Astudillo (2011), reportándose a Cantoral, tales obras se caracterizaban por la utilización de una pedagogía impresionista, requiriendo del lector un ejercicio mayor, que además de evocar una serie de impresiones, posibilitaba un encadenamiento lógico de los contenidos, y que conducían, por último, a la comprensión de los conceptos matemáticos explorados en el texto. En líneas generales, el lector era invitado a “leer entre líneas” (Cantoral, 1995, p.65 como citado en Astudillo, 2011, p. 419).

De hecho, distinguimos en el análisis de la obra de Reyneau la utilización de este recurso metodológico y artificios señalados por Cantoral. Evidenciamos en el tratado *De l’Analyse Demontrée*, de Reyneau, analizado por nosotros, la utilización de postulados, definiciones y corolarios, no siguiendo el mismo patrón, sin embargo, con relación a la forma en que articula los contenidos matemáticos. El autor invita al lector, de forma no explícita, a “ir y venir” a lo largo de su obra, haciendo uso de metodologías, que señalan la *episteme* de su época.

El estudioso presenta, por ejemplo, en las ecuaciones cuadráticas, las definiciones de ecuaciones en un primer momento, dejando para desglosar las posibilidades de resoluciones en inúmeros y diferentes temas. Estos temas tampoco son divididos considerando el grado de las ecuaciones, a diferencia de otras obras.

Además de ello, *Analyse Demontrée* es precedida por un extenso prefacio con más de treinta páginas de orientación, en el cual el autor justifica el interés por divulgar el análisis, en función de los hallazgos de los años anteriores, citando a Descartes, Leibniz, Newton y L’Hôpital, y enalteciendo de forma apologética la importancia de sus trabajos.

En el volumen II de la obra, que corresponde al octavo libro, Reyneau utiliza propiedades de geometría simples y compuesta para resolver problemas de matemáticas mixtas, pero intitula el libro como resolución en ciencias y física-matemática, revelando así que el empleo de las terminologías matemáticas mixtas no parece constituir necesariamente un patrón. Reyneau no define geometrías simples y compuestas, aunque comenta acerca de las curvas obtenidas a partir de la geometría simple a la compuesta.

Incluso con el transcurso de casi medio siglo entre las obras de Reyneau y Agnesi, aunque ella no se comprometa a demonstrar propiedades geométricas, observamos también en la escritura de Agnesi la utilización del estilo geométrico considerado por Lorenzo (1971, p. 59), en que cada etapa de construcción se justifica por un postulado, definición o noción común, anclados en la perspectiva de la obra los *Elementos*, de Euclides. Como resalta Gama (1985, p. 7), en aquella época los *Elementos* constituían el modelo para algunos estudiosos, aunque defendiesen el ideal cartesiano de geometría.

Agnesi a su vez presenta los contenidos matemáticos de forma relativamente lineal; indicando todas las operaciones involucradas, apuntando definiciones cuando lo juzga necesario, y solamente al final de las explicaciones ejemplifica con problemas. Además de esto, Agnesi es detallista en sus resoluciones, a la vez que Reyneau establece pocas orientaciones en cuanto al manejo algébrico, por ejemplo.

A su vez, además de no proponerse presentar novedades, observamos en el discurso de Agnesi en su *Istituzioni Analitiche,* las características de una clásica presentación de obra cartesiana. De hecho, a lo largo de su trabajo, ella procura mantener el formalismo analítico, independientemente de consideraciones mecánicas o empíricas, dado que su propósito no era escribir un tratado de matemática mixta.

Consideraciones finales

El arcabuz teórico sobre el modo como se presenta el discurso histórico y, considerando las críticas sobre el trabajo de Reyneau, a partir de décadas después de su publicación, nos lleva a cuestionar tales planteos bajo una perspectiva epistemológica.

Se sabe que cada época cuenta con su propio *epísteme* y el propio ser pensante ya está involucrado con la propia historia, enredado en sus respectivas relaciones de valores, las cuales sabemos que son relativas. Además del cuidado a ser tomado para no ser anacrónicos, cabe a un estudioso que se vuelca sobre fuentes primarias antiguas, en el afán de investigar, o aún más, de transponer el conocimiento de un dado objeto matemático al aula, una mirada cuidadosa, en relación al recorrido histórico.

Sin embargo, aunque este camino se insinúe como pasible de iluminar y minimizar esa problemática, él también trasciende la consciencia de nuestra limitación, sobre todo temporal, con respecto al riesgo de *presentismo.* Es decir, resulta poco probable no ser anacrónicos al abocarnos a estudios históricos.

En lo que atañe a las obras analizadas, en particular, destacamos las palabras del estudioso Truesdell (1989), al señalar que ya existían en Italia obras que abordaban el Cálculo Integral y Diferencial desde el inicio del siglo XVIII, por ejemplo, y en función de ello analizar de forma peyorativa algunas obras del siglo XVIII, en que incluimos las obras de Agnesi y de Reyneau. Esta visión parcial, entre tantas otras, refleja una forma de referenciar la historia de la matemática, situando el siglo XVIII como el interludio entre el siglo de los genios y el del rigor, respectivamente los siglos XVII y XIX, planteada implícita, y muchas veces explícitamente, por la historiografía tradicional.

Sin embargo, la historiografía contemporánea se ha contrapuesto a tales posturas, y apuntado que no existen indicios de que los trabajos aludidos en nuestro análisis hayan sido creados con propósitos semejantes (Roero, 2014; Minoncio, 2006; Mazzotti, 2007).

No ignoramos la posibilidad de que Agnesi considerara los errores verificados en la obra de Reyneau, aun cuando no se refiera a ellos en sus escritos. De hecho, en nuestro análisis de la obra, a pesar de puntual, también observamos que el tratado de Reyneau se muestra careciente de claridad presentando contenidos expuestos de forma fragmentada.

Sin embargo, tales cuestiones no excluyen la validez y la importancia de ese trabajo del inicio del siglo XVIII en la historia del Cálculo y del análisis, en un período cuyo principal propósito era introducir el análisis Cartesiano y explicar las entonces nuevas técnicas infinitesimales, en esos términos y, por lo tanto, sujeto a fallas.

De la misma forma, en cuanto a las elecciones de Agnesi y la validez de su empresa. A pesar de haber recibido sugerencias para escribir un tratado sobre matemáticas mixtas, muy en boga en aquel período, Agnesi decidió publicar sobre matemática pura, aunque su obra no haya sido el único estudio de este género que circuló entre los estudiosos y matemáticos de aquella época.

Asimismo, observamos en el análisis y cotejo de trabajos como el de Agnesi y Reyneau, aunque elaborados desde diferentes perspectivas, la movilización de diferentes conceptos matemáticos en su abordaje, además de presentar conocimientos matemáticos importantes, favoreciendo la mayor percepción y crítica en cuanto al proceso de producción del conocimiento matemático.

Así, la búsqueda de la comprensión de las controversias abordadas en este trabajo, principalmente acerca de la relevancia del tratado de Reyneau, trasciende constataciones de diferentes órdenes, pasibles de fundamentarse bajo otras tantas diferentes premisas. Reflexiones acerca de la *epísteme* a la que nos sujetamos señalan oportunidades de revisión de la práctica, de cuestionamientos en cuanto al significado de nuestras prácticas hoy, y en relación a lo que es posible en una forma diferente.

Con esto, creemos que diferentes análisis elaborados a partir de tratados matemáticos, muchas veces olvidados por la historiografía tradicional, nos conducen a reflexiones sobre la viabilidad de la integración de tales discusiones en el espacio de formación de profesores, y que se incluyen en la posibilidad del uso de la Historia de la Matemática como herramienta.

Desde tales perspectivas, aceptar una crítica que trasciende a trecientos años, sobre a un trabajo que estimuló un sinnúmero de otros, nos parece tarea fácil, cómoda. Cuestionar, y quizás tener la osadía de realizar una transposición temporal de nuestra práctica a trecientos años adelante, es la cuestión que se impone a quien se dedica de lleno a estudios históricos. Así, más que responder cuestiones, nuestro trabajo apunta a suscitarlas.

Referencias

Agnesi, M.G. (1748) *Instituzioni Analitiche ad Uso Della Gioventú Italiana*. Milano: Nella Regia-Ducal Corte.

Alfonso-Goldfarb, A. M. & M.H.R.Beltran (orgs.) (2003) *Escrevendo a História da Ciência: tendências, propostas e discussões*. Educ/Ed. São Paulo: Livraria da Física/FAPESP.

Astudillo, M.T.G. (2011) História de la enseñanza del Cálculo a través de los libros. *Educação Matemática Pesquisa* (v. 13, pp. 415-437).

Baldini, U. (1982) L'Attività scientifica nelle academie lombarde del Settecento. *De Maddalena, Rotelli, and Barbarisi, Economia, Istituzioni, Cultura* (v.2, pp. 503-32)

Baron, M.E. & H.J.Bos (1985) *Curso de história da matemática: origens e desenvolvimento do cálculo.* Tradução de José Raimundo B. Coelho, Rudolf Maier e Maria José M.M.Mendes, Brasília: Editora Universidade de Brasília.

Carrara, B. (1918) Maria Gaetana Agnesi nel secondo Centenario della sua nascita, estrato da *La scuola cattolica di Milano*. Monza: Scuola Tipografica Editrice Artigianelli (Mar. pp. 03-22)

Gama, R. (1985) *História da Técnica e da Tecnología.* São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo.

Lorenzo, J. (1971) *Introducción al estilo matemático.* Madrid: Tecnos.

Minonzio F. (2006) *Chiarezza e método: l'indagine scientifica di Maria Gaetana Agnesi.* Milano: Lampi di stampa.

Montucla, J.F. (1802) *Histoire of Mathematiques* (4 vols), Paris: Librarie A. Blanchard.

Moura. R.A. (2017) *Um estudo sobre a Instituzioni Analitiche de Maria Gaetana Agnesi: Álgebra e Análise na Itália setecentista,* Tese de doutorado em Educação Matemática, Pontíficia Universidade Católica de São Paulo, PUC-SP, São Paulo, Brasil. Roseli Alves de Moura.pdf (pucsp.br)

Reyneau, C.R. (1708) *Analyse démontrée; ou, La méthode de résoudre lês problèmes dês mathématiques.* (2 vols.), *Chez Quillau, Imprimeur Libraire de l'Université.* Recuperado el 26 de maio de 2014 de http://dx.doi.org/10.3931/e-rara-16464, Signatur: Rar 2897 Persistenter.

Roero, C.S. (2014) Clelia Grillo Borromeo, Maria Gaetana Agnesi e Diodata Saluzzo Roero. In: *Conferenze e Seminari della Associazione Subalpina Mathesis-Seminario di Storia delle matematiche "Tullio Viola" 2013-2014,* Volume redatto a cura di F.Ferrara, L. Giacardi, M. Mosca, Kim Williams Books (pp. 287-302)

Truesdell, C. (1989) Maria Gaetana Agnesi. *Archive for History of Exact Sciences*, (40, pp.113-142).

Venturi, F. (1969) *Settecento Riformatore: da Muratori a Beccaria.* Tuorino: Einaud.

Veyne, P. (2008) *Como se escreve a história.* Trad. A.J.S.Moreira, Lisboa: Edições 70, 2008.

VOL 34, NÚMERO 2, AÑO 2021

MODELACIÓN ESCOLAR PARA RESIGNIFICAR LA FUNCIÓN LINEAL EN BACHILLERATO

SCHOOL MODELING TO RESIGNIFY LINEAR FUNCTION IN HIGH SCHOOL

Ada Cecilia Blanco Ruiz, María Esther Magali Méndez Guevara
Facultad de Matemáticas Acapulco, Universidad Autónoma de Guerrero. (México)
adablanco@uagro.mx, memmendez@uagro.mx

Resumen
Se comparten avances de un proyecto de investigación en desarrollo. El objetivo general es analizar los usos del conocimiento matemático en torno a la función lineal que emergen al desarrollar con jóvenes de Bachillerato General una situación de modelación escolar. En esta investigación se adopta una categoría de modelación escolar para el diseño de las actividades matemáticas, basados en una postura socioepistemológica. Se realizan las fases de un experimento de enseñanza. Al momento se ha indagado sobre aspectos relacionados con la problemática, marco teórico, los elementos metodológicos y el diseño de una situación de modelación escolar, realizando trayectorias hipotéticas de aprendizaje. En estos momentos la investigación está en la fase de preparación del experimento para su futura implementación.

Palabras clave: función lineal, modelación escolar, experimento

Abstract
This paper shows the advances of an ongoing research project. Its general objective is to analyze the uses of mathematical knowledge around the linear function, which emerge when developing a school modeling situation in General High School. In this research, a school modeling category is adopted for the design of mathematical activities, based on a socio-epistemological position. The phases of a teaching experiment are carried out. Up to the moment, aspects related to the problem, theoretical framework, methodological elements and the design of a school modeling situation have been investigated, by carrying out hypothetical learning trajectories. The research is now in the experiment preparation phase, for its future implementation.

Key words: linear function, school modeling, experiment

Introducción

Desde la experiencia docente se reconoce que hace falta incorporar actividades en el aula que permitan hacer ver al estudiante la funcionalidad de las matemáticas, es decir, que no sólo se emplee lo procedimental, como la mayoría de las veces ocurre, sino que se tome en cuenta situaciones del contexto de los estudiantes y en esos escenarios estos puedan valorar las matemáticas, promoviendo el desarrollo de su pensamiento matemático. En investigaciones como las de Campeón, Aldana y Villa (2018) se reconoce que "la escuela prioriza la realización mecánica de procedimientos y algoritmos, por encima de la comprensión de conceptos, es decir los estudiantes saben realizar operaciones, pero no comprenden muy bien cómo usarlas" (p. 117). Mientras que García (2013) afirma que:

Las matemáticas se enseñan de manera masiva, descontextualizada y algoritmizada, lo que convierte su aprendizaje en un proceso formal, ligado a una serie de reglas, axiomas, postulados y teoremas, constituyendo estos aspectos un fin en sí mismo lejos de la realidad cotidiana. (p. 30)

Esto conlleva a una problemática en el aula de clases, la cual es la falta de escenarios que promuevan la funcionalidad de las matemáticas. Aunado a lo anterior, en el plan de estudio de referencia del marco curricular común de la educación media superior se propone "enfatizar el valor de uso del conocimiento matemático por parte del estudiante: esto significa, colocar a las prácticas sobre el objeto formal" (SEP, 2017, p. 66). Se propone que el trabajo con las matemáticas sea funcional para el estudiante, para que reconozca su entorno y retome experiencias para construir su propio conocimiento en el aula, considerando que la incorporación de algoritmos y memorización no son suficientes para la construcción del conocimiento matemático. Se invita a promover el conocimiento mediante su uso y que el estudiante por medio de prácticas y acciones construya su conocimiento matemático. Así también, se propone al docente que "en las diversas situaciones de aprendizaje se considere una enseñanza más activa, realista y crítica que derive en aprendizajes más significativos en la vida del estudiante" (SEP, 2017, p. 69).

El interés concreto de este trabajo es sobre el tema de función lineal, abordado en la asignatura de matemáticas IV, y sobre cómo desarrollarlo, con estudiantes en la modalidad del Bachillerato General. Esta investigación toma el reto de generar una actividad matemática. basada en la modelación, que se adecue a las expectativas del modelo educativo, en tanto se promueva la valoración del uso del conocimiento matemático, y se sustenta de los resultados de investigación del área de matemática educativa.

En el reporte de Villa-Ochoa (2007) se explica cómo la modelación se convierte en una estrategia que posibilita el significar un concepto matemático y muestra una situación que permite abordar el concepto de función por partes (o tramos). Este investigador afirma que la modelación matemática potencia el desarrollo de capacidades en el estudiante.
Mientras que Pezoa y Morales (2016) abordan el concepto de función en un escenario de modelación y reconocen que en este proceso se resignifican conocimientos asociados al concepto de función en términos de generar conocimiento y no sólo en la adquisición de objetos o definiciones o la aplicación de éstos.

Por su parte Del Valle (2010), ejemplifica que mediante una situación cotidiana y considerando a la modelación como una práctica que articula el pensamiento matemático, se favorecen la noción de función lineal, no sólo como una asignación entre objetos, sino que promueve el uso de la visualización matemática como una estrategia para la formación adecuada de los conceptos.

Aunado a ello, los trabajos desarrollados por Suárez y Cordero (2008, 2010) dan muestra de que en una situación de modelación del movimiento (SMM), se promueve la vinculación de la modelación y la graficación, a través de relacionar los significados, los procedimientos y los argumentos, además declaran que una SMM propicia una resignificación de la variación.

Es decir, las investigaciones reportan que la modelación puede favorecer la construcción de significados y argumentos matemáticos, por ejemplo, para la función lineal, en donde se usa la visualización y la graficación para

articular procedimientos ante una situación concreta. Se motiva a evitar que el estudiante aprenda los conceptos enmarcados solamente en procesos algorítmicos y memorísticos y que se fortalezca el uso del conocimiento a través de una situación de modelación. Esto permitirá abordar cuestiones como aspectos variacionales, mediante el uso de las gráficas, tablas de datos o de las relaciones algebraicas, para nuestro caso nos centramos en los aspectos que dan identidad a la función lineal.
En esta investigación consideraremos una categoría socioepistemológica de modelación escolar (Méndez, 2013), que ofrece alternativas para que el estudiante obtenga un conocimiento articulado, sobre la función lineal, y lo pueda significar en diferentes contextos. Como metodología se considera hacer un experimento de enseñanza.

Así la pregunta que enmarca esta investigación es ¿cómo una situación de modelación escolar resignifica el uso de la función lineal por los estudiantes de Bachillerato General?
El objetivo general es analizar los usos del conocimiento matemático en torno a la función lineal que emergen al desarrollar con jóvenes de Bachillerato General una situación de modelación escolar. Los datos nos permitirán describir la manera en que los estudiantes resignifican la función lineal en particular a través de la modelación. Esto mediante las trayectorias hipotéticas de aprendizaje.

Marco teórico

En esta sección reflexionamos sobre los aspectos teóricos que respaldan esta investigación, considerando la categoría de modelación escolar desde la Socioepistemología. En principio, “la Socioepistemología asume al saber cómo construcción social del conocimiento entendiendo esto como procesos deliberados de usos compartidos de conocimiento en este sentido el saber no se limita a definir objetos matemáticos, sino de mecanismos fundamentales de constitución” (Cantoral,2010, p. 57).

Los argumentos fundamentales de la Socioepistemología son la naturaleza de la práctica social y la resignificación del conocimiento matemático escolar. La resignificación se concibe como constructo teórico que se ha ido precisando a través de las investigaciones, Cordero (2006) la considera como “la construcción del conocimiento mismo en la organización del grupo humano, normado por lo institucional; es decir el uso del conocimiento en la situación, donde se debate entre su funcionamiento y forma de acuerdo con lo que organizan los participantes” (p. 5).

Córdoba (2011) considera a la resignificación como un proceso que no es sinónimo de dar nuevos significados o nuevas definiciones a un concepto, sino una construcción del conocimiento mismo que hacen los individuos de manera colectiva y que está normado por aspectos institucionales y culturales en un contexto particular. Compartimos sin duda estas acepciones para esta investigación. En esta investigación adoptamos esta última idea sobre resignificación.

La postura socioepistemológica sobre modelación asegura que es una construcción de conocimiento matemático en sí misma desde el punto de vista de Cordero (2006); Zaldívar, Cen, Briceño, Méndez y Cordero (2014), y Tocto y Méndez (2015). Sus características son la producción de argumentaciones y herramientas de corte matemático que los participantes ponen en juego durante el desarrollo de las actividades matemáticas.

Dado que no se prioriza la aplicación de un contenido matemático que se movilice por el proceso de matematización, y no se pretende llevar a la modelación matemática tal cual a la comunidad educativa estudiantil, sino más bien generar un marco apropiado a la matemática escolar basado en la esencia de la modelación como construcción continua de conocimiento (Méndez y Cordero, 2014; Tocto y Méndez, 2015), se acoge una categoría de conocimiento matemático, la modelación escolar (Méndez, 2013), propuesta que pretende rediseñar el discurso matemático escolar, para incluir a los actores en construcción social de su conocimiento matemático, y aminorar la tensión entre la matemática escolar y la matemática funcional, en tanto sea útil a quien la construye y posibilite su desarrollo en otros escenarios.

Consideramos que una categoría de modelación para la matemática escolar son elementos se deberían poner en juego para desarrollar una matemática orgánica al estudiante, y cómo estos elementos se hacen explícitos en diseños de situación. La categoría de la que hablamos permite el desarrollo de redes de usos de conocimientos matemáticos en la caracterización de comportamientos de variación.

La categoría de modelación escolar conjuga prácticas del proceso de modelación con momentos de análisis en una situación concreta de variación, la figura 1 exhibe algunas de las prácticas involucradas y los momentos principales, que se pretende hacer vivir al estudiante mediante un diseño de situación de aprendizaje.

Figura 1. *Elementos de la categoría de modelación escolar.*

Méndez, 2013, p. 61.

La modelación escolar fomenta el desarrollo del saber por medio del desarrollo de usos de conocimiento matemático (uso de las tablas de datos, gráficas y expresiones analíticas), mismo que se devela como herramientas de variación local, global y su articulación para caracterizar comportamientos o tendencias. Los diseños se desenvuelven en tres momentos: transformación, variación y aproximación (Méndez y Cordero, 2014).

La investigación toma la categoría de modelación escolar (Méndez, 2013), con el objetivo de promover el uso de conocimiento matemático para resignificar la función lineal.

Metodología

Esta investigación realizará un experimento de enseñanza que se enmarca en el paradigma de la investigación basada en diseño. De acuerdo con Steffe y Thompson (2000, citado en Molina et al. 2011), “los experimentos de enseñanza consisten en una secuencia de episodios de enseñanza, donde los participantes son un investigador-docente, uno o más estudiantes y uno o más investigadores-observadores” (p. 79). La tabla 1 muestra las fases del experimento de enseñanza para el desarrollo de nuestra investigación.

Tabla 1. *Acciones de las fases del experimento de enseñanza .*

Experimentos de enseñanza	
Fases	**Acciones**
Preparación del experimento	Definir el problema y los objetivos de investigación. Identificar los objetivos instruccionales. Diseñar de forma justificada la secuencia de intervenciones en el aula y su temporalización. Delinear una trayectoria hipotética de aprendizaje que describa el resultado esperado del proceso de aprendizaje y el modo en que se va a promover y alcanzar dicho aprendizaje.
Experimentación	Identificar los objetivos instruccionales de la intervención. Recoger datos de todo lo que ocurre en el aula, incluyendo las decisiones tomadas durante la intervención Elaborar hipótesis/conjeturas sobre los resultados a obtener en la intervención.
Análisis retrospectivo de los datos	Recopilar y organizar toda la información recogida. Analizar el conjunto de los datos.

Molina et al., 2011, p. 80.

La investigación se encuentra en la fase de preparación del experimento. En las secciones anteriores se ha mencionado el problema y objetivo de la investigación. En este apartado se explicita el diseño de la situación de modelación escolar, marcando y justificando la estructura de este, así también se describen las trayectorias hipotéticas de aprendizaje que se espera sigan los estudiantes.

Para el desarrollo de la fase de experimentación los participantes serán 19 estudiantes de cuarto semestre del Nivel Medio Superior que cursan la asignatura de matemáticas IV correspondiente al plan de estudio de la Dirección General de Bachillerato (SEP, 2018). Los estudiantes pertenecen a un colegio particular del Puerto de Acapulco. Se eligió a este grupo de estudiantes porque son estudiantes de la autora principal. Dadas las condiciones escolares actuales, derivadas por la pandemia de covid-19, la implementación se llevará a cabo virtualmente de forma síncrona. Se planean siete sesiones síncronas de aproximadamente 40 minutos a través de Zoom (videograbación y chat) y Telegram (Chat y envío de fotografías de lo realizado durante la sesión).

La situación de modelación consta de 3 secciones y se parte de la experimentación, dado el contexto se optó por realizar videos para evocar la situación. En el video de la sección 1 se presenta una serie de cisternas con agua sin ningún dato numérico, con las características de que tienen forma de prisma cuadrangular con bases iguales, mientras que la altura va cambiando. El vídeo se puede consultar en https://drive.google.com/file/d/10ems8fLRmKa2H1ugBg_2ISj64SZYKWEt/view?usp=sharing. En el video de la sección 2 se presentan datos numéricos. La misma serie de cisternas que el video de la sección 1, ahora se visualizan las bases de la cisterna, 2 m de lado y una altura que va cambiando de 0.5 metros a 0.5 metros. Dicho vídeo se puede consultar en https://drive.google.com/file/d/10yfR_dpnMcyWc9RdY-PlMylaYZhrJQxS/view?usp=sharing. Los videos ejemplifican la construcción de las cisternas y la relación de variabilidad de la cantidad de agua que contienen. Se planea compartir los videos y la actividad completa en un archivo Word por medio de Google Classroom.

En la tabla 2 se muestra la situación de modelación la cual está dividida en secciones y consta de una serie de preguntas que deberán ser contestadas considerando los videos mencionados anteriormente. Además, para cada una de las preguntas y/o indicaciones se describe su intención a la par de la trayectoria hipotética de aprendizaje, algunas preguntas guía para el investigador-docente y las prácticas de modelación inmersas.

Tabla 2. *Diseño instruccional de la situación de modelación.*

Diseño instruccional de la situación de modelación				
Indicaciones y preguntas	**Intención**	**Trayectorias hipotéticas de aprendizaje**	**Preguntas guía**	**Prácticas de modelación**
Sección 1				
Observa el vídeo 1 en el que se muestra una serie de cisternas para almacenar agua. Después contesta las siguientes preguntas: a) Describe ¿qué sucede con las cisternas que se muestran en el video?	Observe e identifique las variables que influyen en la cantidad de litros de agua en las diferentes cisternas.	Reflexionará que la cantidad de agua en cada cisterna está variando	¿Qué elementos observas que van cambiando en la construcción de cisternas? ¿Qué observas en la cisterna 1 con respecto a la cisterna 2?	Observar, identificar, tomar decisiones y organizar.
b) De lo que observaste, ¿qué elementos influyen en la cantidad de litros de agua que podrías almacenar o contener en las cisternas?	Identifique que dentro de los elementos que influyen, como, agua, recipiente en forma de prisma cuadrangular están la altura, área de la base y volumen de las cisternas.	Convendrá que las variables que permiten comunicar la cantidad de litros de agua en las cisternas son: área de la base, altura y volumen.	¿Qué es lo que observaron? ¿Qué forma tienen las cisternas?	Identificar, describir, interpretar
c) ¿Cómo relacionarías los elementos que influyen en la cantidad de agua que podrían almacenar?	De las variables convenidas, relacionen número de cisterna-altura o área de la base-altura.	Describirá el comportamiento del experimento de acuerdo con las variables. La altura que va tomando la cisterna, el volumen que va tomando en determinada cisterna; la altura que va tomando la cisterna a cierto volumen.	¿Cómo describen la cantidad de litros de agua en las cisternas de acuerdo con los elementos?	Interpretar, describir, identificar.
d) ¿Qué elementos cambian y cuáles no cambian en las cisternas?	Identifiquen dentro de los elementos, aquellos elementos que cambian y cuales se mantienen constantes.	Describirá de acuerdo con lo observado que la altura, el volumen y la cantidad de litros de agua varían, y que la base se mantiene constante.	¿Qué sucede con la altura de las cisternas? ¿Qué sucede con la base de las cisternas? ¿Qué sucede con el volumen de las cisternas?	Interpretar, identificar, examinar, observar.

			¿Qué sucede con la cantidad de litros de agua en las cisternas?	
Sección 2				
Observa el video 2 y responde las siguientes preguntas. a) ¿Qué variables se pueden considerar para obtener la cantidad de litros de agua que contienen las cisternas?	Elijan variables de lo que se observa en el video.	Identificará que las variables son la altura, la base y el volumen.		Toma de decisiones, observar, interpretar.
b) ¿Cómo y cuánto varían las variables para conocer la cantidad de litros de agua que contienen las cisternas?	Identifique que la variación es constante y que en cada cisterna varía la cantidad de litros de agua, y a su vez la altura.	Realizará una comparación entre los datos que tienen, e identifiquen que, por ejemplo: entre cada cisterna la altura varía 0.5 m	¿Cuál es la diferencia entre la altura de cisterna en cisterna? ¿Cómo se relaciona la variación de la altura con la cantidad de litros de agua de las cisternas?	Calcular, comparar, interpretar, observar
c) ¿De qué depende la cantidad de litros de agua en las cisternas?	Identifiquen de los elementos inmersos en la situación, cuál es el principal elemento que influye en la cantidad de litros de agua en las cisternas.	Reflexionará sobre cada uno de los elementos que intervienen en la cantidad de litros de agua en las cisternas y determinen que la cantidad de litros de agua depende del volumen que a su vez depende de la altura.		Toma de decisiones, observar e interpretar.
d) ¿Qué cantidad de litros de agua tendrán las cisternas 4, 5, 6 y 7?	Hagan una toma de datos e identifiquen la variación.	Realizará una tabla de datos donde consideren los elementos, número de cisterna, área de la base, volumen y cantidad de litros de agua.	¿Cuánto es, cómo es y cuánto varía la base de las cisternas 1, 2 y 3? ¿Cuál es la altura de las cisternas 1, 2 y 3? ¿Cuánto está variando la altura de las cisternas? ¿Cuál es el volumen de las cisternas 1,2 y 3? ¿Cuánto está variando el volumen de las cisternas? ¿Cuánto está variando la cantidad de litros de agua de las cisternas con respecto al volumen?	Calcular, observar, interpretar y comparar.

e) Formula una expresión o método que permita decir qué cantidad de agua tendrá cualquier cisterna.	Formulen la expresión a partir de analizar la tabla de datos.	Formulará la expresión V=4h donde V es el volumen y h la altura. La expresión L=1000V donde L son los litros de agua y V es el volumen. La expresión L=4000h donde h es la altura y L son los litros de agua.	¿Qué expresión o método te permite obtener el volumen de la cisterna considerando la altura? ¿Qué expresión o método te permite obtener la cantidad de litros de agua considerando el volumen? ¿Qué expresión o método te permite obtener la cantidad de litros de agua considerando la altura?	Calcular, postular, comparar e interpretar
f) ¿Cómo podrías representar de otra manera la relación de la cantidad de litros de agua de la cisterna con la altura? Representa.	Representen por medio de una gráfica la relación entre la cantidad de litros de agua y la altura.	Realizará una gráfica en la cual el eje X representa la altura de la cisterna y el eje Y representa la cantidad de litros de agua en ellas.		Graficar, calcular, comparar.
Sección 3				
Usa los datos obtenidos anteriormente y contesta las siguientes preguntas. a) Reconoce ¿Qué tipo de comportamiento está representando la situación?	Observen e identifiquen la forma en que van variando los elementos de la situación, e interpreten los datos ya obtenidos.	Identificará un comportamiento lineal y que la cantidad de litros de agua es proporcional a la altura de las cisternas.	¿Cómo comunicarías el comportamiento de la situación al considerar la cantidad de litros de agua y la altura?	Observar, examinar e interpretar.
b) ¿Cuál es la variable independiente y dependiente en la relación de la cantidad de agua de la cisterna con la altura?	De acuerdo con los datos obtenidos, observen que, para obtener la cantidad de litros de agua, necesitan saber la altura de la cisterna.	Identificará que la variable independiente es la altura y la variable dependiente es la cantidad de litros de agua.		Interpretar y comparar.
c) ¿Cuál es su dominio y rango en la relación de la cantidad de agua de la cisterna con la altura de las cisternas?	Identifiquen qué valores toman las variables x y y en la situación.	Identificará que en la situación tenemos la función lineal L=4000 h, entonces el dominio son todos los valores h mayores o iguales a 0.5 m y el rango son los valores L mayores o iguales que 2000 m.		Interpretar, calcular, observar y comparar.
d) ¿Qué te permitió conocer la actividad	Reflexionen y reconozcan en que	Reconocerá que la situación le permite		Observar, examinar, reflexionar.

planteada? ¿La puedes ocupar en algún aspecto de tu vida?	podrían utilizar lo que se plantea en la situación.	saber la manera en que se puede obtener la cantidad de litros de agua en una cisterna usando el volumen, el cual depende del área de la base y la altura de la cisterna. Podría comentar por ejemplo que la podrían ocupar para obtener cuántos litros de agua tiene la cisterna de su casa y de acuerdo con los litros que gasta una persona en promedio por día, saber para cuántos días aproximadamente alcanza el agua en su hogar.		

Elaboración propia.

A continuación, se describen las intenciones globales por cada sección del diseño:

Las preguntas de la sección 1: Promover el análisis de la situación de variación, para identificar qué cambia y qué permanece constante. Se inicia con el proceso de modelación al observar qué sucede con las cisternas e identificar y organizar los elementos que producen la situación (variables, condiciones iniciales, parámetros), para este caso la altura y la base de la cisterna. Se continúa con la elección de elementos que se pueden relacionar de tal manera que permitan describir e interpretar lo observado, aquí sucede la primera toma de decisión para el proceso de modelación que definirá el tipo de herramientas matemáticas producidas o empleadas por los estudiantes.

Las preguntas de la sección 2: Caracterizar la relación entre las variables. Se estudia la variación de la relación entre las variables, es decir cómo y cuánto varía esa relación. Las variables que se estudiarán son la altura, área de la base, volumen y cantidad de litros de agua en las cisternas. Se hace uso de las tablas de datos para organizar los datos observados en el video. Se recopilan datos (numéricos o gráficos) para calcular y comparar cómo y cuánto cambian los datos en las diferentes cisternas.

El estudio de las relaciones entre las variables provocará el uso de conocimientos matemáticos mediante tablas de datos, gráficas y expresiones algebraicas que comuniquen la variación, en donde graficar permitirá mostrar o analizar las variaciones globales o locales. También se hace un análisis puntual o local de la variación entre las variables, para especular el comportamiento global. Se exhiben herramientas que permiten postular o ajustar el comportamiento a un comportamiento conocido, con esto se predice el comportamiento en un momento desconocido, lo que conlleva a formular una relación de variación entre las variables, a la par que sucede el consenso de las ideas matemáticas cuidando que exista una vinculación de todo lo que se ha construido en la situación.

Las preguntas de la sección 3: Resignificar el comportamiento de la función lineal en la situación planteada, y además que el estudiante pueda dar ejemplos de otros casos en donde este tipo de razonamiento pudiera ser usado en su cotidianidad. La sección enfatiza el tipo de comportamiento que está presente en la situación de modelación, la identificación de la variable dependiente e independiente al relacionar la altura con la cantidad de litros de agua, así como también el dominio y rango. Las preguntas c) y d) de la sección 3 (ver tabla 2) estás sustentadas por el programa de la SEP (2018) ya que en este se plantean como temas anteriores al de función lineal, la identificación de la variable dependiente e independiente, y la obtención del dominio y rango, por eso es viable agregar estas interrogantes en la situación de modelación.

La investigación está en la fase de preparación del experimento. Una vez llevada a cabo la experimentación, se recopilarán los datos por medio de las producciones enviadas por los estudiantes en el espacio generado en Google Classroom, producciones del grupo de Telegram durante la sesión síncrona y las videograbaciones de Zoom. Posteriormente se analizarán los datos obtenidos considerando los diseños instruccionales que se han elaborado (tabla 2) en los que se analizan las trayectorias hipotéticas de aprendizaje de los estudiantes, y las prácticas de modelación que surgen al tratar con la situación que se plantea.

Reflexiones

Las reflexiones están en torno al estatus actual de la investigación y a lo que este proceso de investigación me ha enseñado a valorar.

En este tiempo he aprendido que es importante revisar los planes de estudio SEP (2017) y SEP (2018), esto para observar si la propuesta de enseñanza es pertinente. Además, las lecturas de investigación que he realizado han ayudado principalmente a sustentar el proyecto, también a adquirir conocimiento por ejemplo teórico y metodológico. Esta investigación me ha permitido reflexionar con mayor profundidad el papel del profesor de matemáticas en la formulación de preguntas que sean necesarias y adecuadas, con la finalidad de lograr un objetivo.

Considero fundamental realizar una preparación del experimento, preparación de clase, porque se prevén los recursos didácticos y tecnológicos, así como el tiempo de implementación de la actividad matemática. He reflexionado y creo necesario realizar las trayectorias hipotéticas de aprendizaje de tal manera que me permita hacer un análisis posterior de lo que sucedió al implementar la actividad matemática, esto desde mi punto de vista como docente.

Durante el diseño de la situación de aprendizaje tomando como eje la categoría de modelación escolar (Méndez, 2013), he reflexionado sobre los saberes matemáticos, y la funcionalidad de esta categoría en el aula, esto se ha hecho en paralelo al uso de la categoría para diseñar puntualmente una clase y, cómo incorporar está en el cotidiano del profesor y de los estudiantes mediante una situación de modelación. Esto ha sido posible al experimentar con pequeños grupos, con pruebas piloto y reflexionar sobre qué se ha logrado, adaptando la actividad con base a los objetivos. En ese sentido creo que ha sido un reto como profesora el realizar un diseño de una situación de modelación considerando tal categoría y me siento satisfecha con este.

Bibliografía

Campeón, M. C., Aldana, E. y Villa, J. A. (2018). Ingeniería didáctica para el aprendizaje de la función lineal mediante la modelación de situaciones. *Sophia,14* (2), 115-126.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento.* Barcelona: Gedisa.

Cordero, F. (2006). La modellazione e la rappresentazione grafica nell'insegnamento-apprendimento della matemática. *La Matemática e la sua Didattica, 20*(1), 59-79.

Córdoba, F. J. (2011). La modelación en Matemática Educativa; una práctica para el trabajo de aula en ingeniería. (Tesis de maestría), IPN. CICATA.

Del Valle, T. (2010). *La Modelación de la función afín: una mirada socioepistemológica*. (Tesis de maestría no publicada), Universidad Pontificia Católica de Valparaíso. Chile.

García, J. (2013). La problemática de la enseñanza y el aprendizaje del cálculo para ingeniería. *Revista Educación, 37* (1), 29-42.

Méndez, M.E.M. (2013). *Desarrollo de red de usos del conocimiento matemático: la modelación para la matemática escolar.* (Tesis de doctorado no publicada), Instituto Politécnico Nacional. México.

Méndez, M.E.M. y Cordero, F. (2014). La modelación. Un eje para la red de desarrollo de usos. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 27*, 1603-1610. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Molina, M., Castro, E., Molina, J. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las ciencias, 29*(1), 75-88.

Pezoa, M. I. y Morales, A. (2016). El rol de la modelación en una situación que resignifica el concepto de función. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias, 11*(2), 52-64.

SEP (2017). Planes de estudio de referencia del marco curricular común de la educación media superior. SEMS.

SEP (2018). Programa de estudio de bachillerato de matemáticas IV. SEMS.

Suárez, L. y Cordero, F. (2010). Modelación-graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultados de un estudio socioepistemológico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13*(4-II), 319-333.

Suárez, L. y Cordero, F. (2008). Elementos teóricos para estudiar el uso de las gráficas en la modelación del cambio y de la variación en un ambiente tecnológico. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias, 13* (1), 51-58.

Tocto, M. R. y Méndez M.E.M (2015). Modelación y la emergencia de la integral. En R. Flores (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 28,* 914-920. México, D.F.: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C. ISNN: 2448-6469

Villa-Ochoa, J. A. (2007). La modelación como proceso en el aula de matemáticas: un marco de referencia y un ejemplo. *Tecnológicas, 19*, 63-85.

Zaldívar, D., Cen, C., Briceño, E., Méndez, M.E.M. y Cordero F. (2014). El espacio de trabajo matemático y la situación específica de la matemática funcional: un ejercicio de diálogo. *RELIME, 17* (4-II), 417-436.

VOL 34, NÚMERO 2, AÑO 2021

EL USO DE LOS OBJETOS GEOMÉTRICOS: PROYECCIONES DE MAPAS Y SOCIOEPISTEMOLOGÍA

USING GEOMETRIC OBJECTS: MAP PROJECTIONS AND SOCIOEPISTEMOLOGY

Julieta Tejería Russi, Ricardo Cantoral Uriza
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. (México)
julieta.tejeria@cinvestav.mx, rcantor@cinvestav.mx

Resumen
En el presente reporte se mostrarán los avances de una investigación en curso que pretende evidenciar el *valor de uso* de los objetos geométricos en el contexto de las proyecciones de mapas, en el que aparecen como una herramienta fundamental para dar solución al problema de representar la Tierra esférica en un mapa plano, conservando determinadas características para mejorar las técnicas de navegación en el siglo XVI. Se propone a partir de una *problematización del saber* configurar un contexto de significancia en el que se resignifican los objetos geométricos.

Palabras clave: valor de uso, geometría, proyecciones de mapas, Socioepistemología

Abstract
This report will show the progress of an ongoing research work that aims to show the functional value of geometric objects in the context of map projections, in which they appear as a fundamental tool to solve the problem of representing the spherical Earth in a flat map, preserving certain characteristics to improve navigation techniques in the 16th century. A problematization of the knowledge in question is proposed, to create a context of meaning in which geometric objects can be re-signified.

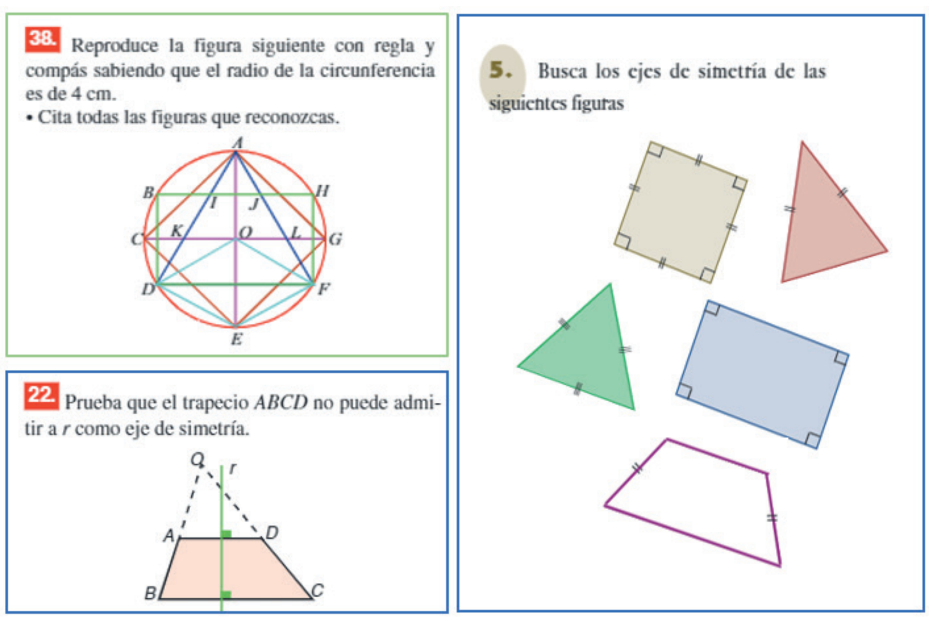
Key words: value of use, geometry, map projections, socio-epistemology

Introducción

Esta investigación en curso surge a partir de nuestro interés por evidenciar el *valor de uso* de los objetos geométricos en contextos que no sean los que se proponen típicamente en la matemática escolar, buscando escenarios en los que estos objetos se signifiquen mediante el uso. Desde nuestra postura teórica consideramos al discurso *Matemático Escolar (dME)* (Cantoral, 2013), que permea toda la enseñanza y aprendizaje de la matemática en el ámbito escolar, normándola, estableciendo qué se debe enseñar y cómo, así como los desempeños de los actores involucrados en el sistema educativo.

Particularmente sobre la enseñanza de geometría, se revisaron programas de estudio y libros de texto de la Enseñanza Secundaria uruguaya, que nos permitieron ver de manera global el tratamiento que se le da a este conocimiento escolarmente. Se observa un tratamiento intuitivo y experimental en los primeros niveles, relacionado con las construcciones de figuras geométricas con instrumentos de medidas, para desembocar en niveles más avanzados en el rigor de la formalidad priorizando definiciones, propiedades, conjeturas y demostraciones. Concordando así, con lo reportado en (Galo, 2019) sobre la investigación en enseñanza de la geometría. Reconocemos una secuenciación de contenidos a lo largo de los cursos, lo que es aprendido en cursos anteriores tendrá un papel importante en los siguientes. Los libros de texto proporcionan problemas en los que los objetos aparecen en juego únicamente relacionándose entre ellos, mayoritariamente en *contextos situacionales* geométricos. (Figura 1).

Figura 1. *Ejemplos de problemas en libros de texto.*



Imágenes extraídas de Belcredi y Zambra (2008, p. 114 y 130) y Borbonet et al. (2000, p. 173).

Con base en lo que identificamos en la matemática escolar sobre la geometría, comenzamos a cuestionarnos acerca de contextos en los que los objetos geométricos aparezcan involucrados y sean significados en problemas que dependan de éste, y que no estén únicamente al servicio de la propia matemática. Surge como un posible contexto a explorar en este sentido, las proyecciones de mapas y sus distorsiones.

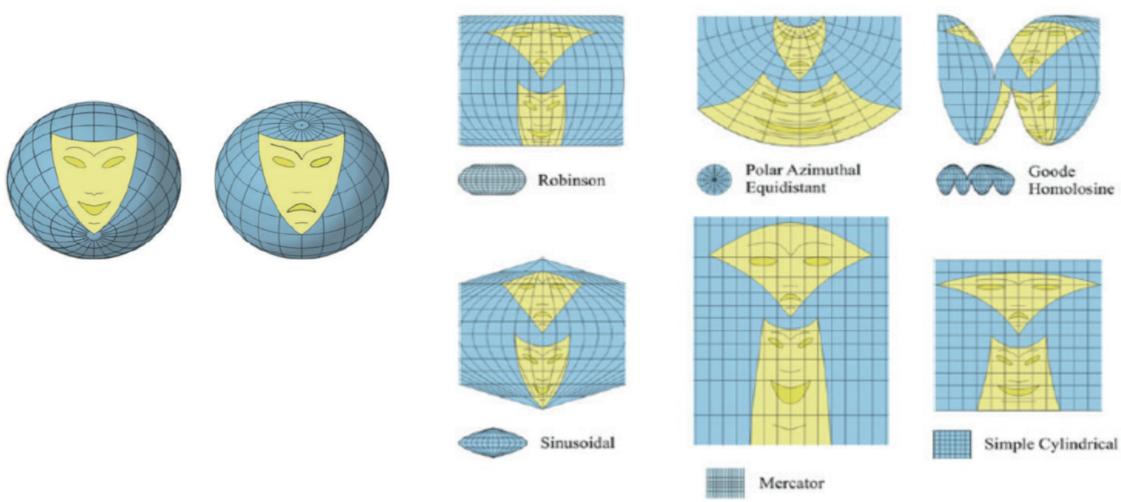
Lapaine y Usery (2017), presentan diferentes proyecciones de mapas destacando su distorsión, y el hecho de cómo generamos imágenes del mudo a partir de creer en determinados mapas que se nos presentan como una fiel representación, sin cuestionarlos. La representación más fiel de la Tierra es el globo terráqueo, conserva todas las magnitudes, pero su uso no es el más práctico, por su forma. Por ejemplo, cuando lo vemos solo nos muestra un hemisferio del mismo. Es por esto que surgen a lo largo de la historia diferentes formas de representarlo transformando lo que conocemos en la esfera, al plano. Según la característica geométrica que se desea conservar en un mapa debido a su finalidad, es que se genera una variedad de proyecciones. Se muestra en la figura 2 ejemplos de las distorsiones de diferentes proyecciones.

Robinson (2017) menciona que se distorsiona en al menos dos o tres de las siguientes formas:

El tamaño de las regiones parece más grande o más pequeño que en el globo, las distancias entre los puntos se muestran más largas o más cortas que en el globo y, las rutas directas entre puntos no se muestran cómo líneas rectas. (p. 4) [Traducción propia].

Entra en juego como un aspecto de importancia, la finalidad del mapa y cómo eso determina qué característica mantener y cuál distorsionar. En (Robinson, 2017) se propone como ejemplo de esto el mapa de Mercator, creado en 1569 con la intención de que sirva para la navegación, provocando esto una distorsión muy grande de áreas en las zonas de latitud alta (norte y sur). (Figura 3).

Figura 2. *Ejemplos de distorsión de diferentes proyecciones.*



Extraída de Robinson (2017, p. 46-47).

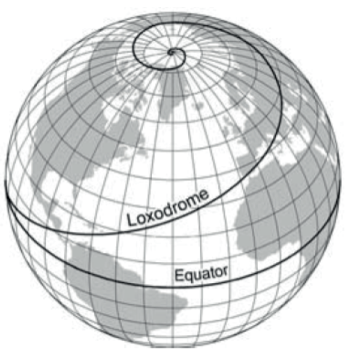
Para la navegación en el siglo XVI, toma relevancia la brújula como instrumento que se utilizaba, al indicar el Norte, siendo esta la dirección de los meridianos. Conocer el ángulo de rumbo, que es el ángulo que indicaba la dirección que se debía seguir, era de gran importancia. En la esfera, las curvas que forman siempre un mismo ángulo con los meridianos, se conocen como curvas loxodrómicas, y la ventaja para la navegación es que por esas curvas el rumbo se mantiene constante (los paralelos son ejemplo de esto ya que forman un ángulo de 90° con los meridianos). El mapa de Mercator muestra este tipo de curvas que en la esfera son espirales, como líneas rectas (Figura 3). Esto es muy útil para la navegación. Si se dibuja una línea recta en el mapa, y se conoce el ángulo que forma con los meridianos, y se sigue ese ángulo en la brújula, se llegará a destino. (Figura 4).

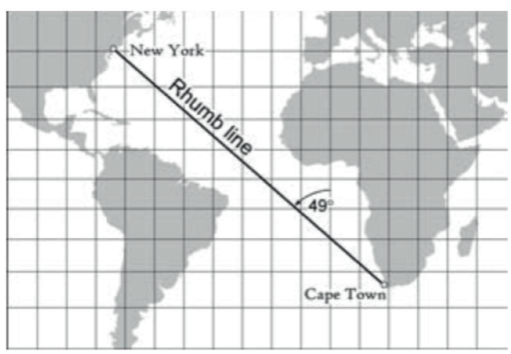
Figura 3. *Mapa de Mercator.*

Imagen extraída de Monmonier (2004, p. 5).

Cabe destacar también que Battersby y Kessler (2012) se proponen encontrar métodos que mejoren la enseñanza de las proyecciones desde la geografía, explicando la distorsión en algunas de ellas, para evitar la codificación errónea de la información que el mapa nos brinda. Afirman que se reconoce que el mapa de Mercator está distorsionado porque escolarmente es el que se muestra como ejemplo, pero no se comprende cómo lo está. Este mapa está ampliamente divulgado, a pesar de que su fin no era el de representar fielmente la Tierra, sino el de la navegación.

Figura 4. *Curvas loxodrómicas representadas en el globo terráqueo y línea de rumbo que une Nueva York con Ciudad del Cabo en el mapa de Mercator.*





Imágenes extraídas de Monmonier (2004, p. 2 y 3).

Mercator (1512-1594) fue cartógrafo, geógrafo y matemático, nacido en Flandes (norte de la actual Bélgica), distinguido por su trabajo como calígrafo, editor y fabricante de instrumentos científicos, cuyos intereses abarcan astronomía, cosmografía, magnetismo terrestre, historia, filosofía y teología (Monmonier, 2004). No existe evidencia escrita por él sobre cómo construyó su mapa, y debido a su utilidad para la navegación, surgen explicaciones que van desde: una primera realizada por el matemático inglés Wright en 1599, hasta actuales basadas en el Cálculo Diferencial. Con base en estas explicaciones y la importancia desde nuestra postura teórica que se le otorga al contexto social e histórico en la construcción del conocimiento, es que se comienza a configurar la idea de que la construcción de este mapa para la navegación nos puede permitir configurar un *contexto de significancia*, en el que los objetos geométricos aparecen puestos en uso y se resignifiquen.

Marco teórico

El marco teórico de esta investigación es la *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME)* (Cantoral, 2013) que tiene como objetivo atender a la construcción social del conocimiento matemático y su difusión institucional. En este sentido, se considera necesario para que el conocimiento se vuelva *saber* que sea puesto en uso, así como que el saber popular del ámbito cultural, el saber técnico como el de las disciplinas científicas y el saber sabio como el propio de la matemática tienen igual importancia. En esta investigación reconocemos los objetos geométricos en un contexto sociocultural e histórico en donde emergen de manera natural relacionándose con los elementos de este, y su funcionalidad queda resaltada en un problema real: la construcción del mapa que crea Mercator en 1569.

En cuanto al *discurso Matemático Escolar,* Cordero et. al (2015) lo definen como "un sistema de razón que norma las prácticas y las representaciones sociales de los agentes del sistema educativo. Este sistema se comporta como un mapa que delinea lo que queda dentro o fuera de la razón." (p. 63). Atribuyéndole así a la matemática escolar y a ese discurso que la norma, la responsabilidad de lo que sucede en el aula, despersonificando el problema. Establecen una caracterización del *dME* en la que se identifica: su *carácter hegemónico* (predomina una sola argumentación, no tienen relevancia otras que resultan del uso del conocimiento matemático en otros contextos, ni en su construcción), *la atomización en los conceptos* (centrado en los objetos matemáticos, desprovistos de contexto histórico, social o cultural), *la falta de marcos de referencia* (no se considera que la matemática pueda ser utilizada en otros escenarios, en otras disciplinas en donde puede adquirir otros significados), *la concepción de que la matemática es un conocimiento acabado y continuo* (no tienen cabida otros argumentos o significados porque la matemática se presenta de forma lineal, y no es posible trastocarla), y, *su carácter utilitario* (el conocimiento matemático está al servicio de la propia actividad matemática, no se concibe su carácter funcional).

Desde nuestra problemática, situamos al saber en un contexto cultural e histórico dándole sentido a su construcción desde un problema real en el que se ponen en uso objetos geométricos, conformando así un *contexto de significancia* basado en prácticas (Reyes-Gasperini, 2016, p. 58), en el que se resignifiquen. Esto permitirá aportar en un futuro al *rediseño* de este *dME*.

Metodología. Desarrollo de un ejemplo.

Desde un punto de vista metodológico se realiza una *problematización del saber matemático* en el marco de la *TSME* (Cantoral, 2013). El saber se historiza y se dialectiza según sus dimensiones: cognitiva, didáctica, epistemológica y social. Para esto se hizo primero una búsqueda de fuentes secundarias que analizaran la proyección de Mercator. Teniendo en cuenta nuestra problemática, destacamos los trabajos de Núñez quien en 1537 refiere por primera vez a la navegación por curvas loxodrómicas, y de Wright quien realiza por primera vez una explicación de dicha proyección en 1599.

Se utiliza como método el análisis documental de fuentes originales: (Wright, 1599) y (Wright, 1657), dos ediciones del tratado "*Certaine Errors in Navigation*". Como nos interesa analizar la construcción de ese mapa cuya finalidad era la navegación, en una época determinada, lo haremos con base en la propuesta planteada por Espinoza (2009) para el análisis de obras originales desde sus tres aspectos: una producción con historia, un objeto de difusión y parte de una expresión intelectual global. Se realiza una caracterización del período y una secuenciación cronológica (a partir de fuentes primarias y secundarias), se identifican influencias entre las obras y se analiza la actividad matemática inmersa en la navegación con el fin de rescatar su *racionalidad contextualizada*. Se confrontan ambas ediciones con el objetivo de ver qué cambió y que se mantuvo estable.

La obra analizada (Wright, 1599) es un tratado escrito por este matemático inglés, destinado a quienes navegaban y tenía por finalidad explicar algunos errores que se cometían por la mala interpretación que se hacía del mapa que se utilizaba en esa época (Figura 5), y corregirlos. Él toma conocimiento sobre estos errores desde la experiencia, ya que tuvo la oportunidad de ser parte de la expedición hacia las Islas Azores del Conde de Cumberland en 1589, a quien dedica su trabajo. (Monmonier, 2004).

En este mapa, los paralelos se muestran todos con igual medida al ecuador, como rectas paralelas y separados de forma equidistante. Los meridianos aparecen como rectas paralelas (perpendiculares a los paralelos), también separados de la misma forma. Para realizarlo, los paralelos que en la esfera aparecen todos como circunferencias con diferentes medidas (Figura 6), dependiendo del ángulo de latitud, se estiran hasta alcanzar la medida del ecuador, mientras que los meridianos se muestran en la misma proporción que en el globo. Podemos decir entonces, que hay un estiramiento únicamente de forma horizontal (Figura 5).

Figura 5. *Mapa que se utilizaba para la navegación antes del mapa de Mercator. Proyección cilíndrica equidistante.*

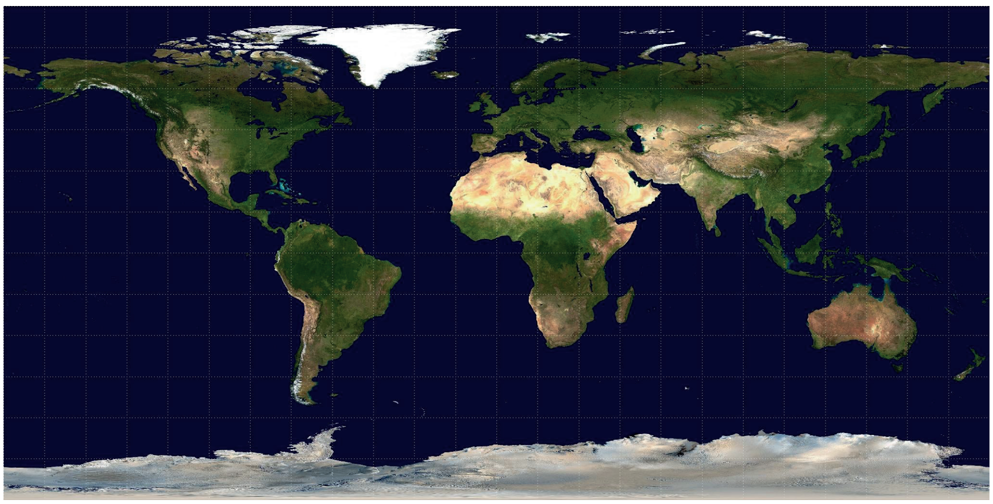


Imagen extraída de https://es.wikipedia.org/wiki/Proyecci%C3%B3n_cil%C3%ADndrica_equidistante#/media/Archivo:Equirectangular-projection.jpg

Figura 6. *Esfera con el paralelo de latitud θ representado, siendo θ el ángulo de latitud. Globo terráqueo con paralelos de latitud Norte y Sur representados.*

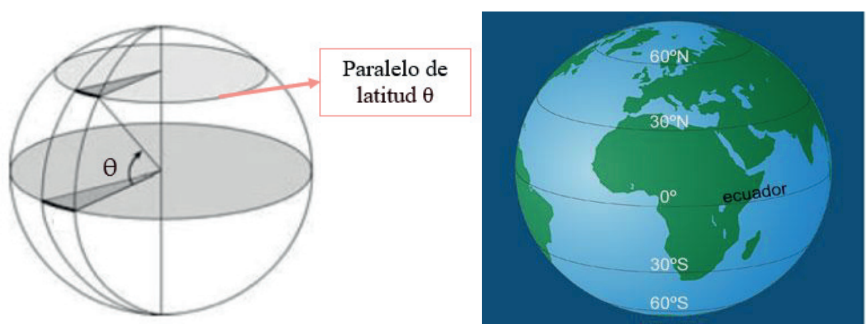


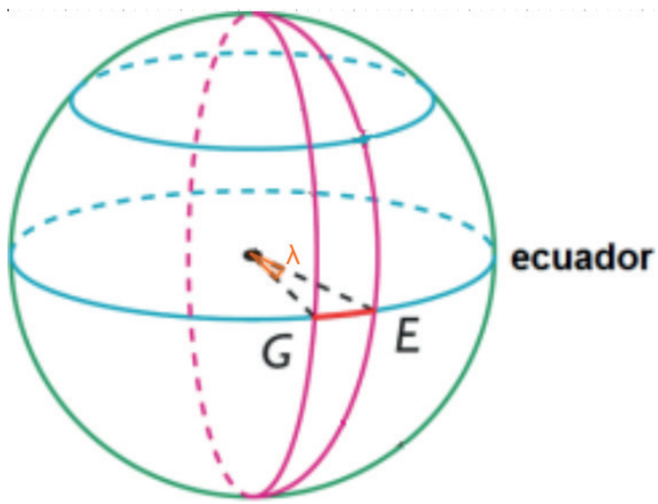
Imagen extraída de http://museovirtual.csic.es/salas/universo/astro3.htm

Wright (1599) expone los errores que se cometían a partir del mal uso de este mapa, para luego corregirlos. De esta manera, propone la construcción de un nuevo mapa, que se genera a partir de *compensar* ese estiramiento horizontal, con un estiramiento vertical, que permita que las curvas loxodrómicas sean representadas como líneas rectas. Proporciona una tabla en la que se establece una separación progresiva de los paralelos que depende del ángulo de latitud, y que será igual al factor por el que se estira cada paralelo.

El análisis de la primera edición de la obra de Wright (1599) se lleva a cabo mediante el método propuesto por Cantoral *et al*. (2015), respondiendo a las preguntas *¿Qué hace?, ¿Cómo lo hace? y, ¿Para qué lo hace?* Esto con el fin de identificar epistemologías de prácticas vinculadas a los objetos geométricos que aparecen en uso en la construcción del mapa, relacionados a la *compensación* con el estiramiento vertical necesario para que conserve los ángulos, así como también, a los errores detectados en el mal uso del mapa equidistante. Se presenta un ejemplo de un uso de objetos geométricos en (Wright, 1599), en lo que él plantea como un error cometido a partir del uso del mapa. Este ejemplo junto con otros será mostrado con mayor detalle en la tesis de Maestría correspondiente a esta investigación.

Wright (1599) explica el error que se comete al calcular la diferencia de longitud entre dos puntos en el mapa. La diferencia de longitud es el ángulo λ que se forma entre los planos que contienen los meridianos en los que se ubican los puntos de interés (Figura 7).

Figura 7. *Diferencia de longitud entre G y E.*



Elaboración propia

Retoma un ejemplo del trabajo de Núñez (1537), que le ayuda a argumentar su punto, a partir de conocimientos que se tienen desde la experiencia. Explica el cálculo de la diferencia de longitudes para dos lugares que se encuentran ambos aproximadamente en el paralelo 39° de latitud Norte: Isla Tercera y Lisboa. Toma otro punto de referencia en las trayectorias: Isla Madera. Sus ubicaciones actuales se muestran en la figura 8.

Si dos lugares se encuentran en un mismo paralelo dicho ángulo (λ) está estrechamente relacionado con el arco de circunferencia que representa ese paralelo. Estas trayectorias eran de interés a la hora de navegar, ya que mantenían el ángulo de la brújula constante intersecando en ángulo recto a todos los meridianos (que indican la dirección Norte-Sur).

En el mapa equidistante (Figura 5), esos arcos de paralelo (circunferencia) que en la esfera son de diferente medida (Figura 6), aparecen representados iguales, mientras que el ángulo que determinan los planos que contienen los meridianos es el mismo.

Figura 8. *Ubicación actual de Isla Tercera, Isla Madera y Lisboa.*

Imagen extraída de Google Maps.

Basando sus argumentos en la experiencia de navegación, Wright (1599) sabe que la distancia del recorrido de Lisboa a Tercera es de 262,5 leguas. Las latitudes de Isla Tercera y Lisboa son ambas aproximadamente de 39° Norte, y además Isla Tercera tiene latitud 31,5° Norte. Conoce también, los rumbos a seguir de Lisboa a Madera (suroeste) y de Madera a Tercera (noroeste), ambos formando un ángulo de 45° con los meridianos. (Figura 9).

Partiendo de esto y considerando el mapa equidistante se obtiene que: el ángulo de 45° indica que varía lo mismo de latitud que de longitud, por lo que si varía 7,5° de latitud entre Lisboa y Madera (de forma vertical), igual lo hará en longitud (de forma horizontal), de manera análoga si lo hacemos de Madera a Tercera, por lo que el mapa nos arroja una diferencia de longitud de 15°. (Figura 9).

Wright (1599), utilizando la relación entre los elementos del círculo (arco de circunferencia, radio y ángulo al centro), expone la forma de calcular la diferencia de longitud entre esos dos puntos en la esfera, lo que llama "la verdadera diferencia de longitud".

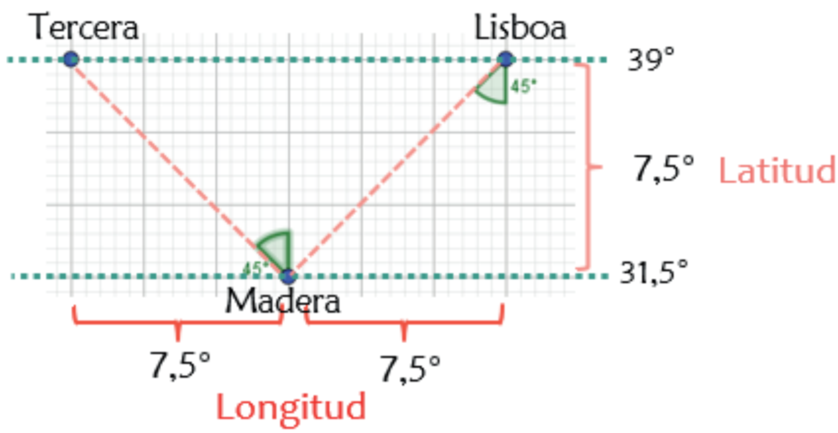
Es una regla en Geometría, que los diámetros y periferias, y consecuentemente los semidiámetros, y arcos semejantes de los círculos tienen la misma proporción.

También es manifiesto que el seno del complemento de la distancia de cualquier paralelo desde el Equinoccio es el semidiámetro del mismo paralelo. (Wright, 1599). [Traducción propia].

Considerando la esfera de radio 1000, el paralelo de 39° de latitud Norte, es una circunferencia cuyo radio Wright (1599) lo calcula como el seno del ángulo complemento:

$$sen 51° x 1000 \approx 777$$

Figura 9. *Diferencias de longitud y latitud mostradas por el mapa equidistante.*



Elaboración propia.

Si lo relacionamos directamente con el ángulo de latitud será:

$$cos 39° x 1000 \approx 777$$

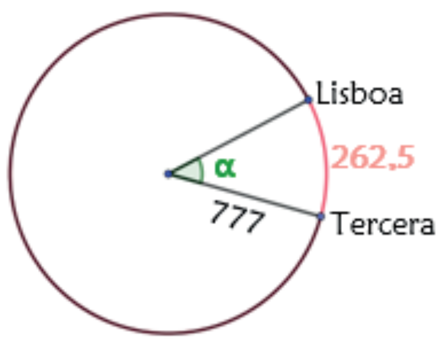
Haciendo uso de la fórmula que relaciona el arco de una circunferencia, el ángulo al centro comprendido y el radio, conociendo por la experiencia la medida del arco (262,5 leguas), y el radio calculado (777) (Figura 10),

$$777.\alpha \ = \ 262{,}5$$

Obtiene la diferencia de longitud:

$$\alpha \ = 0{,}378\ldots \approx \ 19°18'$$

Figura 10. *Diferencia de latitud en la esfera entre Isla Tercera y Lisboa.*



Elaboración propia.

A partir de la comparación de los dos escenarios (esfera y plano), Wright (1599) muestra la contradicción que se genera al utilizar el mapa sin comprender la proyección que hay detrás. Los objetos geométricos aquí aparecen significados en un elemento del contexto, en un ejemplo de la realidad, y permiten mostrar esa contradicción. Este es uno de los usos de objetos geométricos que encontramos y se expone a modo de ejemplo, aparecen otros de estos, que involucran nuevos objetos geométricos.

¿Qué objetos geométricos usa en sus argumentaciones?

- Ángulos de 45°.
- Triángulo isósceles.
- Triángulo rectángulo.
- Razón trigonométrica: seno.
- Relación entre elementos del círculo: arco de circunferencia, ángulo al centro y radio.

¿Cómo los usa?

Aparecen relacionados directamente con elementos del mapa, de la esfera y rumbos de la navegación. Los usa como herramienta para calcular distancias necesarias (radios), medidas de ángulos, diferencias de latitud y longitud.

¿Para qué los usa?

Para matematizar el ejemplo: cálculos en la esfera y luego en el mapa. Para mostrar una contradicción entre el uso del mapa y lo que sucede en la esfera. Evidenciar por qué se llega a un error en un cálculo a partir del mapa por no conocer la transformación con la que se construye.

Resultados

Se presentan aquí los resultados desarrollados hasta el momento, a partir de un ejemplo de cómo aparecen en uso objetos geométricos en el contexto de un problema al que se le quería dar solución en el siglo XVI, hacer más efectiva la navegación. Como resultados parciales hemos podido evidenciar el uso de los siguientes objetos geométricos: relaciones entre arcos de circunferencia, ángulo y radio, semejanza de triángulos, razones trigonométricas, proposiciones de Euclides (27 y 28), cada uno de ellos aparece inmerso en el contexto, en donde se resalta una funcionalidad particular, permitiendo así una resignificación de cada objeto. Todo esto nos permite configurar un *contexto de significancia*, que amplía la visión que se tiene desde la matemática escolar del tratamiento de la geometría. Considerándolo para el diseño de tareas escolares con el objetivo del rediseño de *dME*, en donde se exprese la funcionalidad de los objetos matemáticos significados a partir de la racionalidad del contexto.

Referencias

Battersby, S. E., & Kessler, F. C. (2012). Cues for interpreting distortion in map projections. *Journal of Geography, 111(3),* 93-101.

Belcredi, L. y Zambra, M. (2008). *Matemática 1.* Montevideo: Ediciones de La Plaza.

Borbonet, M., Burgos, B., Martínez, A., y Ravaioli, N. (2000). *Matemática 1*. Montevideo: Editorial Fin del Siglo.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento.* Barcelona: Editorial Gedisa.

Cantoral, R., Montiel, G., y Reyes-Gasperini, D. (2015). Análisis del discurso Matemático Escolar en los libros de texto, una mirada desde la Teoría Socioepistemológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática, (8)*, 9 – 28.

Cordero, F., Gómez, K., Silva-Crocci, H. y Soto, D. (2015). *El discurso matemático escolar: la adherencia, la exclusión y la opacidad*. Barcelona: Editorial Gedisa.

Espinoza, L. (2009). *Una evolución de la analiticidad de las funciones en el siglo XIX. Un estudio socioepistemológico.* Tesis de Maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.

Galo, S. (2019). *El estudio del cambio en Geometría Euclidiana.* Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.

Lapaine, M., y Usery, E. (Eds.). (2017). *Choosing a map projection*. Springer International Publishing.

Monmonier, M. (2004). *Rhumb Lines and Map Wars: A Social History of the Mercator Projection.* Chicago: University of Chicago Press.

Reyes-Gasperini, D. (2016). *Empoderamiento docente y Socioepistemología. Un estudio sobre la transformación educativa en Matemáticas.* Barcelona: Editorial Gedisa.

Robinson, A. (2017). Which Map Is Best? En M. Lapaine y E. Usery (Eds.), *Choosing a Map Projection* (pp. 1-14). Springer International Publishing.

Robinson, A. H. (2017). Choosing a World Map. En M. Lapaine y E. Usery (Eds.), *Choosing a Map Projection* (pp. 15-48). Springer International Publishing.

Wright, E. (1599). Certaine Errors in Navigation. England.

Wright, E. (1657). *Certain errors in navigation detected and corrected by Edw. Wright; with many additions that were not in the former editions.* England. Printed by Joseph Moxon.

VOL 34, NÚMERO 2, AÑO 2021

ESTUDIO SOCIOEPISTEMOLOGICO DE LA NOCIÓN DE MÉTRICA. USOS Y SIGNIFICADOS

SOCIO-EPISTEMOLOGICAL STUDY OF THE NOTION OF METRIC; USES AND MEANINGS

Maximiliano Izzi Prato, Ricardo Cantoral Uriza.
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. (México)
maximiliano.izzi@cinvestav.mx, rcantor@cinvestav.mx.

Resumen
Esta investigación en curso, realiza una problematización del saber matemático en el sentido de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa sobre las nociones interrelacionadas de *medida, métrica y distancia.* Estas fueron interpretadas en este trabajo en el concepto matemático: *espacio métrico*. Articuladamente se problematizan las dimensiones *social, epistemológica, cognitiva y didáctica*, reconociendo escenarios y epistemologías excluidas de la matemática escolar. Para esto se toman fuentes propias de la Matemática Educativa, y de otros campos disciplinares que permiten apreciar el *valor de uso* de la *métrica.* A modo de conclusión, planteamos que ampliar el universo de espacios en donde se puedan generar diferentes tipos de *métricas* provistas de un *valor de uso* contextualizado, sería un posible camino para resignificar la noción topológica de *espacio métrico.*

Palabras clave: Socioepistemología, topología, espacio métrico, medida.

Abstract
This ongoing research work carries out a problematization of mathematical knowledge in the sense of the Socio-epistemological Theory of Educational Mathematics on the interrelated notions of *measure, metric* and *distance*. These notions were interpreted in this work in the mathematical concept: *metric space.* The *social*, *epistemological*, *cognitive* and *didactic* dimensions are problematized in an articulated way, recognizing scenarios and epistemologies excluded from school mathematics. So, sources from Educational Mathematics are taken, and from other disciplinary fields that allow us to appreciate the *metric use value*. In conclusion, we propose that expanding the universe of spaces where different types of *metrics* can be generated, provided with a contextualized *use value*, would be a possible way to re-signify the topological notion of *metric space*.

Key words: socio-epistemology, topology, metric space, measure

Introducción

En algunos institutos de formación de profesorados de matemática y universidades pedagógicas de Latinoamérica, se imparten cursos de Topología a los futuros profesores de matemática (Chile, Argentina y Uruguay son algunos que tenemos identificados). Además, es una signatura que aparece en programas de formación de matemáticos y con influencia en carreras universitarias con perfiles matemáticos. Inicialmente observamos, que la centración en objetos formales que caracteriza a estos cursos de Topología, estaría produciendo una sensación de falta de pertinencia de estos cursos especialmente en los futuros profesores de matemática, que posteriormente se dedicarían mayoritariamente a la enseñanza en educación secundaria o bachillerato. Es decir, puede suceder que el futuro profesor no entienda en qué le aportará este curso a su perfil profesional específico. Un elemento encontrado es que se configura el curso de igual manera para profesores matemática y para matemáticos, no diferenciando las particularidades académicas de cada profesión.

En los libros de Topología usualmente recomendados en programas oficiales (Kelley, 1955; Mendelson, 1990; Munkres., 2002), que también influyen en los materiales diseñados para profesores, se presenta la concepción de *espacio topológico* como se muestra en la *figura 1* (con apenas pequeñas variaciones entre una fuente y otra).

Figura 1. *Definición de espacio topológico.*

Definición. Una ***topología*** sobre un conjunto X es una colección $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X con las siguientes propiedades:

(1) $\varnothing$ y X están en $\mathcal{T}$.

(2) La unión de los elementos de cualquier subcolección de $\mathcal{T}$ está en $\mathcal{T}$.

(3) La intersección de los elementos de cualquier subcolección finita de $\mathcal{T}$ está en $\mathcal{T}$.

Un conjunto X para el que se ha definido una topología $\mathcal{T}$ se llama ***espacio topológico***.

Extraída de Munkres (2002, p.86).

Frente a esto, Bastán et al. (2006), que realizan un estudio histórico epistemológico del origen de la Topología, y se lo contrasta con el saber enseñado en la formación del profesorado, se señala que:

> Una definición de este tipo es ventajosa desde cierto punto de vista por su expresión minimalista y generalizadora, pero es desventajosa desde otro, sobre todo para la enseñanza, porque muestra un alto grado de opacidad en cuanto a los objetos a los que hace referencia y a los problemas, cuestiones o situaciones que permite abordar y por sobre todo a aquellos que le dieron sentido a su génesis (p. 2).

Esta reflexión, podría ser extendida a cualquiera de las nociones topológicas abordadas en la matemática escolar, como pueden ser *espacios métricos*, *continuidad*, *compacidad*, *conexión*, *completitud*, etc. Las definiciones se mantienen de manera abstracta y genérica, opacando, como dicen los autores, los significados. También identifican dificultades y obstáculos protagónicos en cuanto a la enseñanza de la Topología. Se reconoce una pérdida de significados geométricos de las nociones, se mantienen los temas estudiados a nivel de objetos formales, y las técnicas restringidas a la producción de demostraciones que depende de la significación que cada estudiante pueda darle, “sin más razones que la coherencia lógica que mantienen (los temas) entre sí” (p.7). También se identifica que no se presenta problemas en contextos en donde los saberes involucrados puedan apreciarse con funcionalidad, no se dan instancias de exploración, sino que se presentan los temas desde las definiciones. Sobre el rol de problemas planteados se menciona que: “aparecen al final de cada tema como aplicación, son complejos y aislados, tienen por objetivo hacer que el alumno adquiera heurísticas que tienen que ver con el trabajo en estructuras matemáticas" (p.7). Se concluye por parte de los autores que "el producto resultante del proceso de reconstrucción es una organización matemática estructural y formalizada, que constituye un "idioma nuevo", sofisticado, complejo, del cual no se llega a hacer visible su imprescindibilidad" (p.10).

En Bastán et al. (2006), Espinoza (2009) y Márquez (2018), se referencia y argumenta desde punto de vista histórico, que el origen de la Topología está vinculado a una generalización de las nociones del Análisis Matemático. Al analizar libros de texto y apuntes diseñados para los curos, se puede observar que algunos plantean una introducción a los conceptos de Topología con una visión coherente a esta que plantean los autores. Observamos que en algunos casos, esta generalización se comienza con la introducción del objeto: *espacio métrico*. Con este, se relativiza la idea de *distancia*, para así poder generalizar los teoremas y definiciones como los de límite o continuidad. Usualmente se presenta una definición axiomática del *espacio métrico*, para luego presentar ejemplos de estos (*figura 2*), y concluir con definiciones generalizadas de *conjunto abierto*, *entorno*, *límite*, *continuidad*, en otros espacios que no sean únicamente R^n con la *métrica euclídea usual* (aunque sí este ejemplo usualmente aparece). En la tesis doctoral de Fréchet de 1906, en donde se reconoce uno de los orígenes de esta rama de la matemática, la noción de *espacio métrico* es protagónica.

> La problemática a partir de la cual surgen los espacios métricos está centrada en la necesidad de definir una distancia o métrica en espacios diferentes a los euclidianos. Fréchet se plantea el problema de generalizar las técnicas utilizadas en los espacios euclídeos para reconocer la continuidad de una función definida sobre ellos, a espacios cuyo conjunto soporte no fuera ningún R^n como el espacio C^0 de las funciones continuas. Se planteó abstraer de la métrica euclídea las mínimas propiedades que deba verificar una métrica y que pudieran ser extendidas a un espacio cualquiera. En 1906 define (…) entonces una nueva clase de espacios, a los que denomina conjuntos (E) de clase (V) en los que se da por primera vez una definición general de distancia (Bastán et al., 2006, p10).

Figura 2. *Ejemplos de tareas trabajadas con espacios métricos en cursos de Topología para la formación de profesores.*

Respecto a los tipos de tareas

➢ **T_1: Verificar que ciertos objetos responden al modelo que provee la definición de espacios métricos.**

Probar que los siguientes son espacios métricos

a) *IR^n con la distancia euclídea*: $d(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$ $\quad x=(x_1,\ldots x_n)$ e $y=(y_1,\ldots y_n)$

b) *(IR^n,d) donde* $d(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\left|(x_i-y_i)\right|$

c) *IR^n con la siguiente métrica* $d(x,y)=\max_{1\le i\le n}\left|x_i-y_i\right|$

d)

Sea X un conjunto, x, y en X

$$d_i(x,y)=\begin{cases}0 \text{ si } & x=y\\ 1 \text{ si } & x\neq y\end{cases}$$

e)

Sea A un conjunto cualquiera y $L(A)$ el conjunto de las funciones acotadas de A en IR. Sean f y g pertenecientes a $L(A)$. La aplicacion $d(f,g)=\sup_{x\in A}\left|f(x)-g(x)\right|$ *es una metrica*

Extraído de Bastán et al. (2007, p.8).

Nota: *La tarea se restringe a probar que los axiomas de espacio métrico se cumplen en cada ejemplo, que no tienen contexto ni valor de uso.*

Marco Teórico

Nuestro marco teórico es la *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa* (TSME) (Cantoral, 2016). Esta estudia la construcción social del conocimiento matemático y su difusión institucional. La TSME, señala la existencia de un *discurso Matemático Escolar* (dME), que norma lo que se considera como correcto y lo que no en la configuración de la matemática escolar (Cantoral, 2016) (Cordero, Gómez, Silva-Crocci y Soto, 2015). Este es de carácter ideológico, y se reproduce no solamente en libros de textos y programas oficiales (consideradas como elementos objetivables del dME), sino que norma quehaceres tanto de los profesores como de los estudiantes y la manera que estos se relacionan con el saber matemático. La matemática, se presenta acabada, excluyendo las particularidades propias del pensamiento matemático de los estudiantes, instaurando un dominio epistemológico centrado en objetos formales, o presentado en escenarios ficticios. También el profesor es excluido de la construcción del conocimiento matemático en el sistema escolar, que considera al saber, como unidades temáticas acabadas que este debe restringirse a enseñar sin trastocar. Este dME, se considera protagonista del fracaso escolar. Ya en Cantoral y Farfán (1990) se señala con claridad al dME y los prejuicios que genera: “las dificultades en la transferencia de significados matemáticos tenían sus raíces en el discurso matemático utilizado, que ha saber, está fuertemente influido por los paradigmas típicos del discurso matemático puro” (p. 1).

En Soto (2010), se señalan cinco elementos característicos del dME. *Atomización en los conceptos*: se considera como conocimiento únicamente a los objetos matemáticos, desprovistos de cualquier carácter social, cultural o contextual; *Carácter utilitario:* no se consideran los significados que emergen de los *usos* y de la funcionalidad del conocimiento; *Falta de marcos de referencia:* se soslaya que la matemática también forma parte de otras disciplinas y que puede adquirir diferentes significados y usos dependiendo de los distintos escenarios; *Concepción de la matemática como un conocimiento acabado y continuo:* planteando la imposibilidad de trastocarla, y reduciéndola a procesos de memorización de conceptos y mecanización; *Carácter hegemónico*: son aceptadas solamente algunas argumentaciones, procedimientos y significaciones, evitando otras.

La TSME, considera que la sabiduría humana, se conforma tanto del saber sabio, como del técnico o popular. Busca la democratización del saber, en contraposición con la exclusión que produce el dME que hemos descrito globalmente. Al reconocer al saber, como una construcción social, reconoce epistemologías de prácticas en donde se expresa *relativismo epistemológico*, *racionalidad contextualizada* y valor de uso (Cantoral, 2016). El saber es considerado como conocimiento puesto en uso, por lo tanto, en el rediseño del dME se deben de incorporar escenarios en donde este emerja, permitiendo al estudiante ser parte de su construcción, produciendo así un saber significado a partir de su funcionalidad.

Desde esta postura, consideramos que la enseñanza del es*pacio métrico* al presentar una epistemología centrada en los objetos formales, carente de funcionalidad, está generalmente normada por el dME. De manera concreta, si se preguntara ¿Para qué sirven los ejemplos de *espacio métrico* que usualmente se plantean en los cursos? Solamente se podría responder que es para lograr una generalización del Análisis Matemático, configurando un curso que encadena unidades de manera conceptual, manteniendo los temas del programa estructuras con una lógica coherente. Esto evidenciaría la falta de funcionalidad con la que es presentado el saber en cuestión, producto de una falta de marcos de referencia que permitirían lograr un proceso de resignificación de saber (Cordero *et al.,* 2015).

Metodología

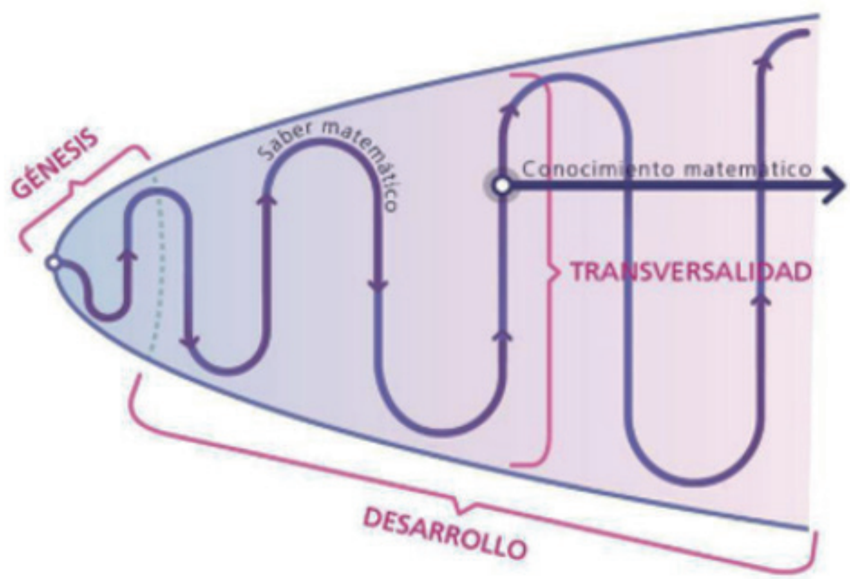
Desde la TSME, se considera el principio de resignificación progresiva, que implica considerar que el aprendizaje de un saber matemático no se constituye de manera aislada. Este se resignifica progresivamente, al reconocerse en distintos escenarios con sus matices, significados y funcionalidades particulares (Cantoral, 2016).

> La investigación en Matemática Educativa con orientación socioepistemológica, inicia con este particular tratamiento del saber. Se lo construye, reconstruye, significa y resignifica, se lo ubica en el tiempo y el

> espacio, se lo explora desde la óptica de quien aprende, de quien inventa, de quien lo usa: se posiciona a la opción constructiva en la perspectiva histórica, cultural e institucional para que, en definitiva, se lo rediseñe con fines didácticos (p. 101-102).

Desde la postura Socioepistemológica, en Ramírez et al. (2018) se plantea un esquema teórico - metodológico, para reconstruir los procesos sociales que posibilitan la constitución de un saber, desde su origen (*figura 3*). En este sentido, la humanidad, transita extensos procesos de resignificación permitiendo a sus comunidades configurar saberes matemáticos propios, significados y con valor funcional.

Figura 3. *Modelo teórico para el estudio de la constitución del saber.*



Extraído de Espinoza et al. (2018, p.252).
Nota: *Se reconoce una transversalidad, y la conformación del saber en saber enseñable acorde a las necesidades estructurales del sistema educativo.*

En suma, se propone el estudio de la constitución del saber a través del análisis de su génesis, desarrollo y transversalidad:

- Su génesis: Explora la pregunta ¿cómo el saber llega a ser? Aborda aspectos relativos a su producción y naturaleza, situándose en contextos, intencionalidades y prácticas específicas.
- Su desarrollo: Explora la pregunta ¿cómo el saber es difundido? Aborda aspectos sobre su devenir histórico y sus tránsitos hacia y entre discursos disciplinares y escolares.
- Su transversalidad: Explora la pregunta ¿cómo este saber vive en diversas prácticas? Aborda el uso y desarrollo en prácticas científicas, técnicas, artísticas y cotidianas. (Espinoza *et al.*, 2018, p.253)

Para poder reconocer elementos de la construcción social de un saber, se requirió de una *problematización del saber matemático* como lo plantea la TSME (Cantoral, 2016). Se propone que un camino, es la de historización y dialectización, considerando que esta no es un análisis histórico anecdótico, sino que debe de ser historia crítica que reconozca las epistemologías genéticas del cada saber, y contrastarlas con las dominantes propias en el dME.

En el caso de esta problematización, se implementó un análisis documental de fuentes secundarias de corte social-epistemológico y de artículos académicos específicos de la Matemática Educativa, tanto del *espacio métrico*, pero también de nociones de *medida*. En la búsqueda de la descentración del objeto *espacio métrico* se identificó que este describe espacios en donde se pueden identificar *distancias* entre sus elementos (en un sentido amplio), y que estas nociones de *distancias* están ligadas a nociones de *medida*. Incluso, existe un teorema en textos de Topología y Análisis, que señala que todo *espacio normado* (que admite significados de *medida*), induce un *espacio métrico* (que admite significados de *distancia*. También que este es concebido como una generalización del *espacio euclídeo*. Por estas razones, y considerando la génesis del saber, consideramos de interés lograr un panorama genérico de la constitución de ideas interrelacionadas de *medida-métrica-distancia*, en donde contextos que se reconocen son de naturaleza amplia.

Ejemplos de análisis

En Mari (2003; 2005), observamos que desde un punto de vista de la reflexión epistemológica, la noción de *medida* ha transitado por muchas concepciones. Se reconoce una etapa metafísica, otra representacional y por último una relativista. Solo la última postura reconoce la construcción social que desde la TSME nos interesa, mientras que en el dME sobresalen epistemologías de la *medida* con concepciones metafísicas (en donde se considera que la *medida* tiene una existencia independiente de la persona que está midiendo). Se reconoce que en las actividades que involucran a la *medida*, siempre está presente una racionalidad y una intención de evaluación de alguna *magnitud*. Entendiendo que estas *magnitudes* pueden ser de naturaleza variada, sin restringir nuestra búsqueda a las *unidades de medida* estandarizadas que usualmente aparecen en el dME.

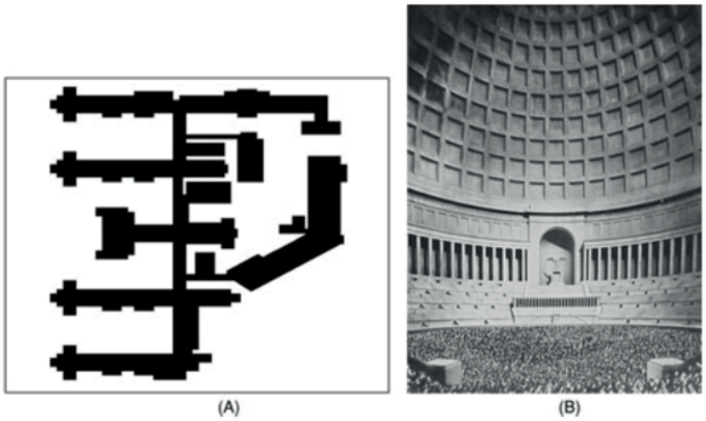
Por otro lado, en (Gyllenbok, 2018; Kula, 1986), vemos que las ideas y prácticas que involucran la *medida* se constituyen desde tiempos ancestrales. Además muestran cómo estas han evolucionado desde las más simples hasta las más complejas divulgadas en la actualidad en escenarios tanto técnicos como populares. También observamos a partir del análisis de estas obras, que estas prácticas de *medida* previas a la amplia difusión de las *unidades de medida* estandarizadas (metro, kilogramo, segundo, etc.), tenían funcionamientos diferenciados y poseían significados sociales emergentes de los propios contextos. Sostenemos que este tipo de epistemologías de prácticas aún siguen presentes en distintos escenarios en la sabiduría humana en general, aunque se excluyan del dME.

Compartiremos a continuación algunos ejemplos que aparecen en Angel et al. (2010). Consideramos que en este artículo, se aprecia una relatividad epistemológica en el uso de la *medida*, incluso dentro de un mismo campo disciplinar (Geografía), que conceptualiza la idea de figura *compacta* según le sea funcional en cada situación. Se muestran diez ideas diferentes (aunque hasta cierto punto coherentes), de lo que significa que una figura sea compacta. Estas caracterizaciones no son absolutas, es decir, no es que una figura sea o no compacta, sino que puede ser más o menos compacta. Por lo tanto, en cada caso se generan *métricas*, específicas que permiten medir la compacidad, volviendo a esta propiedad una *magnitud* cuantificable. No es una única *métrica*, sino que se caracteriza una particular asociada a cada una de las concepciones de lo que se presenta como compacto, expresando una racionalidad específica en cada caso. A continuación, se presentan tres ejemplos de los diez que se muestran.

Un primer ejemplo es la compacidad por profundidad, que se mide con el *índice de profundidad* (depth compactness - depth index) (*figura 4*) (Angel *et al.*, 2010).

> Esta medida naturalmente se puede utilizar, por ejemplo para medir la amenaza relativa que un país puede enfrentar debido a la forma de sus fronteras o de la protección relativa que un bosque puede ofrecer a sus habitantes que necesiten estar alejados de su borde. La propiedad de profundidad de las formas geográficas se centra en la distancia de todas las partes de la forma hasta su periferia. (p.450) [Traducción propia]

Figura 4. *Compacidad.*



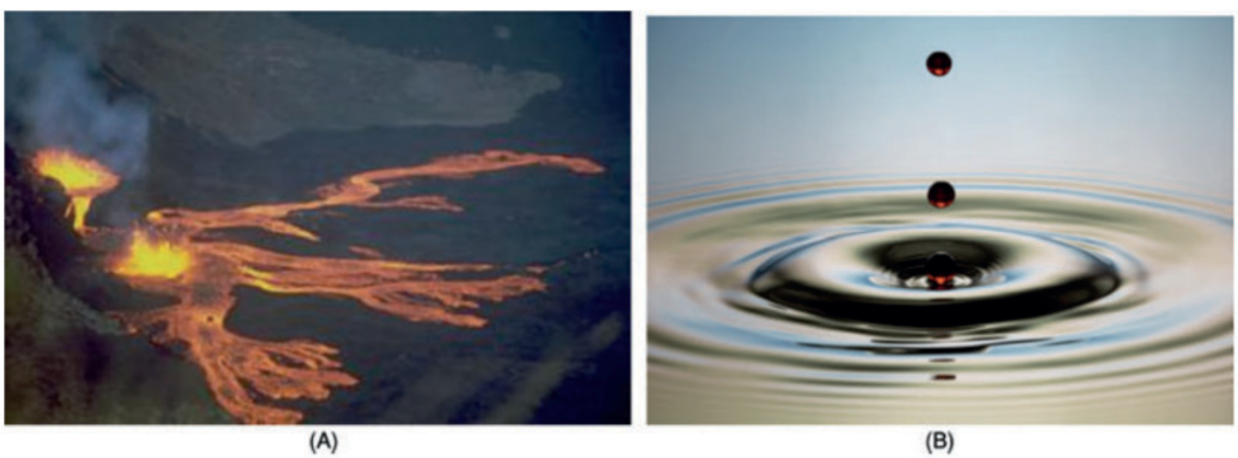
Extraída de Angel et al. (2010).

Nota: *"A) Profundidad Compacidad en un complejo de edificios con habitaciones bien iluminadas (baja). (B) Profundidad compacta en el diseño de Speer de 1936 para el Volkshalle (alta)" (Angel et al., 2010) [Traducción propia].*

Otro ejemplo, es la compacidad por dispersión e *índice de dispersión (*dispersión compactness – dispersión index) (*Figura 5*) (Angel et al., 2010).

> La dispersión es una forma natural de examinar las fronteras en avance de los fenómenos en expansión desde sus epicentros, como pueden ser epidemias, terremotos o divulgación de información. La propiedad de dispersión de una forma geográfica se centra en la medida en que la distancia desde su centro a su perímetro varía en diferentes direcciones. (p.452) [Traducción propia]

Figura 5. *Compacidad por dispersión.*



Extraída de Angel et al. (2010).

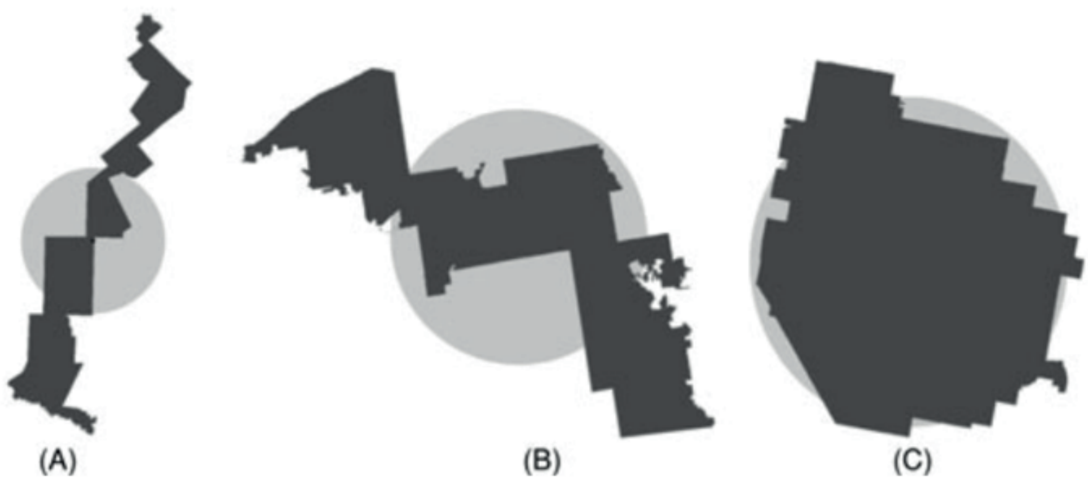
Nota: *"(A) Dispersión Compacta de la lava del Volcán Fernandina, Islas Galápagos, 1978 (bajo). (B) Dispersión Compacidad en una ondulación creada por una gota de agua que cae (alto)" (Angel et al., 2010) [Traducción propia].*

La compacidad por intercambio (exchange compacteness), que se mide con el *índice de Intercambio* ("Exchange Index" = (I_x)), permite determinar qué tan compacta es una figura a partir de un cálculo entre proporciones de áreas. Un hecho documentado, conocido con el término "*Gerrymandering*", implica la manipulación de los límites de distritos electorales, con la intención de acumular o dispersar cierta población que se sabe tiene determinada intención de voto. Esto se ha documentado ampliamente en EE.UU y en otros países (Angel et al., 2010). La alteración intencionada de las formas de las fronteras en algunos casos provoca formas extrañas que tienen valores en este Índice (I_x) muy bajos, por lo que este permite controlar conductas políticas malintencionadas *(Figura 6).*

> Los jueces de la Corte Suprema de los EE. UU., Cuando discuten sobre la manipulación, a menudo aluden a su aspecto de intercambio de votantes: "Un distrito que se extiende para apoderarse de comunidades minoritarias pequeñas y aparentemente aisladas no es razonablemente compacto" (Corte Suprema de EE. UU. 2006a); "Protuberancias de formas muy específicas que se extienden para incluir a los demócratas, o fisuras que se retuercen para esquivar republicanos" (Tribunal Supremo de los Estados Unidos, 2004); “Incorporó múltiples, pequeños y lejanos núcleos de población minoritaria” (Tribunal Supremo de EE. UU. 2006b); sus “muchos pasillos estrechos, alas o dedos ... se extienden para encerrar a los votantes negros, mientras que excluyen a los residentes hispanos cercanos” (Tribunal Supremo de los Estados Unidos, 1996). (Angel et al., 2010, p.7) [Traducción propia].

Calcular el Índice de Intercambio (I_x) de un distrito implica: conocer el área Á de la figura que representa al distrito, dibujar un círculo con la misma área Á sobre el centro de gravedad de este, calcular el área O_s de superposición de la figura con este círculo y determinar el índice según el siguiente cociente: $I_x = \frac{O_s}{Á}$

Figura 6. *Exchange Idex.*



Extraída de Angel et al. (2010).

Nota: *Distrito de Texas, índice bajo (0.3), Ohio con índice medio (0.5) y Arizona con índice alto (0.9).*

Lo peculiar de esto, es que hay una intencionalidad explicita de producir *métricas* que midan determinados aspectos de la forma de una figura plana, y que puedan servir, al interactuar con otras *métricas*, de sistema de contralor. En Angel et al. (2010) se puede rastrear este fenómeno “*Gerrymandering”*, e incluso ver que se han producido leyes que lo controlan. En este último ejemplo, la *magnitud* que se mide es *compacidad,* siendo esta interpretada en distritos de ciudades, que se interpretan matemáticamente como figuras planas. Estas *medidas* permiten ver una *distancia* en términos de *compacidad*, identificando qué tan lejos en cuanto a lo compacto está un distrito de otro, o cómo alterar la forma de alguno para ajustar el índice a lo establecido como correcto.

Resultados

A partir del análisis documental de fuentes del campo disciplinar de la Matemática Educativa y de otros documentos de corte sociales y epistemológicos, que permitieron historizar y dialectizar según las dimensiones del saber de la TSME, reconstruimos que los *espacios métricos* son aquellos en donde se pueden pensar *distancias* entre sus elementos, entendiendo esta idea de *distancia* en un sentido amplio. Con esta descentración del objeto, planteamos que la idea de *espacio métrico* al conformarse como saber, relaciona nociones de *medida, métrica y distancia*. Las referencias que citamos en la introducción confirmaban este punto, ya que resaltaban la importancia de la constitución del *espacio métrico* desde la tesis doctoral de Fréchet en 1906, como una generalización de la *métrica euclídea*, que posteriormente concluiría en la constitución de la Topología.

Hemos identificado contextos de la actividad humana, en donde existen potenciales resignificaciones del objeto *espacio métrico,* que evidencian la construcción social de este saber. Por lo tanto, observamos, que este puede admitir una multiplicidad de marcos de referencia en donde puede emerger con valor funcional. Al interpretar en el objeto *espacio métrico* significados de *medida* y *distancia,* ubicamos algunos de los procesos históricos por los que han transitado estos saberes para conformarse funcionales en distintos contextos. Por otro lado, estos saberes son abordados por el discurso Matemático Escolar desde una centración en objetos con un predominio de las formalidades de las estructuras matemáticas, excluyendo los contextos antes señalados.

Conclusiones

Estos ejemplos anteriores (mostrados en la sección "ejemplo de análisis"), nos permiten mostrar globalmente, alguno de nuestros avances en la investigación y el interés por estudiar la dimensión social de la *métrica*, es decir, las resignificaciones que puede tomar el objeto, en escenarios particulares. Estos expresan funcionalidades, aceptando *una racionalidad contextualizada* y un *relativismo epistemológico*, en lo que nosotros identificamos como un saber sabio-técnico. También estamos problematizando *métricas* en escenarios populares y matemáticos puros, que expresen distintas características epistemológicas y valores de usos, además que midan *magnitudes* (como en este caso que se mide la *compacidad*) que no sean las típicas del dME.

Consideramos que los resultados obtenidos podrían involucrarse en un rediseño del dME, tanto para la enseñanza del *espacio métrico* a nivel universitario, y de manera transversal en planteamientos que involucren *medida* (tema transversal a varias ramas de la matemática y niveles educativos). En estos, se podrían incorporar significados sociales de estos saberes, para así explorar qué resultados se obtienen a nivel de aprendizaje de los estudiantes. Además, al identificar el nexo entre los *espacios métricos* y la Topología, los significados reconocidos podrían permitir una introducción no impuesta de nociones topológicas, o del *espacio topológico*. El reconocimiento de escenarios en donde el saber se resignifica podría ser de interés para la formación del profesorado de matemática, que, aportando a los cursos de Topología que reciben, un sentido de partida asociado a las métricas con valor de uso. Esto podría promover la idea de que a pesar de que la Topología es una rama de la matemática con altos niveles de abstracción, su construcción social es antecedida y acompañada por determinadas prácticas que permiten significarla.

Referencias

Angel, S., Parent, J., & Civco, D. L. (2010). Ten compactness properties of circles: Measuring shape in geography. *Canadian Geographer*, *54(4)*, 441–461. https://doi.org/10.1111/j.1541-0064.2009.00304.x.

Bastán, M., Cuenya, H., & Fioritti, G. (2006). Un análisis histórico-epistemológico de la topología y su vinculación con el saber enseñado en la formación de profesores de matemática. *Revista de Educación Matemática*, *21*, 1–15.

Cantoral, R. (2016). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre la construcción social del conocimiento*. Editorial Gedisa.

Cordero, F., Gómez, K., Silva-Crocci, H. y Soto, D. (2015). *El discurso matemático escolar: la adherencia, la exclusión y la opacidad*. Editorial Gedisa.

Espinoza, L. (2009*). Una evolución de la analiticidad de las funciones en el siglo XIX. Un estudio socioepistemológico*. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Istituto Politécnico Nacional.

Farfán, R.-M., Cantoral, R. (1990). Elementos Metodológicos para la reconstrucción de una Didáctica del Análisis en el Nivel Superior. *Cuadernos de Investigación*, *13*, pp. 19-26.

Gyllenbok, J. (2018). *Encyclopaedia of Historical Metrology, Weights, and Measures*. Springer International Publishing. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/978-3-319-57598-8.

Kelley. (1955). *General Topology*. Springer.

Kula, W. (1986). *Measures and Men*. Princeton University Press. https://doi.org/10.1515/9781400857739.

Mari, L. (2005). The problem of foundations of measurement. *Measurement: Journal of the International Measurement Confederation*, *38(4),* 259–266. https://doi.org/10.1016/j.measurement.2005.09.006.

Mari, L. (2003). Epistemology of measurement*. Measurement: Journal of the International Measurement Confederation*, *34*, 17–30. https://doi.org/10.1016/S0263-2241(03)00016-2.

Márquez-García, G. (2018). *Una problematización del concepto de Topología en los inicios de la teoría de conjuntos abstractos de Fréchet*. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Mendelson, B. (1990). *Introduction to topology*. Dover publications. https://doi.org/10.2307/3611741.

Munkres (2002). *Topologia.* Pearsons Eduación.

Ramírez, L. E., Gómez, A. V., y Zúñiga, D. V. (2018). Geometría en la práctica cotidiana: La medición de distancias inaccesibles en una obra del siglo XVI. *Revista Latinoamericana de Investigacion En Matematica Educativa*, *21(3)*, 247–274. https://doi.org/10.12802/relime.18.2131.

Soto. (2010). *El discurso matemático escolar y la exclusión. Una visión socioepistemológica.* Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

VOL 34, NÚMERO 2, AÑO 2021

ANÁLISIS HISTÓRICO–EPISTEMOLÓGICO DE “DE ÆQVATIONUM RECOGNITIONE ET EMENDATIONE TRACTATUS DUO” DE VIÈTE

HISTORICAL-EPISTEMOLOGICAL ANALYSIS OF VIÈTE'S "DE ÆQVATIONUM RECOGNITIONE ET EMENDATIONE TRACTATUS DUO"

Rubén Abraham Moreno Segura, Ricardo Arnoldo Cantoral Uriza
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituo Politécnico Nacional. (México)abr am.moreno@cinvestav.mx, rcantor@cinvestav.mx

Resumen
La relación entre los coeficientes de un polinomio y las soluciones de la ecuación que lo permiten factorizar fueron estudiadas por François Viète. Su aporte fue tan significativo que en la matemática escolar se estudian sus fórmulas para factorizar ecuaciones de segundo grado. Empero, muchas veces éstas se quedan únicamente a nivel mecanicista y carecen de significados. Por lo que en esta investigación se presentan los resultados preliminares de un estudio histórico – epistemológico desde una perspectiva socioepistemológica de una de sus obras. Encontrando que las prácticas que lleva a cabo son Comparar, Agrupar, Equivaler.

Palabras clave: estudio histórico – epistemológico, Socioepistemología, François Viète

Abstract
The relationship between the coefficients of the polynomial and the solutions of the equation that allow it to be factored was studied by François Viète. His contribution was so significant that his formulas for factoring second degree equations are studied in school mathematics. However, many times these formulas remain only at a mechanistic level and are meaningless. Therefore, this research presents the preliminary results of a historical-epistemological study from a socio-epistemological perspective of one of his works. Finding that the practices he carries out are: Comparing, Grouping, and Being equivalent.

Key words: historical - epistemological study, socio-epistemology, François Viète

Introducción

En la enseñanza de la factorización de polinomios se encuentran diversos métodos, uno de los más comunes para los de segundo grado es a través de las fórmulas de Viète o Cardano – Viète. Estas establecen la relación entre las soluciones de la ecuación que permiten factorizar y los coeficientes del polinomio, por medio de la suma y la multiplicación de los dos valores que satisfacen la ecuación. Sin embargo, muchas veces la utilización de dichas fórmulas en la escuela recae únicamente en un tratamiento mecanicista y carente de significados, así como un desconocimiento de las de tercer grado.

En la literatura hay propuestas de "geometrizar" los polinomios de grado dos, de manera tal que con ayuda de material didáctico o algún software se pueda factorizar de manera más sencilla (Hourcade *et al.*, 2018; Wagner, 2014). Las propuestas recurren a la idea de área, pero no enfatizan la relación entre los coeficientes y las soluciones de la ecuación.

Aquellas investigaciones que sí enfatizan la relación entre los coeficientes y las soluciones de la ecuación se centran sólo en un grado, es decir, estudian únicamente las de segundo grado (Cruz, 2008) o las de tercer grado (Mogollón, 2012). Para el caso de las ecuaciones cuadráticas Cruz (2008) menciona que el introducir la diferencia entre las dos soluciones, además de la suma y el producto de las soluciones de la ecuación, permite significar y resignificar la factorización de ecuaciones de segundo grado desde contextos numéricos, geométricos y algebraicos. Mientras que para las ecuaciones cúbicas Mogollón (2012) utiliza como recurso la papiroflexia en la resolución de ecuaciones cúbicas, lo cual permite mostrar a los estudiantes de educación media un nuevo escenario donde resolver este tipo de problemas.

Estas propuestas además de innovadoras brindan una panorámica de cómo abordar este conocimiento. Empero, escolarmente este tipo de relaciones entre las soluciones de la ecuación y los coeficientes siguen quedando en un nivel operativo sin poner en juego las prácticas necesarias para llevar a cabo la resolución desde una evolución pragmática. Por lo que el objetivo de la presente investigación, que sigue en curso, es realizar un estudio histórico – epistemológico de la obra *De Æqvationum Recognitione Et Emendatione Tractatus Duo* ("Dos tratados sobre el entendimiento y la enmienda de ecuaciones", traducción propia). Dicho escrito se encuentra dentro de la *Ópera Mathematica* de Viéte (1646). Para realizarlo, la investigación se posiciona desde una visión socioepistemológica con el fin de identificar las prácticas llevadas a cabo por el autor al trabajar con las soluciones de ecuaciones de grado dos y tres.

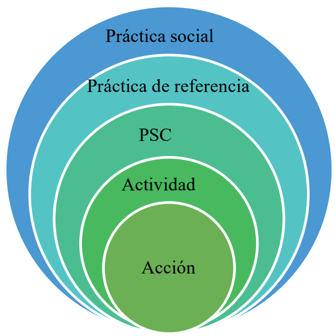
En este texto Viète presentó métodos para resolver ecuaciones de segundo, tercer y cuarto grado, principalmente. Aunque logró generalizar algunos métodos para encontrar las raíces de ecuaciones de grados superiores. Además, estaba al tanto de la relación entre las raíces positivas de una ecuación y los coeficientes de las distintas potencias de la incógnita. Con el trabajo que realizó en la *Ópera Mathematica*, particularmente con *De Æqvationum Recognitione Et Emendatione Tractatus Duo* Viète logró conformar una teoría de ecuaciones que lo convirtió en parteaguas en el trabajo del reconocimiento de la relación entre las raíces de las ecuaciones y sus coeficientes (Ríos, 2020), razón por la cual se escogió dicha obra para su análisis. Por lo tanto, en este escrito se presenta la parte teórico – metodológica que estructura y guía la investigación, una síntesis de Viète y su obra que da pie a una presentación de resultados preliminares, para presentar posteriormente algunas reflexiones entorno lo presentado, concluyendo con las referencias utilizadas.

Teórico – Metodológico

La presente investigación se enmarca en la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME). La TSME es una teoría dentro de la Matemática Educativa que establece como objeto de estudio la construcción social del conocimiento matemático y su difusión institucional considerando la complejidad de la naturaleza del *saber* (Cantoral, 2016). Esto es, la TSME considera que los conocimientos matemáticos, aún aquellos considerados "avanzados" son producto de prácticas humanas, dándole así una naturaleza social al conocimiento matemático. Además, la TSME se preocupa por los mecanismos de institucionalización que actúan sobre el *saber* a través de la organización social de su enseñanza, aprendizaje e investigación (Cantoral, 2016). Considerando el *saber* como el conocimiento puesto en uso.

Cantoral (2016) menciona que se pasa del conocimiento al saber mediante *acciones* que realiza un sujeto (o sujetos) sobre los objetos u otras acciones; posteriormente por *actividades* que radica en una coordinación activa e intencionada de las acciones; dichas *actividades* una vez institucionalizadas se organizan para dar pie a una *práctica socialmente compartida* (PSC). Estas prácticas son reguladas por *prácticas de referencia*, que a su vez se ven reguladas por la *práctica social* (Figura 1).

Figura 1. *Modelo de anidación de prácticas.*



Tomado de Cantoral (2019, p.3).

Para identificar las *acciones* y *actividades* en la obra elegida de Viète se siguen las ideas presentadas en (Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini, 2015) con el análisis refinado de las acciones usando las preguntas *¿Qué hace?* para evidenciar la acción directa del sujeto con el objeto; *¿Cómo lo hace?* para identificar las herramientas que le permiten hacer eso que hace; y *¿Para qué lo hace?* buscando reconocer la intencionalidad de sus acciones. Por lo que el análisis de esta obra se centra únicamente en los primeros dos niveles de "abajo hacia arriba" del modelo de anidación de prácticas.

Sobre Viète y su obra

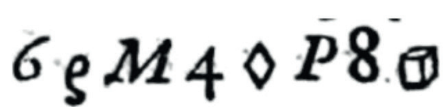
François Viète (1540 – 1603) fue un abogado francés interesado en la matemática. Realizó grandes aportes a la trigonometría, geometría, astronomía y álgebra. Siendo esta última el área en el que se está interesada en esta investigación. Una de sus obras más significativas es *Opera Mathematica* publicada en 1646 por Frans van Schooten quien recopiló los textos de Viète en un solo documento, empero no incluyó los dos trabajos sobre trigonometría publicados en 1579, ni el último borrador sobre astronomía (Oaks, 2018).

Dentro de *Opera Mathematica* se encuentras obras tales como *Isogage in Artem Analyticam* (Introducción al arte analítico) o *Zeteticorum libri quinque* (Cinco libros de zetética). Dichos escritos establecen ideas fundamentales que posteriormente Viète desarrolla con mayor profundidad en *De Æquation recognitione, & Emendatione tractatus duo* (Dos tratados sobre la comprensión y modificación de ecuaciones).

Entre las ideas clave para esto se encuentra el paso de una *logística numerosa* a una *logística speciosa*. Es decir, Viète establece un tránsito entre los procedimientos y estrategias que los analistas de aquella época, quienes ejercían sus talentos en números únicamente, a comparar magnitudes entre sí, relacionándola con la ley de los términos homogéneos, la que es la que permite magnitudes de igual dimensión (Guzmán, 1989). En otras palabras, el trabajo de Viète permite el paso de un estudio de las ecuaciones a una teoría de ecuaciones gracias al uso de magnitudes.

Esta idea de “magnitud” le adjudica una doble naturaleza con respecto a su tamaño: las magnitudes tienen medidas no aritméticas en comparación con otras magnitudes que se muestran en la razón y la proporción, y también pueden adoptar medidas numéricas (Oaks, 2018). Los géneros que usa para dichas magnitudes son latis, planum, y solidum para expresiones o términos lineales, cuadráticos y cúbicos respectivamente. Para las géneros superiores a tres Viète utiliza una combinación de los primeros tres vocablos; por ejemplo, para una magnitud de grado cinco sería nombrada planum–solidum.
Otro aporte fundamental en la obra de Viète fue el uso de una notación que le permitiera trabajar con las magnitudes, así como con las cantidades conocidas y desconocidas de forma práctica. Para referirse a cantidades desconocidas, Viète utiliza vocales, A y E principalmente; y consonantes para las cantidades conocidas, B, D y Z preferentemente. Esto se diferencia de otras notaciones de la época en la que había símbolos iconográficos. Por ejemplo, Borrel (1559) para escribir la expresión “$6x - 4x^2 + 8x^3$” es como se muestra en la figura 2.

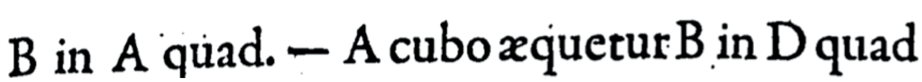
Figura 2. *Expresión algebraica en la Obra de Borrel.*



Tomado de Borrel (1559).

Todos los números con los que opera son magnitudes geométricas que involucran cantidades naturales, racionales y/o irracionales positivos mayores a cero. También cabe destacar que los términos por si solos representan un valor, y no una clase, ya que por ejemplo, Viète escribe “A *cubus*” en lugar de “1A *cubus*”. Por otro lado, la preposición *in* alude a una multiplicación, por mencionar un caso podría ser en la figura 3. Para el caso de los exponentes, Viète utiliza los términos *quadratum / quad* para los términos cuadráticos, y *cubus / cubo* para los términos cúbicos (Figura 3). Mientras que para los exponentes mayores a tres usa combinaciones, para el caso de la potencia siete sería *quad.-quad.-cubus*.

Figura 3. *Expresión algebraica donde usa los términos “quad”/”cubo” en la Obra de Viète.*


B in A quad. — A cubo æquetur B in D quad

Tomado de Opera Mathematica (Viète, 1646, p. 89). En notación actual la expresión es $BA^2 - A^3 = BD^2$.

Dos tratados sobre la comprensión y modificación de ecuaciones

La idea principal de Viète a lo largo de todo el texto es encontrar un método de solución a aquellas ecuaciones que no pueden ser tratadas por los métodos establecidos en los Cinco Libros de Zetética. Aun así, el escrito se compone principalmente de dos partes: el primer y el segundo tratado.

El primer tratado completa el amplio principio tratado de forma general sobre la resolución numérica de las potencias. Esto debido a que las ecuaciones necesitan con frecuencia una preparación antes de poder ser resueltas. Situaciones de esto podría ser cuando las potencias se restan de términos homogéneos, cuando las potencias tienen afecciones positivas y negativas y las negativas superan a las positivas y, finalmente, cuando las ecuaciones aparecen con fracciones o irracionales. Dichas situaciones no presentan un obstáculo al momento de resolverse en geometría. Pero la multiplicidad de afectos es un obstáculo, y cuanto mayor es la potencia y el orden de un afecto, más probable es que aparezca una fracción o un irracional en la solución de un problema. De ahí la necesidad de realizar una teoría de ecuaciones que permita encontrar una solución satisfactoria a partir de la cual desarrollará un teorema para la construcción y explicación de cada una.

Para poder resolver las ecuaciones Viète se valía de la idea de una ecuación como proporción o de una proporción como ecuación, la cual desarrolló con mayor profundidad en los Cinco Libros de Zetética. Un ejemplo de ello, pero en los Dos tratados sobre la comprensión y modificación de ecuaciones puede ser el Teorema I del capítulo III del primer tratado (Figura 4).

Figura 4. *Primer tratado. Capítulo III. Teorema I.*

THEOREMA I.

ΚΑΤΑΦΑΤΙΚΗΣ.

Si A quad. + B in A, æquetur Z quad: ſunt tres proportionales radices, quarum media eſt Z, differentia verò extremarum B; & ſit A minor extrema.

Tomado de Opera Mathématica (Viète, 1646, p. 85).

La traducción sería:
Si $A^2 + BA = Z^2$ *hay tres proporcionales cuya media es Z y la diferencia entre los extremos es B, por lo que A es el extremo menor.*

La demostración sería:
Sea, pues, Z la media de las tres proporciones y B la diferencia entre los extremos. Hay que encontrar el extremo menor.
Sea A. El mayor, entonces, será $A + b$. *Multipliquemos el mayor por el menor, haciendo* $A^2 + AB$. *Como son proporcionales, el producto de los extremos es igual al cuadrado de la media. Por tanto,* $A^2 + AB = Z^2$. *Que es lo que se ha dicho.*

Un caso particular podría ser la ecuación $x^2 + 10x = 144$. Nótese que $A \coloneqq x; B \coloneqq 10; Z \coloneqq 14$. Entonces x es la más pequeña de las tres proporcionales, 12 es la media y la mayor es $x + 10$. Por lo que se debe cumplir entonces

$$\frac{x}{12} = \frac{12}{x+10}$$

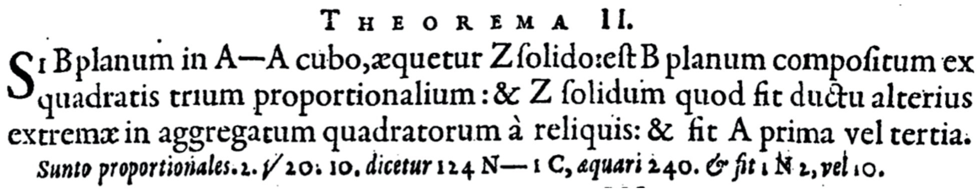
De lo que se sigue que $x = 8$, para cumplir la proporción. Siendo las tres proporcionales 8, 12 y 18. Se puede seguir que 8 es la solución positiva a la ecuación cuadrática; empero, para el caso de la solución negativa, que es $x = -18$, Viète no la considera en este caso ya que se restringe únicamente a soluciones reales positivas mayores a cero debido a la racionalidad del trabajo con magnitudes y proporciones y el tipo de problemas que él intentaba resolver.

Dada una ecuación cuadrática, es posible reconstruir la relación entre sus raíces y así tener una manera de encontrarlas. En relación con eso, la ecuación se resuelve por medio de la relación entre las raíces y su media proporcional, siendo esta ultima la raíz cuadrada del término independiente (Ríos, 2020). De este ejemplo se puede reconocer lo que actualmente se conoce como "las fórmulas de Viète" o "las fórmulas de Cardano – Viète" en la matemática escolar. Estas establecen la relación entre las soluciones de la ecuación que permiten factorizar y los coeficientes del polinomio, por medio de la suma y la multiplicación de los dos valores que satisfacen la ecuación. En Ríos (2020) al respecto de esta forma de resolver las ecuaciones de segundo grado menciona:

De la forma del problema, si a y b son las dos raíces que se buscan, entonces: $a + b = s$ y $ab = p$, de donde, $a(a - s) = p \ \rightarrow a2 \ - sa = p$, así,dada la relación entre dos raíces se construye una ecuación que las conserva y cuyos coeficientes son precisamente esas relaciones (p. 81).

Viète, debido a la estrategia de trabajar con la ecuación como proporción o la proporción como ecuación no presentaba las soluciones negativas de las ecuaciones. Es decir, debido a que para los matemáticos de época al no existir una unidad de longitud universal, no hay una medida numérica natural para las líneas, los planos y los cuerpos que pueda tener un valor negativo. Un caso de ecuación cúbica en el que se "pierde" una raíz por ser negativa puede ser el teorema II del capítulo XVIII (figura 5).

Figura 5. *Primer tratado. Capítulo XVIII. Teorema II.*



THEOREMA II.

Si B planum in A—A cubo, æquetur Z solido: est B planum compositum ex quadratis trium proportionalium: & Z solidum quod fit ductu alterius extremæ in aggregatum quadratorum à reliquis: & fit A prima vel tertia.

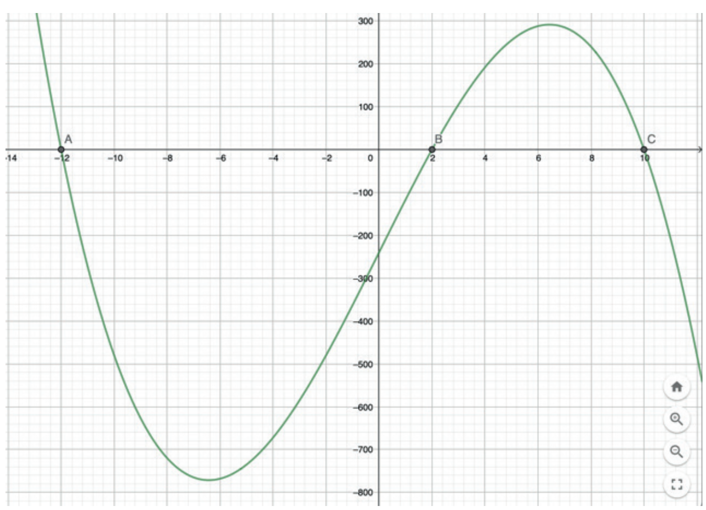
Sunto proportionales. 2. √20. 10. *dicetur* 124 N—1 C, *æquari* 240. *& fit* 1 N 2, *vel* 10.

Tomado de Opera Mathématica (Viète, 1646, p. 111).

La traducción sería *Si* $B^p A - A^3 = Z^s$ *donde* B^p *es la suma de los cuadrados de tres proporcionales y* Z^s *es el producto de uno de los extremos y la suma de los cuadrados de los otros dos, lo que hace que A sea el primero o el tercero.*

El ejemplo numérico que presenta Viète en este caso $124x - x^3 = 240$. Partiendo de las tres proporcionales $2, \sqrt{20}, 10$. De donde se sigue que $A = x; B^p = 124; Z^s = 240$ (figura 6). Por lo que $x = 2$ o $x = 10$. Siendo el menor o el mayor de las tres proporcionales respectivamente.

Figura 6. *Ejemplo gráfico de la solución a la ecuación* $124x - x^3 = 240$.



Elaboración propia.

Como se puede apreciar en la figura 7, recreando la ecuación en términos de una función polinómica de grado tres se observan tres raíces: las dos reconocidas por Viète ($x_2 = 2; x_3 = 10$), sin embargo la raíz $x_1 = -12$ no la menciona en algún momento. Para los polinomios que cumplan las características señaladas en el teorema II del capítulo XVIII del primer tratado podemos llegar a la siguiente generalización: *Sean* $a, c \in R^+$ *y* $b = \sqrt{ac}$. *Si* $(a^2 + b^2 + c^2)x - x^3 = a(b^2 + c^2)$, *entonces las soluciones a la ecuación son* $x_1 = -(a + c); x_2 = a; x_3 = c$.

Una manera en la que Viète "recupera" las raíces o soluciones negativas las trabaja en el capítulo XIX *Æqualitatum contradicentium constitutiva* (Los componentes de las ecuaciones contradictorias) para las ecuaciones de grado par.

En los capítulos XX *Æqualitum inversarum constitutiva inversarum denique systatica sunt hœc* (Los componentes de las ecuaciones inversas) y XXI *Alia rursus æqualitatum inversarum constitutiva* (Otra construcción de ecuaciones inversas) para aquellas de grado impar. Donde a través de una transformación de la ecuación que no afectara la racionalidad de las raíces lograba rescatar dichos valores que "se perdían" al ser soluciones negativas. Dadas las condiciones en las que se desarrolló la obra y el tipo de problemas que pretendía resolver (astronómicos, criptográficos, comercio) las raíces negativas no eran soluciones que fueran efectivas en esos contextos. Pero, el reconocer que al ser una ecuación cuadrática o cúbica tiene distintas posibles soluciones reales el recurrir a estas formas de "rescatar" el valor negativo es una forma ingeniosa. Matemáticamente hablando, esto es posible a la reflexión de una función respecto al eje y en el plano cartesiano. Teniendo, por ejemplo, la función $f(x) = x^2 + bx + c$, evaluando en $f(-x)$ se logra dicha reflexión. Si bien, no se puede especular si este fue el pensamiento de Viète, es una estrategia de resolución poderosa.

El segundo tratado de Viète en *Æqvationum recognitione et emendatione tractatus duo* presenta el análisis numérico sobre cinco métodos de preparación para encontrar las soluciones numéricas de ecuaciones que por métodos usuales o ya presentados en su zétetica resultan complejos. Esto es, en el segundo tratado Viète presenta formas de trabajar con los defectos e impedimentos de las ecuaciones para resolverlas. Los métodos que hace alusión son:

1. *Expurgatio per uncias* (purgando por fracciones).
2. *Transmutatio Πρϖτον−εχατον* (Primera–Última transformación).
3. *Anastrophe* (Anastrofe).
4. *Isomœria* (Isomería).
5. *Climactica Paraplerosis* (Cierre de la potencia).

En torno a la primera forma de enmienda de ecuaciones es, con mucho, el remedio más seguro y más fácilmente disponible para una multiplicidad de afecciones. Es una especie de transformación por adición o sustracción. Mediante ella, las ecuaciones con una afección en alguno de los términos, que complique su solución de acuerdo a lo establecido en la zetetica, pueden liberarse de esta afección sin destruir la racionalidad de los números. En los cuadráticos es cuestión de sumar o restar la mitad del coeficiente de la afección a o de la raíz, en los cúbicos la tercera parte, y así sucesivamente dependiendo de que grado sea la ecuación. Acerca de la primera y última transformación es acerca de las ecuaciones en las que la potencia tiene un término homogéneo con un afecto "muy fuerte". Estas ecuaciones se pueden enmendar mediante una proporción con una relación implícita, i.e., dividiendo el término homogéneo de comparación por la raíz desconocida.

De esta surge otra raíz desconocida en términos de la cual la ecuación original se replantea y se establece una nueva. Con este método las afecciones positivas se convierten en negativas, y viceversa sin destruir la racionalidad de los números. Este método en ocasiones es conveniente en casos donde se trabaja con irracionales. En otro orden de ideas, la isomería es una especie de transformación por multiplicación llevada a cabo con el fin de liberar ecuaciones de las fracciones por las cuales pueden ser afectadas. Las fracciones primero son reducidas a un denominador común por reglas de la logística. El objetivo principal de la isomería es multiplicar o dividir, según sea el caso, la potencia de una ecuación dada y sus términos homogéneos de afecto y comparación por el mismo término o una de sus potencias. En cuanto a la quinta forma para tratar con ecuaciones, la *Symmetrica climactismus*, es una especia de elevación de la potencia de la ecuación. Se lleva a cabo si alguno de los términos de la ecuación dada es irracional. Se eleva a la potencia que sea necesaria (cuadrado, cubo, bi-cuadrada, …) las veces que sea necesario hasta que todos los irracionales desaparezcan sin estropear la ecuación, ya que los productos de iguales son iguales.

Resultados preliminares

En cuanto al análisis de prácticas tomando las preguntas *¿Qué hace?*, *¿Cómo hace?* y *¿Para qué lo hace?* como guía para inferir las prácticas en lo estudiado de la obra de Viète se puede decir lo siguiente (Tabla 1):

Tabla 1. *Análisis de prácticas en Æquvationum recognitione tractaus duo de François Viète de 1646.*

Teorema y procedimiento de resolución / demostración.	Análisis en términos de prácticas.	
<u>Teorema I. Capítulo I. Tratado II</u>: Si tenemos $A^2+2BA=Z^p$ podemos ver que el término lineal tiene una afección positiva, la cuál se produjó por la adición de la mitad del coeficiente del término lineal, tal como exige la naturaleza del cuadrado. Para superar la modificación Viète propone purgar a la mitad dicho coeficiente.	Teniendo una ecuación de la forma $A^2+2BA=Z^p$, la cual no es posible resolver debido a la afección provocada por el 2 en el coeficiente del término lineal.	
Para ello es necesario que A+B=E	¿Qué hace?	Para poder superar esta afección se **comparan** cantidades conocidas (B) con desconocidas (A y E): $A+B=E$.
Si sustituimos en la ecuación original *A* por *E–B* tenemos lo siguiente $A^2+2BA=Z^p(E-B)^2+2B(E-B)=Z^p$	¿Cómo hace?	Al sustituir se **agrupa** la sustitución propuesta en la que de manera conveniente para poder mantener las relaciones establecidas entre las cantidades desconocidas y conocidas de manera tal que la ecuación siga respetando la ley de los términos homogéneos.
Teniendo finalmente $E^2=Z^p+B^2$	¿Para qué lo hace?	Finalmente se **equivale**, *i.e.*, se mantiene una relación de igualdad en valor o cantidad de una magnitud con otra(s) que dé solución al problema original usando proporciones.
<u>Teorema I. Capítulo II. Tratado II</u>: Sea $A^3-B^pA=Z^s$. Esta ecuación no puede ser resuelta ya que Z^s es una potencia con una afección negativa, y en el arte no se contemplan este tipo de situaciones con negativos.	Si se trabaja con una ecuación de la forma $A^3-B^pA=Z^s$, la forma de ecuación requiere una enmienda para poder encontrar sus raíces.	
Así que Viète sugiere que se tome $\frac{Z^s}{A}=E^p$, de lo que se sigue que $A=\frac{Z^s}{E^p}$.	¿Qué hace?	Al proponer $A=\frac{Z^s}{E^p}$ está **comparando** nuevamente cantidades desconocidas (A y E^p) con conocidas (Z^s).
Sustituyendo tenemos $\frac{Z^{sss}}{E^{ppp}}-\frac{B^pZ^s}{E^p}=Z^s$.	¿Cómo hace?	Al sustituir se produce una **agrupación** de las cantidades desconocidas y conocidas de manera adecuada tal que siga manteniendo la racionalidad de las soluciones.
Multiplicando todo por E^{ppp} se obtiene $Z^{sss}-B^pZ^sE^{pp}=Z^sE^{ppp}$. Dividiendo por Z^s y despejando se llega a $E^{ppp}+B^pE^{pp}=Z^{ss}$. Reescribiendo $(E^p)^3+B^p(E^p)^2=(Z^s)^2$.	¿Para qué lo hace?	Al multiplicar y dividir por magnitudes apropiadas se transforma la ecuación en otra esté dentro del alcance de los métodos conocidos por Viète y le permita llegar a una **equivalencia** y solucionar la ecuación original; esto es, se propone una ecuación nueva para resolverla en términos de proporciones.

Traducción de los teoremas y elaboración propia.

Este análisis profundiza el hecho por Ríos (2020). El ejemplo que muestra de su análisis es del teorema *Si* $A^2 + BA = Z^2$ *hay tres proporcionales cuya media es Z y la diferencia entre los extremos es B, por lo que A es el extremo menor.* La autora menciona lo siguiente:

> Cada una de las relaciones, la suma y el producto provienen de una comparación. En $x + y = S$, trabajar con $y = S - x$, devienen de otra comparación, eligiendo una de las variables. Al sustituir $y = S - x$ en $xy = P$, las relaciones se agrupan, y lo que hace posible dicha agrupación es lo que Viète llama "Ley de los términos homogéneos", términos homogéneos se comparan con términos homogéneos. Finalmente, al encontrar $x^2 + (-S)x + P = 0$, se tiene una relación común a las dos relaciones iniciales, es decir, una equivalencia (p. 108).

Concordando con las mismas prácticas encontradas. Teniendo así una propuesta del modelo de anidación de prácticas propuesto por Cantoral (2013) respecto a *Æquvationum recognitione tractaus duo* de François Viète de 1646 (figura 7).

Figura 7. *Caracterización de las prácticas identificadas en Æquvationum Recognitione tractaus duo de François Viète de 1646.*

Elaboración propia.

Reflexiones finales

El estudio de obras originales dentro de la TSME permite problematizar el saber desde su génesis, lo cual permite identificar y rescatar aquellos significados, usos y prácticas que se han opacado y soslayado. Esta investigación que sigue en curso ha permitido tener un primer acercamiento a las prácticas llevadas a cabo en un texto original del siglo XVII sobre las soluciones de ecuaciones cuadráticas y cúbicas. La particularidad de este texto es el paso de la *logística numerosa* a una *logística speciosa*. Es decir, el paso a una generalización del trabajo algebraico con ecuaciones muy similar al trabajo actual. Además de lo potente de sus herramientas y procedimientos para solucionar ecuaciones, destacando la idea de proporción como ecuación o de ecuación como proporción. Viète sin duda es un referente en el trabajo en álgebra y el desarrollo de ésta, tan así que Descartes lo estudió y fue un referente para su estudio de la relación entre el álgebra y la geometría (Katz, 2009).

Las formas en las que Viète presenta sus teoremas y las formas de resolución de las ecuaciones podrían ayudar significar y resignificar la relación entre los coeficientes de un polinomio y las soluciones de la ecuación que lo permiten factorizar apoyados de las prácticas identificadas que son *comparar*, *agrupar* y *equivaler*.

Referencias

Borrel, J. (1559). *Logistica*. Lugduni: Apud Gulielmum Rovillium.

Cantoral R. (2019) Socioepistemology in Mathematics Education. In: Lerman S. (eds) Encyclopedia of Mathematics Education. Springer, Cham. doi: 10.1007/978-3-319-77487-9_100041-1.

Cantoral, R. (2016). *Teoría socioepistemológica de la matemática educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento (2a ed.).* Editorial Gedisa SA, Barcelona.

Cantoral, R. (2013). *Teoría socioepistemológica de la matemática educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento (1a ed.).* Editorial Gedisa SA, Barcelona.

Cantoral, R., Montiel, G. y Reyes-Gasperini, D. (2015). Análisis del discurso Matemático Escolar en los libros de texto, una mirada desde la Teoría Socioepistemológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática, (8),* 9-28.

Cruz, E. (2008). *Diseño de una secuencia didáctica, donde se generaliza el método de factorización en la solución de una ecuación cuadrática* (tesis doctoral). CICATA – IPN: México.

Guzmán, J. (1989). *Desarrollo conceptual del álgebra.* Sección de Matemática educativa, CINVESTAV, IPN.

Hourcade, E., Miranda, P., Pagés, D., y Scheggiati, E. (2018). Los materiales manipulativos como apoyo para la enseñanza del álgebra: dos propuestas para la clase y una reflexión sobre su estudio en la formación docente. En *Buendía,G., Molfino, V. y Ochoviet, C. (Comps.), Estrechando lazos entre investigación y formación en Matemática Educativa. Experiencias conjuntas de docentes y futuros docentes*, 5, 67-85.

Katz, J. (2009). *A history of mathematics. An introduction.* Chicago, Illinois: Pearson Education, Inc.

Mogollón, M. (2012). *Algunos métodos para resolver problemas que involucran ecuaciones cúbicas en la enseñanza media* (tesis de magister). Universidad Nacional de Colombia: Colombia.

Oaks, J. (2018). François Viète's revolution in algebra. *Archive for History of Exact Sciences*, *72*(3), 245-302. doi: 10.1007/s00407-018-0208-0.

Ríos, D. (2020). *Socioepistemología y Transversalidad: Una reconstrucción racional de tres teoremas fundamentales* (tesis de maestría). Cinvestav – IPN: México.

Viète, F. (1646). *Opera Mathematica.* (Trans Francisci a Schooten., Ed.). Leyden, Países Bajos: Universidad de Leiden.

Wagner, G., Giraldo, A. M., Hoyos, E. A., y Gutiérrez, H. (2014). El álgebra geométrica como mediadora en la enseñanza de la Factorización y los productos notables. *Revista de Investigaciones Universidad del Quindío*, 26(1), 139-144.

SECCIÓN 4

EL PENSAMIENTO DEL PROFESOR, SUS PRÁCTICAS Y ELEMENTOS PARA SU FORMACIÓN PROFESIONAL

FORMACIÓN DE MAESTROS EN EL ANÁLISIS DIDÁCTICO DE LECCIONES DE LIBROS DE TEXTO DE MATEMÁTICAS

TEACHER TRAINING IN THE DIDACTIC ANALYSIS OF MATHEMATICS TEXTBOOK LESSONS

María J. Castillo, María Burgos, Juan D. Godino
Universidad de Costa Rica. (Costa Rica), Universidad de Granada. (España)
mariajosecastilloc.24@gmail.com, mariaburgos@ugr.es, jgodino@ugr.es

Resumen
En este trabajo describimos el diseño e implementación de una intervención formativa con futuros maestros de educación primaria, dirigida a desarrollar la competencia de análisis didáctico de lecciones de libros de texto. Se trata de un estudio de caso focalizado en informar sobre la evaluación de los resultados de la intervención formativa. Para el análisis del proceso de instrucción planificado por el autor en la lección de libro de texto, se aplican herramientas del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. La metodología empleada permite obtener conocimientos didáctico-matemáticos que guían al profesor en la toma de decisiones sobre las posibilidades y limitaciones de la lección del libro de texto, en nuestro caso sobre porcentajes.

Palabras clave: formación de profesores, diseño didáctico, libro de texto, porcentaje

Abstract
In this paper, we describe the design and implementation of a training intervention with prospective primary school teachers aimed at developing the competence of didactic analysis of textbook lessons. This is a case study focused on reporting on the evaluation of the training intervention results. For the analysis of the instruction process planned by the author in the textbook lesson, we apply some theoretical-methodological tools of the Onto-semiotic Approach to mathematical knowledge and instruction. The methodology used allows us to acquire didactic-mathematical knowledge that guides the teacher in making decisions about the possibilities and limitations of the textbook lesson, in our case, on percentages.

Key words: teacher training, didactic design, textbook, percentage

Introducción

Los libros de texto constituyen un recurso importante para el diseño instruccional. Dado que el modo en que se presenta el contenido puede condicionar el progreso en el aprendizaje de los alumnos, el profesor que decide usar un libro de texto, debe adoptar una posición crítica sobre su gestión de uso, identificando debilidades de contenido matemático y realizando modificaciones oportunas sin alterar su sentido. No obstante, desde la investigación en educación matemática se muestra que los docentes presentan dificultades al realizar este tipo de acciones (Yang y Liu, 2019). Por este motivo, la formación de profesores debe abordar el desarrollo de competencias de análisis de lecciones de libro de texto.

Con el diseño didáctico que se describe en este trabajo, se pretende que los futuros profesores conozcan una metodología para analizar lecciones de libros de texto de matemáticas, la apliquen al análisis crítico y constructivo de una lección concreta y reflexionen sobre su uso en base a la idoneidad didáctica del proceso instruccional planificado en la misma.

Utilizamos como recurso una lección de libro de texto de matemáticas de porcentajes para 6º curso de educación primaria (dirigida a estudiantes de 11-12 años). A la importancia que desde el punto de vista curricular tiene este contenido y las dificultades que muestran tanto estudiantes como profesores en su comprensión conceptual (Maz Machado y Gutiérrez, 2008), se añade que el estudio del porcentaje no recibe un tratamiento adecuado en los libros de texto. Principalmente se observa que el porcentaje se desvincula de la proporcionalidad, primando un enfoque algorítmico que desatiende la comprensión conceptual y el estudio y articulación de sus diferentes significados (Burgos, Beltrán-Pellicer, Giacomone y Godino, 2019). En este sentido, varios autores afirman que comprender el significado de porcentaje implica el abordaje de sus múltiples e imbricados significados dentro de los que destacan: porcentaje como número, como fracción, como cantidad intensiva, como razón, como índice estadístico y como función (Brown y Kinney, 1973; Davis, 1988; Parker y Leinhardt, 1995). Limitarse, por ejemplo, al significado de porcentaje como fracción puede generar dificultades al comprender posteriormente porcentajes mayores de 100. Además, se insiste en la importancia de definir con claridad la naturaleza proporcional del porcentaje, y su carácter relacional (Dole, 2010; Mendoza y Block, 2010; Parker y Leinhardt, 1995).

Marco teórico

Adoptamos el modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas (Godino, Giacomone, Batanero y Font, 2017) desarrollado desde el Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino, Batanero y Font, 2007). En este modelo se asume que el profesor de matemáticas debe tener una competencia general de *análisis e intervención didáctica* que implica la capacidad de diseñar, aplicar y valorar secuencias de aprendizaje propias y de otros, mediante técnicas de análisis didáctico. En particular, el análisis sistemático de un proceso de estudio requiere (Godino et al., 2017):

- identificar y describir las situaciones-problemas que desencadenan la actividad matemática y las prácticas (acciones realizadas por un sujeto para resolver un problema, comunicar y/o generalizar su solución) implicadas en su solución (*competencia de análisis de significados globales*).
- describir la trama de objetos (situaciones-problema, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos) y procesos implicados en las prácticas (*competencia de análisis ontosemiótico*).

En las prácticas matemáticas, intervienen y emergen distintos tipos de objetos y procesos matemáticos que se relacionan entre sí formando *configuraciones ontosemióticas de prácticas, objetos y procesos*. Un proceso matemático es toda secuencia de acciones desarrollada durante un cierto tiempo para conseguir un objetivo, normalmente la resolución de un tipo de situaciones-problema o la comunicación de su solución (Font, Godino y Gallardo, 2013; Godino et al., 2007). Así, los objetos matemáticos, emergen de los sistemas de prácticas mediante

los respectivos procesos matemáticos de *comunicación, problematización, definición, enunciación, algoritmización* y *argumentación*. Otros procesos como los de *modelización* o *resolución de problemas*, pueden entenderse más como mega procesos, dado que involucran a algunos o varios de los anteriores. Además, en la actividad matemática los procesos duales de *particularización – generalización* tienen una importancia especial.
Considerando la lección de un libro de texto como un proceso instruccional previsto o planificado por el autor, es posible formular el problema del análisis didáctico de los libros de texto en términos de la pertinencia de las trayectorias didácticas propuestas en los mismos e identificar posibles cambios para mejorar los aprendizajes pretendidos.

Determinar el grado de idoneidad didáctica del proceso de instrucción requiere analizar los significados del contenido que se incluyen, tomando en cuenta las situaciones-problema propuestas, las representaciones, los conceptos, procedimientos, proposiciones y los argumentos que los sustentan o no. Pero también requiere identificar los conocimientos previos que se van necesitando a lo largo del proceso, permitiendo identificar conflictos epistémicos (relativos a los significados y objetos institucionales puestos en juego en la lección) y cognitivos potenciales (relacionados con los conocimientos previos requeridos). El proceso de instrucción previsto en la lección se descompone en unidades de análisis las cuales estarán formadas por configuraciones didácticas, definidas por la red de objetos y procesos ligados a una situación-problema, cuya resolución permite identificar hechos didácticos significativos (Godino, Rivas, Arteaga, Lasa y Wilhelmi, 2014) relacionados con el orden que sugiere el libro de texto sobre la secuencia de los conocimientos, los significados y competencias matemáticas pretendidas.

Con el diseño que describimos en este trabajo, pretendemos que los futuros maestros conozcan una metodología que les permita analizar sistemática y críticamente lecciones de libros de texto de matemáticas. Se trata de un estudio de caso focalizado en describir parte de los resultados de la evaluación de una intervención formativa con futuros maestros destinada a desarrollar en ellos la competencia de análisis de significados y análisis ontosemiótico de una lección de libro de texto. Específicamente pretendemos responder a las siguientes cuestiones:

¿Cómo lleva a cabo una futura maestra el análisis ontosemiótico de una lección de libro de texto en el tema de porcentajes?
¿En qué medida el análisis ontosemiótico de la lección permite o no a la participante reconocer y reflexionar sobre posibles conflictos epistémicos y cognitivos presentes en la lección?

Metodología

El enfoque metodológico es la ingeniería didáctica en el sentido generalizado propuesto por el EOS (Godino et al., 2014) y que lleva a adoptar las fases propias de las investigaciones de diseño: estudio preliminar, diseño de la trayectoria didáctica, implementación y análisis retrospectivo.

La experiencia formativa se ha desarrollado con un grupo de 61 estudiantes de tercer curso del Grado de Educación Primaria durante el año lectivo 2019-2020, en el marco de la asignatura Diseño y Desarrollo del Currículum de Matemáticas en Primaria. La implementación se desarrolló en tres sesiones: en la primera sesión formativa (dos horas de duración) se presentaron las nociones teóricas fundamentales sobre análisis de tareas, significados y tipos de objetos matemáticos en las prácticas matemáticas; en las dos sesiones siguientes, los estudiantes debían trabajar en equipos para realizar el análisis de una lección de libro de texto sobre proporcionalidad. Para valorar los resultados de la experiencia, se propuso a los estudiantes para maestro que entregaran (de forma voluntaria) el análisis de otra lección de libro de texto, esta vez sobre el tema de porcentajes (González et al., 2015). Dicha lección fue dividida en tres configuraciones didácticas (CD) para su análisis: porcentajes (CD1), porcentaje de una cantidad (CD2) y problemas (CD3).

Se pedía a los futuros maestros: a) reconocer las prácticas que lleva a cabo el autor de la lección para presentar el tema a los estudiantes, b) identificar los objetos y procesos matemáticos emergentes de dichas prácticas y c) indicar los potenciales conflictos epistémicos y cognitivos presentes en la lección. Por razones de espacio y por el propio interés de este trabajo, analizamos y evaluamos los resultados del análisis didáctico de la lección realizado por Lidia (nombre ficticio), una estudiante para maestra participante de la experiencia formativa. Para llevar a cabo esta evaluación, comparamos sus respuestas con el análisis a priori realizado por el equipo investigador.

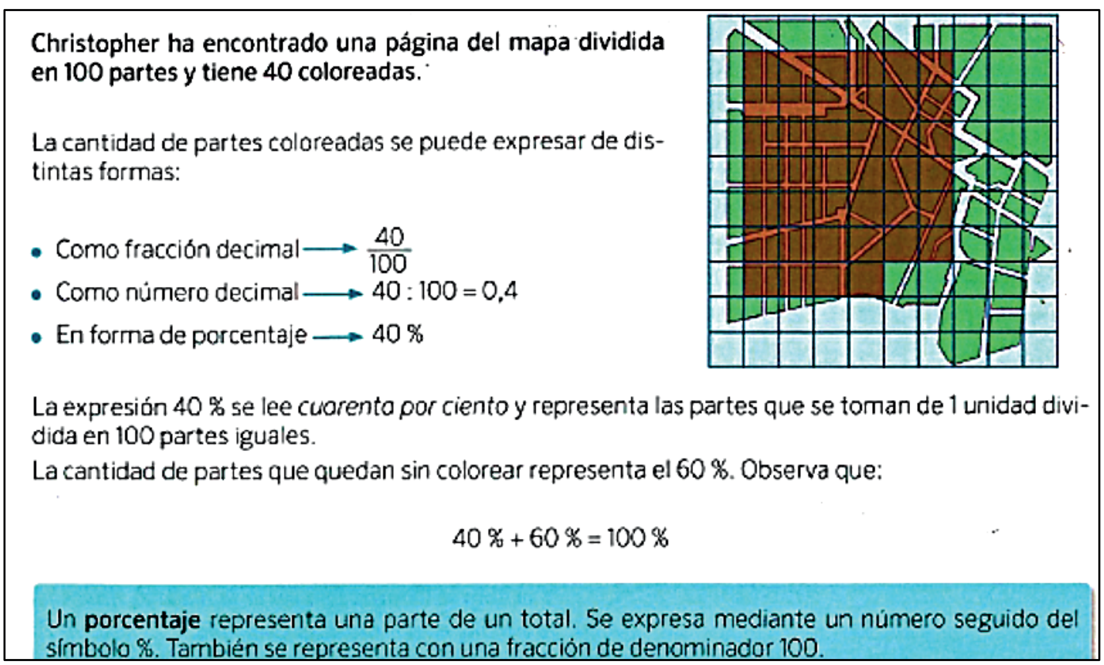
Análisis de resultados: evaluación del informe de Lidia

Para cada una de las configuraciones didácticas (CD1, CD2, CD3) en las que se ha descompuesto la lección objeto de análisis, presentamos los resultados del análisis realizado por Lidia.

Evaluación del análisis didáctico realizado por Lidia en CD1

La figura 1 muestra cómo el autor del libro introduce el tema de porcentaje; después de esta presentación se proponen una serie de situaciones para que el lector resuelva numeradas del 1 al 8. Todas las actividades son o bien de *conversión* ya que suponen el cambio entre notaciones: porcentuales, decimales y fracciones (decimales y no decimales) o bien de *sombreado* ya que implican la interpretación de superficies en términos de porcentajes. Sólo dos de estas actividades son contextualizadas (7 y 8), particularmente el ejercicio 5 supone del alumno la capacidad de ordenar cantidades porcentuales (de menor a mayor) y el ejercicio 6 el comprender el significado de porcentaje para diferenciar entre afirmaciones correctas e incorrectas planteadas sobre este tema (ej. El 87% es más de la mitad).

Figura 1. *Introducción al tema de porcentaje CD1.*



Christopher ha encontrado una página del mapa dividida en 100 partes y tiene 40 coloreadas.

La cantidad de partes coloreadas se puede expresar de distintas formas:

- Como fracción decimal ⟶ $\frac{40}{100}$
- Como número decimal ⟶ $40 : 100 = 0{,}4$
- En forma de porcentaje ⟶ 40 %

La expresión 40 % se lee *cuarenta por ciento* y representa las partes que se toman de 1 unidad dividida en 100 partes iguales.

La cantidad de partes que quedan sin colorear representa el 60 %. Observa que:

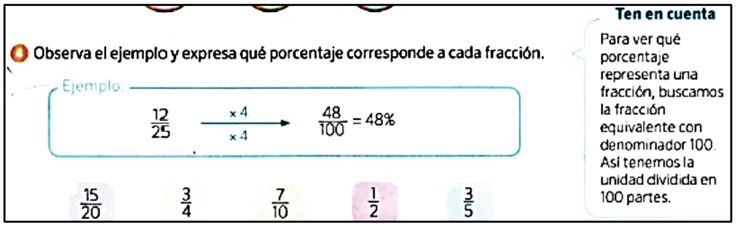
$$40\,\% + 60\,\% = 100\,\%$$

Un **porcentaje** representa una parte de un total. Se expresa mediante un número seguido del símbolo %. También se representa con una fracción de denominador 100.

Elaboración propia.

En relación a la actividad 4, se introduce una nota “ten en cuenta” en la que se especifica cómo hallar el porcentaje que representa una fracción con denominador diferente de 100 y acompaña esta nota de un ejemplo (ver figura 2).

Figura 2. *Actividad propuesta al alumno y nota "ten en cuenta" incluida en CD1.*



Elaboración propia.

Lidia identifica como sigue las prácticas y objetos involucrados en CD1:
Se indica las distintas formas de representación de cantidades, en este caso con una imagen de un mapa dividida en 100 partes y 40 partes coloreadas. Según esta lección las distintas formas que se usan son en fracción decimal, en número decimal y en forma de porcentaje. También se indica en esta parte de la lección la manera en la que hay que leer una expresión en porcentajes, en este caso la expresión 40% se lee cuarenta por ciento. Se introduce la expresión porcentajes y esta expresión de porcentajes representa las partes que se toman de una unidad dividida en 100 partes iguales según la lección. La parte que quedaría sin colorear equivale a un 60 %. A través de esta explicación de porcentajes y con una resolución de un problema se pretende que el alumno tome de referencia el ejemplo que proporciona el autor de libro para que resuelva las actividades y problemas.

Aparecen los conceptos de porcentaje, número decimal fracción decimal y el significado de la representación.
Lidia señala la mayoría de las prácticas matemáticas en CD1. No obstante, pudo haber sido más específica en la descripción de las actividades que el autor propone, por ejemplo, mencionando brevemente el tipo de tareas que incluye o sus características (de conversión, de sombreado, contextualizadas…). Al afirmar que se incluyen distintas formas de representación y la presencia de algunos conceptos, Lidia ha reconocido sólo dos tipos de objetos (lenguajes y conceptos). En relación a los procesos matemáticos involucrados Lidia indica los siguientes:

Definición/conceptualización: La configuración tiene por objetivo presentar una definición de porcentajes. En el ejemplo se usa un criterio para que después el alumno lo emplee en cualquier tipo de ejercicios de porcentajes. Se usa un objeto, en este caso, un mapa el cual está dividido en partes iguales para ver la representación de las partes seleccionadas.
Generalización: La definición de porcentaje es general para cualquier caso no solo para el ejemplo de mapas. La interpretación de la cuadrícula de los porcentajes supone un proceso de generalización de la relación de las partes representadas con el total. Esto quiere decir que si aumenta el número de las cuadrículas coloreadas disminuye el resto del porcentaje que queda.
Ejercitación: Reconocimiento de situaciones de aplicación del criterio de definición de porcentajes.
Representación/interpretación: Se usa un lenguaje natural, simbólico, tabular y diagramática. En el diagrama se representan los distintos porcentajes y en diferentes colores.

En este caso, Lidia menciona cuatro tipos de procesos matemáticos. No obstante, no todas las observaciones que proporciona según el tipo de proceso al que se refiere las consideramos pertinentes. Por ejemplo, la indicación sobre el uso del mapa como representación incluida en el proceso "definición/conceptualización" se asocia más al proceso de "representación/interpretación". Para valorar qué tipo de objetos y procesos involucrados son reconocidos o no por la participante, hemos incluido en la Tabla 1 un resumen de aquellos que consideramos más relevantes, y en negrita señalamos los que han sido mencionados por la futura maestra en su informe.

Tabla 1. *Objetos y procesos involucrados en CD1.*

Objetos	Procesos
Situaciones: de aplicación.	**Resolución de problemas**: se proponen situaciones para que el lector resuelva.
Lenguajes: **diagramático, icónico,** f**raccionario decimal** y no decimal, **numérico decimal, porcentual**, **verbal.**	**Representación**: Conversión de la representación icónica (mapa) de una parte de un todo a la representación fraccionaria, decimal y porcentual.
Proposiciones: "la cantidad de partes que queda sin colorear representa el 60%" …	Enunciación de proposiciones.
Conceptos: **porcentaje,** fracción equivalente, "de cada", "fracción".	**Conceptualización: se define "porcentaje".**
	Particularización/**generalización**: se particulariza al ejemplo específico (parte colorada de un mapa 40%), posteriormente **se generaliza la definición de porcentaje.**
Procedimientos: división, multiplicación, suma y resta.	Algoritmización: operaciones con números racionales.
Argumentos.	Argumentación: la justificación de las proposiciones y procedimientos se basa en la aplicación del concepto de fracción (parte-todo) y de porcentaje como número y fracción.

Elaboración propia

Como se aprecia en dicha tabla, Lidia no identifica proposiciones ni procedimientos y omite algunos conceptos, así como la representación fraccionaria no decimal. También se echan en falta los procesos de algoritmización, argumentación y enunciación en su informe. Al respecto recalcamos que, como se observa en la figura 1, el autor no emplea explícitamente argumentos; las proposiciones y procedimientos se justifican de manera implícita en base al significado de porcentaje como relación parte-todo (fracción), y en que, entendidos como números, los porcentajes pueden ser transformados en números reales que cumplen sus axiomas, pueden ser ordenados y sumados directamente si representan diferentes partes de un mismo todo (Brown y Kinney, 1973). Además, en relación al proceso de *ejercitación* (resolución de problemas), Lidia sólo refiere a la conceptualización. Una mirada más detallada a las actividades que se proponen permite contemplar que el alumno que los resuelva debe poner en práctica otros procesos matemáticos como son: la r*epresentación*, co*nceptualización y algoritmización.* Por ejemplo; el alumno debe aplicar y comprender el concepto de porcentaje, el significado de "fracción equivalente" y de la expresión "de cada", estos últimos juegan un papel central al resolver por ejemplo el ejercicio 4 (figura 2). Así, consideramos que el reconocimiento de objetos y procesos matemáticos en CD1 es limitado. Finalmente, Lidia identifica como conflictos en la CD1 los siguientes:

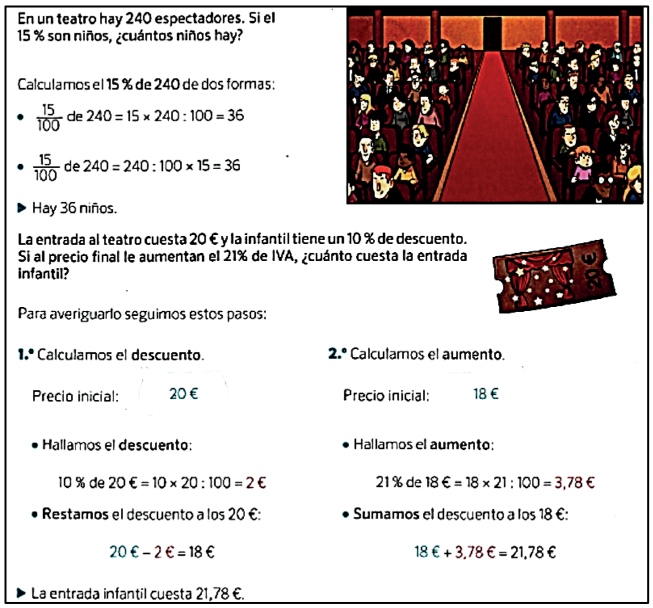
Conflictos epistémicos: No se razona sobre las cantidades como divisores, es decir, en actividades como la 6 introduce mitad, doble, unidad completa, el problema número 8 introduce la quinta parte.
Conflictos cognitivos potenciales: Se dan por conocidos los conceptos de número decimal, fracción decimal y unidad completa, los cuales influyen a la hora de hacer la conversión en porcentaje si el alumnado no está lo suficientemente familiarizado con ellos.

Los conflictos que Lidia menciona son en ambos casos cognitivos (conocimientos previos), pasando desapercibidos potenciales conflictos epistémicos como pueden ser que se prioriza el significado del porcentaje como una relación parte-todo (fracción), no se define con claridad la naturaleza proporcional del porcentaje y la poca representatividad de las actividades propuestas.

Evaluación del análisis didáctico realizado por Lidia en CD2

Para introducir el cálculo del porcentaje de una cantidad (CD2), el autor introduce dos situaciones-problema contextualizadas que resuelve como se aprecia en la figura 3. A continuación, propone una serie de actividades, numeradas del 9 al 16, para que el alumno resuelva. La mitad de estas actividades están contextualizadas y todas implican el cálculo de porcentajes de una cantidad a excepción de la situación 13 en donde se debe hallar la cantidad de referencia conocido el porcentaje (ver figura 4). Las actividades 14, 15 y 16 requieren además del cálculo de aumentos o descuentos porcentuales.

Figura 3. *Introducción al tema de porcentaje de una cantidad CD2.*



En un teatro hay 240 espectadores. Si el 15 % son niños, ¿cuántos niños hay?

Calculamos el **15 % de 240** de dos formas:

- $\frac{15}{100}$ de 240 = 15 × 240 : 100 = 36
- $\frac{15}{100}$ de 240 = 240 : 100 × 15 = 36

▶ Hay 36 niños.

La entrada al teatro cuesta 20 € y la infantil tiene un 10 % de descuento. Si al precio final le aumentan el 21% de IVA, ¿cuánto cuesta la entrada infantil?

Para averiguarlo seguimos estos pasos:

1.º Calculamos el **descuento**.

Precio inicial: 20 €

- **Hallamos el descuento:** 10 % de 20 € = 10 × 20 : 100 = 2 €
- **Restamos** el descuento a los 20 €: 20 € − 2 € = 18 €

2.º Calculamos el **aumento**.

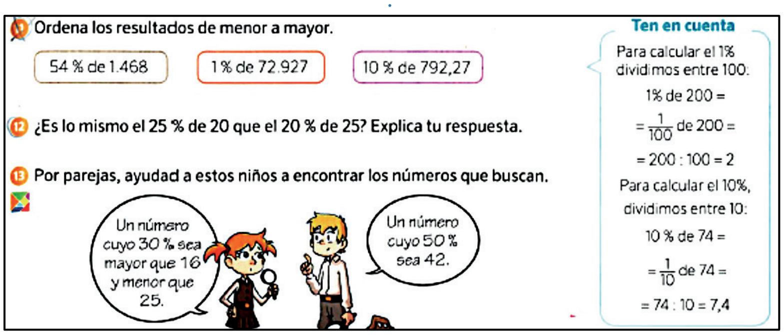
Precio inicial: 18 €

- Hallamos el **aumento**: 21 % de 18 € = 18 × 21 : 100 = 3,78 €
- **Sumamos** el descuento a los 18 €: 18 € + 3,78 € = 21,78 €

▶ La entrada infantil cuesta 21,78 €.

Elaboración propia.

Figura 4. *Actividades propuestas al alumno y nota "ten en cuenta" en CD2*



11 Ordena los resultados de menor a mayor.

54 % de 1.468 | 1 % de 72.927 | 10 % de 792,27

12 ¿Es lo mismo el 25 % de 20 que el 20 % de 25? Explica tu respuesta.

13 Por parejas, ayudad a estos niños a encontrar los números que buscan.

Ten en cuenta

Para calcular el 1% dividimos entre 100:

1% de 200 = $\frac{1}{100}$ de 200 = 200 : 100 = 2

Para calcular el 10%, dividimos entre 10:

10 % de 74 = $\frac{1}{10}$ de 74 = 74 : 10 = 7,4

Elaboración propia.

La respuesta de Lidia sobre el reconocimiento de las prácticas y objetos en CD2 es:
La primera situación del problema plantea calcular un porcentaje concreto de un total para saber cuántos niños hay en ese porcentaje concreto (15 % de 240 espectadores). Aparece una ilustración de una sala de teatro, pero no está al completo. En la segunda situación problema que se plantea se pretende calcular primero un descuento

y después un aumento de IVA para saber cuál es el precio final de la entrada (entrada de 20€, 10% de descuento y aumento del 21% de IVA). Ambas situaciones son enunciadas a partir de contextos reales.
Aparecen los conceptos de porcentaje, descuento, precio (€), número decimal.

Lidia no profundiza en las acciones puestas en juego por el autor para resolver cada una de las situaciones introductorias, sino que se limita a describirlas. Por ejemplo, no menciona que el autor expresa el porcentaje en su representación fraccionaria y muestra dos procedimientos algorítmicos para responder a la primera situación. Tampoco hace referencia a la secuencia de actividades que se proponen para el alumno. En cuanto a la identificación de los objetos matemáticos, la futura maestra sólo menciona dos tipos; las situaciones (únicamente las introductorias) y los conceptos. A continuación, identifica los procesos matemáticos:

Definición/conceptualización: No aparece ninguna definición, solamente como aplicar el IVA y los descuentos.
Generalización: La definición de porcentaje es general para cualquier caso no solo para el ejemplo de mapas.
Ejercitación: Reconocimiento de situaciones de aplicación del criterio de definición de porcentajes.
Algoritmización: Aplicación de IVA y descuentos.

Representación/interpretación: Aparecen imágenes con porcentajes y precios.

En esta oportunidad, Lidia menciona cinco procesos matemáticos, esta vez sí refiere al proceso de algoritmización (aun cuando no identifica los procedimientos de cálculo de aumentos y descuentos porcentuales), aspecto que no sucedió en CD1. No obstante, como antes, algunas observaciones no las consideramos del todo adecuadas según el tipo de proceso al que hace mención. Por ejemplo, el proceso de generalización en CD2 posee una naturaleza más procedimental que conceptual, ya que en esta configuración se introduce el cálculo de porcentaje de una cantidad en dos ejemplos particulares, luego, se espera que esta forma de proceder sea aplicable a otros casos. Por ende, consideramos que dicha apreciación es más pertinente para CD1. La Tabla 2 resume los objetos y procesos más relevantes de CD2, resaltando en negrita los destacados por Lidia en su informe.

Tabla 2. *Objetos y procesos involucrados en CD2.*

Objetos	Procesos
Situaciones: iniciales contextualizadas, de aplicación de contenidos	**Resolución de problemas**: se proponen situaciones para que el lector resuelva.
Lenguajes: icónico, fraccionario decimal, numérico decimal**,** porcentual.	**Representación**: **interpretación de representaciones icónicas,** conversión entre notaciones.
Proposiciones: hay 36 niños, la entrada infantil cuesta 21,78€**.**	Enunciación: de proposiciones.
Conceptos: **porcentaje,** centésima, **número decimal**, aumento, **descuento porcentual**, **precio**, precio total.	**Conceptualización: aplicación de los conceptos de porcentaje, aumento y descuento porcentual.**
Procedimientos: división y multiplicación, suma, resta, cálculo de aumento (IVA) y descuento porcentual.	**Algoritmización**: fijación de pasos para calcular el porcentaje de una cantidad, así como **aumentos y descuentos porcentuales**. Realización de operaciones con números racionales. Particularización/**generalización**: se introduce el cálculo de porcentaje de una cantidad en dos ejemplos particulares, para luego aplicar a otros casos.
Argumentos	Argumentación: la justificación de las proposiciones y procedimientos se basa en la definición del porcentaje como número y fracción decimal.

Elaboración propia

Como se aprecia, aunque Lidia identifica situaciones y conceptos, omite en su informe algunos de estos (no menciona las actividades propuestas al alumno o los conceptos de aumento porcentual, centésima…). Este hecho también ocurre en relación a los procesos donde Lidia ha mencionado algunos de estos, pero sin considerar ciertos aspectos relevantes en cada uno. Por ejemplo, aunque Lidia menciona el proceso “representación/interpretación”, en su descripción sólo incluye la interpretación de las representaciones icónicas, no así las diferentes representaciones que el autor emplea y las conversiones entre las mismas. De modo similar, aunque menciona el proceso “ejercitación”, la observación se restringe a indicar la presencia de ejercicios de aplicación del concepto de porcentaje. Sin embargo, la resolución de dichas actividades demanda por parte del alumno poner en práctica otro tipo de procesos matemáticos, como puede ser el de argumentación cuando el alumno debe justificar si el 25% de 20 es lo mismo que el 20% de 25 (ver figura 4).

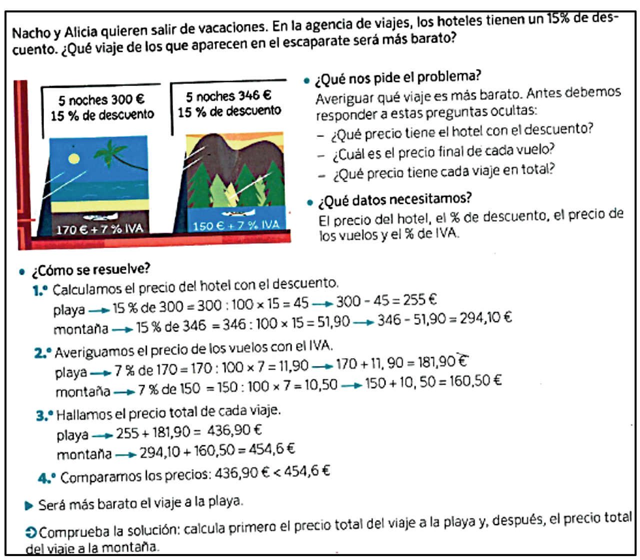
Lidia únicamente identifica un conflicto de tipo cognitivo en esta configuración, indicando que “*se da por conocidos los porcentajes como aumentos y descuentos, así como el cálculo de las cifras decimales de un número*”. La futura maestra omite así conflictos epistémicos y cognitivos importantes en esta configuración. Por ejemplo, entre los conflictos epistémicos, identificamos un uso incorrecto del signo igual, en expresiones como $10\%\ de\ 20€ = 10 \times 20 : 100 = 2€$ y la ausencia de argumentos explícitos que justifiquen los procedimientos empleados.

El autor muestra una serie de pasos sobre las operaciones que se deben aplicar, dando énfasis a aspectos procedimentales y no conceptuales. Desde el punto de vista cognitivo, Lidia no identifica una falta de progresión en los niveles de dificultad de las situaciones que se presentan como introductorias y las que se proponen para que el lector resuelva puede generar errores y dificultades al alumno. Por ejemplo, las cantidades empleadas por el autor en las situaciones introductorias corresponden a números enteros (240 personas, 20 euros), pero en las propuestas al alumno, se involucran cantidades significativamente mayores (ej. 127800), así como cantidades decimales (792,27).

Evaluación del análisis didáctico realizado por Lidia en CD3

La última configuración a analizar se titula problemas, en esta oportunidad el autor plantea preguntas estratégicas que guían la resolución del problema (ver figura 5).

Figura 5. *Situación introductoria resuelta en CD3.*



Nacho y Alicia quieren salir de vacaciones. En la agencia de viajes, los hoteles tienen un 15% de descuento. ¿Qué viaje de los que aparecen en el escaparate será más barato?

5 noches 300 €
15 % de descuento
170 € + 7 % IVA

5 noches 346 €
15 % de descuento
150 € + 7 % IVA

- ¿Qué nos pide el problema?
  Averiguar qué viaje es más barato. Antes debemos responder a estas preguntas ocultas:
  – ¿Qué precio tiene el hotel con el descuento?
  – ¿Cuál es el precio final de cada vuelo?
  – ¿Qué precio tiene cada viaje en total?
- ¿Qué datos necesitamos?
  El precio del hotel, el % de descuento, el precio de los vuelos y el % de IVA.
- ¿Cómo se resuelve?
  1.° Calculamos el precio del hotel con el descuento.
  playa → 15 % de 300 = 300 : 100 × 15 = 45 → 300 – 45 = 255 €
  montaña → 15 % de 346 = 346 : 100 × 15 = 51,90 → 346 – 51,90 = 294,10 €
  2.° Averiguamos el precio de los vuelos con el IVA.
  playa → 7 % de 170 = 170 : 100 × 7 = 11,90 → 170 + 11, 90 = 181,90 €
  montaña → 7 % de 150 = 150 : 100 × 7 = 10,50 → 150 + 10, 50 = 160,50 €
  3.° Hallamos el precio total de cada viaje.
  playa → 255 + 181,90 = 436,90 €
  montaña → 294,10 + 160,50 = 454,6 €
  4.° Comparamos los precios: 436,90 € < 454,6 €

▶ Será más barato el viaje a la playa.

➲ Comprueba la solución: calcula primero el precio total del viaje a la playa y, después, el precio total del viaje a la montaña.

Elaboración propia.

Posteriormente formula 15 actividades para que el alumno resuelva. De las cuales dos son tareas de comparación, ocho de cálculo de porcentajes de cantidades, y cinco son de magnitudes proporcionales donde una implica inventar y resolver un problema. La respuesta de Lidia sobre prácticas y objetos intervinientes en CD3 es la siguiente:

Se proponen 12 problemas, todos de ellos con una contextualización familiar donde se pretende que el alumnado aplique una estrategia la cual es descubrir preguntas ocultas y secuenciarlas. También se incluyen enunciados como Utiliza tus estrategias, Inventa un problema y ¿Tiene sentido?

Observamos que la participante sólo menciona la presencia de 12 problemas, sin profundizar en sus características, reflejando falta de precisión sobre las prácticas matemáticas puestas en juego para resolver la situación introductoria. A continuación, Lidia describe los procesos matemáticos:

Definición/conceptualización: No aparece una definición, sino que aparecen pautas sobre cómo resolver un problema por lo que tiene como objetivo que el alumno resuelva los problemas usando estrategias. Generalización: La definición de porcentaje es general para cualquier caso no solo para el ejemplo de mapas.
Ejercitación: Reconocimiento de situaciones de aplicación del criterio de definición de porcentajes. Algoritmización: Aplicación de IVA, descuentos, uso de unidades de medida y de tiempo. Representación/interpretación: Aparecen imágenes con porcentajes, precios, cantidades de gramos, alimentación, juegos.

Como en CD2, las observaciones que hace Lidia en relación a los procesos de definición/conceptualización y generalización, establecen realmente conflictos de tipo epistémico, que se generaliza a las configuraciones previas. Como muestra de la representatividad de la respuesta de Lidia sobre aquellos objetos y procesos involucrados en esta configuración, señalamos en negrita aquellos que reconoce la participante en la Tabla 3.

Tabla 3. *Objetos y procesos involucrados en CD3.*

Objetos	Procesos
Situaciones: iniciales y **de aplicación.**	**Resolución de problemas**: se proponen situaciones para que el lector resuelva.
Lenguajes: icónico, porcentual, diagramático.	**Representación: interpretación de las representaciones icónicas.**
Proposiciones: será más barato el viaje a la playa…	Enunciación de proposiciones.
Conceptos: porcentaje, aumento, descuento porcentual, precio, precio total.	Conceptualización: aplicación del concepto de porcentaje.
Argumentos	Argumentación: la justificación de procedimientos y proposiciones es implícita, en base a la definición de porcentaje como fracción decimal, al significado de fracción como operador, y en las operaciones aritméticas con números racionales y decimales
Procedimientos: suma, resta, multiplicación, división, cálculo de aumento (IVA) y descuento porcentual.	**Algoritmización: propuesta de estrategias de resolución de problemas** y aplicación de operaciones con racionales y el cálculo de **aumentos y descuentos porcentuales.**
	Particularización/**generalización:** las estrategias de resolución de problemas se pueden generalizar.

Elaboración propia.

Finalmente, Lidia considera conflictivo en CD3 que "se da por conocidos los porcentajes como aumentos y descuentos, así como el cálculo de IVA sobre un producto concreto, unidades de medida y la unidad del tiempo". Como en el resto de las configuraciones sólo considera conflictos de tipo cognitivo omitiendo una reflexión explícita a c*onflictos epistémicos* presentes en la configuración. Por ejemplo, no identifica que puede ser confusa la representación icónica al emplear notaciones como $170€ + 7\% IVA$ o bien en el empleo de expresiones como $15\%\ de\ 346 = 346{:}100 \times 15 = 51{,}90 \rightarrow 346 - 51{,}90 = 294{,}10€$, donde se usa de modo inadecuado el signo de igualdad. Por otro lado, tampoco reconoce que en la situación-problema 8 no se especifican las condiciones de regularidad que garantizan que la misma sea de proporcionalidad. Similarmente, la actividad 12 tampoco especifica que la tarta completa pesa un kilogramo (ver figura 6).

Figura 6. *Actividades propuestas en CD3.*

8 Un pintor pinta una habitación en 3 h. ¿Cuánto tardará en pintar una casa de 5 habitaciones, si descansa media hora entre cada habitación?

A. 15 h C. 15 h y 30 min
B. 17 h D. 17 h y 30 min

12 Una tarta lleva un 15 % de fruta. En un cuarto de kilo de tarta, habrá 37,5 g de fruta.

Elaboración propia

Conclusiones

Desde la investigación en formación de profesores de matemáticas se defiende la necesidad de promover acciones formativas que permitan al profesor, a partir de cierta información, describir qué ocurre y por qué en determinados contextos educativos. Para ello, se hace necesario dotar a los participantes de pautas para analizar y valorar las situaciones de enseñanza y aprendizaje que se examinan, ya sea una clase observada o implementada, un programa educativo o una lección de libro de texto (Pino-Fan, Assis y Castro, 2015; Seckel y Font, 2020).

Con este compromiso, el objetivo de este trabajo ha sido describir, por medio de un estudio de caso, el diseño, implementación y evaluación de una acción formativa con estudiantes para maestro orientada a proporcionarles una herramienta teórico-metodológica para el análisis didáctico de una lección de un libro de texto sobre porcentajes, que permita identificar conflictos semióticos que el/la docente debiera tener en cuenta.

Los resultados de la evaluación de las respuestas reflejan que la futura maestra identifica sólo de manera parcial las prácticas, objetos y procesos matemáticos involucrados en la lección de libro de texto y de manera muy limitada los conflictos semióticos. Como hemos observado, la futura maestra describe brevemente las situaciones iniciales sin profundizar en las prácticas matemáticas puestas en juego por el autor, y no reconoce los procesos de enunciación y argumentación presentes en la lección. La estrecha relación de estos procesos con la comprensión conceptual del tema, nos lleva a reflexionar como formadores de profesores, sobre la posibilidad de que el reconocer este tipo de procesos hubiera ayudado a la futura maestra a identificar limitaciones de la lección desde el punto de vista epistémico, considerando por ejemplo la falta de justificación de los procedimientos.

La falta de referencia de Lidia a las proposiciones, procedimientos y argumentos puede estar relacionada con el hecho de que estos objetos no suelen venir explícitos en el texto, por lo que requiere un análisis más profundo por su parte, que requiere un conocimiento didáctico-matemático específico sobre la naturaleza de estos objetos matemáticos.

Estos resultados confirman la importancia que desde la formación de profesores se promueva en los docentes la capacidad de análisis de las situaciones-problema incluidas en los libros, la identificación de conceptos, procedimientos o representaciones que intervienen, así como las posibles dificultades de comprensión que de la presentación del contenido se deriven. La experiencia aquí descrita puede ser útil a los formadores de profesores, en tanto les permite identificar dificultades particulares de los futuros maestros, siendo una guía sobre aquellos aspectos que debemos trabajar en común con los estudiantes. Para la lección aquí analizada, es pertinente que los profesionales en la enseñanza de este tema reflexionemos sobre su modo de uso tomando en cuenta las recomendaciones didácticas que algunos expertos proponen y que no se abordan en dicha propuesta didáctica (Dole, 2010; Mendoza y Block, 2010; Parker y Leinhardt, 1995).

Referencias

Brown, G. y Kinney, L. (1973). Let's teach them about ratio. *Mathematics Teacher, 66*, 352-355.

Burgos, M., Beltrán-Pellicer, P., Giacomone, B. y Godino, J. D. (2019). Ontosemiotic analysis of a lesson on percentages. *INTED2019 Proceedings*, 1524-1533.

Davis, R. (1988). Is "percent" a number? *Journal of Mathematical Behavior*, 7, 299-302.

Dole, S. (2010). Promoting Percent as a Proportion in Eighth-Grade Mathematics. *School Science and Mathematics, 10*(7), 345-396.

Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics,* 82, 97-124.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *The International Journal on Mathematics Education, 39*(1-2), 127-135.

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema, 31*(57), 90-113.

Godino, J. D., Rivas, H., Arteaga, P., Lasa, A. y Wilhelmi, M. R. (2014). Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico - semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 34*(2/3), 167-200.

González, Y., Garín, M., Nieto, M., Ramírez, R., Bernabeu, J., Pérez, M., Pérez, B., Morales, F., Vidal, J. M., Hidalgo, V. (2015). Moratalla. "6 Matemáticas. 6 Primaria. Trimestral. Savia," Ediciones SM.

Maz Machado, A. y Gutiérrez, M. (2008). Errores de los estudiantes de magisterio frente a situaciones que implican porcentajes. *Investigación, 17*(1), 59-69.

Mendoza, T. y Block, D. (2010). El porcentaje: lugar de encuentro de las razones, fracciones y decimales en las matemáticas escolares. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 13*(4), 129-158.

Parker, M. y Leinhardt, G. (1995). Percent: a privileged proportion. *Review of Educational Research, 6*(4), 421-481.

Pino-Fan, L. R., Assis, A., y Castro, W. F. (2015). Towards a methodology for the characterization of teachers' didactic-mathematical knowledge. *Eurasia Journal of Mathematics, Science y Technology Education, 11*(6), 1429-1456.

Seckel, M. J. y Font, V. (2020). Competencia reflexiva en formadores del profesorado de matemática. *Revista Internacional de Investigación en Educación, 12*(25), 127-144.

Yang, K. y Liu, X. (2019). Exploratory study on Taiwanese secondary teachers' critiques of mathematics textbooks. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 15*(1), em1655. https://doi.org/10.29333/ejmste/99515

VOL34, NÚMERO 2, AÑO 2021

ERRORES EN GRÁFICOS ESTADÍSTICOS DE LA PRENSA PORTUGUESA Y SU INTERPRETACIÓN POR FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICAS

ERRORS IN STATISTICAL GRAPHS IN THE PORTUGUESE PRESS AND THEIR INTERPRETATION BY PROSPECTIVE MATHEMATICAL TEACHERS

José A. Garzón-Guerrero, Silvia M. Valenzuela-Ruiz, Rocío Álvarez-Arroyo
Universidad de Granada. (España)
jgarzon@ugr.es, svalenzuela@ugr.es, rocioaarroyo@ugr.es

Resumen
Los gráficos son objetos estadísticos utilizados abundantemente en la actualidad. En este trabajo se analizan algunos tipos de gráficos más usados en la prensa portuguesa y se estudia cómo futuros profesores de matemáticas de Portugal son capaces de interpretar y detectar errores en los gráficos de la prensa escrita. Para ello se ha realizado un cuestionario y se ha realizado un estudio, cualitativo y exploratorio, mediante el análisis descriptivo de sus respuestas. Los resultados obtenidos son similares a los obtenidos en otros trabajos realizados en otros países, en los que se observan ciertas carencias en la formación estadística de los participantes. La mayoría fueron capaces leer correctamente los elementos del gráfico y extraer parte de la información útil, pero muy pocos detectaron errores y pudieron establecer si el gráfico era el adecuado. De entre todos los gráficos, los mejores resultados se obtuvieron en los gráficos de barras y de líneas, dos de los tipos que se enseñan desde los primeros años de Educación Primaria.

Palabras clave: sentido estadístico, gráficos estadísticos, profesores

Abstract
Graphs are statistical objects widely used in media at present. This paper analyzes some types of graphs most used in the Portuguese press, and studies how prospective mathematics teachers in Portugal can interpret and detect errors in the graphs of the written press. Its findings are similar to other results obtained in previous works, in which certain deficiencies in the statistical training of the participants are observed. Most were able to correctly read the graph elements and extract some of the useful information, but very few detected errors and were able to establish whether the graph was appropriate. Among all the graphs, the best results were obtained for bar and line graphs, two types of graphs that are taught in the first years of the primary school.

Key words: statistics, statistical sense, statistical graphs, prospective teachers, higher education

Introducción

La expansión de las tecnologías de la información y de las comunicaciones ha provocado un cambio radical en el comportamiento del ciudadano a la hora de consumir información, pudiéndose realizar en cualquier lugar y de manera inmediata. Los medios de comunicación han tenido que adaptarse a esta nueva situación en la que prevalece el medio digital, creando un aporte continuo y masivo de información que llega a todos los ciudadanos. Gran parte de esas noticias están acompañadas por resultados de tipo estadístico que ayudan a interpretar la noticia extrayendo la información fundamental (Engel, 2019).

En particular, gran parte de la información estadística nos llega en forma de gráficos que permiten evaluar la situación de manera rápida y visual, de manera autoexplicativa, más sencillos de entender y de identificar la información expuesta (Sharma, 2013), además de que son muy abundantes en los medios de comunicación actuales y más en estos tiempos de pandemia de COVID-19. Sin embargo, la lectura de los datos no se debe hacer de manera superficial, sino que debe realizarse una interpretación completa de todos los aspectos del gráfico, de manera que sirva para comunicar al resto de ciudadanos las opiniones y conclusiones fundamentadas en situaciones relevantes (Gal y Murray, 2011). Por tanto, es necesario que los ciudadanos posean un conocimiento estadístico suficiente para poder actuar de forma adecuada y tener una actitud crítica ante toda esa enorme cantidad de información y que le permita tomar decisiones acertadas en situaciones de incertidumbre y detectar posibles sesgos (Batanero, Gea, Arteaga y Contreras, 2014). Ese conjunto de capacidades, habilidades y actitudes forman lo que se ha definido con el término de Sentido Estadístico (Batanero, 2019). Poseer sentido estadístico permite al ciudadano analizar y juzgar de forma crítica las decisiones políticas y sociales que se produzcan en su entorno.

Además, los profesores son básicos en la adquisición de estas capacidades gráficas, ya que son los encargados de que los estudiantes asimilen conceptos elementales desde los primeros años (Zieffler, Garfield y Fry, 2018). Así, es necesaria una sólida formación estadística del profesorado, creando las actuaciones pedagógicas que sean necesarias según su nivel inicial (González, Espinel y Ainley, 2011). El objetivo de este trabajo es el de estudiar cómo los futuros profesores de matemáticas de Portugal son capaces de interpretar y detectar errores en los cuatro tipos de gráficos más usuales extraídos de la prensa escrita portuguesa y su comparación con otros estudios similares. Este tipo de gráficos pueden ser utilizados como recurso didáctico para la enseñanza en línea y para incrementar el sentido estadístico de los estudiantes.

Estudios previos

Son varios los investigadores que abordan el estudio de la interpretación de gráficos estadísticos en futuros docentes. En Monteiro y Ainley (2007) estudian la lectura de gráficos de la prensa diaria en futuros profesores de Educación Primaria de Brasil e Inglaterra, concluyendo que muchos de ellos no tenían conocimientos matemáticos suficientes para ni siquiera poder leerlos e interpretarlos de manera crítica. En Espinel (2007) se estudia la interpretación de gráficos en futuros profesores españoles comparándolos con estudiantes norteamericanos de diversos niveles educativos, quedando mejor parados los encuestados norteamericanos en dicha comparación. En Arteaga et al. (2016) se consideró la construcción e interpretación de gráficos elementales por parte de más de doscientos estudiantes españoles de magisterio. En su análisis aparecen conflictos y errores relacionados con convenios de construcción, sentido numérico y proporcionalidad, entre otros muchos. Más recientemente, (Molina-Portillo, Ruz, Gómez-García, Martínez y Contreras, 2018) y (Ruz, Molina-Portillo, Martínez, Peña y Contreras, 2018) analizan la importancia de la interpretación y lectura crítica de diagramas de barras aparecidos en medios de comunicación digitales en futuros profesores de educación primaria en España. En general, los autores notan una falta de conocimiento matemático entre los estudiantes a la hora de leer e interpretar los gráficos.

Como se puede comprobar, la gran mayoría de los estudios existentes coinciden en que a pesar de la importancia que posee la interpretación de la información estadística a través de gráficos, se observan bastantes dificultades y errores en dicha interpretación (Pérez-Echeverría, Postigo y Marín, 2018). Además, a todo lo anterior se añade la complicación de errores en la construcción de los gráficos, de manera intencional o no, que pueden desembocar en la aparición de sesgos en el lector (Garzón-Guerrero, Valenzuela y Batanero, 2021).

Marco teórico

Para una adecuada comprensión gráfica el ciudadano debe tener ciertas habilidades que le permitan entender la información del gráfico: diferentes destrezas ofrecen diferentes niveles de comprensión (Arteaga, Batanero, Cañadas y Contreras, 2011). La interpretación de los mismos es compleja, comenzando por el análisis básico de elementos estructurales del gráfico (títulos, ejes, etiquetas…), pasando por la percepción de las variables y escalas que aparecen (detectar el origen de datos, rango…) y terminando con las conclusiones sobre la variabilidad de cada variable y su relación con la realidad que se quiere representar (tendencias, relaciones...) o las conclusiones extraídas (Batanero, Arteaga y Ruiz, 2010). Además, cada tipología de gráfico tiene sus propias reglas de interpretación y construcción, lo que añade más dificultad al proceso de lectura. Esa complejidad puede provenir por una restringida compresión del lenguaje (ya sea gráfico, verbal, numérico…), de los procedimientos asociados (cálculo de frecuencias, recuento de datos…) o de algunos conceptos fundamentales para su interpretación, como la proporcionalidad o la distribución de una variable (Pallauta y Arteaga, 2020). Se puede afirmar que la compresión total de un gráfico estadístico se produce de manera gradual y que para conseguirla se necesita aportar una gran variedad de gráficos de manera contextualizada (González et al., 2011).

En la literatura se pueden encontrar algunos modelos teóricos que tienen como objetivo realizar una clasificación jerárquica de los distintos niveles de lectura y comprensión de gráficos que pueden darse en los lectores, y que van desde la incapacidad de extraer ningún dato hasta la posesión de destrezas para predecir y extrapolar datos que no se aparecen explícitamente. En (Wu y Wong, 2009) se consideran cuatro aspectos en la comprensión de gráficos estadísticos según las habilidades adquiridas: *lectura de gráficos*, en el que se sabe extraer los datos directamente o comparar parte de ellos; *interpretación de los gráficos*, cuando se forman opiniones y se realizan inferencias acerca de los datos; *construcción de gráficos*, el individuo es capaz de reflejar datos en de forma gráfica*; evaluación de gráficos*, tener la capacidad de reconocer si un gráfico es correcto y efectivo.

Centrándonos en la lectura e interpretación de gráficos encontramos uno de los marcos teóricos más utilizados en este ámbito, propuesto por (Shaughnessy, Garfield y Greer, 1996) y (Friel, Curcio y Bright, 2001) en el que se definen cuatro etapas en la lectura de gráficos: *lectura de los datos* (es capaz de extraer datos directamente del gráfico); *lectura entre los datos* (puede encontrar relaciones entre los datos); *lectura más allá de los datos* (puede extrapolar y realizar predicciones); *lectura detrás de los datos* (realiza una lectura crítica y se plantea la fiabilidad del gráfico). De un modo similar, (Aoyama, 2007) describe cinco niveles para la lectura de los datos basados en las habilidades del lector, en el que cada nivel contiene a todos los anteriores: *nivel idiosincrático* (no es capaz de leer nada correctamente); *nivel de lectura básico* (puede leer datos y ver tendencias); *nivel literal* (puede describir significados del contexto del gráfico, pero sólo literalmente); *nivel crítico* (comprende el contexto y analiza la fiabilidad de la información); *nivel de hipótesis* (puede aportar sus propias hipótesis o modelos).

En este trabajo se usará parte del marco teórico propuesto por Friel et al. (2001) en el que se exponen algunas de las competencias relacionadas que deberían de poseer los consumidores de gráficos estadísticos:

- Competencia para interpretar y reconocer las componentes estructurales del gráfico y sus relaciones: distinguir cada uno de estos elementos individualmente (escala, ejes, etiquetas…), interpretarlos y tener la capacidad de distinguir si son apropiados para incluirlos en el gráfico.
- Capacidad de percibir el impacto de dichos elementos sobre la presentación de la información: por ejemplo, ser capaz de predecir cómo cambiaría la forma del gráfico si cambiase la escala o darse cuenta de si la escala usada es incorrecta por no ser proporcional. También implica el percatarse de sí un gráfico está mal construido por la modificación, intencional o no, de algún elemento estructural del mismo.

- Habilidad para contextualizar y trasladar las relaciones que aparecen en el gráfico a los datos y viceversa: incluye el relacionar las variables entre sí, o saber que una gráfica debe ser creciente cuando la relación entre dos variables es directa. En definitiva, saber interpretar la información que se presenta en el gráfico y establecer opiniones teniendo en cuenta el contexto.
- Capacidad de reconocer si un gráfico es más adecuado que otro: saber elegir el tipo de gráfico más útil teniendo en cuenta el tipo de variable que se está representando y el tipo de problema que se quiere abordar.
- Estas competencias se ajustan a los diferentes comportamientos que aparecen en los lectores a la hora de leer y entender un gráfico.

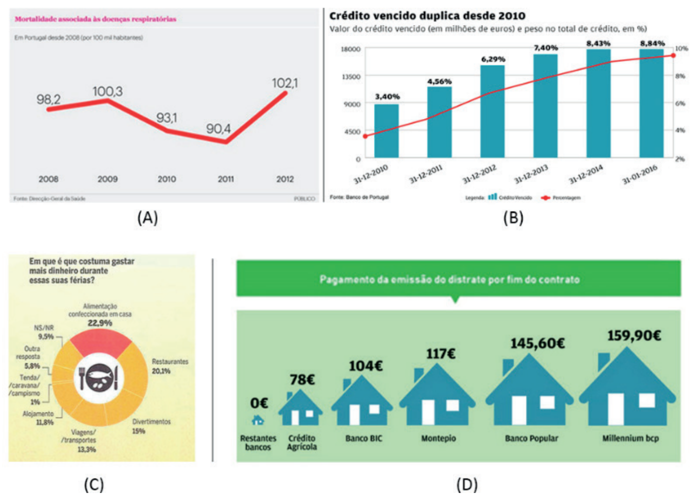
Metodología

En primer lugar, se realizó una búsqueda exhaustiva entre las publicaciones recientes de la prensa portuguesa, intentando encontrar específicamente aquellos que poseyeran algún tipo de inexactitud o error de construcción para comprobar las competencias de lectura e interpretación. Se eligieron gráficos pertenecientes a los cuatros tipos más utilizados en la prensa: de líneas, de barras, de sectores y pictogramas. A partir de estos gráficos se crearon cuestionarios que constaban de preguntas relacionadas con las cuatro competencias gráficas adaptadas de Friel et al. (2001) y adaptadas al idioma portugués. Las preguntas se distribuyeron en cuatro bloques:

- *Bloque 1*: *descripción del gráfico.* Se preguntaba a los encuestados que describieran el tipo de gráfico, las variables que aparecían, el criterio usado para mostrar la información y otros elementos.
- *Bloque 2*: *errores de construcción e inexactitudes*. Con estas cuestiones se intentaba dilucidar si los participantes eran capaces de detectar algún error de construcción o elementos que pudieran generar dudas o sesgos en la información contenida en el gráfico.
- *Bloque 3*: *extracción de la información relevante*. Se pedía que intentaran relatar la información que contenía el gráfico, tanto la que podía presentarse de forma explícita como aquella que aparecía implícitamente o debía de ser relacionada con algunos contextos en particular.
- *Bloque 4*: *adecuación del gráfico*. Se cuestionaba si el lector consideraba que el tipo de gráfico usado era la mejor opción posible para representar esa misma información. Si su respuesta era negativa, se le requería aportar otro tipo de diagrama que resultase más conveniente.

El cuestionario, validado de forma interna, fue distribuido a 29 futuros docentes de Educación Primaria y Secundaria en Portugal (Universidade Tras-os-Montes e Alto Douro, Vila-Real). Se ha realizado un análisis, cualitativo y exploratorio, mediante un análisis descriptivo de las respuestas, que se han clasificado en dos categorías: incorrecta (si no contesta a la pregunta o si la respuesta es errónea) o correcta (si la respuesta es completamente correcta o parcialmente correcta y contiene afirmaciones válidas pero incompletas). Los datos se recogieron durante estancias de trabajo en dicha universidad, en las que uno de los autores impartió talleres de estadística a los docentes y estudiantes colaboradores. Tras la realización del cuestionario se impartió a los asistentes un seminario específico sobre el tema donde se consideraron los ejemplos sobre los que antes habían tenido la oportunidad de analizar. En la Figura 1 se observan los casos que fueron seleccionados para los cuatro tipos de gráficos más usuales: de líneas (Figura 1-A), de barras (Figura 1-B), diagrama de sectores (Figura 1-C) y pictogramas (Figura 1-D), todos ellos extraídos de la prensa portuguesa.

Figura 1. Gráficos de líneas (A), de barras (B), diagrama de sectores (C) y pictogramas (D) usados en el estudio.



Fuentes: Visão (20 agosto 2009, p.85) (A) / Jornal de Negócios (2 junio 2014, p.17) (B) / Publico (9 diciembre 2014, p.5) (C) / Jornal de Negócios (11 abril de 2016, p.4) (D).

Descripción de los gráficos utilizados

Procedemos a describir los gráficos seleccionados atendiendo a cada uno de los cuatro bloques de contenido planteados, para establecer las respuestas correctas y que la categorización de los resultados pudiera realizarse de forma más efectiva.

Todo lo relativo a la descripción de los gráficos e identificación de sus componentes corresponde al *Bloque 1*. La Figura 1-A corresponde a un gráfico de líneas simple, que suelen utilizarse para representar secuencias temporales y muestra sobre unos ejes cartesianos, la relación entre dos o más variables, representadas en ejes diferentes. En este caso no se muestran explícitamente los ejes, aunque sí las marcas en abscisas de la variable temporal. La variable dependiente involucrada es la mortalidad asociada a enfermedades respiratorias (en número de personas por cada 100000 habitantes). La variable independiente es el tiempo (en años). La Figura 1-B corresponde a un diagrama de barras verticales simple, aunque en este caso se le superpone un gráfico de líneas y valores numéricos que pueden llegar a confundir al lector. En los gráficos de barras el criterio usado para mostrar la información es que la altura de las barras debe ser proporcional al valor de la variable. Las variables son valor de crédito vencido (en millones de euros) y el tiempo. La Figura 1-C corresponde a un diagrama bidimensional de sectores, simple y hueco. El criterio de construcción es que la amplitud de cada sector del círculo o corona sea proporcional a la frecuencia relativa de la variable. La variable es en este caso el gasto monetario en las vacaciones de los veraneantes (en porcentaje). Por último, en la Figura 1-D encontramos un pictograma bidimensional de área o tamaño. Entre los pictogramas, suelen definirse dos clases: numérico (o de barras, formado por figuras de igual tamaño que se repiten, cuyo número es proporcional a la frecuencia representada) o de tamaño, como en nuestro caso con el dibujo de una casa, en el que las áreas de cada figura representan la frecuencia de la variable (Wu y Wong, 2009). La variable representada es el precio de la comisión de rescisión del contrato hipotecario (en euros) para diferentes entidades bancarias de Portugal.

En cuanto al *Bloque 2*, acerca de inexactitudes y detección de errores, decir que existen en todos los gráficos analizados en este trabajo, ya que se seleccionaron con esa característica. En la Figura 1- no se dibuja ninguno de los ejes, sobre todo se hace evidente con el de ordenadas, que no tienen marcas de numeración, por lo que desconocemos la escala. El eje de ordenadas no comienza en cero, con lo que la percepción visual de la forma del diagrama puede resultar engañosa. En la Figura 1-B se sitúan sobre las barras etiquetas de porcentajes que no corresponden con los valores de la variable representada, sino que pertenecen al gráfico de líneas (porcentaje sobre el total). Además, dichos valores no corresponden a la altura que marca la escala de la derecha, creando un conflicto en el lector que puede asociar la altura de las barras a los valores marcados sobre ella. También existe un error tipográfico en el último valor de la escala de abscisas que lleva a pensar que se han saltado una marca. En el diagrama de sectores, Figura 1-C, se espera que la suma total de todas sus categorías sea de 100%, lo cual no ocurre (99,4%) y puede llevar a confusión. Es un error típico en esta variedad de gráficos (Molina-Portillo, Ortiz, Garzón-Guerrero y Cezón, 2020). El número de clases mostradas es quizás excesivo, pues se recomienda incluir sólo cinco o seis categorías. En el pictograma de la Figura 1-D es necesario que el valor de la variable sea proporcional al tamaño o área de la figura, cosa que no se cumple en este caso y que de nuevo puede llevar a confusión. Se ha elegido la altura de la casa, y no el área, como indicador de la variable. Es un error que aparece de manera típica en esta clase de diagramas, principalmente en la prensa, cosa que no ocurre en los pictogramas numéricos (Wu y Wong, 2009).

En referencia al *Bloque 3*, sobre la extracción de información, debemos especificar que el gráfico se entregó descontextualizado a los participantes, haciendo más complicada su interpretación (Watson y Fitzallen, 2010). De la Figura 1-A se puede extraer que la mortalidad debido a enfermedades respiratorias creció en 2012 después de haber bajado en dos años consecutivos, aunque la proporción de subida no es muy notable. En la Figura 1-B se observa que la proporción del crédito vencido respecto al total de crédito de Portugal tiene una tendencia creciente anualmente y que en sólo cinco años ha llegado a duplicarse, conclusión a la que también ayuda el título situado en la parte superior. Del diagrama de sectores, Figura 1-C puede extraerse que la mayor parte del dinero gastado en vacaciones por los portugueses se destina a alimentación, tanto en casa como fuera. La Figura 1-D nos muestra que dependiendo del banco en el que se encuentre la hipoteca, la cancelación de la misma puede variar desde cero euros hasta casi 160, y podemos deducir que si no se desea pagar dicha comisión lo ideal sería evitar esas entidades.

Respecto al *Bloque 4* sobre la adecuación del gráfico, todos los gráficos podrían mejorarse evitando alguna de las inexactitudes o errores ya mencionados. El diagrama de líneas podría sustituirse por un gráfico de barras (Figura 1-A), y al contrario en la Figura 1-B. En el diagrama circular, se podría disminuir el número de categorías y cambiar el color del resto de las clases para facilitar la discriminación visual. Como alternativa, también podría ser representado mediante un diagrama de barras. En el pictograma (Figura 1-D) la alternativa sería un gráfico de barras o simplemente una tabla ordenada con todos los valores.

Resultados

En la Tabla 1 se muestran unificados los resultados de las respuestas consideradas como correctas para los cuatro tipos de gráficos. Como se puede observar, la mayor parte de los participantes, por encima siempre del 69%, fueron capaces de identificar correctamente el tipo de gráfico, variable, escalas y parámetros de representación (información del *Bloque 1*). De entre todos, los mejores datos se obtienen en el gráfico de barras (82,8%). Los resultados son también mayores del 60% en cuanto a la extracción de información útil, es decir, pudieron identificar cuáles eran los datos fundamentales y situarlos en un contexto, aunque no se les mostrara explícitamente. De nuevo el diagrama de barras es el mejor situado, lo que indica que es bien reconocido por los encuestados, incluso cuando se muestra en formatos y diseños no usuales, como es el caso.

Sin embargo, en los bloques de detección de errores (*Bloque 2*) y adecuación del gráfico (*Bloque 4*) se obtienen las puntuaciones más bajas, en total ninguno de los dos apartados supera el 20%, lo que puede sugerir déficits en el conocimiento de las características y construcción de los gráficos. Dentro de esas bajas puntuaciones, los gráficos de líneas y de barras obtienen los mejores resultados en detección de errores (27,6% y 24,1%, respectivamente). Estas bajas calificaciones podrían implicar razonamientos incompletos que involucran conceptos básicos de estadística, como la proporcionalidad, algo que coincidiría con algunas investigaciones previas realizadas en futuros profesores en España acerca de la construcción de gráficos, ya que muchos de ellos se equivocaban al usar escalas no proporcionales (Arteaga et al., 2016).

Tabla 1. *Diagrama de sectores (izquierda) y pictogramas (derecha).*

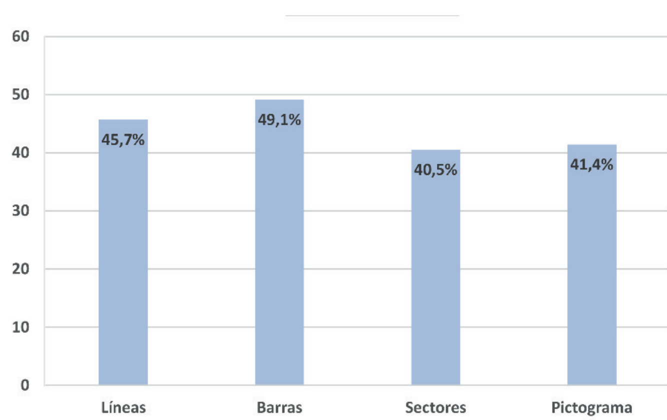
	Bloque 1 (%)	Bloque 2 (%)	Bloque 3 (%)	Bloque 4 (%)
Gráfico de líneas	72,4	27,6	65,5	17,2
Gráfico de barras	82,8	24,1	72,4	17,2
Gráfico de sectores	69,0	17,2	65,5	10,3
Pictograma	75,9	6,9	55,2	27,6
TOTAL	75,0	19,0	64,7	18,1

Elaboración propia.

Un hecho llamativo es el caso del pictograma, que logra el mejor resultado en el *Bloque 4* (27,6%) y relativamente altos en los *Bloques 1* y *3* (75,9% y 55,2%, respectivamente) pero obtiene una muy baja puntuación en el bloque de detección de errores. Esto puede ser debido a que los pictogramas mostrados en los primeros años de enseñanza de la estadística son los de tipo numérico y no de tamaño, que en particular no están muy trabajados, ya que la percepción de la proporcionalidad es más fácil con relaciones lineales que cuadráticas.

Otro de los objetivos de este estudio era conocer si existían diferencias en la lectura e interpretación de los participantes según el tipo de gráfico. El porcentaje de respuestas correctas para cada tipo se muestra en la Figura 2. Las medidas son parecidas, pero se observa que, en general, existe un mejor desempeño a la hora de interpretar los gráficos de barras (49,1%) y de líneas (45,7%) que los de sectores (40,5%) o los pictogramas (41,4%). Una posible explicación puede deberse a que las clases de gráficos de barras y de líneas son los que más se trabajan en el currículo de Portugal desde los primeros cursos de Primaria, de modo muy semejante a como lo hacen otros países del mundo, mientras que el diagrama de sectores sólo se comienza a estudiar en educación secundaria. Y a pesar de que los pictogramas son introducidos a edades muy tempranas, incluso en infantil, no son del tipo elegido en este trabajo (de tamaño o área) sino que suelen ser más simples (numéricos o de barras). Esta categoría de gráficos no suele ser tratada explícitamente en la escuela (Wu y Wong, 2009).

Figura 2. *Resultados porcentuales según el tipo de gráfico.*



Elaboración propia.

Los resultados de este trabajo han sido similares a los que se han obtenido en algunos trabajos previos con futuros docentes (Monteiro y Ainley, 2007; Pérez-Echeverría et al., 2018; Ruz et al., 2018), en los que se observan lagunas en la formación estadística de los encuestados, aunque la mayor parte de ellos es capaz de leer los elementos del gráfico y hacer una extracción básica de la información contenida en ellos. En este aspecto, sería oportuno realizar algún tipo de acción formativa sobre el futuro profesorado en relación a la interpretación de gráficos utilizando recursos contextualizados como los utilizados en este trabajo extraídos de la prensa local.

Conclusiones

En este trabajo se ha realizado un análisis exploratorio sobre las capacidades de interpretación y detección de errores en gráficos estadísticos en futuros profesores de Portugal. Se han utilizado para ello los cuatro tipos de gráficos más usuales extraídos de la prensa portuguesa: de líneas, de barras, de sectores y pictogramas. Como instrumento de evaluación se construyó un cuestionario formado por gráficos de cada uno de los tipos y unas preguntas formuladas en torno a cuatro bloques: elementos del gráfico, detección de errores, extracción de información y adecuación del tipo de gráfico.

Los resultados muestran que los participantes tenían problemas a la hora de detectar errores y decidir si el gráfico era el más adecuado, aunque la mayoría eran capaces de identificar elementos del gráfico y realizar una interpretación superficial de la información contenida. De entre los distintos tipos de gráfico, los de barras y líneas son los que obtienen mayor puntuación, debido a su inclusión desde las primeras etapas de escolarización. Estos resultados son similares a los que aparecen en algunos trabajos previos en la literatura realizados sobre futuros docentes en otros países, que al igual que en este trabajo obtienen buenos resultados en cuanto a la descripción de los tipos de gráfico y a la extracción de información útil, pero también observan ciertas carencias en la formación estadística. Estos déficits pueden impedir una completa interpretación y una lectura crítica de los gráficos que aparecen en los medios de comunicación. Sería conveniente realizar acciones específicas de tipo formativo sobre el profesorado en formación para alcanzar una adecuada cultura estadística, que les ayudaría en su futura labor docente y podría repercutir en un mejor aprendizaje por parte de su alumnado. Como recurso, sería posible utilizar los gráficos estadísticos que aparecen en los medios y que nos ofrecen una gran gama de posibilidades para poder llevar a cabo esta formación y que también pueden generar una mejora en la motivación al partir de fuentes y contextos cotidianos, además de aportar las bases para el cuestionamiento crítico de los estudiantes y contribuir a mejorar su sentido estadístico.

Agradecimientos

Proyecto PID2019-105601GB-I00 / AEI / 10.13039/501100011033 y Grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

Referencias

Aoyama, K. (2007). Investigating a Hierarchy of Students' Interpretations of Graphs. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *2*(3), 298-318.

Arteaga, P., Batanero, C., Cañadas, G., y Contreras, J. M. (2011). Las tablas y gráficos estadísticos como objetos culturales. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *76*, 55-67.

Arteaga, P., Batanero, C., Contreras, J. M., y Cañadas, G. (2016). Evaluación de errores en la construcción de gráficos estadísticos elementales por futuros profesores. *Revista Latinoamericana de Investigación Matemática Educatica (RELIME)*, *19*(1), 15-40.

Batanero, C. (2019). Statistical Sense in the Information Society. En K. O. Villalba-Condori, A. Adúriz-Bravo, F. J. Garcia-Peñalvo, y J. Lavonen (Eds.), *Proceedings of the International Congress on Educational and Technology in Sciences (CISETC 2019)* (pp. 28-37). Aachen, Germany.

Batanero, C., Arteaga, P., y Ruiz, B. (2010). Análisis de la complejidad semiótica de los gráficos producidos por futuros profesores de educación primaria en una tarea de comparación de dos variables estadísticas. *Enseñanza de las Ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, *28*(1), 141-154.

Batanero, C., Gea, M. M., Arteaga, P., y Contreras, J. M. (2014). La estadística en la educación obligatoria: Análisis del currículo español. *Revista Digital Matemática*, *14*(2), 1-14.

Engel, J. (2019). Statistical literacy and society: What is civic statistics? En J. M. Contreras, M. del M. López-Martín, y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística* (pp. 1-17). Granada.

Espinel, M. C. (2007). Construcción y razonamiento de gráficos estadísticos en la formación de profesores. En M. Camacho, P. Flores, y M. del P. Bolea (Eds.), *Investigación en educación matemática XI* (pp. 99-120). Tenerife: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).

Friel, S. N., Curcio, F. R., y Bright, G. W. (2001). Making Sense of Graphs: Critical Factors Influencing Comprehension and Instructional Implications. *Journal for Research in Mathematics Education*, *32*(2), 124-158. https://doi.org/10.2307/749671

Gal, I., y Murray, S. T. (2011). Responding to diversity in users' statistical literacy and information needs: Institutional and educational implications. *Statistical Journal of the IAOS*, *27*(3,4), 185-195. https://doi.org/10.3233/SJI-2011-0730

Garzón-Guerrero, J. A., Valenzuela, S., y Batanero, C. (2021). STATISTICAL SENSE AND GRAPHS IN THE COVID ERA. *INTED2021 Proceedings*, 8779-8787.

González, M. T., Espinel, M. C., y Ainley, J. (2011). Teachers' Graphical Competence. En C. Batanero, G. Burrill, y C. Reading (Eds.), *Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education: A Joint ICMI/IASE Study: The 18th ICMI Study* (pp. 187-197). Dordrecht: Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-007-1131-0_20

Molina-Portillo, E., Ortiz, F. M., Garzón-Guerrero, J. A., y Cezón, P. A. (2020). Estudio de errores y dificultades vinculados a la elaboración e interpretación de diagramas de sectores. En T. Sola Martínez, J. A. López Núñez, A. J. Moreno Guerrero, J. M. Sola Reche, y S. Pozo Sánchez (Eds.), *Investigación Educativa e Inclusión. Retos actuales en la sociedad del siglo XXI* (pp. 831-843). Madrid: Dykinson.

Molina-Portillo, E., Ruz, F., Gómez-García, G., Martínez, F., y Contreras, J. M. (2018). Evaluación de la interpretación y argumentación estadística de noticias en las que intervienen gráficos de barras en futuros profesores de Educación Primaria. En F. España (Ed.), *Actas del XVII Congreso de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas: Matemáticas en tierra de cine* (pp. 181-190). Almería: Sociedad Andaluza de Educación Matemáticas Thales.

Monteiro, C., y Ainley, J. (2007). Investigating the Interpretation of Media Graphs among Student Teachers. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *2*(3), 187-207.

Pallauta, J. D., y Arteaga, P. (2020). Análisis de la complejidad semiótica de gráficos y tablas estadísticas. En C. R. Campos y A. Pavan (Eds.), *Investigações hispano-brasileiras em Educação Estatística* (pp. 196-201). Brasil: Editora Akademy.

Pérez-Echeverría, M. del P., Postigo, Y., y Marín, C. (2018). Understanding of graphs in social science undergraduate students: Selection and interpretation of graphs. *Irish Educational Studies*, *37*(1), 89-111. https://doi.org/10.1080/03323315.2018.1440248

Ruz, F., Molina-Portillo, E., Martínez, F., Peña, L., y Contreras, J. M. (2018). Evaluación de la alfabetización estadística gráfica en futuros maestros de Educación Primaria. En F. España (Ed.), *Actas del XVII Congreso de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas: Matemáticas en tierra de cine* (pp. 171-180). Almería: Sociedad Andaluza de Educación Matemáticas Thales.

Sharma, S. (2013). Assessıng Students' Understandıng of Tables and Graphs: Implıcatıons for Teachıng and Research. *International Journal of Educational Research and Technology*, *4*, 51-70.

Shaughnessy, J. M., Garfield, J., y Greer, B. (1996). Data Handling. En A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, y C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education: Part 1* (pp. 205-237). Dordrecht: Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-009-1465-0_7

Watson, J., y Fitzallen, N. (2010). *The Development of Graph Understanding in the Mathematics Curriculum Report for the NSW Department of Education and Training Acknowledgements*.

Wu, Y., y Wong, K. Y. (2009). Understanding of Statistical Graphs among Singapore Secondary Students. En *Series on Mathematics Education*: *Vol. 2*. *Mathematics Education* (pp. 227-243). World Scientific. https://doi.org/10.1142/9789812833761_0010

Zieffler, A., Garfield, J., y Fry, E. (2018). What Is Statistics Education? En D. Ben-Zvi, K. Makar, y J. Garfield (Eds.), *International Handbook of Research in Statistics Education* (pp. 37-70). Cham: Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-66195-7_2

¿CÓMO EVALÚAN ESOS DOCENTES ESPECIALMENTE RECORDADOS POR INGRESANTES AL PROFESORADO EN MATEMÁTICA?

HOW DO TEACHERS WHO ARE ESPECIALLY REMEMBERED BY STUDENTS ENTERING MATHEMATICS TEACHER TRAINING DEGREE COURSE EVALUATE?

Natalia Sgreccia, Mariela Cirelli, María Beatriz Vital
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura. Universidad Nacional de Rosario (Argentina)
sgreccia@fceia.unr.edu.ar, cirelli@fceia.unr.edu.ar, vital@fceia.unr.edu.ar

Resumen
Desde hace casi dos décadas, el primer día de clase del Profesorado en Matemática de la Universidad Nacional de Rosario (Argentina) se les solicita a los estudiantes que identifiquen a los dos mejores profesores de su escolaridad previa, atribuyéndoles tres cualidades a cada uno. Utilizando la técnica de análisis de contenido, estas cualidades han sido procesadas y agrupadas según cinco dimensiones principales y, dentro de éstas, en familias, de acuerdo a su afinidad semántica. Interesa, en esta oportunidad, analizar la dimensión referida a las prácticas evaluativas de esos docentes memorables. Se comparten las características específicas que los ingresantes reconocen en profesores que han dejado marcas en su biografía escolar, al punto de despertar en ellos la vocación para dedicarse a la Matemática Educativa.

Palabras clave: biografía escolar, evaluación, profesorado en matemática.

Abstract
For almost two decades, the students of the Mathematics teacher training degree at the National University of Rosario (Argentina) have been asked to mention, during their first day of classes, their two best high school teachers, along with three qualities each of them possessed. Such qualities have then been grouped into five categories, among which, one related to the evaluation procedures of these memorable teachers is included. In this report, the authors share the specific characteristics that the students recognized in those teachers who have left such a strong impression on their school biography, so as to make them have vocation for dedicating themselves to Educational Mathematics.

Key words: school biography, evaluation, Mathematics Teacher Training degree

Introducción

Este reporte se encuadra en el Proyecto de Investigación "El trayecto de la Práctica Profesional Docente en el Profesorado en Matemática. El caso de la Universidad Nacional de Rosario (UNR)" (1ING576, 2018-2021), dando continuidad al Proyecto "Procesos de acompañamiento en la formación inicial y continua de profesores en Matemática" (1ING445, 2014-2017), ambos radicados en la UNR (Argentina).

Entre los objetivos del Proyecto vigente se encuentra reconocer marcas de docentes memorables en la biografía escolar de estudiantes, graduados y docentes de la carrera de interés (Profesorado en Matemática -PM- de la UNR).

Se coincide que la biografía escolar adquiere relevancia para los proyectos de vida de los ciudadanos en general (Pennac, 2008) y en particular de aquellos que a su vez deciden constituirse en profesores (Álvarez, Porta y Sarasa, 2011), de cualquier disciplina o especialmente de Matemática, como se focaliza aquí. Tal es su relevancia que se ha constituido como un dispositivo de formación en la carrera docente (Zárate, 2016).

Desde el año 2002, en el PM de la UNR se incluyen espacios curriculares dedicados exclusivamente a la reflexión teórico-práctica de la tarea de enseñanza-aprendizaje-evaluación de la Matemática como proyecto articulador de la carrera a través de los cuatro años del plan de estudios dentro del denominado trayecto de "Práctica Profesional Docente" (PPD). Desde entonces se reportan las cualidades de docentes especialmente recordados por aspirantes a ingresar al PM, con posteriores análisis que se desarrollan gradualmente, en términos de docencia e investigación.

En esta ocasión se interpelan dichas cualidades con respecto a ponderaciones favorables que se realizan en torno a cómo esos "buenos docentes" han evaluado a quienes hoy aspiran a ser profesores en Matemática e iniciaron sus estudios, para ello, en el PM de la UNR (Argentina).

Marco teórico

Se considera al conocimiento matemático para la enseñanza (Ball, Thames y Phelps, 2008) como marco de referencia global del Proyecto antes mencionado, dado que interesa identificar los modos en que se amalgaman la formación pedagógica y la disciplinar en las puestas en acción del futuro profesor durante el trayecto de PPD. Específicamente este modelo considera dos grupos de conocimientos: de la materia y didáctico del contenido, compuestos a su vez cada uno con tres dominios de conocimiento:

- *Común del contenido*: se trata del conocimiento y habilidades matemáticas utilizadas en diversos contextos, no solamente ni necesariamente de enseñanza.
- *En el horizonte matemático*: involucra aquel conocimiento que relaciona el saber disciplinar con la organización de los contenidos a través del currículum.
- *Especializado del contenido*: consiste en aquellos conocimientos y habilidades matemáticas exclusivas para la enseñanza.
- *Del contenido y de los estudiantes*: integra conocimiento acerca de los procesos cognitivos de los alumnos y los procesos matemáticos derivados de ellos.
- *Del contenido y de la enseñanza*: combina los conceptos o procedimientos propios de la Matemática y los principios didácticos para su enseñanza.
- *Del contenido y del currículum*: comprende los programas curriculares e instruccionales para la enseñanza de la disciplina en los diversos niveles educativos.

En el citado trayecto se le presta atención, en particular, a los modelos de enseñanza que los futuros profesores en Matemática han vivido, dado que sus prácticas estarán altamente permeadas por tales experiencias (Santaló, 1999).

Para ayudar a los estudiantes a desentramar sus vivencias, se contemplan las cinco dimensiones delimitadas por Bain (2007) en su estudio acerca de lo que hacen los mejores profesores universitarios, y que han sido determinadas mediante las siguientes preguntas:

- *¿Cómo motivan a sus alumnos?* Un "buen docente" posee como meta que sus alumnos se interesen genuinamente por aquello que se les intenta enseñar. Tal docente incentiva a sus alumnos a ser protagonistas de su propio proceso de aprendizaje, movilizando su curiosidad y sus inquietudes.
- *¿Cómo preparan las clases?* Un buen docente también se preocupa por atender una serie considerable de tareas al momento de preparar sus clases como, por ejemplo, determinar cuáles son las cuestiones fundamentales del curso y con qué elementos y situaciones abordar su enseñanza a partir de los conocimientos y expectativas de sus estudiantes, así como hacerles saber qué se espera de sus producciones.
- *¿Cómo gestionan las clases?* Un buen docente prioriza a los estudiantes por sobre la disciplina, al crear un entorno adecuado para el aprendizaje crítico natural. Les da lugar a sus alumnos, los ayuda a aprender a aprender y los atrae con su buena oratoria hacia el razonamiento disciplinar.
- *¿Cómo tratan a sus alumnos?* Un buen docente tiene a la confianza como forma principal de vinculación con sus alumnos. Confía en que sus estudiantes desean y pueden aprender. Es por ello que los anima a participar y se manifiesta abierto y entusiasmado por la enseñanza.
- *¿Cómo evalúan?* Un buen docente considera que la evaluación es una herramienta que favorece tanto los aprendizajes de los alumnos como la propia enseñanza. Siendo que el aprendizaje es un proceso que se desarrolla a lo largo del tiempo y que tiene como protagonistas a los estudiantes, el buen docente evalúa de manera permanente e invita también a los alumnos a autoevaluarse. Un docente que sabe evaluar explica, además, en forma clara y completa cuáles son los criterios por los que rige su evaluación y convierte a las calificaciones en un medio más por el cual comunicarse con sus estudiantes.

En esta oportunidad, dada la trascendencia que para la propia constitución o biografía tienen las valoraciones que otros emiten, en particular los docentes (Perrenoud, 2008), se comparte lo relativo a esta última dimensión que puntualiza peculiaridades de las prácticas evaluativas que distinguen a los docentes especialmente recordados por los ingresantes al PM de la UNR.

Método

El trabajo mixtura los enfoques cualitativo y cuantitativo, dado que se focaliza en reconocer tendencias en el cúmulo de datos y al mismo tiempo se presta atención a peculiaridades de interés. Es de tipo no experimental en contexto habitual de clase, con alcance descriptivo-interpretativo de las características emergentes en el asunto en cuestión. El diseño se concreta a través de un estudio de caso (Hernández, Fernández y Baptista, 2006), que procura comprender el fenómeno de la buena enseñanza desde la perspectiva de estudiantes (Malikow, 2006), que son ingresantes al PM de la UNR.

Esta perspectiva se considera relevante por las numerosas experiencias de los alumnos con diversos profesores. En efecto, los participantes son en su mayoría graduados recientes del nivel secundario de escuelas de la ciudad de Rosario, así como otras localidades del sur de la provincia de Santa Fe (Argentina) y, en menor cantidad, de provincias aledañas.

Puntualmente, se trata de 762 alumnos que cursaron la asignatura Práctica de la Enseñanza I (o su análoga según plan) de primer año entre los años 2002 y 2020 inclusive (es decir, las cohortes correspondientes a 19 años consecutivos).

La técnica de recolección es la encuesta física (Fig. 1), dispuesta en un papel pequeño (de 8cm x 6cm) a efectos de puntualizar solo en las cualidades solicitadas.

Figura 1. *Modelo de ficha que completan los ingresantes al PM*

Práctica de la Enseñanza I - año….
Docente 1: Nombre………………………………………………………………...
Asignatura…………………………………………………………Año…………..
Tres características positivas…………………………………………...………
……………………………………………………………………………………..
Docente 1: Nombre………………………………………………………………...
Asignatura…………………………………………………………Año…………..
Tres características positivas…………………………………………………...….
………………………………………………………………………………….......

Elaboración propia

La técnica de procesamiento es la de análisis de contenido (Ander-Egg, 2003), en sus diversas fases de transcripción de cualidades en una matriz de datos (Tabla 1), clasificación en dimensiones de análisis y agrupamiento conceptual en "familias" de cualidades, según afinidad semántica.

Tabla 1. *Matriz de datos empleada para el procesamiento*

Frecuencia	Dimensión 1	...	Frecuencia	Dimensión 5
...	Modalidad Dim1-1		...	Modalidad Dim5-1
...	Modalidad Dim1-2		...	Modalidad Dim5-2
	...			...
...	Modalidad Dim1-n1		...	Modalidad Dim5-n5

Elaboración propia

Resultados

Se han compilado 5.380 respuestas (o cualidades; además de 89 que solo dicen "buen profesor"), que se distribuyen en cada dimensión de Bain (2007) como indica la Tabla 2.

Tabla 2. *Cualidades en total, distintas entre sí y por familias reportadas por dimensión*

Dimensiones	Cualidades reportadas	Distintas Entre sí	Familias que las agrupan
¿Cómo motivan a sus alumnos?	398	89	8
¿Cómo preparan sus clases?	840	170	10
¿Cómo gestionan las clases?	1741	180	11
¿Cómo tratan a sus alumnos	1916	170	17
¿Cómo evalúan?	485	51	6

Elaboración propia

Se observa que las dimensiones *¿Cómo tratan a sus alumnos?* y *¿Cómo gestionan las clases?* son las que presentan las mayores frecuencias absolutas, siendo esta última en particular la que incorpora la mayor variedad de cualidades distintas entre sí; es decir, los participantes recurrieron a un amplio universo de palabras para reflejar la importancia de lo que transcurre o acontece en el marco del espacio clase. Se aprecia, además, en el número de familias por dimensiones, lo diversificado que son los aspectos tenidos en cuenta por los futuros profesores para detallar y especificar lo relevante del trato en la relación docente alumno.

Las cualidades correspondientes a las dimensiones *¿Cómo motivan a sus alumnos?* y *¿Cómo evalúan?* son las menos mencionadas. Además, en lo relativo a la evaluación, son notorios los aspectos concentrados que los estudiantes relacionan con la misma como lo exhibe el menor número de familias por dimensiones.

En la Tabla 3 se detallan las familias de cualidades para las cinco dimensiones, junto a sus frecuencias de aparición.

Tabla 3. *Familias de cualidades por dimensión de análisis*

Dimensiones	Familias	Frecuencias
¿Cómo motivan a sus alumnos?	El profesor disfruta de su tarea	154
	La materia genere interés	70
	Son invitados a dar lo mejor de sí	42
	El profesor está motivado	39
	Se capta su atención	24
	Aprenden de manera significativa	22
	El profesional es un profesional comprometido	22
	General: motivan a los alumnos	25
¿Cómo preparan las clases?	Con conocimiento	280
	Con responsabilidad	170
	Con dedicación	89
	Procurando la accesibilidad del conocimiento	65
	De manera diferente	65
	Con eficiencia	63
	Para contribuir al pensamiento de los alumnos	49
	Con actividades vinculadas a la realidad	31
	Con actividades y materiales para el estudio	28
	General: sabe preparar la clase	8
¿Cómo gestionan las clases?	Explicando y enseñando bien	575
	Destinando tiempo para el aprendizaje	406
	Siendo claros	223
	Siendo concisos	124
	Propiciando un ritmo adecuado	99
	Expresándose de manera adecuada	90
	Propiciando un clima agradable	74
	Propiciando herramientas transversales	58
	Promoviendo la participación estudiantil	57
	Con presencia imponente	26
	General: sabe manejar las clases	9

¿Cómo tratan a sus alumnos?	Con amabilidad y gracia Con comprensión Con compañerismo y demostrando que sus alumnos le importan Con calidad humana Con alegría De manera estricta Promoviendo respeto y disciplina Con generosidad Con apertura De manera personalizada Con sinceridad Siendo carismático Con afecto Estableciendo límites claros Siendo flexible Siendo humano General: tiene buen trato	350 287 225 214 151 131 120 89 64 52 48 45 43 40 14 13 30
¿Cómo evalúan?	Siendo exigentes Siendo equitativos Dando oportunidades De manera continua Mediante ciertos modos valorados General: evaluando bien	359 65 25 18 12 6

Elaboración propia

Se advierte la amplia variedad de familias que estructuran cada dimensión, poniendo de manifiesto que para estos estudiantes recordar a sus buenos docentes es sinónimo de pensar en profesionales de la educación que: explican y enseñan bien, destinan tiempo para el aprendizaje, son claros, se relacionan a través de un trato amable, con comprensión, siendo compañeros y demostrando que sus alumnos les importan, con calidad humana, con conocimiento y responsabilidad disfrutando de la tarea que realizan.

Cabe señalar que cada dimensión, e incluso familia, amerita un análisis por sí misma. En esta ocasión se focaliza la mirada en la quinta y última dimensión: *¿Cómo evalúan?* Específicamente en la Tabla 4 se indican las cualidades de cada familia reconocida en tal dimensión de interés en este reporte.

Se recuerda que las cualidades recuperan las expresiones textuales de los estudiantes cuando completaron la ficha presentada en la Fig. 1. El trabajo de las investigadoras estuvo asociado a clasificar esas cualidades mediante un análisis de contenido (Ander-Egg, 2003), a partir del reconocimiento en primer término de la dimensión de pertenencia (Bain, 2007) y luego de la familia según afinidad semántica, plasmándose el registro en la matriz ilustrada en la Tabla 1.

Tabla 4. *Cualidades de la dimensión "¿Cómo evalúan?"*

Familias	Cualidades	Frecuencias
Siendo exigentes	Exigente	349
	Estricto con el estudio	3
	Exigente con la materia	2
	Exigente con sus alumnos	1
	Exigente al examinar	1
	Exigente en su límite	1
	Exigente porque sabe que el alumno puede hacerlo mejor	1
	No tan exigente	1
Siendo equitativos	Justo	46
	Justo con las calificaciones	5
	Objetivo	5
	Razonable	5
	Equitativo	1
	Imparcial para evaluar	1
	Justo en exámenes	1
	Justo con el esfuerzo de cada uno	1
Dando oportunidades	Da oportunidades para todos	15
	Da muchas oportunidades	2
	Da posibilidades de aprobar	2
	Comprensivo ante el incumplimiento	1
	Promueve que sus alumnos aprueben	1
	Propone muchos recuperatorios	1
	Propone recuperatorios	1
	Reconoce	1
	Saca a sus alumnos adelante cuando les va mal	1
De manera continua	Observador	4
	Transmite la necesidad del esfuerzo	2
	Corrige todo	2
	Da posibilidades de aprobar	2
	Califica el cumplimiento de tareas	1
	Corrige	1
	Corrige de manera adecuada	1
	Efectúa seguimiento de sus alumnos	1
	Evalúa semanalmente	1
	Exige prontitud y agilidad para estudiar	1
	Exigente día a día	1
	Propone lecciones diarias	1
	Se ocupa de la situación de cada alumno en la materia	1
Mediante ciertos modos valorados	Califica adecuadamente	1
	Evalúa de manera didáctica	1
	Evalúa siendo coherente con lo que enseña	1
	Evalúa solo oralmente	1
	Examina solo lo importante	1
	Exige aprobar todos los temas	1
	No deja que los alumnos se copien	1
	No evalúa actitud	1

	Propone dos pruebas al año	1
	Propone evaluaciones difíciles	1
	Propone pruebas donde se relacionen los temas	1
	Utiliza formas de evaluar valoradas a posteriori por los alumnos	1

Elaboración propia

Se comprueba que *Exigente* es la cualidad con mayor frecuencia absoluta dentro de la dimensión *¿Cómo evalúan?* En correlato, *Siendo exigentes*, la familia a la cual pertenece, concentra casi las tres cuartas partes (74%) de toda la dimensión. Pensar la exigencia como cualidad remite a docentes que pueden dar significado y sentido profundo a la tarea de evaluar, en el marco de una estrategia pedagógica y acorde con el proceso educativo que se transita. Es decir, aluden a docentes que entienden a la evaluación en clave de oportunidad cuyo fin, como expresan Anijovich y Cappelletti (2017), es que los "estudiantes pongan en juego sus saberes, visibilicen sus logros, aprendan a reconocer sus debilidades y fortalezas, además de la función 'clásica' de aprobar, promover, certificar" (p.4).

En el resto de composición de esta quinta dimensión (26%), confluye con aproximadamente la mitad de concurrencia (13,4%) el concepto de equidad en la valoración de los desempeños estudiantiles. En efecto, esta idea fue destacada por los aspirantes a profesor mediante la cualidad *Justo*, que se posiciona en un segundo lugar conforme a su frecuencia e integra la familia *Siendo equitativos*. Apreciar el aspecto equitativo de la evaluación en docentes referentes lleva a preguntarse cómo incidirán las concepciones sobre la evaluación justa (Murillo e Hidalgo, 2018) en sus futuras prácticas evaluativas. Posiblemente sea a través de dispositivos que atiendan el contexto y la situación de cada estudiante, valorando el esfuerzo y los avances sucesivos. Una re-pregunta para trabajar transversalmente durante la PPD en el PM de la UNR es "¿cómo propiciar prácticas equitativas desde la Educación Matemática?" (Valero, 2017).

Finalmente, fueron destacados especialmente los docentes que otorgan oportunidades en el proceso de aprendizaje y que realizan seguimientos de ese proceso mediante una evaluación continua; reuniendo cada una de estas dos familias el 5,15% y 3,9% respectivamente. Se refuerza la idea de la evaluación formativa que, como expresa Perrenoud (2008), "nunca debería impedir una pedagogía diferenciada, activa, constructiva, abierta, cooperativa, eficaz, sino ponerse a su servicio" (p.222). Se observa que los procesos evaluativos destacados están asociados siempre a la didáctica, y a docentes comprometidos con su profesión. También se indicaron variados modos particularmente ponderados, alentando diversidad en las estrategias evaluativas.

Conclusiones

La forma en que los aspirantes a profesor en Matemática recuerdan haber sido evaluados por aquellos docentes memorables no les es indiferente. Incluso se detienen de modo espontáneo -dado que no se los interpela explícitamente sobre este asunto (Fig. 1)- en peculiaridades que en su conjunto constituyen una evaluación al servicio de los procesos de enseñanza y aprendizaje implicados.

En particular, *Exigente* ha sido una de las cualidades sobresalientes año a año que, junto con *Explica bien* y *Paciente* (pertenecientes a las dos primeras familias de la dimensión *¿Cómo gestionan las clases?* -Tabla 3-), ocupa los primeros puestos en cuanto a frecuencia de aparición (Sgreccia, Cirelli y Vital, 2019). A esas tres cualidades, le siguen *Buena persona*, *Claro* y *Comprensivo*, también con importante recurrencia (dos de ellas de la dimensión *¿Cómo tratan a los alumnos?*).

Estas cualidades que acompañan mayoritariamente a "exigente" (…) dan cuenta de un docente que, si bien exige, "da": se brinda hacia sus estudiantes desde la explicación, claridad, paciencia, comprensión y calidad humana. Se puede decir que se valora al docente que exige cuando procura, por todos los medios posibles, sacar lo mejor de sus alumnos (Sgreccia, Cirelli y Vital, 2015, p.12).

Al parecer, muchos futuros docentes no se detienen a meditar demasiado aún en aspectos más profundos del hecho de evaluar. La característica que más los ha marcado acerca de la evaluación es la exigencia. Siendo que estos estudiantes recién se encuentran al comienzo de su formación inicial, es de esperar que con los nuevos conocimientos y vivencias en el transcurso de sus estudios superiores consideren para sus propias prácticas evaluativas otros elementos vinculados con este necesario componente articulador de los procesos de enseñanza y aprendizaje, en general, y de la Matemática en particular. Aspectos como ¿qué criterios ponderar?, ¿de qué modo re-trabajar ante dificultades estudiantiles?, ¿qué tipos de retroalimentaciones favorecer?, ¿por qué se producen ciertos errores ante determinados contenidos?... se constituyen en insumos a fortalecer gradualmente durante el trayecto de la PPD en el PM de la UNR.

De todos modos, esta exigencia así vivida invita a un compromiso mutuo en el que ese otro, en situación de docente o de estudiante, importa. Este compromiso se refuerza con señales de coherencia en las múltiples instancias del proceso que dan idea de justicia y equidad.

Sucintamente, las componentes del proceso de evaluación vinculadas con la posibilidad real de ayudar a los estudiantes a aprender y a reconocerse como aprendices parece perfilarse como una de las claves de prácticas evaluativas de docentes memorables que son especialmente recordados por aspirantes a profesor en Matemática.

En este entramado disciplinar-didáctico se conjugan de manera dinámica los dominios del conocimiento matemático para la enseñanza del profesor, dado que en el acto de evaluar se activa el contenido matemático por sí mismo, pero al mismo tiempo puesto en relación con otros contenidos a través del currículum, así como con decisiones propias del tratamiento que ese contenido pueda tener en términos de enseñanza. Amalgama, simultáneamente, lo relativo a los sujetos de aprendizaje con los que el profesor está interactuando, los principios didácticos específicos y los programas curriculares jurisdiccionales que rijan. Un docente exigente y justo al evaluar, que se entrega a sus estudiantes, combina esos componentes de modo equilibrado cada momento, cada vez, con cada contenido, con cada circunstancia, con cada alumno, en cada lugar.

Referencias

Álvarez, Z., Porta, L. y Sarasa, M.C. (2011). Buenas prácticas docentes en la formación del profesorado: Relatos y modelos entramados. *Revista de Currículum y Formación del Profesorado*, 15(1), 241-252. Recuperado de https://revistaseug.ugr.es/index.php/profesorado/article/view/20173.

Ander-Egg, E. (2003). *Métodos y Técnicas de Investigación Social IV. Técnicas para la recogida de datos e información*. Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Lumen.

Anijovich, R. y Cappelletti, G. (2017). *La evaluación como oportunidad*. Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Paidós.

Bain, K. (2007). *Qué hacen los mejores profesores universitarios*. Valencia: Universitat de València.

Ball, D., Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching. What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407. Recuperado de https://doi.org/10.1177/0022487108324554.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2006). *Metodología de la investigación* (4ª ed.). Ciudad de México: Mc Graw Hill.

Malikow, M. (2006). Effective teacher study. *National Forum of Teacher Education Journal*, *16*(3), 1-9. Recuperado de http://www.nationalforum.com/Electronic%20Journal%20Volumes/Malikow,%20Max%20Effective%20teacher%20Study.pdf.

Murillo, F.J. e Hidalgo, N. (2018). Las concepciones sobre una evaluación justa de los estudiantes. Un estudio fenomenográfico desde la perspectiva de los docentes. *Revista Complutense de Educación*, *24*(4), 959-1010. Recuperado de https://doi.org/10.5209/RCED.54405.

Pennac, D. (2008). *Mal de escuela*. Barcelona: Mondadori.

Perrenoud, P. (2008). *La evaluación de los alumnos*. Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Colihue.

Santaló, L. (1999). La formación de profesores de matemática para la enseñanza media. En L. Santaló (Coord.). *Enfoques: Hacia una didáctica humanista de la matemática* (pp.209-214). Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Troquel.

Sgreccia, N., Cirelli, M. y Vital, M.B. (2015). *Docentes memorables destacados por ingresantes al Profesorado en Matemática. Hacia una tipología de análisis*. Ponencia presentada en las VIII Jornadas Nacionales y I Congreso Internacional sobre la Formación del Profesorado. Mar del Plata, octubre.

Sgreccia, N., Cirelli, M. y Vital, M.B. (2019). Cualidades de profesores en matemática recordados como buenos por futuros profesores en matemática. *Revista Iberoamericana de Educación Superior*, *10*(27), 172-193. Recuperado de https://doi.org/10.22201/iisue.20072872e.2019.27.346.

Valero, P. (2017). El deseo de acceso y equidad en la educación matemática. *Revista Colombiana de Educación*, (73), 99-128. Recuperado de https://doi.org/10.17227/01203916.73rce97.126.

Zárate, M.J. (2016). La biografía escolar como instrumento para la reflexión de los conocimientos previos y construidos durante la formación docente en torno al “cómo enseñar”. *Ensayos Pedagógicos*, *11*(2), 83-97. Recuperado de https://doi.org/10.15359/rep.11-2.4.

LICENCIATURA INTERCULTURAL INDÍGENA *TEKO ARANDU*: HABILITAÇÃO EM MATEMÁTICA E AS TECNOLOGIAS DIGITAIS

TEKO ARANDU INDIGENOUS INTERCULTURAL DEGREE: MATHEMATICS' GRADUATION AND DIGITAL TECHNOLOGIES

Karla Jocelya Nonato, Nielce Meneguelo Lobo da Costa
Universidade Anhanguera de São Paulo (Brasil)
karlanonato@yahoo.com.br, nielce.lobo@anhanguera.com

Resumo

A cidade de Dourados, no Mato Grosso do Sul, concentra a maior reserva indígena urbana do Brasil e, consciente do contexto singular em que está inserida, a Universidade Federal da Grande Dourados (UFGD) oferece um curso de formação inicial de professores para indígenas: a Licenciatura Intercultural Indígena – *Teko Arandu* (LIND), com habilitações distintas, sendo uma delas em Matemática. O objetivo deste artigo foi identificar as características do *Teko Arandu*: habilitação em Matemática, no que tange à integração das tecnologias digitais ao currículo. Para tal, analisamos o Projeto Pedagógico (PP) do curso, sob a ótica da Enculturação Matemática, por meio de análise documental de cunho interpretativo. Como resultados, identificamos características da Enculturação Matemática no currículo proposto. Constatamos que as TDIC são pouco exploradas no curso, sendo o foco do PP a Educação Intercultural para promover o resgate sociocultural e assegurar os direitos humanos dos povos indígenas.

Palavras-Chave: enculturação matemática, currículo, formação de professores de matemática.

Abstract

The city of Dourados, in Mato Grosso do Sul, concentrates the largest urban indigenous reserve in Brazil and, being aware of the unique context in which it is inserted, the Federal University of Grande Dourados (UFGD) offers an initial teacher training course for indigenous people: the Indigenous Intercultural Degree – Teko Arandu (LIND), with different qualifications, one of them in Mathematics. The aim of this paper was to identify the characteristics of Teko Arandu: qualification in Mathematics, regarding the integration of digital technologies into the curriculum. So, we analyzed the Course Pedagogical Project (PP), from the perspective of Mathematical Enculturation, through documentary analysis of an interpretative nature. As a result, we identified characteristics of Mathematical Enculturation in the proposed curriculum. We found that digital intercultural technologies are little explored in the course, with the PP being focused on Intercultural Education to promote socio-cultural rescue and ensure the human rights of indigenous population.

Key words: mathematical enculturation, curriculum, mathematics teacher training.

Introdução

Com as tecnologias digitais tão presentes no nosso dia a dia, é difícil imaginar alguém que viva sem acesso ao conhecimento produzido por elas, sobretudo nos centros urbanos. São visíveis as transformações sociais e culturais postas pelas tecnologias digitais, pois seus constantes avanços condicionam o modo de pensar das pessoas e de estar em sociedade (Nonato y Lobo da Costa, 2020). Considerando esse contexto, as Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC) devem se fazer presentes nos espaços de aprendizagens, como as escolas e universidades, de modo a preparar as gerações futuras para o seu uso.

A geração atual já vive na era digital, em que as tecnologias digitais, para grande parte das pessoas, estão presentes nas atividades mais corriqueiras. Levar as TDIC para o cotidiano escolar passa pela questão da formação de professores. Discutir com os professores e futuros professores sobre formas de integrar as TDIC ao ensino de Matemática é essencial para promover transformações que visem aproximar os modelos de ensino e de aprendizagem escolar com os novos modos de aprender dos estudantes do século XXI.

Estimular discussões sobre essas transformações é desafiante, entretanto, a Licenciatura Indígena tem um desafio a mais: formar professores indígenas que consigam valorizar a sua cultura sem, contudo, se conformarem em ficar à margem da sociedade mais uma vez. Para este estudo, nos concentramos em investigar a problemática no contexto da formação inicial de Professores de Matemática Indígenas.

Os indígenas possuem uma cultura própria, na qual utilizam técnicas e tecnologias seculares, distintas das tecnologias da sociedade dita digital, caracterizada pela velocidade e inovação. A formação do docente para atuar em escolas indígenas deve valorizar uma educação intercultural e preocupada com os direitos humanos dos povos indígenas e, ao mesmo tempo, respeitar o fato de os indígenas estarem vivendo em um outro momento histórico, com características a serem consideradas. Almeida (2014), pontuam que formar professores com a integração das tecnologias digitais é um desafio, neste contexto nos parece um desafio maior, pois além da diversidade cultural, há a premência da inclusão indígena na sociedade digital.

Dados de 2010, ano do último Censo realizado no Brasil pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), indicaram que a população indígena era de 817.963 índios, sendo os Tikúna a maior etnia, seguida pelos Guarani e Kaiowá. O Estado de Mato Grosso do Sul (MS) se destaca como um dos principais espaços de concentração de índios, sendo o Estado com o segundo (2º) maior número de terras demarcadas como indígenas[1]. A reserva indígena urbana mais populosa do país é a de Dourados-MS, com densidade demográfica superior a 5 vezes a densidade demográfica de Campo Grande, capital do Estado (IBGE, 2012).

Consciente deste contexto singular, a Universidade Federal da Grande Dourados (UFGD) oferece, desde o ano 2006, um curso de formação inicial de professores para indígenas. O curso de Licenciatura Intercultural Indígena – *Teko Arandu* (LIND) é uma "formação superior específica para professores Guarani e Kaiowá" (UFGD, 2012, p. 08) que visa o resgate cultural e histórico dos indígenas, o simples direito à Educação, "previsto desde as primeiras cartas que remetem à noção de direitos humanos." (Caldas, 2016, p. 19). *Teko* no idioma guarani significa cultura e *Arandu* significa conhecimento ou escutar. *Teko* vem da raiz linguística *tekoha* – território, então, *Teko Arandu* seria conhecer ou escutar a cultura, o território, como "o lugar em que vivemos segundo nossos costumes", mas, como em Guarani, segundo Cunha (2016), a combinação das palavras muda o seu sentido, *Teko Arandu* seria "aprender com sabedoria", o que também faz sentido para um curso de Licenciatura bilingue.

O objetivo da pesquisa que embasa este artigo foi o de identificar as características do curso de Licenciatura Intercultural Indígena – *Teko Arandu*: habilitação em Matemática - ofertado pela Universidade Federal da Grande Dourados (UFGD), no que tange à integração das tecnologias digitais ao currículo do curso. Para tal, nos

[1] https://www.gov.br/funai/pt-br

debruçamos sobre o Projeto Pedagógico (PP) do curso, elaborado em conjunto, por profissionais da Educação de cinco universidades, a saber: Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Universidade Católica Dom Bosco, Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, Universidade Federal de Roraima, Universidade Federal de Mato Grosso e por profissionais das Secretarias Municipais de Educação do MS, da Fundação Nacional do Índio, do Ministério da Educação e por políticos locais, além da participação de professores das etnias Guarani e Kaiowá.

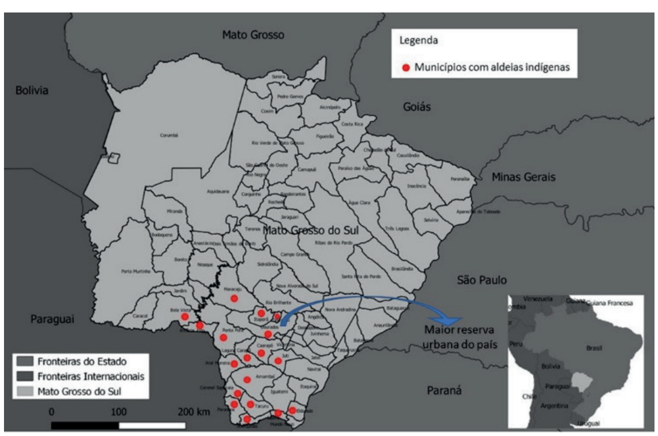
O Contexto do curso de Licenciatura Intercultural Indígena – *Teko Arandu*

A Universidade Federal da Grande Dourados (UFGD) localiza-se em Dourados-MS e oferta o curso de Licenciatura Intercultural Indígena – *Teko Arandu* (LIND), entre outros cursos, incluindo Licenciaturas. Foi fundada em 2005 a partir do desmembramento da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS), pela Lei Nº 11.153, de 29 de julho de 2005.

Em 2006 sete (07) novos cursos foram criados, entre eles a Licenciatura Intercultural Indígena, com a implementação do Programa de Apoio à Formação Superior e Licenciaturas Interculturais Indígenas – PROLIND (Cunha, 2016). O PROLIND é uma proposta da Secretaria de Educação Continuada, Alfabetização, Diversidade e Inclusão (SECADI), vinculada ao Ministério da Educação (MEC), que apoia projetos de Licenciaturas específicas para formar professores indígenas que exercerão a docência em escolas indígenas.

Um dos maiores desafios e principal prioridade para "consolidação de uma educação pautada pelos princípios da diferença, da especificidade, do bilinguismo e da interculturalidade" (Cunha, 2016, p. 25) é conseguir formar professores indígenas. Diante deste cenário, a UFGD oferta na sua sede, o curso de Licenciatura Intercultura Indígena – *Teko Arandu* (LIND), em parceria com a Universidade Católica Dom Bosco (UCDB), a Secretaria de Estado de Educação de MS (SED-MS), a Fundação Nacional do Índio (FUNAI), o Movimento dos Professores Indígenas Guarani e Kaiowá e as Secretarias Municipais de Educação dos dezoito (18) municípios do estado de MS em que existem comunidades Guarani e Kaiowá (Amambai, Antônio João, Aral Moreira, Bela Vista, Caarapó, Coronel Sapucaia, Douradina, Dourados, Eldorado, Itaporã, Japorã, Juti, Lagura Caarapã, Maracaju, Paranhos, Ponta Porã, Sete Quedas e Tacuru) (UFGD, 2012, p. 07).

Figura 1: *Imagem do mapa do MS, destacando os municípios com população das etnias Guarani e Kaiowá que participam da LIND*



Cedido por Julianna Colares Rodrigues e adaptado pelas autoras.

Estima-se que 30% da população Guarani e Kaiowá do Brasil encontra-se no Estado de MS e 72% dela esteja em idade escolar (UFGD, 2012, p. 08). Para atender a esta demanda, o Estado de Mato Grosso do Sul (MS) e seus municípios mantêm 65 unidades escolares (entre escolas e extensões) no segmento da Educação Básica. Nestas escolas têm poucos professores indígenas habilitados em nível superior para atender às áreas de conhecimentos necessárias aos níveis do Ensino Fundamental Anos Finais e Ensino Médio.

Na situação descrita, a realidade é a da presença de professores não indígenas, atendendo alunos indígenas, em escolas indígenas. Esses professores nem sempre conhecem a realidade das comunidades nas quais lecionam, a cultura ou a língua desse povo, assim sendo, frequentemente o ensino é realizado pela “simples transferência dos currículos das redes oficiais para as aldeias, inteiramente em português. As línguas e culturas indígenas foram silenciadas e desvalorizadas [...] sem preocupação com os etnoconhecimentos e processos de aprendizagem de cada sociedade indígena” (UFGD, 2012, p. 09).

Segundo o IBGE (2012), a taxa de analfabetismo entre os indígenas é de 33,4% e somente 37,4% dos indígenas falam seu dialeto, considerando o desgaste cultural e o contexto apresentado, o curso de Licenciatura Intercultural Indígena, sendo bilíngue, colabora na valorização das contribuições Guarani e Kaiowá na construção do conhecimento e propiciam oportunidades para o contato com conhecimentos produzidos pela humanidade fora das aldeias, como as TDIC. Assim, de acordo com o “público-alvo”, constante no Projeto Pedagógico (PP), só podem ingressar no curso professores indígenas em exercício nas comunidades de MS (UFGD, 2012, p. 14) e aprovados no vestibular, que oferta sessenta (60) vagas.

O curso de Licenciatura Plena em Educação Intercultural (LIND) é ofertado na Faculdade Intercultural Indígena (FAIND/UFGD) neste formato, desde 2012, e tem quatro habilitações: Ciências Humanas; Linguagens; Matemática e Ciências da Natureza.

O primeiro ano (Bloco I – núcleo comum) da LIND é o único para todos os licenciandos, no segundo ano, o curso é desmembrado nas quatro habilitações (Bloco II – núcleo específico), cada um com 15 vagas. Devido ao nosso objetivo, vamos analisar a Licenciatura em Educação Intercultural Indígena com habilitação em Matemática, sob a luz da Enculturação Matemática de Bishop.

Aculturação e Enculturação Matemática

Ao longo da educação escolar, quando vivenciam um currículo pensado para escolas não indígenas, os índios são aculturados, ou seja, são apresentados aos indígenas os conhecimentos da cultura dominante, desconsiderando seu idioma, seus saberes, peculiaridades e os elementos da cultura que preservam a identidade dos educandos (D'Ambrosio, 1990). O processo de aculturação vai na contramão do processo de enculturação. A aculturação é um processo de transformação cultural de um povo, de uma comunidade, que se molda a outra cultura. É o processo de integração dos indivíduos aos modos, valores e crenças da cultura social dominante.

Já a Enculturação Matemática, que fundamenta esta pesquisa, é entendida como a busca para preservar e fortalecer os valores culturais de uma determinada comunidade sem, contudo, desconsiderar o conhecimento acumulado por meio de diversas outras culturas (Bishop, 1988).

O processo de Enculturação Matemática começa na infância e deve ser fortalecido pela escola (Lobão y Nepomuceno, 2008), mas para isso, segundo Bishop (1988), os professores precisam estar cientes do seu papel no processo de Enculturação Matemática, incluindo os professores universitários e idealizadores dos currículos dos cursos de formação. Entretanto, para que os futuros professores de Matemática – que serão enculturadores matemáticos, sejam enculturados matematicamente, eles devem saber os aspectos formais da Cultura Matemática e também serem conhecedores de seus valores culturais (neste caso, indígenas), além de dominar os aspectos simbólicos da Matemática.

Para ser um enculturador matemático é necessário passar por um processo que envolve "seleção, formação, capacitação etc"[2] (Bishop, 1988, p. 167). Considerando o foco deste artigo, discutiremos o processo de "formação" identificado na Enculturação Matemática.

Bishop (1988) coloca que ele "procuraria" esses "princípios" em enculturadores matemáticos. Isso significa dizer que os cursos de formação inicial de professores devem oferecer condições para que os licenciandos possam:

- desenvolver uma compreensão ampla da matemática como fenômeno cultural,
- desenvolver uma compreensão profunda dos valores da cultura matemática,
- melhorar a compreensão e competência no campo simbólico da matemática,
- desenvolver seu conhecimento e compreensão do nível técnico da cultura matemática,
- desenvolver um meta-conceito do processo de enculturação matemática em geral. (Bishop, 1988, p. 175)

Desta forma, entendemos que a Enculturação Matemática é um processo que ocorre entre professores e alunos (neste caso, licenciandos), institucionalizado (aqui, pela UFGD) e que mesmo sofrendo intervenção de outros personagens no seu ambiente de realização, é um processo proposital e gerido para formar ideias.

A Matemática é um produto cultural, todas as culturas desenvolvem atividades estimuladas pelas necessidades dos seres humanos em sua relação com o meio físico, social e cultural, ajudando no desenvolvimento das ideias matemáticas (Bishop, 1988). Ao se estruturar um currículo de Matemática que possibilite a Enculturação Matemática é preciso contemplar três componentes essenciais: o componente simbólico, o componente social e o componente cultural.

O componente simbólico se refere às explicações dos conceitos e à linguagem matemática. O componente social apresenta explicitamente os usos que a sociedade faz para explicar a realidade pela Matemática. O componente cultural se refere à ideia da Matemática enquanto fenômeno presente em todas as culturas, bem como a relação dos matemáticos com a abstração e com a Matemática. Assim, o componente simbólico indica qual Matemática precisamos conhecer, o componente social esclarece qual uso fazemos da Matemática, ao passo que o componente cultural aclara sobre como se originaram os conceitos, procedimentos e, enfim, a Matemática como a temos hoje.

Método

A metodologia da pesquisa foi a qualitativa e, para entender o processo de formação de professores indígenas da UFGD - habilitação em Matemática, analisamos o Projeto Pedagógico (PP) do curso nos aspectos relativos ao processo de formação dos licenciandos indígenas que optam pela habilitação em Matemática. A abordagem apresenta caráter descritivo dos dados, nos documentos públicos do curso, com análise documental, de cunho interpretativo.

A UFGD disponibiliza documentos relacionados ao curso de Licenciatura Intercultural Indígena – *Teko Arandu* (LIND) publicamente no site da instituição (https://portal.ufgd.edu.br/). Optamos por analisar o PP, denominado pela própria instituição como um "documento", por considerá-lo uma fonte primária de dados (Cellard, 2008), rica de informações e que ainda não recebeu tratamento analítico.

Para compreensão do documento selecionado, realizamos uma leitura minuciosa, nas entrelinhas, como se estivéssemos dialogando com os autores do PP, interpretando os dados segundo o que estabelece Severino (2007), sob o prisma da Enculturação Matemática, com foco nas TDIC e, adotando uma posição de respeito às ideias postas pelos autores, explorando a fecundidade delas. O PP apresenta o funcionamento do curso, dada que é uma formação inicial docente diferente das demais, seu projeto também o é. A análise segue a ordem pré-estabelecida pelo próprio

[2] Tradução das autoras.

documento (PP), assim sendo, começamos pelos aspectos globais do curso de Licenciatura Intercultural Indígena e, posteriormente, focamos na habilitação em Matemática, a qual apresenta uma nova introdução e objetivos. A análise foi centrada na matriz curricular da habilitação em Matemática, utilizamos como descritores dos componentes simbólico, social e cultural.

Para as interpretações do PP nos apoiamos na hermenêutica de profundidade (Thompson, 2011). A Hermenêutica de Profundidade (HP) colabora na interpretação das formas simbólicas que são concebidas em contextos sociais e históricos definidos (comunidades indígenas), que influenciam no seu desenvolvimento. A HP é estruturada em três fases: Análise Sócio-Histórica, Análise Formal ou Discursiva, e Interpretação/Reinterpretação.
Na próxima seção exploramos detalhadamente o PP da Licenciatura Intercultural Indígena – *Teko Arandu* (LIND), ofertada pela UFGD e as TDIC.

Análise dos dados

O curso de LIND é organizado em 4.182h na metodologia de alternância. Esse método, segundo o PP é "o parcelamento do curso em tempos e espaços diferentes e complementares: parte do curso é desenvolvida presencialmente, na Universidade (Tempo Universidade – TU) e parte nas comunidades indígenas (Tempo Comunidade – TC)." (UFGD, 2012, p. 12).

A interatividade entre os diferentes tempos e espaços acontece por meio da "intervenção sociocultural, isto é, os saberes/realidades indígenas interferem no planejamento das aulas na Universidade" (IBID), as quais os licenciandos, com acompanhamento dos professores do curso, em forma de pesquisa-ação, devem intervir na realidade social e educacional das comunidades onde lecionam, pois a escola deve fazer o papel de mediadora entre os conhecimentos (Bishop, 1998).

No "Tempo Universidade" são desenvolvidos os componentes curriculares com a coordenação dos professores do curso. Estes momentos ocorrem quatro vezes ao ano, cada encontro dura 14 dias, no qual são computados 10h por dia. No "Tempo Comunidade" os conhecimentos produzidos localmente pelos indígenas são abordados na escola, na "prática pedagógica escolar e não escolar." (UFGD, 2012, p. 13), a enculturação pode ocorrer através da transmissão assistemática, com os indígenas construindo o conhecimento a partir da experiência do cotidiano, sem demarcação formal. (Lobão y Nepomuceno, 2008).

O PP descreve que apesar do resgaste cultural e histórico, não pretende manter os licenciandos e, posteriormente os indígenas (alunos escolares), alienados ao desenvolvimento da humanidade ou em relação as TDIC, conforme podemos observar nos componentes curriculares do 5º e 6º períodos (quadro 1). Pontua que a produção do conhecimento também pode acontecer através da "apropriação de conhecimentos" já consolidados. Também destaca que "informática, bem como outras tecnologias, será utilizada como instrumentos de apoio" (UFGD, 2012, p. 18), ou seja, não há preocupação com a integração das TDIC, mas elas serão utilizadas sempre que necessário.

O currículo de Enculturação Matemática, proposto por Bishop (1988) possui algumas características, assim, elegemos a categoria referente a presença no PP dos componentes. Os descritores dos componentes curriculares são: simbólico, social e cultural.

Neste primeiro momento, analisamos os quadros das componentes curriculares, apresentados conforme a presença das TDIC foram observadas.

Quadro 1: *Componentes curriculares da Área de Matemática: 5º e 6º períodos.*

Componente Curricular	Período/Tema
Tópicos de Aritmética e Álgebra I	5º - Matemática e a linguagem: universalidade e singularidades.
Números e Operações II	
Estágio Supervisionado em Matemática I	
Estudos de figuras planas e espaciais	
Atividades Acompanhadas em Matemática III	
Diversos contextos políticos, sociais e culturais e conteúdo matemático: Funções	6º - O estudo da Matemática e suas relações com as diferentes formas do conhecimento.
Espaço Forma: Semelhança de figuras	
Tópicos de Aritmética e Álgebra II	
Matemática, tecnologia e ciência: comunidade e comunicação	
Atividades Acompanhadas em Matemática IV	

Adaptado de UFMS, 2012.

A Matemática é considerada uma forma de linguagem e o que predomina nos currículos das escolas indígenas é a Matemática formal (quadro 2), assim, o PP busca formar professores que compreendam a Matemática formal (Bishop, 1988, p. 175), mas sejam capazes de “trabalhar com os dois conhecimentos, o indígena e o não indígena”. (UFGD, 2012, p. 88). As ementas do curso trazem as TDIC de forma bem tímida, das trinta disciplinas, apenas três discorrem sobre seu uso nas ementas.

Apresentar conceitos matemáticos como – Aritmética, Álgebra, Números e operações etc. – são características da presença do componente simbólico no currículo de Matemática. Atividades Acompanhadas em Matemática e Estágio Supervisionado em Matemática são realizadas nas comunidades indígenas, local onde o licenciando poderá fazer ou acompanhar os indígenas fazendo o uso da Matemática, caracterizando o componente social. Os dois temas possuem características do componente cultural, o tema “Matemática e a linguagem” ao frisar a linguagem, visto que a graduação é bilingue e o tema “O estudo da Matemática e suas relações com as diferentes formas de conhecimento” ao considerar o conhecimento indígena e os conhecimentos distintos destes.

Quadro 2: *Componentes curriculares da Área de Matemática: 7º e 8º períodos.*

Componente Curricular	Período/Tema
Conceitos fundamentais da Matemática Elementar: Problemas de Contagem	7º - Tópicos Fundamentais para o ensino da Matemática.
Conceitos fundamentais da Matemática Elementar: Funções	
Conceitos da Matemática Elementar: Noções básicas de Álgebra Linear	
Estágio Supervisionado em Matemática II	
Atividades Acompanhadas em Matemática V	
Noções básicas de Cálculo Diferencial	8º - Pressupostos teóricos para o ensino da Matemática.
Conceitos Fundamentais da Matemática Elementar: Noções de Geometria Analítica	
Matemática, Bilinguismo e Educação	
Trabalho de Conclusão de Curso em Matemática	
Atividades Acompanhadas em Matemática VI	

Adaptado de UFMS, 2012.

As TDIC estão concentradas no 5º e 6º períodos (quadro 1) e estão indicadas nas disciplinas de “Estudos de Figuras Planas e Espaciais”, como apoio para o estudo de Geometria” (IBID, p. 98) e em “Matemática, Tecnologia e Ciência, Comunidade e Comunicação" com ementa toda voltada para o uso das tecnologias digitais e a "importância de o professor estar conectado". (UFGD, 2012, p. 99). As TDIC são propostas antes, no 4º período (quadro 3) na disciplina de "Diversos contextos políticos, sociais e culturais e conteúdo matemático: razão e proporção", quanto a resolução de problemas cotidianos de juros relacionados à sociedade capitalista (UFGD, 2012, p. 95).

No quadro 2, os conceitos matemáticos como – Problemas de Contagem, Funções, Álgebra Linear etc – são características da presença do componente simbólico no currículo de Matemática. Atividades Acompanhadas em Matemática e Estágio Supervisionado em Matemática são realizadas nas comunidades indígenas, como no anterior, caracterizando o componente social. Matemática, Bilinguismo e Educação possui característica do componente cultural ao relacionar a Matemática, a Educação, a Língua Indígena e a Portuguesa como conteúdo e a ser explorado.

Quadro 3: *Componentes curriculares da Área de Matemática: 3º e 4º períodos.*

Componente Curricular	Período/Tema
As diferentes escritas dos números, maneiras de contar e de classificar de diversos povos	3º - O estudo das diferentes maneiras de contar, medir, pôr em ordem e classificar o mundo.
O estudo da Matemática e suas diferentes maneiras de medir	
Espaço e forma e suas dimensões em diferentes contextos culturais	
Laboratório de Ensino de Matemática/As diferentes escritas dos números, de contar, de classificar de diversos povos	
Atividades Acompanhadas em Matemática I	
Números e Operações I	4º - O estudo da Matemática e suas relações com as práticas cotidianas.
Diversos contextos políticos, sociais e culturais e conteúdo matemático: razão e proporção	
Diversos contextos políticos, sociais e culturais e conteúdo matemático: tratamento da informação	
Ensino de Matemática em escolas indígenas: possibilidades da Etnomatemática	
Atividades Acompanhadas em Matemática II	

Adaptado de UFMS, 2012.

Os conceitos matemáticos – medir, razão e proporção, tratamento da informação etc – apresentados no quadro 3, são características da presença do componente simbólico. Atividades Acompanhadas em Matemática, assim como nos demais casos, está no componente social. O tema "O estudo das diferentes maneiras de contar, medir, pôr em ordem e classificar o mundo" e "O estudo da Matemática e suas relações com as práticas cotidianas" possuem características do componente cultural, se considerarmos a cultura indígena nas "diferentes maneiras" e nas "práticas cotidianas", havendo, neste momento, uma intersecção com o componente social, dependendo da abordagem do professor, mas considerando que a Licenciatura tem parte da sua carga horária desenvolvida na comunidade indígena, ponderamos que ocorra.

Ao analisarmos as referências bibliográficas indicadas para as disciplinas, em "O estudo da matemática e suas diversas formas de medir" (quadro 3), nos chamou a atenção o fato de os "Parâmetros Curriculares Nacionais" constarem nas "Referências Básicas" e o "Referencial Curricular para as escolas Indígenas" aparecer somente nas "Referências Complementares". Ainda em relação as referências, observamos que elas contemplam tanto obras clássicas presentes nas Licenciaturas em Matemática, quanto títulos que discutem a Matemática de grupos étnicos identificados (indígenas, por exemplo), como os de Etnomatemática, o que está alinhado à proposta do curso e a proposta da Enculturação Matemática. Há poucos livros especializados nas bibliografias, devido as particularidades das etnias e as poucos publicações disponíveis.

O PP retoma a parte textual, para apresentar as "Atividades Acadêmicas articuladas aos Ensino de Graduação", iniciando pela Prática como Componente Curricular que perfaz um total de 400h, distribuída ao longo do curso, envolvendo "práticas de formação profissional e reflexões pedagógicas dessas ações, a partir do que foi abordado em cada componente curricular e do conhecimento da própria realidade." (UFGD, 2012, p. 107). Os licenciandos, devem cumprir 200h de "Atividades Complementares", esta possui Regulamento Específico, de acordo com as normas do Regulamento Geral dos Cursos de Graduação da UFGD.

Apesar de os licenciandos da LIND já exercerem a docência, eles devem realizar o Estágio Supervisionado. Se exercem a docência na área da habilitação, nas séries finais do Ensino Fundamental ou no Ensino Médio, o licenciando é dispensado de cumprir 50% das 400h de Estágio, mediante comprovação. O Estágio Supervisionado segue as orientações dispostas em Regulamento Específico, de acordo com as normas do Regulamento Geral dos Cursos de Graduação da UFGD.

Ao final do curso os licenciandos devem apresentar um Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), podendo ser "em forma de Monografia, artigo, material didático ou vídeo sob orientação de um docente" e de acordo com a habilitação cursada. O PP discorre sobre o Sistema de Avaliação em detalhes: avaliação da aprendizagem (critérios de avaliação do aluno, instrumentos e avaliação e critérios de aprovação e reprovação), Avaliação Interna e Avaliação Externa.

Ao analisar a seção sobre os recursos humanos, constatamos que o quadro de professores do curso é composto por nove (09) doutores, seis (06) mestres e um (01) especialista, totalizando dezesseis (16) professores. O corpo docente tem dedicação exclusiva ao curso, ou jornada de tempo integral, a exceção do professor especialista, cujo tempo de dedicação é parcial.

A habilitação em Matemática da LIND tem à disposição três laboratórios de Ensino no prédio da FAIND. O PP não detalha os equipamentos presentes nos laboratórios. Quanto ao acesso as tecnologias digitais, todos os laboratórios de informática, com acesso à internet, dos dois (02) *campi* da UFGD podem ser utilizados, entretanto não há laboratório próprio.

Conclusão

A população indígena brasileira continua a margem da sociedade, apesar do crescente movimento em incluí-los em espaços como as universidades, por exemplo. Desde 2012, quando a Lei nº 12.711/2012, que estabeleceu as cotas, foi sancionada, o número de indígenas nas universidades cresceu 544%, mas, mesmo assim, 38,4% de indígenas ainda sequer têm certidão de nascimento, o que impede o acesso aos diversos espaços escolares, quanto mais ao ambiente acadêmico.

Cursos como a Licenciatura Intercultural Indígena – *Teko Arandu* promovem a inclusão e buscam a reparação social, histórica e cultural dos povos indígenas, neste caso específico, a dos Guarani e Kaiowá, por meio da oferta de um curso bilingue, para professores indígenas, que já exercem a docência em escolas indígenas.

Neste texto, a análise detalhada foi realizada no Bloco II – núcleo específico – que corresponde a Licenciatura em Educação Intercultural Indígena com habilitação em Matemática. Ao analisarmos o PP da LIND, habilitação em Matemática, constatamos que ela se diferencia dos demais cursos, não só nos nomes das disciplinas, mas na forma como apresenta suas ementas, qual seja: o conteúdo matemático, seguido de uma abordagem bilingue e no resgate histórico-cultural com bibliografias correspondentes, caracterizando toda a proposta no componente cultural.

Por ser organizada com a metodologia da alternância e no decorrer de todos os semestres, os licenciandos indígenas estarem inseridos nas comunidades indígenas, em diferentes tempos e espaços sociais, propiciando interações sociais a partir de conceitos matemáticos e a percepção do uso que a comunidade faz do conhecimento matemático, implicando características do componente social em todo o PP.

Os conceitos matemáticos estão presentes no decorrer do PP com abordagens distintas, valorizando as diferentes culturas envolvidas na proposta. O que caracteriza não só o componente simbólico, e sim o simbólico e cultural. O PP da LIND apresenta fortes indícios de ser um currículo que favoreça a enculturação matemática, pois pensa em como os conteúdos são organizados.

Desta forma, entendemos que a LIND representa uma tentativa de formar e capacitar professores enculturadores matemáticos pois, a proposta é valorizar a cultura das etnias indígenas. Entretanto interpretamos que ela falha na integração das TDIC ao currículo, deixando os alunos índios a margem, o que é uma forma de exclusão tanto digital quanto social.

As TDIC são pouco exploradas no PP, sendo utilizadas somente como uma ferramenta auxiliar no desenvolvimento de algumas atividades, quando, na sociedade digital, elas são utilizadas para acessar, avaliar e compartilhar informação e auxiliar na construção de conhecimentos. Sem conectar os licenciandos, consequentemente há a possibilidade de se deixar de conectar os indígenas da idade escolar.

Ressaltamos que a proposta da LIND insere as TDIC ao currículo. O PP evidencia, desde suas primeiras páginas a importância da presença das TDIC no currículo, entretanto o foco da proposta da LIND, explicitado em seu PP é da Educação Intercultural para promover o resgate sociocultural e assegurar os direitos humanos dos povos indígenas.

Apoio e fomento

A pesquisa que subsidia este artigo tem o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001 à qual agradecemos, pela concessão de bolsa de estudos.

Referências Bibliográficas

Almeida, M. E. (2014). Integração currículo e tecnologias: concepção e possibilidades de criação de web currículo. Em M. E. Almeida, R. M. Alves, y D. Lemos, *Web currículo: Aprendizegem, pesquisa e conhecimento com o uso de tecnologias digitais* (pp. 20-38). Rio de Janeiro: Letra Capital.

Bishop, A. J. (1988). *Mathematical enculturation: A cultural perspective on mathematics education.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Caldas, F. R. (2016). *Educação em Direitos Humanos e Interculturalidade: o curso de Licenciantura Intercultural Indígena Teko Arandu da UFGD.* Dourados, MS: Dissertação-UFGD.

Cunha, A. C. (2016). *Contribuição da Etnomatemática para a manutenção e dinamização da cultura Guarani e Kaiowá na formação inicial de professores indígenas (tese).* São Paulo: UNIAN.

D'Ambrosio, U. (1990). *Etnomatemática: Arte ou técnica de explicar e conhecer.* São Paulo: Editora Ática.

IBGE, I. B. (2012). *Censo Brasileiro de 2010.* IBGE, Rio de Janeiro.

Lobão, A. C., y Nepomuceno, C. N. (2008). Processos Culturais: Endoculturação e Aculturação. *Estudos Contenporâneos de Cultura, Fascículo 08*(UEPB/UFRN).

Nonato, K. J., y Lobo da Costa, N. M. (26 de 07 de 2020). Licenciatura actual en matemáticas: la urgencia de la enseñanza con tecnologías digitales de informacíon y cominicación. *Revista Paradigma, 41*, 633-667. doi:10.37618/PARADIGMA.1011-2251.0.p633-667.id930

Severino, A. J. (2007). *Metodologia do Trabalho Científico* (23ª ed.). São Paulo: Cortez.

UFGD, U. F. (2012). *Curso de Licenciatua Intercultural Indígena - Teko Arandu: Projeto Pedagógico.* Dourados: UFGD. Fonte: https://portal.ufgd.edu.br/coordenadoria/cograd/ppcs

VOL34, NÚMERO 2, AÑO 2021

O DESIGN METODOLÓGICO DE UMA PESQUISA SOBRE INTEGRAÇÃO DE TECNOLOGIAS DIGITAIS EM CURRÍCULOS DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

THE METHODOLOGICAL DESIGN OF RESEARCH ON THE INTEGRATION OF DIGITAL TECHNOLOGIES IN THE CURRICULUM OF MATHEMATICS UNIVERSITY GRADUATES

Karla Jocelya Nonato, Nielce Meneguelo Lobo da Costa
Universidade Anhanguera de São Paulo. (Brasil)
karlanonato@yahoo.com.br, nielce.lobo@anhanguera.com

Resumo
Neste artigo discutimos o design metodológico de uma investigação em andamento, que se propõe a identificar como se desenvolve a formação inicial de professores de Matemática, particularmente no que diz respeito a integração das tecnologias digitais ao currículo e a compreender possibilidades de construção de conhecimentos tecnológicos, pedagógicos e de conteúdo pelos licenciandos. O design inclui duas etapas de pesquisa: documental e em campo, com aplicação de entrevistas e questionários a professores atuantes nas licenciaturas pesquisadas. Os Projetos Pedagógicos dos Cursos investigados são distintos, mesmo sendo da mesma instituição de Ensino Superior. Como resultados entendemos que os desafios dos professores para a inserção/integração das TDIC ao currículo são comuns, independente da região do Estado. Há indícios de que a inserção/integração das TDIC ocorra para além do que se pode inferir pelos documentos dos cursos, acarretando na possibilidade de que o licenciando construa conhecimento tecnológico pedagógico, tecnológico do conteúdo e quiçá o TPACK.

Palavras-Chave: TDIC, TPACK, formação inicial de professores de matemática.

Abstract
In this paper we discuss the methodological design of an ongoing investigation, which aims to identify how pre-service mathematics teacher education is developed, particularly regarding the integration of digital technologies into the curriculum, and to understand the possibilities for the construction of technological, pedagogical, and content knowledge (TPACK) by the students. The design includes two stages of research: documentary and in the field, by applying interviews and questionnaires to teachers working in the bachelor's degree courses being study. The pedagogical projects of the investigated courses are different, even though they belong to the same higher education institution. As a result, we understand that the challenges faced by teachers for the insertion/integration of Digital Information and Communication Technologies (DICT) into the curriculum is common, regardless of the region of the State. There is evident that the insertion/integration of DICT takes place beyond what can be inferred from the course documents, resulting in the possibility that the graduate could build pedagogical-technological knowledge, technological content knowledge and perhaps the (TPACK).

Key words: DICT, TPACK, pre-service Mathematics teacher education.

Introdução

O conhecimento popular construído cotidianamente por meio de observações da realidade, foi transmitido de geração a geração por crendices e pelas histórias contadas e repetidas. Isso acontece até hoje, receitas de família, com aquele segredo especial, remédios caseiros. Mas, como saber se o chazinho indicado pela vovó realmente cura o resfriado se ele nunca foi analisado metodicamente?

Apesar de não ser testado, o chá da vovó para curar o resfriado é culturalmente aceito, é senso comum, é um conhecimento que está presente no nosso cotidiano, validado ou não. Entretanto, com o passar do tempo, o ser humano percebeu que nem sempre podia confiar no conhecimento advindo do senso comum, pois havia exceções ou falhas na observação não sistematizada.

O ser humano busca, há muito tempo, compreender a realidade em que vive e explicar os fenômenos que acontecem à sua volta. O método científico, veio como uma forma de expressar a busca por essa realidade (Minayo, 2009), para validar ou invalidar o conhecimento de senso comum. Durante os anos, vários foram os caminhos percorridos na busca das respostas para as perguntas do cotidiano, até que os cientistas perceberam que o caminho costumava ser semelhante e então estabeleceram "uma linguagem fundamentada em conceitos, métodos e técnicas para compreensão do mundo, das coisas, dos fenômenos, dos processos e das relações." (Minayo, 2009, p. 10).

A Educação Matemática se insere na Ciências Sociais, as pesquisas realizadas neste contexto investigam as relações humanas, a vida social. Os instrumentos e teorias são capazes de fazer aproximações "da suntuosidade da existência dos seres humanos em sociedade" (Minayo, 2009, p. 14) e não de dar respostas exatas, devido à complexidade que é viver em sociedade.
Diante disto, as pesquisas em Ciências Sociais e, consequentemente, em Educação Matemática, têm um caráter qualitativo, podendo conter características quantitativas em casos específicos, e nestes podem ser classificadas como quanti-qualitativas, quali-quantitativas ou mistas (Creswell, 2007).

O pesquisador deve, a partir da sua questão, do seu objetivo e das características contextuais, desenhar o caminho a percorrer para responder suas perguntas e transformar o fenômeno de investigação em objeto de pesquisa. Ao focarmos na fundamentação metodológica e nos instrumentos, este artigo discute o desenvolvimento de uma pesquisa cientifica no contexto da Educação Matemática, com o título: Tecnologia Educacional da formação inicial do professor de Matemática. Descrevendo de forma introdutória os métodos qualitativos empregados na pesquisa, como entrevistas e questionários.

Neste artigo discutimos o design metodológico de uma pesquisa, em andamento, que investiga o currículo das três Universidades Públicas do Estado de Mato Grosso do Sul que oferecem Licenciatura em Matemática. O objetivo é identificar como se desenvolve a formação inicial de professores de Matemática, particularmente no que diz respeito a integração das tecnologias digitais ao currículo e compreender as possibilidades de construção de conhecimentos tecnológicos e pedagógicos e de conteúdo pelos licenciandos.

Para tal, investigamos nos currículos de Licenciatura em Matemática, indícios da recomendação de uso das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC) nas disciplinas e, além disso, entrevistamos os professores atuantes nessas Licenciaturas e arguimos os alunos por meio de questionários online. Com esses procedimentos, a pesquisa se delineia pela abordagem qualitativa, a qual exploramos no próximo tópico.

Marco Teórico para o Design Metodológico

A pesquisa de cunho qualitativo ou naturalística começou a se configurar como enfoque metodológico a partir da década de 1970 (Bogdan y Biklen, 1997). Na área das Ciências Humanas e Sociais pesquisas quantitativas dificultam a explicitação do fenômeno, pois desconsideram variáveis do contexto e limitam os tipos de análise dos dados. Assim sendo, a pesquisa qualitativa ou com método misto (quali-quanti) paulatinamente foi ganhando força na área (Silva, 2009). Houve um movimento em busca de credibilidade e da garantia do rigor, considerando os múltiplos tipos de pesquisas qualitativas e seus instrumentos de coletas de dados (André, 2001).

O método qualitativo contribuiu para o avanço da pesquisa em Ciências Humanas e Sociais e, especialmente, das pesquisas no campo educacional. Esse avanço impactou a produção cientifica, pela diversidade de pesquisas nas pós-graduações, “seja em termos de fundamentação teórica/epistemológica e reflexões metodológicas, seja em torno da aplicabilidade de procedimentos técnicos” (André, 2001, p. 60) na busca do objeto em várias áreas acadêmicas.

No livro *Investigação Qualitativa em Educação*, Bogdan e Biklen (1997, p. 47) discutem o conceito de pesquisa qualitativa e apresentam cinco características desse tipo de estudo, pontuando que a pesquisa qualitativa pode estar desprovida de uma ou mais de suas características, mas deve contemplar a maioria delas.

A primeira característica posta pelos autores é que “a pesquisa qualitativa tem o ambiente natural como sua fonte direta de dados”, esta costuma ser uma das principais características, o contato direto e prolongado do pesquisador com o ambiente e a situação a ser investigada. Outra característica marcante da pesquisa qualitativa é a segunda “os dados colhidos são predominantemente descritivos”, ou seja, em forma de palavras e imagens, incluindo as entrevistas, depoimentos, fotografias, desenhos, extratos de documentos etc.

“A preocupação com o processo é muito maior do que com o produto” é a terceira característica, pontuando que o pesquisador se interessa pelas interações cotidianas, pelas relações sociais. A quarta característica acaba sendo uma consequência da terceira, pois “o ‘significado’ que as pessoas dão às coisas e à sua vida são focos de atenção especial pelo pesquisador”, buscando considerar os diferentes pontos de vistas dos participantes.

Ao colocarmos a quinta característica, frisamos que elas não têm uma ordem para acontecer na pesquisa. Os autores expõem que na pesquisa qualitativa “a análise dos dados tende a seguir um processo indutivo”, isso não quer dizer falta de rigor, pois há a necessidade de um quadro teórico que oriente a pesquisa, a coleta e a análise de dados, o processo acontece de baixo para cima (Lüdke y André, 1986)

Assim, a pesquisa qualitativa abrange a coleta de dados descritivos, no contato direto do pesquisador com o fenômeno pesquisado, focando no processo e não no produto, buscando delinear a concepção dos participantes. Com esse desenho, a pesquisa qualitativa assume várias formas com grande potencial para estudar questões relacionadas à Educação (Lüdke y André, 1986) e a Educação Matemática.

A coleta de dados pode ocorrer de várias formas, como por meio de entrevistas e questionários. As entrevistas têm sido amplamente empregadas em pesquisas qualitativas como recurso para o estudo de significados subjetivos e de temáticas muito complexas de serem aprofundadas com o uso de instrumentos fechados num formato padronizado, como questionários (Szymanski, 2004).

As entrevistas são utilizadas para compreender, por exemplo, opinião sobre fatos, condutas, planos de ação, motivações etc. Desta forma, consideremos a entrevista como um encontro entre duas pessoas, pesquisador e pesquisado, a fim de se obter informações sobre determinado tema, por intermédio de uma conversa (Szymanski, 2004). É necessário ao pesquisador uma postura investigativa e alguns protocolos a serem seguidos, de acordo com o tipo de entrevista que se propôs a utilizar na pesquisa: estruturada, semiestruturada, simulada etc.

A entrevista semiestruturada possui perguntas pré-determinadas, mas segue um modelo informal, semelhante a um bate-papo permitindo ao pesquisador alterar a ordem das perguntas e inserir novas indagações que não estavam no roteiro, mas que se mostraram pertinentes ao longo da conversa. Na entrevista a pretensão é deixar o entrevistado o mais confortável possível durante a coleta de dados para obter as informações o mais precisas possível.

Outra forma de coleta de dados amplamente utilizada na pesquisa qualitativa é o questionário. O questionário é formado por perguntas, apresentadas de forma escrita, que têm como objetivo conhecer os participantes da pesquisa quanto à opiniões, interesses etc (Gil, 2008). O questionário possibilita ao pesquisador atingir muitas pessoas ao mesmo tempo, em diferentes espaços geográficos, já que hoje pode ser realizado de forma online e a pessoa pode responder no momento que melhor lhe convier.

Nesta pesquisa partimos do pressuposto que o currículo é mais do que um documento que prescreve a seleção de conteúdos e os comportamentos desejáveis a partir de normas previstas em publicações oficiais, em um momento histórico específico. Entendemos que o currículo quando vivenciado supera o que lhe foi predeterminado. Ao ser cumprido no ambiente escolar ele precisa estar em constante construção/reconstrução para atender às necessidades dos alunos, neste caso, os futuros professores de Matemática.

Umas das necessidades desses futuros professores de Matemática é a integração das tecnologias, que requer, entre outros, o conhecimento tecnológico (TK) e, mais do que isso, a capacidade de articulá-lo ao conhecimento pedagógico do conteúdo (PCK) (Mishra y Koehler, 2006). Para que os futuros professores ministrem suas aulas integrando tecnologias, é necessário que os conhecimentos sejam construídos ainda na formação inicial, na graduação, pois neste momento eles podem experimentar, sanar suas dúvidas e construir referenciais para sua futura prática. Uma base teórica para a compreensão dos conhecimentos necessários para professores integrarem as TDIC em suas aulas, é o TPACK (Technological Pedagogical Content Knowledge – Conhecimento Tecnológico e Pedagógico do Conteúdo), conforme modelo elaborado por Mishra e Koehler (2006).

Na próxima seção discorremos sobre o desenho da investigação, o que inclui a descrição das etapas de pesquisa e o método de coleta dos dados e a base teórica do TPACK.

O Design Metodológico da Pesquisa

A metodologia, muito mais do que as técnicas, inclui as concepções teóricas do pesquisador, das abordagens utilizadas, articulando a teoria com a realidade empírica ou, os pensamentos sobre a realidade. A abordagem metodológica de uma pesquisa é definida a partir das suas perguntas e objetivos, conforme discutido na sessão anterior.

Neste sentido, na área da Educação Matemática, estamos desenvolvendo uma pesquisa de cunho qualitativo, realizada no ambiente natural da formação inicial, com os dados colhidos em forma de palavras ou imagens e o interesse centrado no processo formativo dos professores de Matemática, isso para alcançar o objetivo de identificar nos currículos de cursos de formação inicial de professores de Matemática, como ocorre a integração das tecnologias digitais ao currículo e as possibilidades viabilizadas para construção do conhecimento tecnológico e pedagógico do conteúdo (TPACK) pelos licenciandos.

Na referida pesquisa, a fonte de dados é o ambiente natural de formação, constituindo o investigado o instrumento principal, os dados estão sendo colhidos em forma de palavras, pois nos interessamos no processo de formação e não apenas nos resultados alcançados pelos licenciandos finalistas (aprovação ou não), estes dados serão analisados de forma indutiva e o significado tem importância vital, contemplando todas as características da pesquisa qualitativa, conforme apresentadas por Bogdan e Biklen (1997).

Para a análise dos currículos de formação de Professores de Matemática de MS, a coleta de dados se realizou a partir de documentos públicos disponibilizados nos sites das Universidades Públicas do Estado de Mato Grosso do Sul, a saber, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul-UFMS (www.ufms.br), Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul-UEMS (www.uems.br) e Universidade Federal da Grande Dourados-UFGD (www.ufgd.edu.br), nos *campi* que ofertam Licenciatura em Matemática. Os documentos coletados são as resoluções que aprovam e estabelecem os Projetos Pedagógicos dos cursos.

Na pesquisa, consideramos os Projetos Pedagógicos dos cursos e os Planos de Aulas como sendo documentos curriculares. Documentos são considerados como fontes inesgotáveis de dados que não receberam tratamento analítico (Cellard, 2008). Além dos documentos, os dados também serão coletados em entrevistas semiestruturadas com professores atuantes nas Licenciaturas em Matemática e coordenadores dos cursos e questionários online aplicados aos alunos finalistas dessas Licenciaturas. Tanto a entrevista semiestruturada como o questionário online já foram validados pelos pares. O projeto de pesquisa foi autorizado pelo Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humanos, com Parecer número 3.851.904 e CAEE: 26658619.9.0000.5493.

O design metodológico se constituiu por três etapas, a saber:

1. Pesquisa bibliográfica e análise documental: Revisão de literatura; estudos teóricos sobre TPACK e web currículo; análise dos planos de aula e dos currículos propostos, destacando os que frisam o uso das TDIC, dos cursos de Licenciatura em Matemática investigados, quais sejam: os da UFMS, da UEMS e da UFGD. Análise documental (Cellard, 2008), de cunho interpretativo (Severino, 2007).

2. Pesquisa em campo: Entrevistas semiestruturadas com dois professores dos cursos de licenciatura em Matemática e com o coordenador do curso, além de aplicação de questionários online aos alunos finalistas dos cursos. Aos alunos finalistas, serão aplicados questionários online para levantar a percepção deles sobre os conhecimentos construídos no curso, particularmente o TPACK, e a integração, ou não, das TDIC no seu cotidiano profissional após formado. Os questionários propostos são uma adaptação dos validados e utilizados na pesquisa de Moreira (2019) e nos disponibilizado pela autora. As alterações foram mínimas, tendo em vista que a autora desenvolveu a pesquisa nos cursos de Pedagogia em São Paulo e Portugal e foi necessário adaptar para a graduação em Matemática no Estado de Mato Grosso do Sul. As adaptações foram no sentido de privilegiar questões com características desses cursos. As entrevistas semiestruturadas foram previstas para fornecer dados sobre a percepção dos professores atuantes nessas Licenciaturas sobre o currículo em Matemática e como ele propicia meios para que os licenciandos construam, durante o curso de formação inicial, os conhecimentos relacionados ao TPACK. Os dados foram organizados e analisados segundo a Análise de Conteúdo, proposta por Bardin (1977).

3. Organização, tratamento e análise dos dados coletados em campo. A partir dos dados coletados por meio das entrevistas semiestruturadas, elencamos os principais desafios encontrados pelos professores atuantes nas Licenciaturas em Matemática durante as aulas com o uso das TDIC. Os dados das entrevistas e questionários serão tratados por Análise de Conteúdo Automatizada, técnica originada a partir da Análise de Conteúdo, incorporando o tratamento dos dados por programas estatísticos para inferência. (Grimmer y Stewart, 2013).

4. Em síntese, os dados foram analisados seguindo os pressupostos da análise interpretativa (Severino, 2007), em particular a hermenêutica de profundidade (Thompson, 2011), da análise de conteúdo (Bardin, 1977), da análise de conteúdo automatizada (Grimmer y Stewart, 2013).

Ao considerar que o currículo é mais do que um rol de conteúdos, entendemos que os Projetos Pedagógicos dos cursos exibem o currículo prescrito, considerado um documento norteador para os cursos, o que, quanto aos meios, insere a pesquisa na análise documental (Cellard, 2008). O documento constitui uma fonte bruta e rica de dados, que adquire “forma e significado educativo”, ao ser interpretado, respeitando as ideias enunciadas, lendo nas entrelinhas, como se dialogássemos com os autores do documento, estamos realizando a analise interpretativa, de acordo com Severino (2008).

Para as interpretações nos apoiamos na hermenêutica de profundidade (Thompson, 2011). A Hermenêutica de Profundidade (HP) contribui na interpretação das formas simbólicas que são produzidas em contextos sociais e históricos definidos, que influenciam no seu desenvolvimento. A HP é estruturada em três fases: Análise Sócio-Histórica, Análise Formal ou Discursiva, e Interpretação/Reinterpretação. Na análise sócio-histórica olha-se para o macro; no aspecto formal estão as análises internas, o micro; e na interpretação/reinterpretação a apropriação.

A análise sócio-histórica é contemplada pela descrição das situações nos espaços e no tempo, analisando o conjunto de relações que as Universidades constituem, caracterizando os sujeitos que nela atuam, os contextos em que estão inseridas, envolvendo a organização social que a integra.

Na fase da análise interpretativa/reinterpretativa dos dados da HP partimos das categorias pré-estabelecidas pelos Projetos Pedagógicos para as matrizes curriculares e, tendo em vista o objetivo e a questão de pesquisa, utilizamos os tipos de conhecimentos que compõem o TPACK, quais sejam: conhecimento do conteúdo; conhecimento pedagógico e conhecimento tecnológico, como categorias para compreender o que estes elementos apontam do mundo social no qual estão inseridos, considerando a análise sócio-histórica.

Ao concluir a coleta dos dados empíricos (entrevistas e questionários) a organização para a análise se dará pela disposição dos dados, de modo que evidenciem características do processo de formação inicial dos licenciandos em Matemática, bem como do uso das TDIC no âmbito das disciplinas.

Para descrever com autenticidade e totalidade o processo de formação inicial dos licenciandos em Matemática com o uso das TDIC, optamos pela utilização dos pressupostos da Análise de Conteúdo (Bardin, 1977). A "análise de conteúdo é uma técnica de investigação que tem por finalidade a descrição objetiva, sistemática e quantitativa do conteúdo manifesta da comunicação" (IBID, p. 20) presente nos dados que coletamos.

Na pré-análise os dados são organizados a partir da seleção das perguntas considerando as hipóteses e os objetivos, além dos indicadores que fundamentam a interpretação final. Nesta fase a categorização dos dados consideram como unidades temáticas, que *a priori* correspondem as postas pelas linhas teóricas que guiam a pesquisa, tendo o TPACK como norte.

Com o decorrer do processo, as temáticas definidas *a priori* são reagrupadas ao apresentarem similaridade no discurso dos professores, coordenadores e alunos finalistas e, assim, dão origem às categorias.

Dessa forma, as declarações coletadas por meio das entrevistas e dos questionários constituem elementos complementares àquelas obtidas nos documentos escritos (Projetos Pedagógicos, Resoluções etc.). As entrevistas, segundo Bardin (1977), são indispensáveis à análise de conteúdo. Para tanto, as entrevistas serão transcritas, os entrevistados serão caracterizados e suas identidades serão mantidas em sigilo.

Nos questionários online todos os protocolos de confidencialidade serão seguidos, os resultados serão apresentados em conjunto, seguindo a análise de conteúdo, pois constam de questões abertas, sem identificação dos respondentes.

Resultados

O Mato Grosso do Sul tem como capital a cidade de Campo Grande, a qual concentra quase 1/3 da população. A paisagem natural do Estado é formada, predominantemente por dois biomas, o Cerrado e o Pantanal, seu relevo é plano na maior parte, favorecendo a agropecuária, com destaque para a criação bovina e o cultivo da soja e milho. No Estado, as três universidades públicas ofertam Licenciatura em Matemática, a saber: UFMS, UEMS e UFGD. A UFMS e a UEMS são universidades *multicampi.*

As universidades do Estado de Mato Grosso do Sul são Instituições de Ensino Superior que enfrentam o desafio de preservar suas identidades e, ao mesmo tempo, dar autonomia as unidades que as compõem, de modo a atender as especificidades em que estão inseridas. Posto isso, vale considerar também as necessidades postas pelo desenvolvimento da sociedade, como por exemplo, o uso das TDIC, visto que estamos na era digital.

A investigação sobre a matriz curricular e as disciplinas dos cursos de Licenciatura em Matemática das Universidades Públicas de Mato Grosso do Sul, quanto a integração das TDIC estão revelando que os Projetos Pedagógicos dos Cursos são distintos, mesmo quando são da mesma instituição. Acreditamos que esta seja uma tentativa de manter a autonomia no atendimento das especificidades em que os licenciandos estão inseridos.

O objetivo da pesquisa principal, que subsidia este recorte é identificar as possibilidades de construção de TPACK pelos licenciandos e compreender como se desenvolve a formação inicial dos professores de Matemática, principalmente no que diz respeito a integração das tecnologias digitais.

Para a análise dos Projetos Pedagógicos, disponíveis nas páginas dos cursos, nos sites das instituições, seguimos a ordem estrutural desses documentos e as categorias especificadas nos próprios projetos. No geral, a estrutura do PP tem sido: uma parte textual introdutória com uma exposição global do curso e posterior apresentação da matriz curricular e detalhamento de especificidades, a exceção é do Projeto Pedagógico da UFMS de Ponta Porã, o qual apresentou uma estrutura própria. Para análise, partimos das categorias pré-estabelecidas pelo Projeto Pedagógico e, tendo em vista o objetivo e questão de pesquisa, utilizamos como categorias os conhecimentos que compõem o TPACK, a saber: conhecimento do conteúdo; conhecimento pedagógico e conhecimento tecnológico.

Como a pesquisa encontra-se em andamento e, devido a pandemia do COVID-19, os dados provenientes dos licenciandos não estão disponíveis. As entrevistas com os professores atuantes nas Licenciaturas em Matemática ocorreram de forma remota, por meio da plataforma Microsoft Teams ou Google Meet, escolhidas por viabilizarem a comunicação entre pesquisadoras e pesquisados e por serem ferramentas que permitem gravações. Iniciamos as entrevistas pelos coordenadores dos cursos, os quais nos indicaram, preferencialmente, dois professores que faziam uso das TDIC antes da pandemia, a serem entrevistados. Esta foi uma adequação no design da pesquisa em função do isolamento social imposto pela evolução da pandemia no estado do MS. Vale ressaltar que no desenho inicial pretendíamos aplicar os questionários online aos alunos finalistas do curso e estes apontariam os professores formadores a serem entrevistados.

As entrevistas têm apontado inúmeros desafios comuns aos professores atuantes nas Licenciaturas em Matemática de MS para a inserção/integração das TDIC, independente da região do Estado ou da Instituição Pública de Ensino em que atuam e na modalidade em que estão ministrando as aulas. Por exemplo, no Ensino Remoto Emergencial, a dificuldade de acesso à internet e aos recursos tecnológicos dos licenciandos.

Conclusão

A pesquisa qualitativa permite ao pesquisador dar atenção às pessoas e às suas ideias, sem dispensar o rigor e consistência da pesquisa cientifica, isso é um privilégio nos dias de hoje, nos quais as pessoas querem e precisam ser ouvidas. Mas, para isso, é necessário estabelecer procedimentos e estratégias que permitam considerar as experiências observadas do ponto de vistas dos participantes da pesquisa.

Pudemos corroborar com Silva (2009) ao enfatizar que a metodologia não é uma escolha do pesquisador e sim uma tomada de decisão coerente com o contexto, com as indagações apresentadas e o objetivo de pesquisa. A tomada de decisão correta influencia no design adequado da pesquisa, auxiliando o pesquisador a encontrar suas respostas. Pensando nisso, o design dessa pesquisa envolve, além de coleta de dados em documentos, também em campo, envolvendo os principais indivíduos presentes na formação inicial do professor de Matemática, incluindo os protagonistas deste cenário: licenciandos e formadores.

No final, esta pesquisa deseja responder se o futuro professor de Matemática de Mato Grosso do Sul, formado pelas Instituições Públicas, se sente preparado para integrar as TDIC em sala de aula. Para isto é preciso conhecer o currículo da formação inicial deste futuro professor de Matemática (Projeto Pedagógico dos cursos) sob vários prismas, a concepção dos professores atuantes (entrevistas) sobre o processo de formação e os licenciando finalistas, sobre como se deu o processo, como se veem e como se sentem.

Os resultados parciais obtidos apontam para Projetos Pedagógicos distintos, com pouca integração das TDIC, mas, ao realizarmos as entrevistas, verificamos que o documento nem sempre reflete a prática das Licenciaturas em Matemática. Na prática há indícios de que a inserção/integração das TDIC ocorram mais do que se pode inferir pelos documentos, acarretando na possibilidade de levar o licenciando à construção de conhecimentos tecnológico pedagógico, tecnológico do conteúdo e quiçá, do TPACK.

Apoio e fomento

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Referências Bibliográficas

André, M. E. (2001). Pesquisa em educação: buscando rigor e qualidade. *Cadernos de Pesquisa, n. 113*, 51-64.
Bardin, L. (1977). *Análise de conteúdo.* Lisboa: Edições 70.
Bogdan, R. C., y Biklen, S. K. (1997). *Investigação qualitativa em Educação.* Portugal: Porto.
Cellard, A. (2008). A análise documental. Em J. (. POUPART, *A pesquisa qualitativa: enfoques epistemológicos e metodológicos* (pp. 295-316). Petropólis: Vozes.
Creswell, J. W. (2007). *Projeto de Pesquisa: métodos qualitativos, quantitativos e mistos.* Porto Alegre: Artmed.
Gil, A. C. (2008). *Métodos e técnicas de pesquisa social.* São Paulo: Atlas.
Grimmer, J., y Stewart, B. M. (2013). *Text as data the promise and pitfalls of automatic content analysis methods for political texts.* Political Analysis.
Lüdke, M., y André, M. E. (1986). *Pesquisa em Educação: Abordagens qualitativas.* Rio de Janeiro: EPU.
Minayo, M. C. (2009). O desafio da Pesquisa Social. Em M. C. Minayo, y S. F. Deslandes, *Pesquisa Social: Teoria, método e criatividade* (28 ed.). Petrópolis, RJ: Vozes.
Mishra, P., y Koehler, M. (2006). Techonological Pedagogical Content Knowledge: a Framework for Teacher Knowledge. *Teachers College Record, 108*, 1017-1054.
Moreira, L. S. (2019). *Tecnologia Educativa na formação inicial de Educadores de Infância e Professores do Primeiro Ciclo do Ensino Básico: estudo de caso múltiplo Portugal-Brasil (tese).* Portugal: Universidade do Minho.
Severino, A. J. (2007). *Metodologia do Trabalho Científico* (23ª ed.). São Paulo: Cortez.
Silva, M. A. (2009). Os contrapontos da produção acadêmica na emergência da pesquisa qualitativa. *Educativa, 12*, 163-70.
Szymanski, H. (2004). Entrevista Reflexiva: Um olhar psicológico sobre a entrevista em pesquisa. Em H. (. Szymanski, *A entrevista na pesquisa em Educação: a prática reflexiva.* Brasilia: Liber Livro.
Thompson, J. B. (2011). *Ideologia e cultura moderna: teoria social crítica na erados meios de comunicação de massa* (9 ed.). Petrópolis, RJ: Vozes.
Yin, R. K. (2001). *Estudo de Caso: Planejamento e Métodos* (2ª ed.). (D. Grassi, Trad.) Porto Alegre, RS: Bookman.

TAREAS MATEMÁTICAS Y SU PUESTA EN PRÁCTICA EN LA CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR

MATHEMATICAL TASKS AND THEIR IMPLEMENTATION IN THE DEVELOPMENT OF THE TEACHER'S SPECIALIZED KNOWLEDGE

Eugenio Lizarde Flores, Ana María Reyes Camacho, Francisco Javier Hernández Gutiérrez
Escuela Normal Rural "Gral. Matías Ramos Santos", San Marcos, Loreto, Zacatecas. (México)
life_genio@yahoo.com.mx, anyreca0712@hotmail.com, frajaher_79@hotmail.com

Resumen
En el proceso de formación docente inicial cobra especial relevancia el diseño de tareas y su puesta en práctica en las escuelas de educación primaria, como una oportunidad para la construcción del conocimiento especializado del profesor que enseñará matemáticas en dicho nivel educativo; en esta investigación nos planteamos ¿cuál es el conocimiento especializado (Carrillo, Montes, Contreras, y Climent, 2017) que manifiestan los docentes en formación al diseñar y aplicar tareas matemáticas en la escuela primaria? Consideramos que hay una dialéctica diseño de tareas/conocimiento especializado y, a través de una "espiral analítica/reflexiva", los futuros docentes reconocen relaciones de codeterminación entre ambos.

Palabras clave: Formación de profesores, conocimiento especializado, matemáticas

Abstract
In the initial teacher training process, the design of tasks and its implementation in primary schools are particularly relevant, as an opportunity to develop specialized knowledge of teachers who will teach mathematics at the aforementioned educational level. In this research, we ask ourselves, what is the specialized knowledge (Carrillo, Montes, Contreras, y Climent, 2017) showed by teachers in training when designing and applying mathematical tasks in primary school? We consider that there is a dialectic interrelationship, design of tasks / specialized knowledge and, through an "analytical / reflective spiral", prospective teachers recognize relationships of co-determination between both, design of tasks and specialized knowledge.

Key words: teacher training, specialized knowledge, mathematics

Introducción

Ante el estado actual de la formación matemática en nuestro país (Lizarde, 2019), se hace necesaria una revisión crítica del tema, en múltiples dimensiones: desde la formación inicial y continua de profesores, desde el diseño curricular (tanto para la formación de profesores, como para la formación matemática de los estudiantes de la educación básica), desde los materiales curriculares que se le ofrecen al profesor (libros de texto, libros para el maestro), así como desde la concreción práctica de las disposiciones curriculares oficiales, pasando por la revisión del conocimiento profesional del profesor que se manifiesta en su práctica docente cotidiana.

Evidentemente cada uno de los aspectos enunciados en el párrafo anterior nos llevaría a la realización de una investigación específica y puntual; ante ello, con fines de establecer una delimitación, hemos hecho objeto de estudio la formación inicial de profesores y, dentro de ésta, nos interesa el aspecto del diseño de tareas matemáticas y su concreción en las aulas de la escuela primaria.

Son diversos los autores que se han ocupado del tema del diseño de tareas, algunos con una visión generalista (Smith y Stein, 1998) y otros con la especificidad al campo de la educación matemática (Ribeiro, Gibim, y Alves, 2021), sin embargo una coincidencia en ambos casos es que el diseño de tareas es por parte de expertos en el campo, sin embargo, ante una realidad ineludible, nosotros consideramos que es muy importante como campo emergente de análisis, el diseño y puesta en práctica de tareas matemáticas por parte de los docentes en formación, en quienes es parte de sus responsabilidades profesionales dicha actividad. Como complemento a dicha responsabilidad, el formador de profesores cumple un papel importante al orientar esos diseños de tareas, de tal manera que la interacción formador-docentes en formación-diseño de tareas matemáticas es necesario hacerla objeto de investigación en los procesos de formación docente inicial.

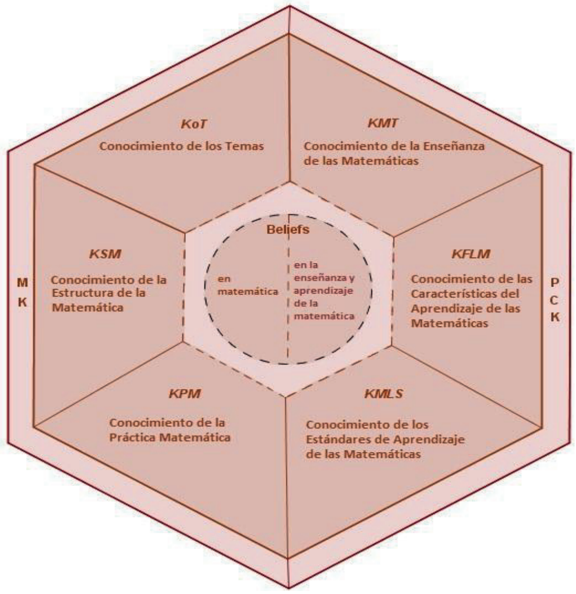
A partir de estas consideraciones, las preguntas de investigación quedan enunciadas en los siguientes términos ¿cuál es el conocimiento especializado (Carrillo, Montes, Contreras, y Climent, 2017) que manifiestan los docentes en formación al diseñar y aplicar tareas matemáticas en la escuela primaria? ¿cuáles y de qué naturaleza son los conocimientos que movilizan los docentes en formación cuando están diseñando tareas para la enseñanza de las matemáticas en la educación primaria? ¿Qué fuentes reconocen explícitamente como aquellas que les proveen de los conocimientos que movilizan?

Marco teórico

Utilizamos como marco teórico dos categorías que están presentes en nuestra investigación: conocimiento especializado del profesor que enseñará matemáticas y tareas matemáticas.
En cuanto a la primera categoría, asumimos el posicionamiento del modelo MTSK – Conocimiento especializado del profesor de matemáticas- (Carrillo, Montes, Contreras, y Climent, 2017), el cual describimos brevemente.

El modelo MTSK se configura en la Universidad de Huelva, España, siguiendo las ideas de Shulman, (1987) y cuestionando el MKT propuesto por Ball, Hill, y Bass, (2005); en esencia es un modelo analítico que se propone con la finalidad de caracterizar los componentes del conocimiento especializado del profesor de matemáticas. Es muy importante precisar que en las intenciones pioneras para la estructuración del modelo, está presente la idea de la formación del profesor de matemáticas, a ello obedece la marcada precisión de que en éste sólo se consideran, en cada uno de sus subdominios, lo específico a matemáticas, no porque se desconozca o se descalifique el resto del conocimiento del profesor (por ejemplo, conocimientos de pedagogía en general o de psicología en general), sino sobre todo por el énfasis en lo especializado para la formación del profesor de matemáticas.

Figura 1. *Modelo MTSK.*



Tomado de: Carrillo, J., Montes, M., Contreras, L. C., y Climent, N. (2017).

Ahora bien, considerando que, en el caso de la Licenciatura en educación primaria de México, el maestro no sólo es maestro de matemáticas, ¿en qué medida nos sirve este modelo para analizar críticamente los elementos de conocimiento de los futuros profesores al momento del diseño y puesta en práctica de tareas matemáticas? De entrada, consideramos que sí es un buen referente sobre todo por los aspectos que en éste se contemplan y dado que sus mismos autores le han visto potencialidades cuando menos en tres escenarios: herramienta para reflexionar sobre el conocimiento propio, herramienta para investigar el conocimiento del profesor y herramienta para estructurar el contenido de la formación de profesores de matemáticas [es en este último sentido en que lo vamos a usar en este trabajo, en la medida en que nos permita avanzar en la comprensión de los elementos formativos para el diseño de tareas matemáticas y su incidencia en el logro de los aprendizajes en la educación primaria].

¿En qué consiste el conocimiento especializado del profesor de matemáticas? ¿Qué componentes, dominios y subdominios puede/debe contener? De manera semejante a como lo precisaba (Shulman, 1987), el MTSK, como marco teórico para caracterizar el conocimiento especializado del profesor de matemáticas (Carrillo, Montes, Contreras, y Climent, 2017), considera dos grandes dominios (figura 1): el Conocimiento matemático (MK), como disciplina científica que se utiliza por parte del docente en un contexto escolar; y el Conocimiento didáctico del contenido (PCK), que se refiere a los aspectos relacionados con el contenido matemático como objeto de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Estos dos dominios cuentan, a su vez, con subdominios. El MK se subdivide en Conocimiento de los temas matemáticos (KoT), se relaciona con el conocimiento que el docente tiene sobre los contenidos que desarrolla con sus alumnos, así como las relaciones intraconceptuales, por ejemplo, generalizar mediante la vinculación aritmética-álgebra; en este subdominio se consideran 4 categorías: Procedimientos (¿cómo se hace? ¿cuándo se puede hacer? ¿por qué se hace así? Y características del resultado); Definiciones, propiedades y sus fundamentos; Registros de representación; Fenomenología y aplicaciones (Vasco, Moriel, y Contreras, 2017).

Conocimiento de la estructura matemática (KSM), contempla el conocimiento que le posibilita al profesor enseñar los temas matemáticos como fundamentación para su complejización posterior, es decir las conexiones con contenidos anteriores y posteriores. Se distinguen cuatro categorías: conexiones de complejización, conexiones de simplificación, conexiones transversales y conexiones auxiliares.

El tercer subdominio del dominio de conocimiento matemático es denominado *Conocimiento de la práctica matemática* (KPM), establece la relación entre el conocimiento de los temas matemáticos y los procedimientos y prácticas que se realizan para su construcción. Para este subdominio se han propuesto seis categorías: Jerarquización y planificación como forma de proceder en la resolución de problemas matemáticos; Formas de validación y demostración; Papel de los símbolos y uso del lenguaje formal; Procesos asociados a la resolución de problemas como forma de producir matemáticas; Prácticas particulares del quehacer matemático (por ejemplo, modelación); y Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones.

En el dominio PCK se establecieron los subdominios: Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (KFLM), respecto a las características de aprendizaje de los contenidos específicos de las matemáticas; Conocimiento de la enseñanza de la matemática (KMT), se refiere a los recursos, materiales, estrategias didácticas y metodológicas respecto a cómo se presenta el contenido; y Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS), que se enfoca a la intencionalidad y conocimiento del profesor sobre los niveles de logro y de desarrollo conceptual en los aprendizajes de los alumnos considerando el momento escolar determinado y su grado de desarrollo.

En cuanto al diseño de las tareas, consideramos los planteamientos de Stein y Smith (1998), quienes definen una tarea como “a segment of classroom activity that is devoted to the development of a particular mathematical idea” (p. 269). Thanheiser et al. (2016), identifican que una tarea puede estar compuesta por varios problemas o un problema complejo, lo cual la guía a que se pueda convertir en una tarea auténtica en la medida en que se conecta con el mundo real y sus niveles de exigencia cognitiva son altos. Complementariamente, retomamos a Feldman et al. (2016) con lo que denominan “task design cycle” pensando en tareas diseñadas para y por futuros profesores de primaria, sobre todo porque coincidimos en que “Without analyzing student work and engaging in thoughtful reflection, we suspect that some of these realizations would not have occurred” (Feldman et al., 2016, pág. 22).

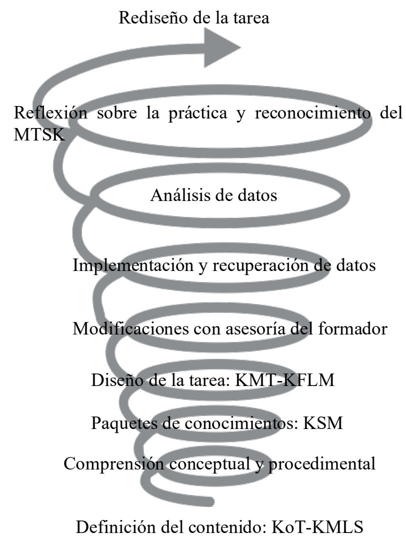
Metodología

Bajo un posicionamiento cualitativo, consideramos como objeto de estudio el análisis de los diseños de tareas y su puesta en práctica por 35 docentes en formación de una Escuela Normal, al cursar su tercer semestre de la Licenciatura en educación primaria, bajo la asesoría del coordinador del curso de matemáticas. Se recuperaron los 5 planes de clase de cada estudiante (considerando que planearon una semana de práctica profesional) y la transcripción de la videograbación de una de esas clases. Se realizó un análisis de contenido de los documentos recuperados (Hernández Sampieri, Fernández Collado, y Baptista Lucio, 2010) y se establecieron categorías emergentes de los datos (Strauss y Corbin, 2002).

Resultados

Conforme se hacen objeto de estudio los elementos de los diferentes subdominios del MTSK, el diseño de tareas matemáticas por parte de los docentes en formación se acerca a la propuesta del “doing mathematics”, es decir, gradualmente toman conciencia de la articulación entre diferentes elementos de conocimiento especializado y su incidencia en el diseño de tareas para su puesta en práctica en la escuela primaria; en ese sentido, consideramos necesaria la construcción de una “espiral reflexiva/analítica” para el diseño de las tareas, bajo los siguientes momentos:

Figura 2. *Momentos de la "espiral reflexiva/analítica" para el diseño de las tareas.*



Elaboración propia.

1º Definición del contenido matemático sobre el cual se va a diseñar la tarea: KoT – KMLS; en el caso específico de la institución formadora de docentes en la cual se realizó la investigación, previo a la jornada de práctica profesional, los estudiantes acuden a las escuelas primarias con la intención de observar las clases del profesor titular del grupo asignado, bajo la consideración de que al hacerlo se está contribuyendo a que formen su propio estilo de docencia a partir de los referentes de la práctica de profesores experimentados; complementario a esta actividad, se da un momento que denominamos "solicitud de contenidos", en el cual los profesores de la escuela primaria, previa revisión de la progresión de contenidos que han trabajado y, considerando la distancia temporal entre el momento de asignación de éstos y el inicio de la práctica profesional de los estudiantes (generalmente un lapso de dos semanas), les indican cuál es el grupo de contenidos con los cuales deberán diseñar sus planes de clase. Este momento es crucial, dado que si los estudiantes no han construido el conocimiento especializado (KMLS) que les posibilite distinguir entre el enunciado formal que delimita un contenido y los nombres de las lecciones de los libros de texto o incluso los nombres de lecciones de guías didácticas que el profesor utilice en su clase, al momento de querer planear empiezan las complicaciones.

Sin embargo, ello se puede capitalizar en una experiencia formativa de construcción del conocimiento especializado en los términos enunciados por Carrillo, Montes, Contreras, y Climent, (2017), principalmente en lo relativo al conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS), es decir, la definición del contenido, pasa por los momentos de asignación por parte de los titulares, pero además por la identificación en los programas de estudios del grado correspondiente a la práctica profesional y la clarificación de la o las intenciones didácticas, según la cantidad de sesiones en que curricularmente se proponga abordarlo en la escuela primaria.

Ante ello, al mismo tiempo de la identificación y ubicación curricular, se presenta el problema de la comprensión de los términos en que está enunciado el contenido, lo cual genera la necesidad de las siguientes fases de la "espiral reflexiva/analítica", bajo las preguntas ¿en qué consiste el saber matemático que se pondrá en juego en el diseño de las tareas? ¿qué relación guarda con otros contenidos (paquete de conocimientos)? ¿cuáles tareas/actividades se proponen en los libros de texto? ¿en qué medida son congruentes con el contenido y el enfoque didáctico? E incluso, ¿se hace necesario modificarlas? ¿qué podría justificar esta decisión?

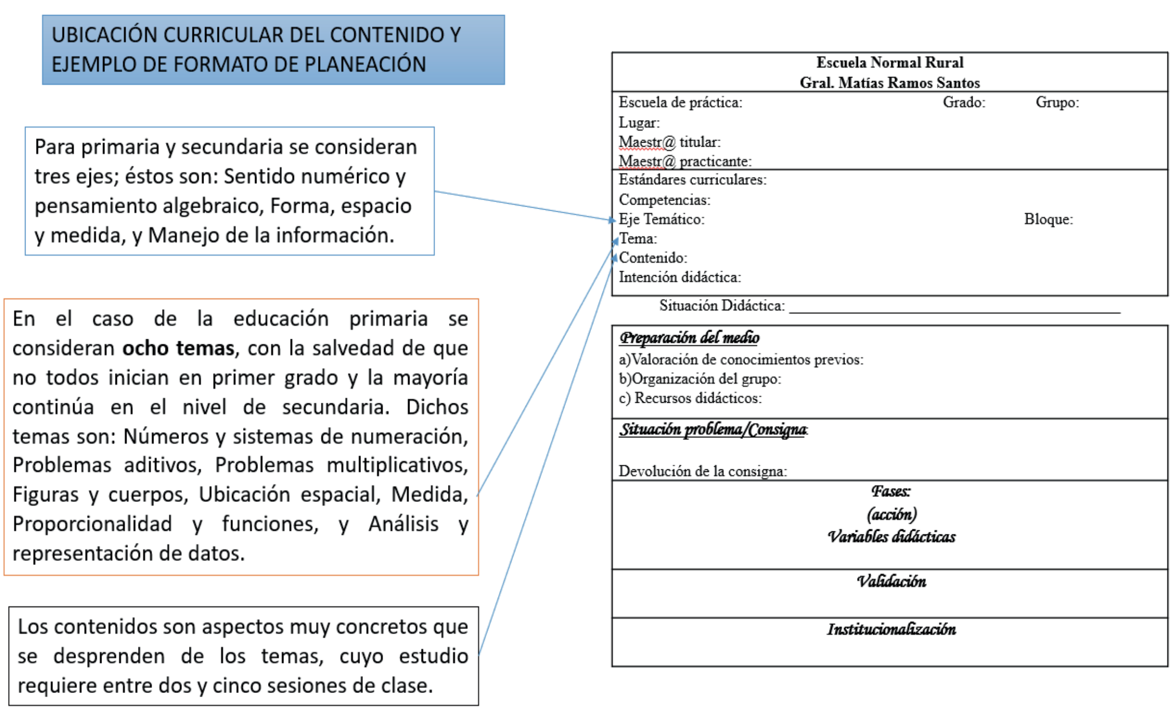
La resolución de estas preguntas es una tarea compartida entre el formador de docentes y los estudiantes, la cual a partir de la revisión que hicimos del proceso de coordinación del curso de matemáticas, notamos que hay una fuerte influencia del sistema de sugerencias que éste hace a sus estudiantes y los cambios que logran hacer al diseño de las tareas; incluso dicha influencia también se presenta como un refinamiento de la mirada analítica hacia las mismas propuestas curriculares, principalmente hacia las lecciones de los libros de texto.

Con estas consideraciones, a continuación, vamos a ejemplificar cada una de las fases de la "espiral reflexiva/analítica" con evidencias desde el diseño de las tareas por parte de los estudiantes y de igual manera, con argumentos desde los análisis que ellos hicieron de su propia práctica.

En el proceso de construcción del conocimiento especializado del profesor de/que enseña matemáticas, específico al subdominio KMLS, la lectura de la tabla de contenidos que viene en el programa de estudios del grado correspondiente, el formador de profesores se convierte en un referente para centrar la mirada de los estudiantes y que noten hasta el significado de la organización y distinción con colores de cada uno de los componentes curriculares (competencias, ejes, temas y contenidos – Cfr. SEP, 2011)

Por ejemplo, ante la necesidad de diseñar tareas matemáticas que dieran respuesta al siguiente contenido "Análisis de procedimientos para resolver problemas de proporcionalidad del tipo valor faltante (dobles, triples, valor unitario)" correspondiente al 5º grado, el formador de docentes centra la atención en que los estudiantes comprendan, en primera instancia, la definición de los elementos curriculares a considerar y su ubicación en el programa de estudios:

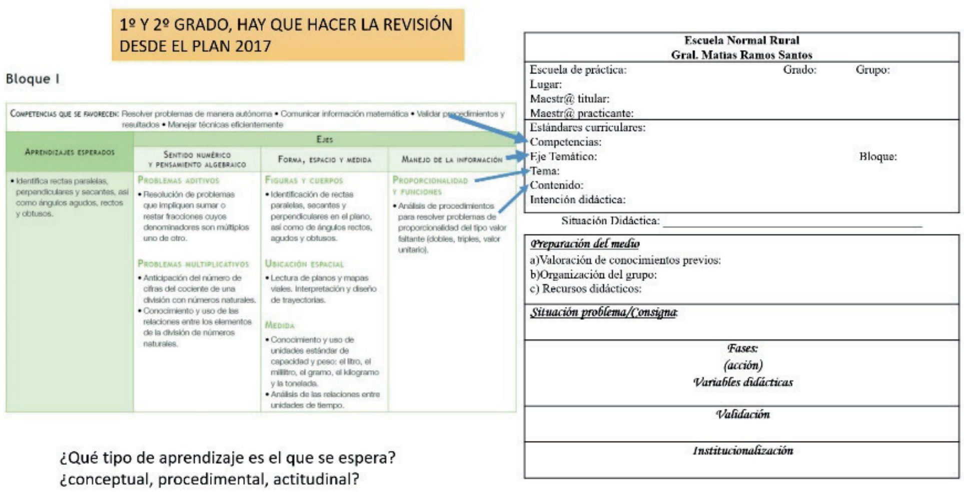
Figura 3. *Elementos curriculares de una planeación.*



Elaboración propia.

En la siguiente imagen, recuperada del plan de clase del formador, observamos el énfasis que se hace a la ubicación en el programa de estudios (SEP, 2011, pág. 76) de cada uno de los elementos de la planeación:

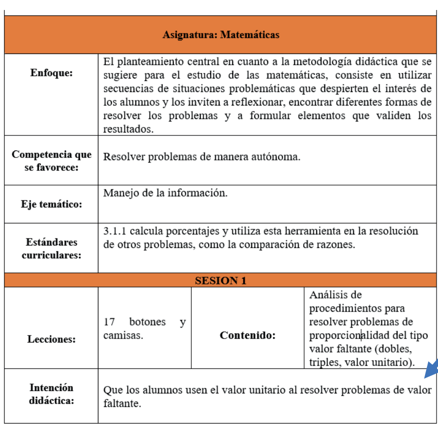
Figura 4. *Ubicación curricular. Orientaciones del formador (Plan de clase del formador de docentes).*



Elaboración propia.

Esta función de ayuda, contribuye a que los estudiantes lo aprendan y lo reflejen en sus propios diseños de situaciones didácticas (planes de clase), tal y como podemos ver en el siguiente ejemplo:

Figura 5. *Diseño de situación didáctica de Romina***.**



Asignatura: Matemáticas			
Enfoque:	El planteamiento central en cuanto a la metodología didáctica que se sugiere para el estudio de las matemáticas, consiste en utilizar secuencias de situaciones problemáticas que despierten el interés de los alumnos y los inviten a reflexionar, encontrar diferentes formas de resolver los problemas y a formular elementos que validen los resultados.		
Competencia que se favorece:	Resolver problemas de manera autónoma.		
Eje temático:	Manejo de la información.		
Estándares curriculares:	3.1.1 calcula porcentajes y utiliza esta herramienta en la resolución de otros problemas, como la comparación de razones.		
SESION 1			
Lecciones:	17 botones y camisas.	Contenido:	Análisis de procedimientos para resolver problemas de proporcionalidad del tipo valor faltante (dobles, triples, valor unitario).
Intención didáctica:	Que los alumnos usen el valor unitario al resolver problemas de valor faltante.		

Elaboración propia.

Figura 6. *Intención didáctica.*

Tomado de: Desafío 17 "Botones y camisa". Quinto grado. (SEP, 2013, pág. 62).

Al comparar la Figura 4 de las orientaciones del formador, con el recorte de la planeación de la estudiante notamos que hay una diferencia terminológica importante entre aprendizaje esperado e intención didáctica; hacer ver esas diferencias es tarea del formador, sobre todo porque es quien conoce (o debe conocer) con mayor amplitud las diferentes decisiones y cambios curriculares que a lo largo de los años se van planteando. En SEP, (2011) se organizaron aprendizajes esperados pero sin correspondencia uno a uno con los contenidos, lo cual en la práctica generó confusiones con los maestros en servicio, con mayor razón con los docentes en formación; ello obligó a la edición de libros de matemáticas para el maestro (SEP, 2013) en los cuales se estableció la relación uno a uno (o a varias) entre contenido e intenciones didácticas (se dejó de nombrar como aprendizajes esperados), que para el caso que nos ocupa, de la revisión del libro para el maestro vemos que propone 3 intenciones didácticas para el tratamiento del contenido.

La interacción entre las orientaciones del formador y la respuesta de los estudiantes contribuye a desarrollar el subdominio KMLS del MTSK cada vez con mayor profundidad, aportando gradualmente al reconocimiento de los cambios curriculares en los estándares de aprendizaje y delimitando el énfasis que para el diseño de la tarea matemática se debe considerar (en nuestro ejemplo, definido como intención didáctica).

Figura 7. *Análisis epistemológico de Romina*.

CONTENIDO EPISTEMOLÓGICO

Contenido: Análisis de procedimientos para resolver problemas de proporcionalidad del tipo valor faltante (dobles, triples, valor unitario)

- definición de proporcionalidad: la proporcionalidad es la conformidad o proporción (igualdad de dos razones) de unas partes con el todo o de elementos vinculados
- ¿Cuándo hay proporcionalidad? Cabe destacar que cuando una razón iguala a otra, en efecto, existe proporcionalidad, o sea, que para tener una relación proporcional necesitamos disponer de dos razones que sean equivalentes.
- valor unitario: es el que corresponde a una unidad o pieza
- valor unitario explícito: es el que se da como dato en el problema
- valor unitario implícito: es el que no se da como dato en el problema
- como usar la multiplicación en la proporcionalidad: derivado de la proporcionalidad, se debe buscar la manera corta de lograr encontrar las respuestas en la tabla, con una simple multiplicación o de manera contraria una división, el objetivo es que el alumno logre identificar este procedimiento sencillo.
- de qué manera comenzar a ver el tema: con ejemplos sencillos donde se logren apreciar números dobles, triples y valor unitario), es por eso que se trabaja una tabla distinta a la que viene en el libro de texto, debido a que la actividad planteada no se presta para dicho contenido, posteriormente cabe mencionar que años pasados no se trabajó con el tema de proporcionalidad.
- Razón interna: relación multiplicativa que se establece entre dos datos de un mismo conjunto de cantidades. Ej: 63 es el triple de 21, el factor interno es 3.
- valor faltante: identificación de datos en la tabla, si es doble, triple o unitario.

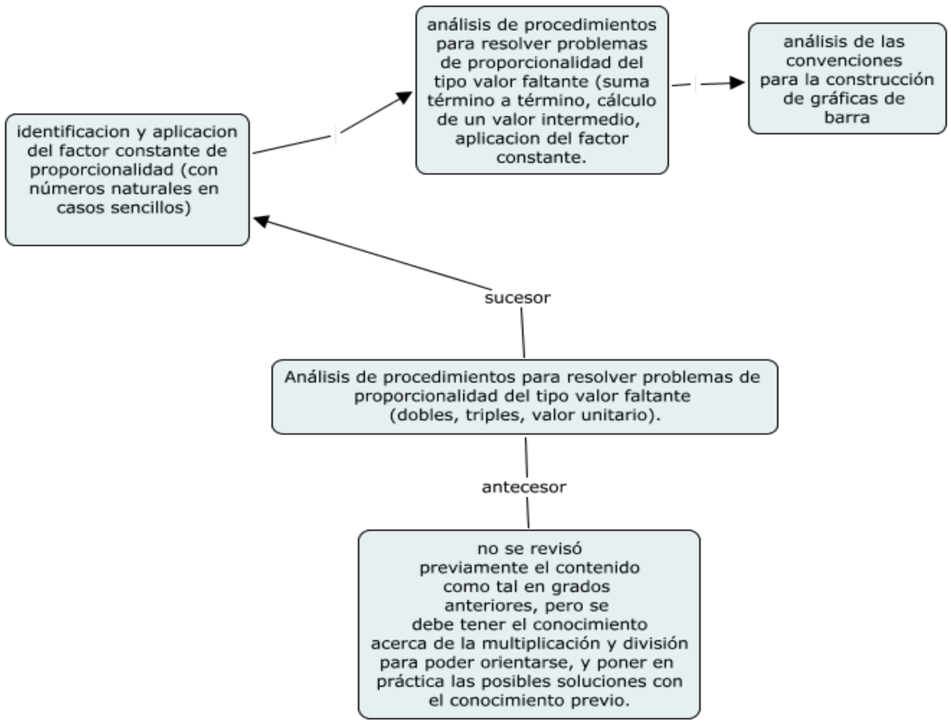
Elaboración propia.

2º Comprensión conceptual y procedimental del contenido: KoT – análisis epistemológico; en el diseño de tareas cobra especial relevancia el análisis epistemológico, lo cual en términos del MTSK está vinculado con el KoT, dado que entre mayor sea la comprensión conceptual y procedimental del tema son mayores las posibilidades de que éstas efectivamente contribuyan al aprendizaje del contenido en cuestión; continuando con el mismo ejemplo que hemos enunciado en párrafos anteriores, la Figura 7, recuperada del trabajo de Romina, nos permite apreciar que ese análisis epistemológico aún tiene las características de una serie de definiciones terminológicas, pero con precisiones importantes, por ejemplo la vinculación entre las razones y la relación de proporcionalidad, así como el reconocimiento de que el centro del contenido tiene que ver con las razones internas (Block, Mendoza y Ramírez, 2010), lo cual contribuye a que tome la decisión de cambiar la tarea inicial "*debido a que la actividad planteada no se presta para dicho contenido"*; con ello se refiere a que, como veremos en la fase 4, la tabla propuesta por el libro de texto no favorece el análisis de las razones internas y por ende el logro del contenido.

3º Elaboración del paquete de conocimientos asociado al contenido y las dificultades que pueden presentar los alumnos al resolver las tareas diseñadas: KMLS-KSM; a partir de los planteamientos de (Ma, 2010) y bajo la consideración de que al organizar el conocimiento en "paquetes" los futuros profesores toman conciencia de las diferentes conexiones (KSM) que hay entre los contenidos y ello contribuye a promover el aprendizaje sólido de un tema; este reconocimiento cobra sentido cuando los docentes en formación al ver "el grupo de temas que los profesores tienden a ver alrededor del tema que enseñan (Ma, 2010, pág. 144)" diseñan las tareas matemáticas pensando en el logro del contenido pero con clara conciencia de los antecedentes conceptuales y de las consecuencias para futuros aprendizajes.

La Figura 8 evidencia la revisión que hizo Romina y su puesta en un paquete de conocimientos base:

Figura 8. *Paquete de conocimientos de Romina.*



Elaboración propia.

Es importante mencionar que, en un primer momento, en la construcción de estos "paquetes de conocimientos" se recupera el enunciado completo del contenido (KMLS), con lo cual se establece una vinculación explícita entre el conocimiento de los estándares curriculares y la estructura del saber matemático; gradualmente deben ampliarse esos paquetes de conocimiento, establecer conexiones auxiliares y transversales entre contenidos y sintetizarse en un mapa conceptual sin vincularse directamente a los enunciados de los contenidos como aparecen en los programas de estudio oficiales; con ello se abona a la concreción del KSM.

4º Diseño de la tarea matemática: KMT – KFLM. Como enunciábamos en la fase 2, el análisis epistemológico le permitió a Romina (y en general a todo el grupo de estudiantes del grupo objeto de la investigación) tomar decisiones en torno al diseño y/o elección de la tarea matemática que consideraron más adecuada para el logro del contenido.

Seguimos retomando el ejemplo de Romina, porque nos parece más ilustrativo de cómo se van tomando dichas decisiones.
La primera actividad que plantea el libro de texto para el trabajo con el contenido "Análisis de procedimientos para resolver problemas de proporcionalidad del tipo valor faltante (dobles, triples, valor unitario)", considerando la intención didáctica "Que los alumnos usen el valor unitario al resolver problemas de valor faltante" (SEP, 2013, pág. 62) está en la Figura 9, sin embargo, la comprensión de Romina, tanto del análisis epistemológico, como del paquete de conocimientos le lleva tomar dos decisiones que nos parecen muy importantes en su proceso formativo:

a) ver la conexión conceptual de la tarea propuesta con el logro del contenido; en tal sentido, el cambio de la tarea inicial requiere que los números en juego en ésta, permitan hacer un análisis de las razones internas (Block, Mendoza y Ramírez, 2010), lo cual también lleve a que sean los niños quienes ubiquen el valor unitario. b) el uso del libro de texto como complemento de la actividad, posterior a la construcción conceptual del tema.

Figura 9. *Tarea propuesta en el libro de texto.*

Reúnete con un compañero para resolver los siguientes problemas.

1. Luisa trabaja en una fábrica de camisas. Para cada camisa de adulto se necesitan 15 botones. Ayúdenle a encontrar las cantidades que faltan en la siguiente tabla. Después, contesten las preguntas.

Camisas de adulto					
Cantidad de camisas	1	6	14	75	160
Cantidad de botones	15				

a) ¿Cuántos botones se necesitan para 25 camisas?

Tomado de: (SEP, 2013, pág. 45)

Figura 10. *Tarea propuesta por Romina.*

Valoración de conocimientos previos	Se pondrá la siguiente tabla en el pizarron con la finalidad de adentrarlos al tema y de igual manera rescatar sus conocimentos previos.

Numero de bolsitas.	1	3	4	6	8	14
Numero de canicas.		18				

Se lanzarán las siguientes preguntas:
¿Para ti que es proporcionalidad? ¿Conoces alguna caracteristica de ella? ¿Al doble siempre le toca el doble?
Se iran rescatando las participaciones de los niños y anotando en el pizarron.

Elaboración propia

Notemos cómo en la tarea de Romina (Figura 10), los números en juego (en la fila "número de bolsitas") sí favorecen el análisis de las razones internas: 6 es el doble de 3 y 8 de 4 e incluso se puede hacer el análisis a partir de la propiedad aditiva, dado que "a dos valores de una magnitud, digamos A y B, les corresponden dos valores en la otra magnitud, digamos A' y B'. Entonces, si hay proporcionalidad, ocurre que a+ B le corresponde A'+ B' (Block, Mendoza, y Ramírez, 2010, pág. 30); este último es el sentido de que aparezca el 14 en la tabla dado que no es el doble de ningún otro de los que ahí aparecen. En cambio, en la tarea propuesta en SEP (2013), no se puede hacer ninguno de ambos análisis, al darse el valor unitario, el resto de la actividad se reduce a la operatoria procedimental de una multiplicación.

5º Modificación de la tarea a partir de la asesoría de los formadores de docentes; en el diseño y análisis de tareas del grupo objeto de investigación se observaron las siguientes tendencias:

a) Recuperación textual de las que proponen los libros de texto.
b) Elección de actividades de internet que, aunque pueden ser congruentes con el contenido a trabajar, aparecen descontextualizadas y con términos que no comprenden los niños.
c) Rediseño de la tarea con la asesoría de los formadores de docentes.
En esta fase es necesario resaltar que el formador de profesores cumple un papel importante en el momento de la toma de decisiones sobre cuál tarea aplicar; en el caso de Romina, su primera intención fue aplicar la tarea tal y como el libro de texto la sugería, sin embargo, en la interacción con el formador de profesores se le cuestionó:
Mtro. ¿qué observa en los números en juego en la tabla que propone el libro de texto? ¿se puede favorecer un análisis sobre las razones internas y la propiedad aditiva de la proporcionalidad?
Romina: No
Mtro. ¿Cuáles números se podrían utilizar para hacer ese análisis?

Estas simples reflexiones contribuyen a la toma de conciencia de que en el diseño de la tarea hay que considerar las propiedades matemáticas del saber en juego y las consecuencias que ello tiene para el aprendizaje del contenido. Esto contribuye al desarrollo del conocimiento especializado de los docentes en formación, en la lógica que plantean (Carrillo, Montes, Contreras y Climent, 2017) y debe lograrse en la interacción formador de docentes y estudiantes.

6º Implementación de la tarea en la escuela primaria y recuperación de datos (videograbación y transcripción de la clase); un paso necesario, pero que muchos docentes en formación se resisten a hacer, tiene que ver con la recuperación de información de la aplicación de las tareas en la escuela primaria; al respecto, la recuperación puede hacerse a partir de la escritura de un diario, de un autoregistro o de una videograbación de la clase. La estrategia del formador de profesores fue solicitarles que hicieran una grabación y transcripción de la clase para su posterior análisis, sin embargo, para continuar con el ejemplo que hemos utilizado en los apartados anteriores, Romina no grabó la clase inicial, prefirió recuperar lo que sucedió al aplicar un problema matemático que extiende los conceptos vistos en la primera sesión con el tema (lo cual analizaremos en el apartado siguiente).

La videograbación se hace necesaria, en este proceso de desarrollo del MTSK de los docentes en formación, como un instrumento que refleja fielmente los acontecimientos de la clase, sin que medie sólo el recuerdo o la valoración afectivo-subjetiva sobre el propio desempeño de los estudiantes.

7º Análisis de datos realizado por los mismos docentes en formación; por cuestiones de espacio, sólo vamos a ejemplificar con un episodio de clase, en el cual vemos cómo implícitamente Romina manifiesta evidencia de una teoría didáctica que subyace a su hacer profesional (la teoría de las situaciones didácticas- (Brousseau, 2007)) y, de igual manera, manifiesta evidencia de la comprensión conceptual del tema y una clara intención por lograr que sus alumnos también lo comprendan.

El problema puesto en su diseño de situación didáctica fue: *La señora de la lonchería Marcela necesita completar su lista de precios y pide ayuda al grupo de 5° de la escuela primaria Ignacio Zaragoza ¡vamos a ayudarla! Se les entregará una tabla por equipo para contestarla y pasar a exponerla frente al grupo.*
Interacciones en el aula:

Figura 11. *Tareas "Lonchería Marcela".*

LONCHERÍA MARCELA

5 tacos X	$	Tortas	$
Quesadillas sencillas (3 pzas.)	$	Jugos	$
Quesadilla con carne	$	Refrescos	$ 10
Jarra de agua (6 vasos)	$		

1 quesadilla sencilla	2 quesadillas sencillas	3 quesadillas sencillas	6 quesadillas sencillas	12 quesadillas sencillas	15 quesadillas sencillas	30 quesadillas sencillas
	$ 16					

1 taco	3 tacos	5 tacos	9 tacos	15 tacos	20 tacos	30 tacos
			$ 54			

2 tortas	5 tortas	10 tortas	15 tortas	20 tortas	22 tortas	25 tortas
		$ 180				

1 vaso de agua	2 vasos de agua	3 vasos de agua	1 jarra de agua	3 jarras de agua	4 jarras de agua	8 jarras de agua
	$ 14					

2 jugos	4 jugos	6 jugos	8 jugos	10 jugos	20 jugos	40 jugos
			$ 96			

1 quesadilla con carne	3 quesadillas con carne	6 quesadillas con carne	9 quesadillas con carne	12 quesadillas con carne	15 quesadillas con carne	18 quesadillas con carne
				$ 144		

Elaboración propia.

Ma. Muy bien, igual ahorita vemos eso, les comentaba que Marcela en su lonchería pone precios de todo lo que vende, como las quesadillas, tacos, tortas, jugos, refrescos, etc. Lo que me pidió fue que le ayudemos a resolverlos, consiste en completar la tabla en donde ella solo nos da una cantidad y a partir de esa cantidad tenemos que ver de qué manera le podemos hacer para obtener los resultados que ella nos está pidiendo.

Rubén. Maestra ¿Cuáles son los valores faltantes?
Ma. Alguien que le pueda decir, cuáles son.
Iván. ¿Cómo los faltantes?
Ma. Lluvia, explícale a tu compañero cuáles son los valores faltantes.
Rubén. Son los que debemos sacar, como la tabla que nos puso ayer la maestra en el pizarrón y nosotros hacíamos multiplicaciones para saber cuál número iba debajo de la cantidad de número de canicas.
Ma. ¿Quedó resuelta tu duda?
Iván. Si maestra
Ma. Entonces debemos ir obteniendo los resultados que nos pide la señora Marcela para de tal manera ayudarla y vea que tan inteligentes podemos llegar a ser nosotros como grupo de 5ºA.

Al momento que Romina, ante la pregunta de Rubén: "Maestra ¿Cuáles son los valores faltantes?", contesta "Ma. Alguien que le pueda decir, cuáles son" está manifestando su conocimiento de la teoría de las situaciones didácticas (KMT del MTSK), en concreto cómo hacer devoluciones (Brousseau, 2007) para lograr que los niños se responsabilicen de sus procesos de aprendizaje (KFLM del MTSK).
Más adelante en la misma recuperación de la clase, se aprecia cómo logra que los niños validen sus conocimientos (KPM del MTSK) y recuperen los aprendizajes anteriores a esta sesión que, como vemos en el texto en negritas hace referencia a la comprensión de "dobles" (y "mitades") e implícitamente el cálculo del valor unitario, es decir, de las razones internas en la tabla de proporcionalidad

Alexis. Aquí a nosotros el número que nos dieron fue 180 y nosotros para saber el valor que valían las tortas, dividimos 180 entre 10 y nos salió 18 y lo multiplicamos 18 x 2 y nos salió 36.
Naomi. Aquí en este multiplicamos 5 x 18 y nos salió 90
Ao. Multiplicamos 18 x 15 y nos salió 270
aa. Aquí multiplicamos 18 x 15, en el otro multiplicamos 18 x 22 y así le fuimos haciendo hasta terminar la tabla.
Ma. Niños se dieron cuenta que en esta tabla no se les pide el valor unitario, lo que sus compañeros hicieron fue hacer lo mismo que los equipos anteriores: dividirlo, pero, **aunque aquí no se dio la mitad de 36 que sería una torta ellos lo tomaron en cuenta y a partir de esto obtienen el número de tortas y sacar los valores faltantes de la tabla de proporcionalidad**

8º Reflexión sobre la implementación y reconocimiento del MTSK puesto en juego; ésta es una fase de trabajo compartido entre formador de docentes y estudiantes e implica que, tomando como referencia el diseño, la implementación y el análisis de las tareas por parte de estos últimos, se consideren los avances en sus aprendizajes en los diferentes subdominios del MTSK, considerados como un conocimiento integrado que sólo se separa con fines analíticos. Implica que se reconozcan los avances, pero también los conocimientos débilmente aprendidos en etapas anteriores a su formación docente inicial e incluso la construcción de alternativas de mejora.

9º Rediseño de la tarea desde un marco hipotético de lo que se podría hacer para el logro de los propósitos de aprendizaje del tema; dadas las condiciones de realización de la práctica profesional, se plantea esta fase de esta manera porque muy difícilmente les vuelve a tocar practicar con el mismo contenido, en tal sentido la pregunta que orienta este momento es, a partir de los resultados obtenidos ¿qué cambios haría a la tarea matemática propuesta y/o al diseño completo de la situación didáctica?

Conclusiones

Los principales resultados encontrados nos indican que hay una fuerte relación entre el MTSK que los estudiantes van construyendo y las posibilidades que tienen para diseñar tareas matemáticas que no sólo cubran un enfoque de resolución de problemas, sino que contribuyan a la construcción de los conceptos matemáticos que plantean en sus clases tanto como al aprendizaje con sentido, significado y funcionalidad de los procedimientos matemáticos involucrados; a su vez, el conocimiento de las diferentes demandas cognitivas de las tareas incide en la exigencia para que construyan un conocimiento especializado que les permita formarse como docentes competentes para enseñar matemáticas.

Es justo esta dialéctica la que determina la codeterminación entre ambos aspectos, tareas matemáticas y MTSK, bajo la consideración de que la explicitación y estudio analítico de cada uno de los subdominios en una doble dimensión, como contenido (saber qué es el MTSK como modelo que organiza los componentes del conocimiento especializado del profesor de matemáticas) y como herramienta analítica (para el formador, como apoyo a la estructuración de tareas formativas y, para los estudiantes, en el reconocimiento del campo de conocimientos que deben/pueden tener) posibilita la estructuración de escenarios de formación docente inicial congruentes con algunos de los resultados de la investigación didáctica (en este caso es obvio el posicionamiento) y contribuye a superar efectos pendulares ya documentados en anteriores trabajos (Lizarde, 2019).

Referencias

Block, D., Mendoza, T., y Ramírez, M. (2010). *¿Al doble le toca el doble? La enseñanza de la proporcionalidad en la educación básica.* México: Somos maestr@s.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas.* Argentina: Libros del zorzal.

Carrillo, J., Montes, M., Contreras, L. C., y Climent, N. (2017). El conocimiento del profesor desde una perspectiva basada en su especialización: MTSK. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 22*, 185-206.

Feldman, Z., Thanheiser, E., Welder, R., Tobias, J., Hillen, A., y Olanoff, D. (2016). When is a mathematical task a good task? En L. Hart, S. Oesterle, S. S. Auslander, y A. Kajander, *The Mathematics Education of Elementary Teachers. Issues and Strategies for Content Courses* (págs. 9 - 24). USA: Age publishing.

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., y Baptista Lucio, P. (2010). *Metodología de la investigación.* México: McGraw Hill.

Lizarde, E. (2019). *Análisis de los planes de estudio (1997, 2012 y 2018) para la formación docente inicial en México desde el modelo MTSK.* Medellín: CIAEM.

Ma, L. (2010). *Conocimiento y enseñanza de las matemáticas elementales. La comprensión de las matemáticas fundamentales que tienen los profesores en China y los EE.UU.* Chile: Academia chilena de ciencias.

OECD. (2019). *PISA 2018 Assessment and Analytical Framework.* Paris: PISA-OECD.

Ribeiro, M., Gibim, G., y Alves, C. (2021). A Necessária Mudança de Foco na Formação de Professores de e que Ensinam Matemática: discussão de Tarefas para a Formação e o Desenvolvimento do Conhecimento Interpretativo. *Perspectivas da Educação Matemática, Volume 14, número 34*, 1-25.

SEP. (2011). *Programas de estudio 2011. Guía para el maestro. Educación básica primaria. Quinto grado.* México: Autor.

SEP. (2013). *Desafíos matemáticos. Libro para el alumno. Quinto grado.* México: Autor.

SEP. (2013). *Desafíos matemáticos. Libro para el maestro. Quinto grado.* México: Autor.

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: foundations of the new reform. *Harvard educational review No 57*, 1-22.

Smith, M. S., y Stein, M. K. (1998). Selecting and Creating Mathematical Tasks: From Research to Practice. *Mathematics Teaching in the Middle School 3*, 344-350.

Strauss, A., y Corbin, J. (2002). *Bases de la investigación cualitativa. Técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada.* Colombia: Universidad de Antioquía.

Thanheiser, E., Olanoff, D., Hillen, A., Feldman, Z., Tobias, J., y Welder, R. M. (2016). Reflective analysis as a tool for task redesign: The case of prospective elementary teachers solving and posing fraction comparison problems. Journal of Mathematics Teacher Education, 19 (2-3), 123-148.

Vasco, D., Moriel, J., y Contreras, L. C. (2017). Subdominios del MTSK. KoT y KSM: definición, categorías y ejemplos. En J. Carrillo, y L. C. Contreras, *Avances, utilidades y retos del modelo MTSK. Actas de las III Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la matemática de la Universidad de Huelva* (págs. 29-37). Huelva: CGSE.

RETOS DE LA FORMACIÓN DOCENTE PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN LA MODALIDAD ONLINE: EL CASO DEL CONOCIMIENTO DE LA TAREA

CHALLENGES FOR MATHEMATICS TEACHER TRAINING PROGRAMS TO PREPARE PROFESSIONALS TO TEACH ONLINE: THE CASE OF TASK KNOWLEDGE

Yury Marcela Rojas, Roberto Pastrana, Oscar Bernal
Corporación Universitaria Iberoamericana. (Colombia)
yurymrojas@gmail.com, roberto_pastrana88@hotmail.com, osbernal@gmail.com

Resumen
En este estudio examinamos el alcance en el que los programas de pregrado para la formación docente promueven los conocimientos necesarios para diseñar e implementar tareas que efectivamente promuevan el aprendizaje de las matemáticas en la modalidad online. Realizamos un análisis de contenido para examinar los cursos y experiencias de aprendizaje ofrecidos por los programas analizados. Los resultados cuantitativos muestran que los programas centran el desarrollo del conocimiento de la tarea en la implementación de situaciones ya diseñadas, que en muy pocos casos hacen uso de tecnología. Finalmente, discutimos las implicaciones que tiene esa formación en los procesos de enseñanza de las matemáticas en la virtualidad.

Palabras clave: conocimiento de la tarea, enseñanza online

Abstract
In this study, we examine the extent to which teacher’s training undergraduate programs develop the knowledge required to design and implement tasks, which effectively promote students’ mathematical learning in online environments. So, we conducted a content analysis reviewing the courses and learning experiences offered by the teacher programs observed. The quantitative findings show that most programs focused the development of task knowledge on the implementation of already designed tasks, which rarely used technology. Finally, we discuss the implication of such teacher training on mathematics teaching process in online environments.

Key words: task knowledge, online teaching

Introducción

El crecimiento acelerado de la población que cursa programas virtuales y su bajo desempeño en las áreas de matemáticas y ciencias exactas es una problemática a nivel global. En Colombia en el 2018 el 20.3% de la población estudiantil universitaria curso sus estudios en las modalidades virtual tradicional y distancia (MEN, 2018). Sin embargo, resultados de las pruebas de salida a nivel universitario –pruebas SABER PRO– evidencian que solo un 4% de los estudiantes de la modalidad online alcanzaron el nivel 4 correspondiente al máximo nivel de desempeño. Mientras que más de la mitad (57%) puntuaron dentro de los niveles 1 y 2 que son los niveles más bajos (ICFES, 2019).

Estos patrones de bajo desempeño en el área de matemáticas y de crecimiento acelerado de la modalidad virtual en Colombia son consistentes a nivel latinoamericano y a nivel global. Por ejemplo, en los Estados Unidos un análisis de las matrículas en cursos en el área de matemáticas durante el 2015 reportó un crecimiento aproximado del 300% para cursos online de Cálculo y Estadística Elemental (Blair, Kirkman y Maxwell, 2015). Sin embargo, resultados de investigaciones encontraron que, aunque la demanda de cursos online en matemáticas haya aumentado, sus estudiantes alcanzan los niveles más bajos de competencia y tienen una mayor tasa de deserción comparada con estudiantes presenciales (Jaggars y Xu, 2011; Mensch, 2010).

Varios factores influyen en el rendimiento de los estudiantes en esta modalidad; en particular, hallazgos de investigación en educación matemática han identificado que el conocimiento del profesor y particularmente el conocimiento de la tarea contribuyen significativamente a mejorar los resultados de aprendizaje de los estudiantes (Bakker y Gravemeijer, 2006; Borba et al., 2016; Chernoff, Liljedahl y Zazkis, 2007; Drijvers, 2013; Kieran, 2019; Margolinas, 2014; Ratnayake y Thomas, 2018). Sin embargo, actualmente existen muy pocos estudios sobre la formación que reciben los docentes en esta área de conocimiento. Aún menos investigaciones se han realizado sobre las comprensiones y habilidades requeridas para diseñar tareas para la modalidad online (Alcock y Jones, 2013; Chinnappan, Peschke y Trenholm, 2019, p.3; Kendal y Stacey, 2001). Para abordar esta problemática formulamos las siguientes preguntas de investigación: ¿Qué caracteriza la formación que reciben los futuros docentes en torno al conocimiento de la tarea? ¿Cuál es el alcance de los programas de formación en el desarrollo del conocimiento de la tarea necesario para enseñar efectivamente matemáticas? Los hallazgos nos permitirán comprender qué caracteriza la formación que reciben los docentes de matemáticas respecto al conocimiento de la tarea y considerar las implicaciones que esta formación tiene en la enseñanza de las matemáticas en la modalidad online.

Marco teórico y metodológico para la revisión de programas de formación de docentes en matemáticas

Para abordar las preguntas planteadas creamos un marco metodológico y teórico que integra contribuciones en tres áreas de investigación: i) investigaciones sobre el conocimiento para enseñar efectivamente matemáticas e incorporar efectivamente TIC. Enfatizando en el conocimiento de la tarea, ii) investigaciones sobre el conocimiento para enseñar matemáticas en la modalidad online. Dada la variedad de definiciones y carencia de distinción entre lo que es una tarea y una actividad, consideramos relevante exponer como las entendemos en este estudio para luego desarrollar los aportes de cada una de las dos áreas mencionadas.

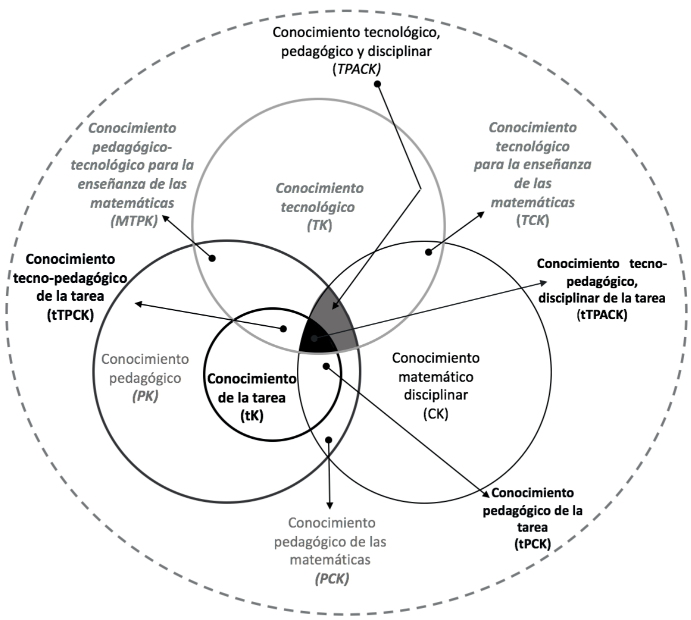
En este estudio entendemos una tarea como aquello que se indica a los estudiantes hacer (contestar a una pregunta, realizar una construcción geométrica). Mientras que la palabra actividad refiere al acto de ejecutar una acción, la cual puede ser física o mental. Es importante anotar que la ejecución activa de tales acciones genera insumos –registros de actividad- que tienen el potencial de contribuir al desarrollo de conceptos matemáticos, ya que se convierten en el objeto de reflexión y razonamiento. Lo anterior aporta a la distinción entre actividad y tarea de aprendizaje. En el contexto de nuestro estudio usamos los planteamientos de Ohnati et al. (2013) quienes definen *actividad* como las intencionalidades o motivos matemáticos que emergen de la interacción entre el estudiante, el profesor, los recursos, el ambiente y todo lo demás relacionado con la tarea. Es así como la tarea es algo que hacen los estudiantes mientras que la actividad refiere a los resultados de estar inmerso activamente en la tarea (Ohtani y Watson, 2015). Basados en la anterior distinción presentamos las contribuciones por área de investigación profundizando en la comprensión del conocimiento de la tarea.

Área 1: ¿Qué conocimientos debe desarrollar el profesor para enseñar efectivamente matemáticas e incorporar TIC?

Contribuciones iniciales desarrolladas por Shulman (1986) identificaron el *conocimiento didáctico del contenido* como eje central que le permite al profesor desarrollar, organizar y presentar un contenido disciplinar teniendo en cuenta los conocimientos previos de los estudiantes. En el campo de la educación matemática se conoce como el conocimiento pedagógico de las matemáticas, el cual requiere una comprensión profunda sobre el desarrollo de los conceptos matemáticos, junto con las consideraciones sobre su pedagogía, es decir sobre las formas adecuadas de estructurar el contenido a enseñar (Shulman, 1987; Ball, Phelps y Thames, 2008). Esta caracterización del conocimiento didáctico del contenido se usó como base para realizar estudios sobre el conocimiento del profesor al integrar el componente tecnológico en el proceso de enseñanza. El análisis de las interacciones entre los diferentes tipos de conocimiento (pedagógico, tecnológico y del contenido disciplinar) permitieron, la formulación de sub-áreas de conocimiento requeridas para efectivamente enseñar un contenido e incorporar tecnología, ejemplo de ello es el modelo TPACK (Koehler y Mishra, 2007).

Como lo vemos en la figura 1, el área de educación matemática ha contribuido en la definición y caracterización de los tipos de conocimiento del profesor necesarios para efectivamente promover aprendizaje de las matemáticas usando tecnología. A continuación, presentamos de manera resumida los tipos de conocimiento y profundizamos en el desarrollo del conocimiento de la tarea.

Figura 1: *Modelo TPACK adaptado para analizar el conocimiento del profesor de matemáticas.*



Fuente: elaboración propia basada en Koehler y Mishra (2007).

Áreas generales de conocimiento base del profesor: comprenden el conocimiento pedagógico (PK), tecnológico (TK) y disciplinar (MK) (Koehler y Mishra, 2007). Respecto al conocimiento disciplinar de las matemáticas Markar y Olive (2010) consideran que este incluye el conocimiento de las diferentes ramas de las matemáticas (i.e. geometría, algebra, probabilidad, estadísticas) y los conceptos propios de cada una, junto con el desarrollo de razonamiento matemático avanzado.

Áreas de conocimiento específico para la enseñanza de las matemáticas: comprenden el Conocimiento pedagógico de las matemáticas (PCK), Conocimiento Tecnológico para la enseñanza de las matemáticas (TCK) y el Conocimiento de la tarea (tK). Tales conocimientos consideran la naturaleza de los conceptos matemáticos y por ende las particularidades de su enseñanza. Responden a las preguntas ¿Cómo enseñar matemáticas teniendo en cuenta las etapas de desarrollo de conceptos matemáticas? ¿Qué herramientas tecnológicas se pueden utilizar para mediar el proceso de enseñanza y aprendizaje? ¿Cómo plantear tareas que efectivamente promuevan el aprendizaje de las matemáticas?

El tK hace parte del PCK, este último involucra la comprensión de tres aspectos; lo que hace difícil o fácil de aprender un concepto, el pensamiento del estudiante y el conocimiento de las formas adecuadas de estructurar el contenido. Una de estas formas de estructuración es el diseño de tareas y secuencias de aprendizaje, lo cual requiere tener una comprensión de cómo crear y utilizar un medio –tarea- que involucre a los estudiantes en una actividad matemática que tenga el potencial de promover el desarrollo de aprendizajes y conceptos. En esta línea, una tarea consiste en aquello que se indica a los estudiantes hacer (contestar a una pregunta, resolver un problema). Su planteamiento implica cuatro pasos: establecer el conocimiento previo de los estudiantes, formular un objetivo de aprendizaje, establecer la actividad matemática en la que se va a involucrar a los estudiantes, seleccionar los recursos para su implementación (Ohtani y Watson, 2015). Complementariamente, Chernoff, Liljedahl y Zazkis (2007) enfatizan que el tK requiere que el profesor tenga en cuenta en los conocimientos previos de sus estudiantes para garantizar que pueden efectivamente desarrollar la actividad matemática propuesta.

Interacciones entre las áreas de conocimiento específico: comprenden las interacciones entre las áreas base de conocimiento que generan los siguientes tipos de conocimiento: conocimiento Pedagógico-Tecnológico de las matemáticas (MPTK), Conocimiento Tecnológico-Pedagógico de las matemáticas (TPACK). Resultado de las interacciones del tK con el conocimiento pedagógico, tecnológico y matemático tenemos las siguientes sub-áreas de conocimiento: conocimiento pedagógico de la tarea (tPK), Conocimiento tecno-pedagógico de la tarea (tTPK) y Conocimiento tecnológico, pedagógico de las tareas de aprendizaje de las matemáticas (tTPACK). Estos tipos de conocimiento responden a las preguntas: ¿Cómo diseñar tareas de aprendizaje que usen productivamente tecnología? y ¿Cómo el uso de tecnología afecta las formas en las que los estudiantes aprenden matemáticas?

En cuanto a los subtipos de conocimiento de la tarea es necesario tener en cuenta que:

- El conocimiento pedagógico de la tarea (tPK), no solo requiere la comprensión las matemáticas que están inmersas en la tarea (tK), sino que también requiere “liberar las matemáticas de inmersas en la tarea”. Es decir, los profesores deben tener una comprensión profunda de los conocimientos previos de sus estudiantes y de cómo movilizarlos para fomentar el aprendizaje (Chernoff, Liljedahl y Zazkis, 2007).
- Conocimiento tecno-pedagógico de la tarea (tTPK): refiere al conocimiento de cómo embeber una herramienta tecnológica en la tarea de aprendizaje.
- Conocimiento tecnológico, pedagógico de las tareas de aprendizaje de las matemáticas (tTPACK): este le permite al docente usar su conocimiento de la tarea para estructurar y definir el rol de la herramienta tecnológica, con el fin de garantizar que provea acceso y promueva los aprendizajes matemáticos (Margolinas, 2013)

Área 2: ¿Qué conocimientos complementarios debe desarrollar el profesor para enseñar matemáticas en la modalidad online?

En el contexto colombiano la educación virtual u online, refiere al desarrollo de experiencias educativas que tienen como escenario de enseñanza y aprendizaje el ciberespacio y se apoyan en la tecnología (MEN, 2013). La forma en que se desarrollan tales experiencias requiere de conocimientos especializados que le permitan al profesor tomar decisiones y abordar los siguientes interrogantes; ¿Cómo generar interacciones efectivas entre el profesor-estudiantes-tecnología-contenido disciplinar?, ¿Cómo y qué tipo de interacciones (sincrónicas y asincrónicas) promover?, ¿Cuáles formas de comunicación y modalidades sensoriales utilizar? y ¿Cómo estructurar las tareas de aprendizaje? Estos conocimientos son: conocimiento de los procesos de comunicación e interacción en la modalidad online (cIK) y conocimiento de cómo las personas aprenden a través de recursos multimedia (mLK).

El cIK requiere tres comprensiones, la comprensión de la naturaleza de la forma en que se dan las interacciones de los componentes del ambiente virtual (el estudiante, el profesor, la tecnología, la tarea de aprendizaje y el contenido disciplinar) cuando se aprende efectivamente, la comprensión de sobre cómo tales interacciones modifican o condicionan la forma en que se aprende el contenido y la comprensión sobre cómo estas deberían estructurarse para potenciar el aprendizaje (Borba y Llinares, 2012; Chinnappan, Peschke y Trenholm, 2019; Jaggars y Xu, 2011; Comas-Quinn, 2011). Específicamente en cursos online de matemáticas para pregrado identificaron el siguiente tipo de interacciones como efectivas para la construcción del conocimiento matemático: a) Las interacciones de los estudiantes con las tareas de aprendizaje mediadas por TIC deben ser discutidas con otros a través del uso de interfaces colaborativas de comunicación –sincrónica o asincrónica- para poder fomentar el discurso matemático, b) as interacciones con el profesor deben facilitar la co-creación de contenidos y artefactos con los estudiantes, en vez de limitarse a la presentación o transmisión de información y c) interacciones que fomenten la creación junto con los estudiantes el conocimiento base necesario para que ellos puedan interactuar de manera productiva tanto con las herramientas tecnológicas como con el contenido disciplinar.

El *mLK* reconoce que en la virtualidad el medio principal para promover el aprendizaje son los recursos multimedia. Los cuales se pueden presentar en palabras (tales como texto digital o hablado) o con imágenes tales como fotos, videos, gráficos, ilustraciones u animaciones (Mayer, 2009). Por lo tanto, el conocimiento sobre aprendizaje multimedia refiere a la habilidad del profesor para establecer en qué condiciones los estudiantes aprenden mejor de sus interacciones con recursos multimedia y cómo se da tal aprendizaje. Lo anterior requiere que el profesor distinga las potencialidades y limitaciones de utilizar ciertos recursos multimedia y sus modalidades de presentación (auditiva y visual). Un aspecto relevante a analizar de las interacciones de los estudiantes con los recursos multimedia es la identificación de las cargas cognitivas resultantes de procesar los diferentes recursos. Ya que estas afectan la capacidad del estudiante para razonar matemáticamente. Por ejemplo, al observar un video explicativo de un concepto matemático los estudiantes deben procesar por lo menos tres cargas cognitivas, una que corresponde a la decodificación del lenguaje verbal, otra que corresponde a la decodificación del lenguaje matemático que se utiliza y el significado de símbolos o gráficos y una tercera carga que corresponde a la actividad matemática y al razonamiento matemático. En este caso, si los estudiantes usan la mayoría de su carga cognitiva para decodificar el lenguaje verbal y matemático, quedará muy poco espacio para que los estudiantes razonen matemáticamente.

Finalmente, aclaramos que nuestra distinción sobre los tipos de conocimiento es resultado de la revisión de la literatura y sirve como guía para identificar las áreas consideradas como esenciales para la formación el profesor de matemáticas. Consideramos que en la práctica docente tal separación no existe, diferentes tipos de conocimiento se activan para abordar las situaciones propias de la enseñanza. Y la identificación de los tipos de conocimiento del profesor es importante para la estructuración y desarrollo programas de formación docente que pretenden desarrollar aprendizajes en torno a estos.

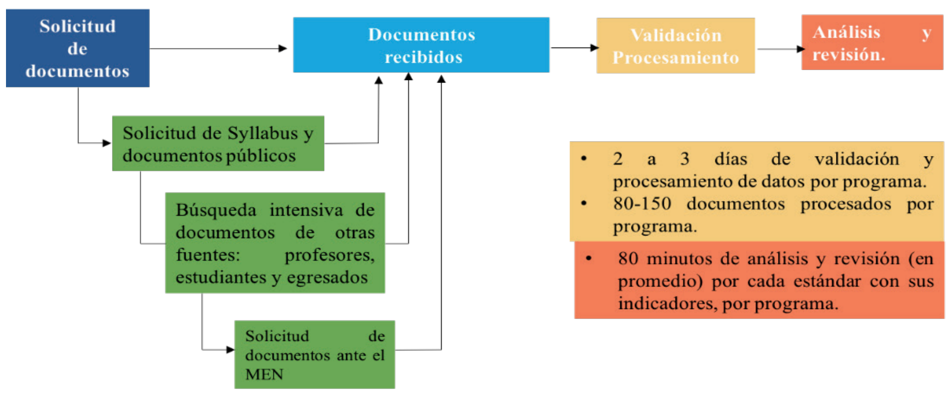
Método

Para examinar los programas se utilizó la metodología o modelo de caracterización de programas de formación docente, propuesta por el Consejo Nacional de Calidad de la enseñanza (NCQT, 2017). Esta metodología tiene dos componentes: el primero, las categorías o estándares que refieren a los conocimientos, habilidades y prácticas pedagógicas que deberían desarrollar los docentes en el transcurso del programa. El segundo, los indicadores que caracterizan acciones puntuales que son tomadas como evidencia de que el profesor ha desarrollado una habilidad o comprensión específica. La formulación de los estándares e indicadores se realizó en dos fases. En la primera definimos los estándares basados en los tipos de conocimiento del profesor de matemáticas. Posteriormente planteamos los indicadores para cada estándar, estos especifican los aprendizajes, comprensiones o habilidades que sirven como evidencia de que un profesor maneja cierta área de conocimiento. En la segunda fase, validamos los estándares e indicadores. Para lo cual evaluamos uno de los programas de formación y posteriormente realizamos un panel con expertos para validar y ajustar la lista final de estándares e indicadores. Resultado del panel de expertos, se validaron los estándares planteados y además plantearon ciertas categorías emergentes que corresponden a conocimientos que los programas promovían, pero no estaban considerados en el planteamiento del modelo inicial.

Utilizando el modelo, examinamos todos los programas de formación en educación matemática, matemática y tecnología, que contaban con acreditación de calidad. La muestra seleccionada fue de 22 programas y se distribuye de la siguiente forma: 2 programas de Licenciatura en Matemáticas con Énfasis en Matemáticas, 15 programas de Licenciatura en Matemáticas, 2 programas de Licenciatura en Matemáticas y Física y 3 programas de Matemáticas. En total analizamos 1048 cursos en total, de los cuales 887 eran obligatorios y 121 eran cursos electivos. Posteriormente realizamos el procesamiento y análisis de las fuentes documentales (ver figura 2).
Recolección, procesamiento y análisis de datos

Iniciamos con una búsqueda en las páginas web de las universidades o la solicitud directa de documentos tales como planes de estudio, syllabus y otros materiales tanto a la universidad como al Ministerio de Educación Nacional. Adicionalmente, contactamos y entrevistamos a profesores, egresados y estudiantes activos de los programas que pudieran compartir información sobre los cursos y la experiencia de formación en el programa. Procesamos la información de cada programa creando una base de datos que constaba de los documentos del programa y las transcripciones de las entrevistas a los participantes. Finalmente validamos cada base de datos realizando una revisión exhaustiva de los documentos garantizando que los documentos fueran completos, claros y brindaban información sobre las categorías planteadas por el modelo.

Figura 2. *Recolección y procesamiento de información.*



Elaboración propia

La codificación de los datos se realizó utilizando los estándares e indicadores mencionados anteriormente. Cada uno de los documentos fue revisado extensamente por dos o tres investigadores, quienes usaron el software Atlas TI para realizar un análisis de contenido (Holsti, 1968). Por otro lado, se creó una base de datos en la que se asignó a cada curso del programa un código correspondiente a los estándares y los indicadores. Posteriormente, los investigadores se reunieron para discutir la codificación. Allí se utilizaron las transcripciones de las entrevistas a profesores, egresados y estudiantes activos para validar y complementar el análisis documental. En los casos en los que hubo desacuerdos entre los investigadores sobre la asignación de los códigos se procedió a revisar detalladamente los documentos y las entrevistas a participantes para llegar a un consenso. Resultado de este proceso llevo a tomar la decisión de crear una serie categorías emergentes para categorizar otras áreas de conocimiento o ámbitos de formación promovidos por los programas.

Análisis de datos: para examinar los programas de formación realizamos un análisis de contenido. El cual permite "realizar inferencias a partir de la revisión sistemática y objetiva de datos textuales" (Holsti, 1968, p. 608).

Específicamente se implementó un análisis directo de contenido, el cual consiste en plantear códigos o categorías basados en resultados previos de investigación (Hsied y Shannon, 2005). Este se desarrolla en cuatro pasos. Primero los datos son recolectados, procesados y convertidos en transcripciones o texto. Luego los códigos son analíticamente formulados, es decir, se formulan con base en resultados investigación o se identifican inductivamente en los datos. Posteriormente estos códigos se identifican en los datos, en los casos en los que surgen temas emergentes se crean nuevas categorías. Finalmente, los datos y materiales que se encuentran en una misma categoría son examinados a profundidad con el fin de identificar patrones y relaciones, los cuales permiten la formulación de conjeturas e hipótesis que son considerados a la luz de hallazgos previos de investigación y de datos adicionales. Adicionalmente los resultados de la codificación se pueden analizar cuantitativamente. Para ello utilizamos estadísticas descriptivas para determinar el énfasis de formación por tipo de conocimiento.

Resultados

Los hallazgos de este estudio indican que casi la mitad de los cursos y experiencias de aprendizaje de cada programa, promueven una extensa y profunda formación en el conocimiento disciplinar de las matemáticas (ver tabla 1). En cuanto a la formación del conocimiento pedagógico, identificamos que solo el 5.6% de los cursos obligatorios se enfocan en su desarrollo. Profundizando mayormente en el estudio de estrategias para la enseñanza de las matemáticas, la más común fue la de resolución de problemas. El análisis de contenido y de las entrevistas indican que este énfasis se fundamenta en la premisa que desarrollar ambos tipos de conocimiento brinda las bases para que los profesionales autónomamente las interconecten para desarrollar habilidades tales como diseñar tareas de aprendizaje que incorporen tecnología.

Tabla 1. *Énfasis del programa de formación por tipo de conocimiento.*

	PK	*TK*	*MK*	*PCK*	*TCK*	*MPTK*	*TPACK*
Obligatorio	**5,60**%	1,36%	**48,90**%	15,67%	1,52%	0,09%	0%
Electivo	5,58%	2,00%	33,81%	5,24%	0,22%	0%	0%

	tK	*tPK*	*tTPK*	*tTPACK*	*SK*
Obligatorio	0,43%	1,12%	0,82%	0%	1,92%
Electivo	0,22%	0,22%	1,67%	0%	2,22%

Nota: Elaboración propia

Conocimiento de la tarea (tK)

Aunque este conocimiento ha sido identificado como significativo en las ganancias de los aprendizajes de los estudiantes tanto en las modalidades presencial como online (Alcock y Jones, 2013; Borba et al., 2016; Chinnappan, Peschke y Trenholm, 2019; Margolinas, 2013), el análisis de datos evidencia que menos de un 3% de los cursos del programa promueven el conocimiento de la tarea y sus sub-áreas. El análisis de contenido evidencia que la mayoría de las experiencias de aprendizaje en esta área se centran en la implementación de situaciones ya diseñadas, que en muy pocos casos hacen uso de tecnología. Específicamente los datos indican que solo un 0.82% de los cursos obligatorios por programa promueven el tTPK, lo cual indica que son escasas las ocasiones en las que los futuros profesores desarrollan una comprensión de cómo diseñar una tarea que incorpore tecnología y permita movilizar los conocimientos previos de sus estudiantes para acceder a las matemáticas inmersas en esta. Esto requiere que los futuros docentes interconecten el conocimiento que ya han desarrollado en las áreas MK, PK y TK. Sin embargo, esta conexión no se realiza de forma autónoma, ya que requiere de experiencias puntuales que la promuevan.

El análisis de datos por programa desglosados por obligatoriedad u electividad de los cursos revelo que más de la tercera parte de los programas no cuenta entre sus cursos obligatorios con cursos que desarrollen el conocimiento de la tarea y sus sub-áreas.

Conocimiento del profesor para enseñar matemáticas en la modalidad online

Los resultados sobre las áreas específicas de conocimiento propias del docente de matemáticas que enseña en la modalidad online muestran que solo un 0.1% de los cursos obligatorios y un 0.44% de los cursos electivos, promediado por programa, promueven el *conocimiento de los procesos de comunicación e interacción* (*cIK*) en la modalidad online.

El análisis de los syllabus de los cursos electivos muestra que estos abordaban de manera general el concepto de entorno de aprendizaje virtual discutiendo sobre los tipos de comunicación y las interacciones propias de esta modalidad. Respecto al área de *conocimiento sobre cómo las personas aprenden a través de multimedia* (*mLK*), los datos no muestran programas que ofrezcan formación en esta área de conocimiento.

Resultados categorías de conocimiento emergentes

En cuanto a las categorías emergentes de clasificación de los cursos, los datos muestran seis grandes grupos, nuevamente calculados los porcentajes por programa y promediando:

- Áreas de formación general del docente: 13% obligatorios y 1.28% electivos
- Conocimiento del estudiante (SK): 1.92% obligatorios y 2.22% electivos.
- Conocimiento de las instituciones educativas y su organización: 1.38% obligatorios y 0.7% electivos.
- Conocimientos en investigación en educación o investigación en educación matemática: 5.38% obligatorios y 0.51% electivos
- Cursos que promueven conocimiento que no se encuentra relacionado directamente con la formación del profesor de matemáticas: 2.11% y 0.26% electivos. Por ejemplo, se ofrece formación en artes, deportes o filosofía institucional.
- Cursos no clasificables: 0.68% obligatorios y 45.62% electivo.

Finalmente, el análisis de varianza de los énfasis de los diferentes programas muestra que existe una gran variabilidad en los énfasis que los diferentes programas hacen en la formación de los diferentes tipos de conocimiento del profesor, esta variabilidad se exacerba al analizar la distribución del porcentaje de cursos obligatorios y electivos.
Estos hallazgos muestran la escasa atención que se da al tK y la creciente necesidad de comprender la naturaleza distintiva de los procesos de aprendizaje en la modalidad online y la forma en la que se debe estructurar los componentes de la tarea para efectivamente desarrollar aprendizajes matemáticos.

Conclusiones y discusión

El presente artículo además de ofrecer un marco metodológico y teórico para analizar los programas de formación de futuros profesores para la enseñanza de matemáticas, muestra a través del análisis de los programas de formación en Colombia que la mayoría se centran en el desarrollo del MK y PK. Aunque estos conocimientos son base para enseñar efectivamente matemáticas encontramos que los programas ofrecen muy pocas oportunidades de aprendizaje en las que los futuros docentes tengan que interconectar estos conocimientos para, por ejemplo, diseñar tareas de aprendizaje. Estos hallazgos resaltan la creciente necesidad de promover el uso activo e interconexión en las áreas de conocimiento general.

Dado el crecimiento acelerado de la población estudiantil que cursa programas virtuales, su bajo desempeño en las áreas de matemáticas y la escasa formación que reciben los futuros docentes para enfrentar no solo el reto de enseñar matemáticas conceptualmente sino también en la modalidad online, consideramos fundamental generar una discusión sobre la formación en los conocimientos del profesor necesarios para enseñar matemáticas en la virtualidad. Este puede ser un eje central que permita trabajar en la formación docente, la cual se relacionan cercanamente con el desempeño de los estudiantes tal modalidad.

La naturaleza de la enseñanza de las matemáticas en la modalidad online tiene características singulares que hacen necesario profundizar en el estudio y análisis de los conocimientos requeridos para crear e implementar tareas y secuencias de que efectivamente desarrollen el aprendizaje y la comprensión conceptual de las matemáticas. Como los resultados lo indican, solo en 0.1% de los cursos obligatorios por programa se fomentó una comprensión de cómo estructurar las interacciones en un ambiente virtual para promover de manera efectiva el aprendizaje. La revisión de la literatura también sugiere que hasta el momento contamos con una comprensión muy escasa de las particularidades del conocimiento que el profesor que enseña en la modalidad online debe adquirir y las prácticas que debe desarrollar. Menos explorado ha sido la forma en que el profesor usa representaciones y recursos multimedia para la enseñanza de las matemáticas online.

En el mismo sentido, el balance entre los cursos para desarrollar el conocimiento puramente matemático y los que apuntan a lo pedagógico y al desarrollo de tareas llama a una introspección de las instituciones y a posibles espacios para futuras investigaciones. Como lo mostró el análisis, es usual que los cursos de contenido matemático estén orientados a matemáticas en un nivel de pregrado, ampliando la perspectiva de los futuros profesores sobre las matemáticas, dando a los profesores en formación un contexto más amplio de la matemática como ciencia y de las perspectivas que podrán mostrar a sus estudiantes; sin embargo, esas no son las matemáticas que estos profesores tendrán como el centro de su labor docente, así que el balance entre estos cursos y los que abordan el contenido de la matemática escolar desde nuevas perspectivas y con nuevas formas de enseñanza es un espacio de reflexión e investigación por abordar.

En este estudio la fuente primaria de información fueron los documentos publicados por las universidades, los cuales se analizaron en conjunto con las entrevistas a egresados y estudiantes activos. Sin embargo, aclaramos que esta información solo muestra una dimensión de la experiencia de formación, llamando la atención a la necesidad de recolectar datos de la implementación de los cursos y los desempeños de los estudiantes. En este contexto es importante iniciar con una discusión sobre lo que se establece en los documentos de los programas y los syllabus de los cursos como crucial para la formación del futuro profesor de matemáticas.

La obtención de información adicional podría también explicar las marcadas diferencias encontradas entre programas en cuanto a la distribución de los cursos, ya que estas pueden ser el fruto de orientaciones institucionales diversas, así como de formas de entender la enseñanza de las matemáticas. Incrementar la disponibilidad de información sobre los programas en cuanto a las motivaciones subyacentes de sus estructuras puede ser crucial para mejorar los resultados del proceso de decisión de quienes buscan acceder a ellos, permitiendo además una exploración más profunda desde lo teórico para comprender la forma en que cada programa prepara a sus egresados.

Finalmente, aunque nuestra muestra es reflejo de la población de programas de formación docente en matemáticas en el país (de los cuales solo escogimos los programas que tienen acreditación de calidad) consideramos necesario validar y extender el marco metodológico y teórico generado para caracterizar los programas en otros contextos diferentes al colombiano y en programas en otras disciplinas.

Referencias

Alcock, L., y Jones, I. (2013). Peer assessment without assessment criteria. *Studies in Higher Education 39*, 1774-1787.

Bakker, A., y Gravemeijer, K. (2006). A historical phenomenology of mean and median. *Educational Studies in Mathematics 62*, 149-168.

Ball, D., Phelps, C., y Mark, T. (2008). Content Knowledge for Teaching What Makes It Special? *Journal of Teacher Education 59*, 389-407.

Blair, R., Kirkman, E., y Maxwell, J. (2015). Statistical abstract of undergraduate programs in the mathematical sciences in the United States. *2015 CBMS Survey of Undergraduate Programs*, 423-453.

Borba, M., y Llinares, S. (2012). Online mathematics teacher education: overview of an emergent field of research. *ZDM Mathematics Education 44*, 697-704.

Borba, M., Jaramillo, R. A., Londoño, E. A., y Sucerquia, E. (2016). La educación a distancia virtual: desarrollo y características en cursos de matemáticas. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, 33-55. Recuperado de Fundación Universitaria Católica del Norte: https://www.redalyc.org/pdf/1942/194245902004.pdf

Comas-Quinn, A. (2011). Learning to teach online or learning to become an online teacher: An exploration of teachers' experiences in a blended learning course . *The Open University* , 218–232.

Chernoff, E., Lijedahl, P., y Zazkis, R. (2007). Interweaving mathematics and pedagogy in task design: a tale of one task. *Journal of Mathematics Teacher Education 10*, 239-249.

Chinnappan, M., Peschke, J., y Trenholm, S. (2019). *"A review of fully online undergraduate mathematics instruction through the lens of large scale research (2000-2015).* Recuperado de Taylor y Francis online: https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/10511970.2018.1472685

Drijvers, P. (2013). Digital design: RME principles for designing online tasks. *Task design in mathematics education: Proceedings of ICMI Study 22*, 53-60.

Holsti, R. (1968). *Content Analysis.* Wesley: Handbook of Social Psychology.

Hsieh, H.-F., y Shannon, S. (2005). Three Approaches to Qualitative Content Analysis. *Qualitative Health Research*, 15, 1277-1288. https://doi.org/10.1177/1049732305276687

Kendal, M., y Stacey, K. (2001). The Impact of Teacher Privileging on Learning Differentiation with Technology. *International Journal of Computers for Mathematical Learning 6*, 143-165.

Kieran, C. (2019). Task Design Frameworks in Mathematics Education Research: An Example of a Domain-Specific Frame for Algebra Learning with Technological Tools . *Compendium for Early Career Researchers in Mathematics Education*, 265-287.

Koehler, M., y Mishra , P. (2007). Tracing the development of teacher knowledge in a design seminar: Integrating content, pedagogy and technology . *Computer y education 49*, 740-762.

ICFES. (2019). *Informe nacional Saber 11-2018.* Recuperado de Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación: https://www.icfes.gov.co/web/guest/resultados-saber-11

Jaggars, J., y Xu, D. (2011). The effectiveness of distance education across Virginia's community colleges: Evidence from introductory college-level math and English courses. *Educational Evaluation and Policy Analysis 33*, 360-377.

Makar, K., y Olive, J. (2010). Mathematical knowledge and practices resulting from access to digital techn

Margolinas, C. (2013). *Task Design in Mathematics Education. Proceedings of ICMI Study 22.* Obtenido de HAL Archives-ouvertes.fr: https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00834054v2

Margolinas, C. (2014). Connaissance et savoir. Concepts didactiques et perspectives sociologiques? . *Revue Française de Pédagogie 188*, 13-22.

Mayer, R. (2009). *Multimedia learning.* Recuperado de Cambridge University Press: https://www.cambridge.org/core/books/multimedia-learning/7A62F072A71289E1E262980CB026A3F9

MEN. (2013). *Educación virtual o educación en línea.* Recuperado de Ministerio de Educación Nacional: https://www.mineducacion.gov.co/1759/w3-article-196492.html?_noredirect=1

Mensch, S. (2010). Issues in offering numeric based courses in an online environment . *Journal of Instructional Pedagogies 3* , 1-7.

NCQT. (2017). *Annual 2017 State Teacher Policy Yearbook.* Recuperado de National Council on Teacher Quality: https://www.nctq.org/publications/2017-State-Teacher-Policy-Yearbook

Ohtani, M., Kaur, B., Anthony, G., y Clarke, D. (2013). Student voice in mathematics classrooms around the world. Recuperado de ResearchGate:

https://www.researchgate.net/publication/267441268_Student_voice_in_mathematics_classrooms_around_the_world

Ohtani, M., y Watson, A. (2015). Task design in mathematics education. *New ICMI Study Series*, 29-41.

Ratnayake, I., y Thomas, M. (2018). *Documentational genesis during teacher collaborative development of tasks incorporating digital technology Background and Theoretical Framework.* Recuperado de ResearchGate: https://www.researchgate.net/publication/324907016_Documentational_genesis_during_teacher_collaborative_development_of_tasks_incorporating_digital_technology_Background_and_Theoretical_Framework

Shulman, L. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher*, 4-14.

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform . *Harvard Educational Review 57*, 1-22 .

VOL34, NÚMERO 2, AÑO 2021

IDEAS INICIALES DEL PENSAMIENTO GEOMÉTRICO DE FUTUROS MAESTROS DE EDUCACIÓN PRIMARIA

INITIAL IDEAS OF GEOMETRIC THINKING OF PROSPECTIVE ELEMENTARY SCHOOL TEACHERS

Juan Pablo Vargas Herrera, Joaquín Giménez, Yuly Vanegas
Universidad de Barcelona, Universidad de Lleida. (España)
Jvargashe9@alumnes.ub.es, quimgimenez@ub.edu, yuly.vanegas@udl.cat

Resumen
La formación de maestros es un tema de interés relevante en la investigación en Educación Matemática, por ello en las últimas décadas se han realizado múltiples estudios con el objetivo de caracterizar el conocimiento profesional de profesores de matemática de diferentes etapas. En este estudio se describen ideas iniciales de un grupo de futuros maestros de Educación Primaria sobre aspectos matemáticos y didácticos de la noción de semejanza. Se diseña e implementa una tarea profesional para hacer emerger las comprensiones de los futuros docentes sobre dicha noción. Se lleva a cabo un análisis usando herramientas del modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas. Se observa que los futuros maestros argumentan que la semejanza implica igualdad de forma y muy pocos se acercan a una caracterización adecuada de esta noción a partir del reconocimiento de propiedades.

Palabras clave: formación docente, conocimiento didáctico, semejanza

Abstract
Teacher education is a topic of relevant interest in Mathematics Education research. In the last decades multiple studies have been carried out with the aim of characterizing the professional knowledge of mathematics teachers at different stages. This study describes initial ideas of a group of prospective teachers of Elementary Education about mathematical and didactic aspects of the notion of similarity. A professional task is designed and implemented to bring out the prospective teachers' understandings of this notion. An analysis is carried out using tools of the Didactic-Mathematical Knowledge and Competences model. It is observed that prospective teachers argue that similarity implies equality of form; and very few come close to an adequate characterization of this notion based on the recognition of properties.

Key words: teaching training, didactical knowledge, similarity

Introducción

El conocimiento didáctico-matemático de los profesores de matemáticas ha sido estudiado con especial interés durante las últimas décadas. Diversas investigaciones han identificado y definido componentes para caracterizar este tipo de conocimiento (Ball, Thames, y Phelps, 2008; Beswick y Chapman, 2012; Carrillo, Climent, Contreras y Ribeiro, 2017, entre otros). Uno de los objetivos de esquematización de este conocimiento es el tener elementos que permitan analizar, describir y perfeccionar la práctica del profesor y, por ende, promover acciones para la mejora del aprendizaje de los estudiantes. Este interés ha llevado al desarrollo de modelos para el análisis y la mejora de la interacción y práctica educativa en el aula. Así, encontramos el modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas del profesor de matemáticas CCDM (Godino, 2009; Pino-Fan y Godino, 2015; Godino, Batanero, Font y Giacomone, 2016). En este modelo se considera que dos competencias clave que el profesor de matemáticas debe desarrollar son la competencia matemática y la competencia de análisis e intervención didáctica. Se considera que el conocimiento necesario para la enseñanza de las matemáticas implica un conocimiento profundo de la matemática y su enseñanza, es decir, un conocimiento didáctico-matemático, ya que el conocimiento meramente matemático de los objetos no es suficiente para una práctica adecuada del profesor (Pino-Fan, Assis y Castro, 2015).

Por otra parte, la geometría es un tópico relevante en el currículo escolar, sin embargo, no es trabajada suficientemente en las aulas. Según Báez e Iglesias (2007) y Espinoza, Barbé, Mitrovich y Rojas (2007), los docentes tienden a postergar la enseñanza de la geometría en el aula dada a su escasa formación matemática y didáctica. Muchos de los maestros que abordan los conceptos geométricos tienen un enfoque en el que se privilegia la memorización de nombres de figuras y algunas de sus características (Copley, 2000). Esto es contradictorio con los planteamientos curriculares actuales para la educación primaria (NCTM, 2000; Burgués y Sarramona, 2013; CCSSO, 2010), en donde se resalta la importancia de desarrollar procesos matemáticos desde las primeras edades para promover una actividad matemática rica. Tal y como se plantea en Samuel, Vanegas y Giménez (2016) una actividad geométrica que busca un aprendizaje significativo involucra diversas habilidades (de dibujo, de construcción, de comunicación, de aplicación y transferencia, entre otras), por ello es importante potenciar procesos cognitivos como la visualización, el razonamiento y la representación (Jaime y Gutiérrez, 2016).

En este reporte de investigación, se describen ideas iniciales de un grupo de futuros maestros (FM) de educación primaria cuando se enfrentan a una tarea de interpretación de situaciones propuestas por otros. En dicha tarea, los futuros maestros ponen en juego su conocimiento sobre la noción de semejanza y su conocimiento intuitivo sobre la didáctica de la geometría. Nuestra hipótesis es que el conocimiento geométrico con el que llegan los futuros maestros al grado de educación primaria no es suficiente. Por ende, identificar dichos conocimientos es clave para adecuar y mejorar las propuestas de formación inicial para favorecer e impulsar un mejor razonamiento geométrico de los futuros maestros.

Marco teórico

Este estudio se enmarca en el Enfoque Onto-semiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS), el cual ha sido ampliamente estudiado y desarrollado por diversos autores (Godino, Batanero y Font, 2007; Font, Godino y Gallardo, 2013). En el marco del EOS se ha desarrollado un modelo teórico de conocimientos del profesor de matemáticas, denominado: Conocimientos y Competencias Didáctico–Matemáticas del profesor de matemáticas (CCDM). Una de las perspectivas de desarrollo de dicho modelo es el encaje de la noción de conocimiento con la noción de competencia del profesor (Vanegas, Font y Pino-Fan, 2019).

Desde el modelo CCDM se plantea que, para lograr una enseñanza idónea, el profesor de matemáticas debe poseer distintos tipos de conocimiento. Por un lado, tiene que conocer las matemáticas escolares del nivel educativo en el que imparte la enseñanza. Además, debe conocer elementos de niveles posteriores, lo que se denomina como el "conocimiento del contenido matemático *per-se*". Este conocimiento se divide en dos tipos: *conocimiento* *matemático común* y *conocimiento matemático extendido*. El primero hace referencia al conocimiento sobre el objeto matemático que es necesario poner en juego para resolver problemas y/o actividades relacionadas con un tema (matemático) específico en un nivel educativo determinado. Generalmente se asocia al nivel en que se enseña. El segundo tipo se refiere a que el docente, además de saber enfrentar problemas/actividades sobre un tema determinado, debe poseer conocimientos más avanzados que hacen parte de niveles superiores. Adicionalmente al conocimiento matemático, el modelo propone que el profesor requiere de *un conocimiento didáctico-matemático*, el cual le permite analizar factores que influyen en la organización, implementación y evaluación de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Desde el modelo CCDM se plantea que para lograr una enseñanza idónea, el profesor de matemáticas debe poseer características de los diferentes tipos de conocimiento referidos anteriormente (Godino, Giacomone, Font y Pino-Fan, 2018).

Si analizamos los tópicos que se han investigado vinculados al conocimiento profesional docente, encontramos algunos donde se explora sobre significados otorgados a la noción de semejanza por futuros profesores, así como el análisis para su enseñanza y aprendizaje. La mayor parte de estos trabajos hacen referencia a los niveles de Van Hiele y a cómo se logra avanzar en la construcción de significados, dependiendo de los materiales y las estrategias utilizadas (Gualdrón, 2014; Aravena, Gutiérrez y Jaime, 2016). Por otra parte, se tienen los trabajos relativos a representaciones usadas en el teorema de Tales y la semejanza (Cordier y Cordier, 1991; Duperret, 1996; Lemonidis, 1991; Pfaff, 1997-98). Y los que analizan las producciones de profesores sobre la mirada aritmética de Thales y su relación con el conocimiento del contenido pedagógico (Delgado-Rebolledo y Zakaryan 2019; Climent, Espinoza-Vásquez, Carrillo, Henríquez-Rivas y Ponce, 2021).

Según Lemonidis (1991), es posible determinar tres momentos históricos en el desarrollo del concepto de semejanza que permiten identificar tres aproximaciones al concepto: el primero, relativo a la semejanza como relación intrafigural; el segundo hace referencia a la transformación geométrica vista como útil: y, por último, la transformación geométrica vista como objeto matemático.

También, se encuentran trabajos relativos a niños en primeros grados de primaria y su capacidad para reconocer figuras semejantes visualmente (Freudenthal, 1983; Swoboda y Tocki, 2002), así como estudios sobre niños que son capaces de reconocer imágenes y razonar respecto a otras imágenes a escala (Brink y Streefland, 1979). Con un enfoque más algebraico, se tiene que, cerca del 40% de los estudiantes de 15 años, priorizan un cambio aditivo y no multiplicativo de valores faltantes en una situación de semejanza, para poder determinar la solución a situaciones planteadas (Hart, 1988).

Finalmente, encontramos que al abordar la noción de semejanza existen dificultades asociadas al lenguaje mismo que se utiliza. Al considerar significados relacionados a contextos cotidianos que se transfieren a objetos matemáticos, se da paso a situaciones en las que semejante se entiende como un sinónimo de parecido, evidenciando ausencia de reconocimiento de propiedades de la semejanza en un contexto matemático (Giménez y Vanegas, 2020). Los autores plantean que, al estudiar la idea de semejanza en un grupo de FM, éstos no logran identificarla como una transformación por ampliación o reducción, que conserva la invariante *forma*; por lo que se hace cada vez más relevante plantear este tipo de análisis que permitan acercarse a los perfiles iniciales de FM y, desde allí, dseñar tareas profesionales que desarrollen procesos e ideas necesarias para una enseñanza idónea de la geometría en diferentes grados escolares.

Método

El estudio se realizó con 101 FM del Grado de Educación Primaria de una universidad española. Se diseña una tarea profesional en la que se pretende que los FM se posicionen ante afirmaciones realizadas por otros futuros maestros sobre la idea de semejanza. La tarea se estructura en dos partes. En la primera parte se presenta el enunciado a ser analizado (Tabla 1) y en la segunda se plantean las preguntas que guían dicho análisis (Tabla 2).

Tabla 1. *Enunciado de la tarea profesional.*

Solicitamos a un grupo de futuros maestros que dieran un ejemplo de semejanza para trabajar en la escuela. A continuación, encontrarás las respuestas de tres de ellos:		
Futuro maestro A: Un ejemplo de semejanza puede ser la obertura de una mandarina o una naranja, ya que pueden parecer dos partes iguales, pero no lo son.	**Futuro maestro B:** Las partes del cuerpo humano (manos, piernas, ojos, etc.)	**Futuro maestro C:** Se pueden observar los zapatos y ves que no son iguales, sobre todo si no son nuevos.

Elaboración propia.

A continuación, en la Tabla 2 se presentan las preguntas planteadas en la tarea profesional, así como el tipo de conocimiento que se valora (según el CCDM) y su intencionalidad.

Tabla 2. *Preguntas de la tarea profesional, tipo de conocimiento e intencionalidad.*

Núm.	Pregunta	Tipo de Conocimiento	Intencionalidad
1	¿Consideras que están en lo cierto?	Común	Conocer el significado de semejanza en los futuros maestros. Determinar la capacidad de detectar errores
2	¿Qué se está entendiendo por semejante en cada caso?	Común	Conocer el significado de semejanza en los FM. Determinar la capacidad de detectar errores
3	¿Por qué crees que se tiene esta idea de semejanza?	Extendido	Relacionar las concepciones de los FM sobre un objeto particular, con elementos de su propia formación y experiencia
4	¿Semejante es lo mismo que parecido?	Extendido	Determinar elementos fundamentales para la caracterización de objetos matemáticos
5	¿Qué ejemplo propondrías tú?	Didáctico-Matemático	Conocer la perspectiva y estrategia de enseñanza de un objeto matemático. Determinar conexiones realizadas por los futuros maestros.

Elaboración propia

Para realizar el análisis, se identifica en los protocolos escritos (generados como respuesta a la tarea profesional) aspectos, dificultades, errores y justificaciones dadas por los FM en relación a la noción de semejanza y que son indicador de su conocimiento matemático-didáctico. El análisis se realiza en dos fases. En la primera fase, se revisan las respuestas, determinando su grado de corrección. También se identifica quiénes mostraban una coherencia en las respuestas dadas a las cinco preguntas planteadas. En la segunda fase, se realizan análisis para las preguntas según el tipo de conocimiento (común, extendido, didáctico-matemático).

Así, para interpretar las ideas sobre semejanza de los FM en las preguntas referidas al conocimiento común (1 y 2), se usan las categorías sobre el tipo de representación de la semejanza, planteadas por Gualdrón (2011). Dichas categorías están asociadas a lo que este autor denomina elementos del componente matemático-epistémico de la semejanza. La primera categoría*: representación gráfica*, refiere al reconocimiento visual de la semejanza como ampliación-reducción de una forma respecto de la otra o mediante configuración de Tales, se entiende el concepto de semejanza y se utiliza, por ejemplo, en el reconocimiento de la misma en polígonos. La segunda categoría: *aritmético – simbólica* comprende el uso de elementos relacionados con la semejanza, por ejemplo, aludir a la igualdad de razones y su invarianza o hablar del centro y razón de homotecia. En otros casos, se usan fracciones en lados homólogos y se reconocen triángulos semejantes por la proporción de sus lados. Finalmente, la categoría de *tipo verbal*, enmarca aquellos elementos intuitivos, referidos a "la misma forma" o describir la semejanza como igualdad de formas sin especificar siempre que se trata de igualdad de ángulos y lados proporcionales.

Para facilitar el análisis, se organizan las informaciones tal y como se muestra en la Tabla 3. En dicha tabla se asocia a la respuesta de cada FM la categoría asignada y algunas observaciones sobre la noción de semejanza que se evidencia en su discurso.

Tabla 3. Instrumento de organización de los datos y primera asignación de categorías.

Respuestas de los futuros maestros	Categoría emergente	Observaciones
*"Si nos fijamos en los Ejemplos de los tres maestros, Podemos ver que el único que relaciona la semejanza con las matemáticas es el A, ya que podríamos decir que la naranja y la mandarina tienen la forma de una **figura geométrica** con algunos elementos iguales" (FM 54)*	Representación gráfica	Evidencia igualdad entre formas geométricas e identificación de algunas condiciones matemáticas Alude al reconocimiento visual de algunas características de los objetos.
*"Podemos considerar las mandarinas y las naranjas como figuras geométricas y observar que estas dos figuras geométricas Tienen las dos la misma forma y distinta medida, pero son **proporcionales**, por tanto las dos serán semejantes"(FM 17)*	Representación aritmético - simbólica	Emergen de las afirmaciones relativas a la relación de semejanza o características como la congruencia o la homotecia.
*"En el primer caso entiendo que la semejanza que hay es entre la naranja y la mandarina, ya que **son muy similares de apariencia** y a simple vista las puedes confundir. En el segundo, la única semejanza que puedo encontrar es que tenemos dos manos, dos piernas, dos ojos y que son similares entre ellos. Por último, el parecido que encuentro es que puede que **los zapatos sean iguales** del mismo modelo, pero unas más desgastadas y las otras nuevas. Al fin y al cabo, son los mismos zapatos."(FM 38)*	Tipo verbal	Precisa elementos de tipo intuitivo, relativas a "mismas formas", no necesariamente geométricas, o al entendimiento de la semejanza como una igualdad.

Elaboración propia

Para las preguntas que refieren al conocimiento extendido a partir de una primera revisión, se definen categorías emergentes para cada pregunta. En el caso de la pregunta 3, se consideraron cuatro categorías respecto a elementos que los FM asocian con la semejanza: *elementos de la cotidianidad*, *elementos de tipo matemático*, *elementos del lenguaje* y *elementos relacionados con la formación previa* (Tabla 4).

Tabla 4. Instrumento de organización de datos y categorías emergentes al por qué de una idea de semejanza.

Respuestas de los futuros maestros	Categoría emergente	Observaciones
*"Creo que se tiene esta idea de semejanza porque en los tres casos partimos de objetos similares teniendo en cuenta el **tamaño y la forma**. Por ejemplo en el caso de las partes del cuerpo, la gente normalmente tiene las manos del mismo tamaño o similares y lo mismo con los pies, los ojos, etc."(FM 26)*	Elementos de la cotidianidad	Se encuentran justificaciones referidas a la forma, el color, el tamaño de objetos.
*"Desde el punto de vista matemático para que dos figuras geométricas sean semejantes deben compartir tres características: **tener La misma forma, tener los ángulos iguales, tener medidas proporcionales"** (FM 18)*	Elementos de tipo matemático	Hace alusión a la semejanza entendida como una relación entre elementos matemáticos que cumplen con poseer ángulos congruentes y las longitudes de sus lados proporcionales
*"Creo que tenemos esta idea de semejanza porque siempre se ha asociado con los **sinónimos** como similar, aproximado o relacionado entre otros. Decir que una persona, un objeto o una cosa es semejante a otra significa que tienen muchas características en común."(FM 14)*	Elementos del lenguaje	Refiere a aquellos FM que abordan la semejanza desde el origen de la palabra, la traducción o su uso en una conversación cotidiana
*"Porqué la definición que **aprendemos desde pequeños en el colegio**, es que la semejanza muestra la relación entre objetos o personas que tienen características comunes." (FM 19)*	Elementos de la formación previa	Agrupa aquellas respuestas que indican que el proceso de formación escolar anterior, presentó la idea de semejanza como se plantea en los ejemplos

Elaboración propia

En relación a la pregunta 4, se clasifican las argumentaciones de los FM en aquellas que consideran que "semejante" es lo mismo que "parecido" o no, y se estudian las justificaciones dadas en cada caso. Finalmente, en la pregunta referida al conocimiento didáctico-matemático (5) en la que se indaga sobre el tipo de situaciones/ejemplos que los FM utilizarían para trabajar la noción de semejanza en el aula de primaria, se diferencian aquellas propuestas basadas en aspectos cotidianos y las que aluden a aspectos geométricos (independientemente de que sean correctos o no).

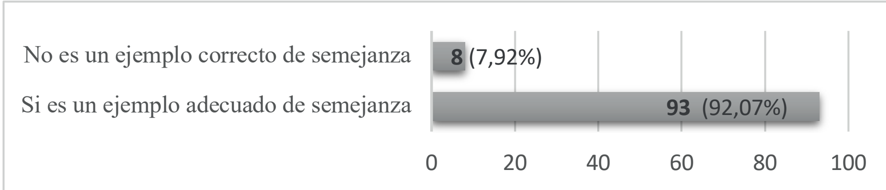
Resultados

A continuación, se presentan los resultados obtenidos, organizándolos según las preguntas de la tarea profesional y las categorías descritas en el apartado anterior.

Respecto a la pregunta 1, la mayoría de los FM (ver Figura 1) considera que, los ejemplos presentados son correctos y apropiados para abordar el concepto de semejanza en la escuela aun cuando no lo son, asumiendo como criterios de semejanza, elementos cotidianos y desconociendo elementos propiamente geométricos como la conservación de la forma al reducir o ampliar de tamaño (propiedad de proporcionalidad de los lados de las figuras).

Figura 1. *Resultados pregunta 1 de la tarea profesional.*

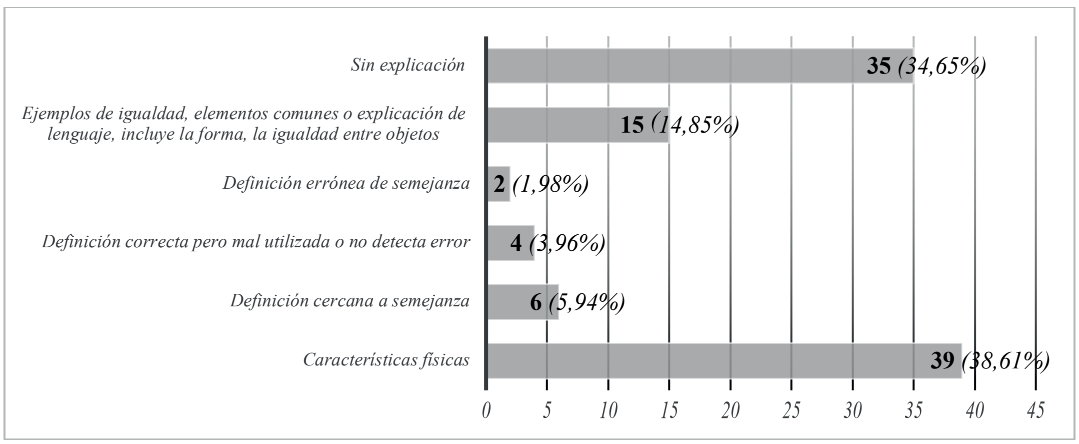
.



Elaboración propia

En relación a la pregunta 2, en la Figura 2 se puede observar que un 34.65% de los FM no brinda explicaciones y/o justificaciones. Por otra parte, encontramos que de los FM que sí rindan una explicación, el 38,61% lo hacen erróneamente, basando la semejanza de objetos en aspectos no matemáticos (características físicas) como como el olor o el sabor. Un 5,94% plantea una definición "cercana" a la semejanza, y un 3,96%, aunque propone una definición correcta de semejanza, no es capaz de determinar que los ejemplos dados en la tarea profesional no son adecuados. Finalmente, se tiene que sólo el 1,98% de los futuros maestros hacen referencia a una definición adecuada y más completa de la semejanza (como igualdad de forma con ángulos iguales y segmentos proporcionales), e indican que los ejemplos propuestos (en la tarea profesional) son incorrectos respecto a dicha definición.

Figura 2. *Tipo de argumento, respecto a la veracidad de los ejemplos.*



Elaboración propia.

En la Tabla 5 se recogen los resultados obtenidos al analizar de manera conjunta las respuestas dadas a las preguntas 1 y 2, considerando las categorías planteadas por Gualdrón (2011).

Tabla 5. *Cantidad de futuros maestros por categoría de tipos de representación de la semejanza.*

Categoría (Gualdrón, 2011)	Nº de FM	Porcentaje
Representación gráfica	12	11,88%
Representación aritmético - simbólica	6	5,94%
Tipo verbal	83	82,17%
	101	100%

Elaboración propia

La mayoría de los futuros maestros (82,17%), se ubica en la categoría de tipo verbal, basan su definición de semejanza en elementos de tipo visual, aludiendo a elementos intuitivos que refieren a la forma del objeto descrito en cada ejemplo, sin establecer relaciones con los elementos geométricos que les caracterizan. Solamente un 5,94% refiere a aspectos como la homotecia. Llama la atención la influencia de la simetría como elemento diferenciador, para los FM, de la existencia o no de semejanza entre objetos. Finalmente, se observa que sólo un 11,88% refiere a igualdad de formas geométricas, con variación de algún parámetro como su tamaño.

Respecto a la pregunta 3, en la Tabla 6 se recogen los aspectos a los que aluden los FM referentes al contenido extendido sobre la semejanza.

Tabla 6. *Tipos de argumentos de los FM sobre la idea de semejanza.*

Categoría	Nº de FM	Porcentaje
Elementos de la cotidianidad	22	21,78%
Elementos de tipo matemático	8	7,92%
Elementos del lenguaje	49	48,51%
Proceso de formación anterior	11	10,89%
Ninguno	11	10,89%
	101	100%

Elaboración propia.

La mayoría de los FM (48,51%) justifica la semejanza a través de elementos que provienen del lenguaje, como los sinónimos, las traducciones de la palabra "semejante" y el uso que se le da a la semejanza en una conversación normal. El 21,78% alude a elementos de la cotidianidad como las partes del cuerpo. Algunos FM atribuyen el significado de la semejanza a su proceso de formación anterior (10,89%) y solo un 7,92% de los FM refiere a argumentos de tipo matemático para justificar la semejanza.

Respecto a la pregunta 4, la mayoría de los FM (64,36%) considera que "semejante" es lo mismo que "parecido". Al preguntar por qué consideran que son lo mismo estas palabras, la mayoría (52,48%) indica que son sinónimos y sólo el 6% de los FM utilizan la definición de semejanza en geometría, para diferenciarla de parecido.

Finalmente, en relación a la pregunta 5, la mayoría de los FM (62,38%), al plantear ejemplos a través de los cuales explicarían la idea de semejanza a estudiantes de 10-11años de educación primaria, refiere a elementos de la cotidianidad, pero de forma errada. Destacan ejemplos como dos hermanos gemelos, las alas de una mariposa o pelotas para jugar fútbol. En estos casos, se toma semejanza como algo sinónimo de parecido. Únicamente un 37,62% de los FM refieren a elementos matemáticos. De éstos, solamente un 21,05% alude de forma correcta al ejemplificar la semejanza como propiedad geométrica que evoca las mismas formas con lados proporcionales. En la Tabla 8 se muestran a manera de ejemplo algunas de las respuestas dadas por los FM.

Tabla 7. *Ejemplos de los FM para trabajar la semejanza en la educación primaria.*

Tipo	Ejemplo
Ejemplo adecuado	*"En matemáticas sería dibujando dos triángulos, con los mismos ángulos y las mismas medidas proporcionales de los lados. Pero uno sería más grande que el otro, es decir, de distintos tamaños"*
Ejemplo erróneo	*"Un ejemplo bastante claro de semejanza, podemos ponerla con los triángulos. Todos tienen unas características similares, pero en algún aspecto son diferentes. Es decir, los triángulos*

	tienen tres lados, tres vértices, pero pueden tener diferentes ángulos en diferentes grados, pueden ser equilátero, isósceles o escaleno"

Elaboración propia.

Al considerar el tipo de ejemplo justificado, parece que llaman triángulos semejantes a los que tienen propiedades parecidas, y son clasificables como del mismo tipo. Así, dos triángulos isósceles son semejantes porque son isósceles.

Consideraciones finales

Respecto al conocimiento común, coincidimos con Gualdrón (2011) quien indica que, en el tema de semejanza de figuras planas, la mayoría de los futuros maestros exhiben razonamientos de los dos primeros niveles del modelo de Van Hiele (0 y 1) y sólo unos pocos acceden al nivel 2. Los futuros maestros participantes en este estudio tienen mayoritariamente una percepción de tipo visual sobre la semejanza, asociándola a elementos de su cotidianidad y el lenguaje propio utilizado, no generan conexión con elementos propios de las matemáticas y argumentan con características físicas de los objetos o con una definición errónea sobre la semejanza. Encontramos que la mayoría de los futuros maestros consideran que los ejemplos planteados en la tarea profesional son correctos; evidenciando, además, la no asociación de las respuestas con la definición formal de semejanza e incluyendo elementos descriptivos en su concepción sobre este objeto geométrico; así, por ejemplo, consideran que el sabor, el olor y el color de las frutas son una muestra de semejanza entre ellos.

Respecto al conocimiento extendido, coincidimos igualmente con Gualdrón (2011) en tanto al desarrollar una actividad relativa a la semejanza de objetos geométricos, los resultados dependen en mayor parte de las creencias y concepciones, que son, en últimas, las que determinan las condiciones propicias para que se dé un proceso de enseñanza y de aprendizaje con resultados favorables. En este sentido, vemos cómo en la tarea profesional desarrollada, la mayoría de los futuros maestros considera que semejante y parecido son sinónimos, debido a su experiencia de uso en situaciones cotidianas y asocian este tipo de relación a diversos factores, entre los que destacan: la relación de las palabras de la cotidianidad con conceptos matemáticos, las traducciones a las cuales las palabras son susceptibles y en menor medida a su formación inicial.

Respecto al conocimiento didáctico – matemático, al solicitar ejemplos de cómo explicar la semejanza en clase, la mayoría de los futuros maestros se inclinan a utilizar situaciones intra-matemáticas. Sus ejemplos muestran ausencia de relaciones bien establecidas entre contextos y significados. Todo esto es coincidente con lo encontrado en otros estudios, en donde se identifica que el perfil de futuros maestros que accede a programas de formación para maestros de educación básica, desconoce elementos propios de las matemáticas, imposibilitando su tránsito entre diversos niveles epistemológicos y desatando errores en la evocación de objetos geométricos.
Cabe resaltar que casi todos los futuros maestros que aparentemente conocen el concepto formal de semejanza detectan fácilmente el error en los ejemplos que planteamos al inicio de la situación; comprenden las reglas que deben cumplir los objetos para ser semejantes y plantean ejemplos claros para explicar el concepto en las aulas de clase, lo que es coincidente con el anterior planteamiento.

Finalmente, tal y como se indica en Giménez y Vanegas (2020), consideramos oportuno remarcar que el diseño e implementación de tareas profesionales que permiten acercarse a las ideas iniciales (matemáticas y didácticas) de FM se constituyen en un punto de partida clave para el rediseño de tareas. Asimismo, los resultados derivados de su implementación arrojan informaciones importantes para analizar y mejorar las propuestas de formación docente. Esperamos seguir avanzando en esta línea mejorando las tareas que se proponen a FM de tal manera que a través de estas se promueva el desarrollo de competencias docentes.

Agradecimientos.

Trabajo en colaboración con los equipos de los proyectos: PID2019-104964GB-100 y PGC2018-098603-B-I00 (MICINN); y los equipos de los grupos de investigación: SGR-2017-101 y SGR-2017-1181.

Referencias

Aravena, M., Gutiérrez, A., y Jaime, A. (2016). Estudio de los niveles de razonamiento de Van Hiele en alumnos de centros de enseñanza vulnerables de educación media en Chile. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, *34(1),* 107-28.

Báez, R. e Iglesias, M. (2007). Principios didácticos a seguir en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría en la UPEL "El Mácaro". *Enseñanza de la Matemática*, *12,* 67-87.

Ball, D. L., Thames, M. H., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special. *Journal of teacher education*, *59(5),* 389-407.

Beswick, K. y Chapman, O. (2012). Discussion group 12: Mathematics teacher educators' knowledge for teaching. *12th International Congress on Mathematics Education*. ICME, Seoul, South Korea.

Brink, J. y Streefland, L. (1979). Young children (6-8) – ratio and proportion. *Educational Studies in Mathematics, 10*, 403-420.

Burgués, C., y Sarramona, J. (Eds.). (2013). *Competències bàsiques de l'àmbitmatemàtic*. Barcelona: Departament d' Ensenyament, Generalitat de Catalunya.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., y Ribeiro, C. M. (2017). Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) in the «Dissecting an equilateral triangle» problem. *RIPEM-International Journal for Research in Mathematics Education*, *7*(2), 88-107.

CCSSO (2010). Common core state standards for mathematics. Washington, DC: NGA Center y CCSSO. Recuperado de: http://www.corestandards.org/wpcontent/uploads/Math_Standards.pdf

Climent, N., Espinoza-Vásquez, G., Carrillo, J., Henríquez-Rivas, C. y Ponce, R. (2021). Una lección sobre el teorema de Tales, vista desde el conocimiento especializado del profesor. *Educación Matemática*, *33(1),* 98-124.

Copley, J. V. (2000). *The young child and mathematics*. Washington, DC: National Association for the Education of Young Children.

Cordier, F. y Cordier, J. (1991). L'application du théorème de Thales. Un exemple du rôle des représentations typiques comme biais cognitifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 11(1), 45-64.

Delgado-Rebolledo, R. y Zakaryan, D. (2019). Relationships between the knowledge of practices in mathematics and the pedagogical content knowledge of a mathematics lecturer. *International Journal of Science and Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s10763-019-09977-0

Duperret, J. C. (1996). Por un Thales dinámico. En E. Barbin y R. Douady (Coord.), *La Enseñanza de las Matemáticas: Puntos de Referencia entre los Saberes, los Programas y la Práctica*. Grenoble: IREM.

Espinoza, L., Barbé, J., Mitrovich, D., y Rojas, D. (2007). El problema de la enseñanza de la geometría en la educación general básica chilena y una propuesta para su enseñanza en el aula. In *II Congreso Internacional sobre la Teoría Antropológica de lo Didáctico*. Francia: Uzès.

Font, V., Godino, J. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics, 82*, 97-124.

Freudenthal, H. (1983). Didactical phenomenology of mathematical structures. Dordrecht: Reidel.

Giménez, J. y Vanegas, Y. (2020). Miradas iniciales de futuros maestros de Educación Primaria sobre Geometría. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 105*. 25-35.

Godino J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. UNIÓN: *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *20*, 13-31.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education, 39*(1), 127-135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

Godino, J. D., Batanero, C., Font, V. y Giacomone, B. (2016). Articulando conocimientos y competencias del profesor de matemáticas: el modelo CCDM. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática, 20*, 288-297.

Godino, J., Giacomone, B., Font, V. y Pino-Fan, L. (2018). Conocimientos profesionales en el diseño y gestión de una clase sobre semejanza de triángulos. Análisis con herramientas del modelo CCDM. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 13,* 63-81.

Gualdrón, E. (2011*).* Análisis y caracterización de la enseñanza y aprendizaje de la semejanza de figuras planas. Tesis doctoral no publicada, Universidad de Valencia. España.

Gualdrón, E. (2014). Descriptores específicos de los niveles de Van Hiele en el aprendizaje de la semejanza de polígonos. *Revista Científica, 20,* 26-36.

Hart, K. M. (1988). Ratio and proportion. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades* (pp. 198-219), Reston: NCTM y Lawrence Erlbaum Associates.

Jaime, A., y Gutiérrez, A. (2016). El aprendizaje de conceptos geométricos en la Educación Primaria. En J. Carrillo y otros (Eds.), *Didáctica de las matemáticas para maestros de Educación Primaria,* (pp. 197-215), Madrid: Paraninfo.

Lemonidis, C. (1991). Analyse et réalisation d'une expérience d'enseignement del'homothétie. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 11*(23), 295-324.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, Va.: The National Council of Teachers of Mathematics (Trad. Castellana, *Principios y estándares para la educación matemática.* Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, 2003).

Pfaff, N. (1997-98). Le rôle de l'analyse des taches pour un enseignant. *Petit x, 48*, 23-35.

Pino-Fan, L. y Godino, J. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *PARADIGMA*, *36*(1), 87-109.

Pino-Fan, L. R., Assis, A., y Castro, W. F. (2015). Towards a methodology for the characterization of teachers' didactic-mathematical knowledge. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 11*(6), 1429-1456.

Samuel, M., Vanegas, Y. y Giménez, J. (2016). Visualización y simetría en la formación de maestros de Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 5*(1), 21-32.

Swoboda, E. y Tocki, J. (2002). How to prepare prospective teachers to teach mathematics: Some remarks. *Second International Conference on the Teaching of Mathematics (at the undergraduate level), 1,* 1-10.

Vanegas, Y., Font, V., y Pino-Fan, L. (2019). Análisis de la práctica profesional de un profesor cuando explica contenidos de medida. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M. T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 43-62). Salamanca: Ediciones Universidad Salamanca.

VOL34, NÚMERO 2, AÑO 2021

ESTUDO DO CONHECIMENTO DIDATICO MATEMATICO DE PROFESSORES EM UM GRUPO COLABORATIVO

A STUDY OF THE DIDACTIC-MATHEMATICAL KNOWLEDGE OF TEACHERS IN A COLLABORATIVE GROUP

José Fernandes da Silva, Felipe Caetano Barroso
Instituto Federal de Minas Gerais. (Brasil)
jose.fernandes@ifmg.edu.br, felipec.barroso97@gmail.com

Resumo
Esta é uma pesquisa de cunho qualitativo. Quanto ao público-alvo, este foi composto por quatro professores que participaram de um grupo colaborativo ao longo de um semestre. O construto teórico adotado foi a perspectiva do Conhecimento Didático-matemático do professor e os Critérios de Idoneidade Didática, ambos advindos do Enfoque Ontossemiótico. Os dados foram coletados através de observação, protocolos escritos e gravação de áudios e vídeos. As análises foram analisadas levando em consideração a idoneidade didática e seus respectivos componentes e indicadores. Os dados evidenciam que os critérios de idoneidade didática pode ser instrumentos importantes para guiar processos de formação continuada de professores que ensinam matemática.

Palavras-Chave: Idoneidade Didática, Conhecimento Didático-Matemático, Formação docente colaborativa

Abstract
This is a qualitative-type research work which was aimed at studying the didactic-mathematical knowledge of teachers who teach mathematics in the context of a collaborative group. As for the sample of people, this was composed of four teachers who participated in a collaborative group throughout a semester. The theoretical construct adopted was the teacher's Didactic-mathematical Knowledge perspective and the Didactic Suitability Criteria, both arising from the Onto-semiotic Approach. Data were collected through observation, written protocols and audio and video recording. The analyses were carried out taking into account the didactic suitability and its respective components and indicators. The data show that the criteria of didactic suitability can be important instruments to guide the continuing training processes of teachers who teach mathematics.

Key words: didactic suitability, didactic-mathematical knowledge, collaborative teacher training

Introdução

O trabalho é oriundo de um projeto amplo que visa investigar o conhecimento didático-matemáticos de professores que ensinam matemática. Em específico, este artigo apresenta como objetivo central analisar as repercussões oriundas de um grupo colaborativo com foco nas reflexões sobre propostas de aulas para a educação básica, tendo por base a noção de idoneidade didática.

A perspectiva das formações colaborativas demanda por espaços "com características colaborativas passa por uma postura epistemopolítica que conclama um (re)pensar a formação docente na direção do respeito ao professor". (Tinti, Silva, 2021, p. 349).

A justificativa para a realização da investigação se apoia na necessidade de investigar os conhecimentos dos professores de Matemática diante dos constantes desafios impostos pelo processo de ensino e aprendizagem desta ciência.

Este texto está organizado, da seguinte forma, a partir desta introdução: abordagem teórica adotada, os caminhos metodológicos, discussão e análise dos dados e considerações.

Marco teórico

Existem diferentes discussões que buscam explicitar os conhecimentos do professor, em especial, o professor de Matemática. Neste sentido, uma questão emblemática no campo da Educação Matemática é "Quais conhecimentos são essenciais para o professor de Matemática exercer bem sua função na docência?"

Para Godino (2009), não existe um consenso na literatura disponível para apontar os conhecimentos que os professores mobilizam durante o processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos matemáticos. Levando em consideração esta complexidade, Godino (2009) aponta:

Seria útil dispor de modelos que permitam uma análise mais detalhada de cada um dos tipos de conhecimentos que se põem em jogo num ensino efetivo (proficiente, eficaz, idôneo) da Matemática. Ele permitiria orientar o desenho de ações formativas e a elaboração de instrumentos de avaliação dos conhecimentos do professor (Godino, 2009, p. 19).

Apesar de que os modelos desenvolvidos por diversos pesquisadores (Schulman, 1986; 1987; Ball, Thames e Phelps 2008; Schoenfeld e Kilpatrick 2008) resultem em um avanço significativo na caracterização dos conhecimentos que deve ter um professor para ensinar Matemática, ainda ficam questões importantes que seguem abertas, por exemplo: De que forma ou sobre quais critérios se pode avaliar ou medir o conhecimento do professor? Como se pode ajudar aos professores a adquirir desenvolver e relacionar o conjunto de conhecimentos necessários para a prática docente? (Pino-Fan, Godino, 2015).

Reportando às contribuições da Psicologia, da Matemática, da epistemologia, da Pedagogia, da Sociologia, da Semiótica e outras áreas da Didática da Matemática, Godino (2009) defende que o uso do termo "conhecimento didático-matemático do professor - CDM" é mais adequado para se referir à complexidade de conhecimentos profissionais do professor que ensina matemática. Tal abordagem é advinda do contexto do Enfoque Ontosemiótico que é um construto teórico.

O CDM é caracterizado por seis dimensões, que são chamadas de facetas denominadas como:

- Epistêmica: Está relacionada ao conhecimento da matemática, fazer uso deste conhecimento de modo a buscar diferentes soluções para resolver o mesmo problema de modo a desenvolver a compreensão dos estudantes que não tiveram êxito da resolução de uma tarefa proposta;
- Cognitiva: Esta faceta possibilita que os professores tenham conhecimentos que lhes permitam conhecer melhor seus alunos. Com este conhecimento prévio o professor pode realizar um melhor planejamento de suas aulas, antecipando possíveis erros e dificuldades;
- Afetiva: É a faceta que permite aos professores lidar com a parte afetiva que está compreendida por elementos relacionados às atitudes, emoções, crenças e valores dos alunos no ambiente de estudos da Matemática. Neste sentido, o professor necessita conhecer e perceber o estado de ânimo de seus alunos para enfrentar os problemas matemáticos propostos;
- Mediacional: refere-se aos conhecimentos do professor relacionados à capacidade de articular materiais e tecnologias para o ensino. Além disso, o professor necessita ter condições de delimitar tempo para as ações no âmbito do processo de ensinar um conteúdo;
- Interacional: trata-se da capacidade de o professor compreender, prever, implementar e avaliar as interações que ocorrem no processo de ensino e aprendizagem. Neste processo, as relações se estabelecem em contexto: entre professores e alunos, entre os alunos, entre alunos e os recursos estabelecidos e entre os professores e os recursos e os alunos e;
- Ecológica: o professor que dispõe de conhecimentos no âmbito desta faceta é capaz de perceber o currículo como uma janela que estabelece enlaces com o entorno social, político e econômico.

É fato que o Enfoque Ontosemiótico (EOS) (Godino, Batanero e Font, 2007, 2008), gerou contribuições significativas para o processo de ensino e aprendizagem da Matemática, contudo, a noção de “qualidade” do ensino desta ciência carece de consenso. No âmbito do CDM, cada faceta possui níveis de análises (Pino-Fan; Font; Godino, 2014) que permitem tomar diferentes decisões em relação ao ensino e aprendizagem. Um desses níveis é a Idoneidade que identifica potenciais melhorias do processo de estudo que incrementam a Idoneidade Didática. E a partir disso, a noção de Idoneidade Didática, de forma análoga ao CDM, nos responde perguntas relacionada à qualidade de uma aula sobre quais mudanças podemos fazer para alcançar objetivos de aprendizado mais altos a partir dos critérios de idoneidade descritos por Font, Planas e Godino (2010) e outros e reelaborados por Breda (2019), conforme descrição seguinte:

Idoneidade epistêmica - para avaliar se a matemática que está sendo ensinada é "boa matemática".

Quadro 1. *Componentes e indicadores – idoneidade epistêmica.*

Componentes	Indicadores
Erros	Não há práticas consideradas incorretas do ponto de vista matemático.
Ambiguidades	Não existem ambiguidades que possam gerar confusão para os alunos: definições e procedimentos definidos de forma clara e correta, adaptados ao nível educacional a que são direcionados; adequação de explicações, verificações, demonstrações no nível educacional a que se dirigem, uso controlado de metáforas etc.
Riqueza de processos	A sequência de tarefas inclui a realização de processos relevantes na atividade matemática (modelagem, argumentação, resolução de problemas, conexões, etc.).
Representatividade	Os significados parciais (definições, propriedades, procedimentos, etc.) são uma amostra representativa da complexidade da noção matemática a ser ensinada contemplada no currículo. Para um ou mais significados parciais, uso de diferentes modos de expressão (verbal, gráfico, simbólico ...), tratamentos e conversões entre eles.

Fonte: Breda (2019).

Idoneidade cognitiva - para avaliar, antes de iniciar o processo instrucional, se o que você deseja ensinar está a uma distância razoável do que os alunos sabem e, após o processo, se as lições aprendidas estão próximas do pretendido ensinar.

Quadro 2. *Componentes e indicadores – idoneidade cognitiva.*

Componentes	Indicadores
Conhecimento prévio (Componentes semelhantes à idoneidade epistêmica)	Os alunos têm o conhecimento prévio necessário para estudar a matéria (eles foram estudados antes ou o professor planeja seu estudo) Os significados pretendidos podem ser alcançados (eles têm uma dificuldade gerenciável) em seus vários componentes.
Adaptação curricular quanto as diferenças individuais	Atividades de extensão e reforço estão incluídas.
Aprendizagem	Os vários modos de avaliação mostram a apropriação dos conhecimentos / competências pretendidos ou implementados
Alta demanda cognitiva	Processos cognitivos relevantes são ativados (generalização, conexões intra-matemáticas, mudanças na representação, conjecturas, etc.) Promove processos meta-cognitivos.

Fonte: Breda (2019).

Idoneidade interacional - para avaliar se as interações resolvem as dúvidas e dificuldades dos alunos.

Quadro 3. *Componentes e indicadores – idoneidade interacional.*

Componentes	Indicadores
Interação professor-aluno	O professor faz uma apresentação apropriada do tópico (apresentação clara e bem organizada, não fala muito rápido, enfatiza os principais conceitos do tópico etc.) Os conflitos de significado dos alunos são reconhecidos e resolvidos (os silêncios dos alunos são interpretados corretamente, suas expressões faciais, suas perguntas, um conjunto apropriado de perguntas e respostas, etc.). Busca chegar a um consenso com base no melhor argumento. Vários recursos retóricos e argumentativos são usados para sugerir e capturar a atenção dos alunos. Facilita a inclusão dos alunos na dinâmica da aula e não a exclusão
Interação aluno-aluno	O diálogo e a comunicação entre os alunos são favorecidos. A inclusão no grupo é favorecida e a exclusão é evitada.
Autonomia	Momentos são contemplados quando os alunos assumem a responsabilidade pelo estudo (exploração, formulação e validação).
Avaliação formativa	Observação sistemática do progresso cognitivo dos alunos.

Fonte: Breda (2019).

Idoneidade mediacional - para avaliar a adequação dos recursos materiais utilizados no processo instrucional;

Quadro 4. *Componentes e indicadores – idoneidade mediacional.*

Componentes	Indicadores
Recursos materiais (livros, calculadoras, computadores)	Uso de materiais manipulativos e computacionais que permitam introduzir boas situações, linguagens, procedimentos, argumentos adaptados ao significado pretendido. Definições e propriedades são contextualizadas e motivadas usando situações, modelos e visualizações concretos.
Número de alunos, horário das aulas e condições	O número e a distribuição de alunos permitem realizar o ensino pretendido. A programação do curso é apropriada (por exemplo, nem todas as sessões são dadas no último minuto). A sala de aula e a distribuição dos alunos são adequadas para o desenvolvimento do processo instrucional pretendido.
Tempo (do ensino / tutoria coletiva, tempo de aprendizagem)	Adaptação dos significados pretendidos / implementados ao tempo disponível (presencial e não presencial). Investimento de tempo no conteúdo mais importante ou nuclear do assunto. Investimento de tempo nos conteúdos que apresentam mais dificuldade.

Fonte: Breda (2019).

Idoneidade afetiva - para avaliar os envolvimentos (interesses, motivações…) dos alunos durante o processo instrucional.

Quadro 5. *Componentes e indicadores – idoneidade afetiva.*

Componentes	Indicadores
Interesses e necessidades	Seleção de tarefas de interesse dos alunos. Proposta de situações que permitam avaliar a utilidade da matemática no cotidiano e na vida profissional.
Atitudes	Promoção do envolvimento em atividades, perseverança, responsabilidade, etc. O argumento é favorecido em situações de igualdade; o argumento é valorizado em si e não por quem o diz.
Emoções	Promoção da autoestima, evitando rejeição, fobia ou medo da matemática. As qualidades estéticas e de precisão da matemática são destacadas.

Fonte: Breda (2019).

Idoneidade ecológica - para avaliar a adequação do processo instrucional ao projeto educacional central, às diretrizes curriculares, às condições do ambiente social e profissional.

Quadro 6. *Componentes e indicadores – idoneidade ecológica.*

Componentes	Indicadores
Adaptação do currículo	O conteúdo, sua implementação e avaliação correspondem as diretrizes curriculares.
Conexões intra e interdisciplinares	Os conteúdos estão relacionados a outros conteúdos matemáticos (conexão da matemática avançada com a matemática do currículo e conexão entre diferentes conteúdos matemáticos contemplados no currículo) ou com o conteúdo de outras disciplinas (contexto extra-matemático ou com o conteúdo de outras disciplinas do estágioeducacional).
Utilidade socio-laboral	O conteúdo é útil para inserção sócio-laboral.
Inovação Didática	Inovação baseada em pesquisa e prática reflexiva (introdução de novos conteúdos, recursos tecnológicos, formas de avaliação, organização da sala de aula, etc.).

Fonte: Breda (2019).

Metodologia

Natureza do Estudo

Esta é uma pesquisa de cunho qualitativo (Garnica, 2004), na qual fica legitimada a não neutralidade do pesquisador e à não necessidade de estabelecer uma hipótese a priori. Gatti (2010), reforça esta perspectiva ao dizer que uma metodologia não é uma receita no que concerne a investigação científica na área das ciências humanas, e sim uma construção que se faz em situação, entrelaçando a teoria, o problema a ser investigado, os objetivos e os procedimentos organizados.

Participantes do estudo

Quanto ao público-alvo, este foi composto por quatro professores (P1, P2, P3 e P4), que lecionam na Educação Básica e que no seu processo de formação inicial, tiveram experiências como bolsistas do Programa de Bolsas de Iniciação à Docência- PIBID – que é um programa do Ministério da Educação do Brasil que visa colocar os futuros professores em contato com as escolas públicas de educação básica, durante, pelo menos um ano ininterrupto e que se voluntariam a participar da pesquisa. Os pesquisadores são designados por mediadores (M1 e M2).
A tabela 1 explicita o perfil dos participantes:

Tabela VII. *Perfil dos participantes.*

Participante	P1 Fran	P2 Natália	P3 Luiz	P4 João
Idade	22	26	22	27
Nível de atuação	Ensino Médio	Ensino Fundamental e Médio	Ensino Médio	Ensino Fundamental e Médio
Localidade	Urbana	Urbana	Urbana	Rural
Ano de Formação	2016	2016	2016	2014

Fonte: Dados dos pesquisadores.

É possível perceber que se trata de jovens professores que lecionam nos diferentes níveis e modalidades de ensino da educação básica brasileira como informado na tabela.

Coleta de dados

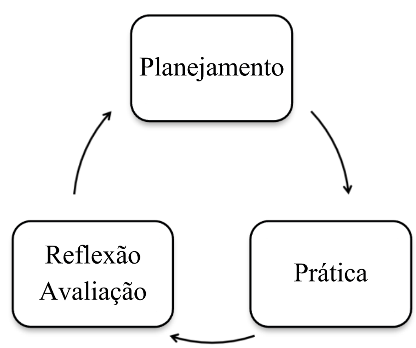
Criou-se um grupo colaborativo no qual as atividades foram baseadas no compartilhamento de saberes, experiências e práticas (Fiorentini, 2004; Palanch, Manrique, 2016).

O grupo possuía uma dinâmica de encontros semanais, ao longo do segundo semestre de 2018, os quais eram realizados dentro das dependências da universidade onde se formaram. A comunicação entre os participantes e o diálogo eram as principais ferramentas de cada encontro, objetivando aprimorar os conhecimentos com o relato de experiências sobre suas trajetórias acadêmicas e profissionais, bem como socialização de propostas de aulas.

Visando conhecer o grupo de professores foi aplicado, inicialmente, um questionário com foco nas informações específicas quanto suas atuações profissionais, tempo de licenciados, entre outros. Utilizou-se o recurso do*Google Forms*.

A promoção de debates sobre os planos de aulas apresentados pelos participantes era fomentada a cada encontro. O planejamento apresentado por cada professor era relacionado à rotina de suas aulas e aos currículos das escolas da educação básica onde trabalhavam.

Figura 1: *Dinâmica de trabalho do grupo.*



Fonte: Dados dos pesquisadores.

Após cada reunião, os pesquisadores observaram a aula do professor na escola onde ele atuava. As aulas foram gravadas em áudio e vídeo, bem como, foram realizadas anotações na forma de diário de campo.
Por questões metodológicas e de abrangência, neste texto, estamos apresentando a fase de planejamento de P1 sobre o conteúdo de Pirâmides.

Análise dos dados

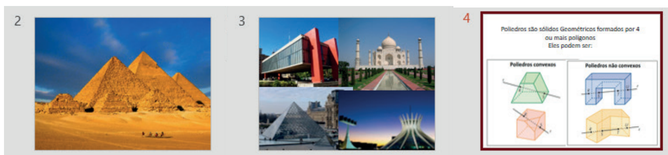
Os dados foram analisados levando em consideração a idoneidade didática e seus respectivos componentes e indicadores.

Resultados

O processo de planejamento da aulas dos participantes foi estruturado tendo como base a colaboração e o diálogo sobre os desafios e as possibilidades das suas práticas em suas instituições de trabalho (Silva; Manrique, 2021). Para esta análise apresentamos o contexto do planejamento da Professora P1 que lecionava no Ensino Médio.

Para o início das discussões P1 foi convidada a expor sua proposta de aula. Esta utilizou uma apresentação com auxílio do *Power Point*.

Figura 2. *Imagens utilizadas por P1como recurso motivacional para o ensino de Pirâmides.*



Fonte: Planejamento de P1.

Bom, como eu costumo trazer para os alunos alguma relação do conteúdo com o cotidiano, então para trabalhar as pirâmides eu trouxe algumas ilustrações para introduzir o conceito deste conteúdo. Então através destas imagens eu vou trabalhar com os alunos o é uma pirâmide. E, a partir daí, vamos chegar num consenso do que seria uma pirâmide e qual seria sua definição. Para isso, é importante que os alunos tenham um conhecimento prévio sobre geometria espacial. Antes eu vou trabalhar com os alunos a questão da semelhança das pirâmides usando o GeoGebra e depois da classificação nós vamos destacar os elementos, faces laterais, vértices, altura e base. Inicialmente, eu escolhi trazer uma pirâmide oblíqua, para de imediato, tirar a ideia que toda pirâmide é "bonita" e "certinha" como temos costume de ver. Iremos trabalhar com as pirâmides regulares, medidas notáveis como altura e apótema da base. Vou utilizar o GeoGebra para trabalhar este tópico, pois fica mais visível para os alunos essa questão do triângulo que fica dentro da pirâmide.

Diante da exposição de P1 podemos observar sua proximidade com o conteúdo a ser ensinado, haja vista a substancial qualidade da abordagem matemática não apresentando erros. Tal fato é importante pois cabe ao professor possuir o repertório dos conhecimentos concernentes ao nível que irá lecionar (Breda, 2019). Destaca-se, também, desta apresentação inicial de P, aspectos relacionados à importância e o lugar dado aos conhecimentos prévios dos estudantes. Tal fato constitui elemento importante da prática docente, pois o conteúdo a ser abordado precisa se relacionar com os requisitos básicos que o constituem.

Como a proposta de trabalho do grupo era baseada na perspectiva da colaboração, P3, fez a seguinte sugestão ao planejamento de P1:

Eu pensei na ideia do volume da pirâmide, talvez você levar a construção das três pirâmides que formam o prisma e colocar para o debate em classe, mas vejo a ideia do uso do GeoGebra como excelente. Minha contribuição está baseada na realidade da minha escola onde os recursos tecnológicos são escassos.

Essa intervenção da Professora P3 demonstra a importância dada à instrumentalização da aula. Como pode ser observado, P1 trabalha numa instituição pública dotada de recursos tecnológicos com os quais instrumentaliza a maioria de suas aulas. P3, embora relate as dificuldades tecnológicas de sua escola, corrobora com o debate propondo o uso de material lúdico. Essa reflexão é importante, pois o ato de selecionar e adequar os recursos materiais para o desenvolvimento do processo de ensino se constitui importante no planejamento docente (Godino, 2013).

Os pesquisadores M1e M2, mediando as reflexões do grupo questionam os participantes sobre a sequência da aula apresentada por P1.

Antes das reflexões dos pares, P1 justifica a perspectiva de desenvolvimento do conteúdo:

A intenção é que eu não gaste todo tempo da aula só apresentando o conteúdo aos alunos, a minha intenção já é deixar atividades para eles começarem a fazer desde o início, pois eu sempre faço assim, eu deixo atividade para serem feitas em sala e terminarem casa. Na aula seguinte é só para tirar dúvidas.

Diante desta fala, P4 realiza uma sugestão:

Acho que você poderia trabalhar também um pouco da história da matemática e levar um pouco da história desse conteúdo.

Essa reflexão de P4 colaborou para que o grupo discutisse a importância da abordagem da história dos conteúdos matemáticos. P3, embora tivesse apresentado uma sólida base do conhecimento matemático, demonstrou uma preocupação em cumprir o currículo proposto. Como sabemos, as instituições educativas exigem que o professor desenvolva os conteúdos enumerados como essenciais, porém, este não pode perder de vista que o currículo vai além das proposições prescritas, isto é, este deve se ajustar ao contexto social, cultural, histórico, político e econômico (Godino, 2013, Breda 2019).

Os pesquisadores, percebendo a possibilidade de contribuir com o debate, relataram sobre um vídeo de uma reportagem sobre as Pirâmides do México. Destacaram que era um vídeo curto que ilustrava a história das pirâmides de Teotihuacan.

Em seguida, P2 destacou:

Seria bom também porque, primeiro, todos já tem na cabeça que pirâmide é só do Egito, então já seria uma novidade.

O debate suscitado por P2 é muito significativo se consideramos a predominância da Matemática europeia e oriental sobre as matemáticas dos povos pré-colombianos.

P1, demonstrou uma certa preocupação em ocupar sua aula com um vídeo, mas ao assisti-lo, durante o encontro, percebeu que se tratavam apenas de 3m e 58s. Desta forma, o material passou a compor o planejamento da professora, sendo que esta considerou pertinente realizar a abertura de sua futura aula realizando o debate sobre a importância de reconhecer as pirâmides do México como fundamentais na abordagem da Geometria que, tradicionalmente, destaca apenas as pirâmides do Egito.

Na sequência da apresentação de sua proposta de aula, P1 destaca:

Ficou faltando ainda a questão dos tetraedros regulares. As fórmulas são complicadas, eu não vou demonstrá-las com os alunos, pois creio que não seja necessário para o Ensino Médio. Vou deixar uma tarefa para os alunos resolverem. Assim, a área total é tranquila porque é 6 vezes a área de um triângulo equilátero, então a partir dessa atividade ele encontram a fórmula da área total. Sobre o volume eu não vou demonstrar com eles as fórmulas, porque eu também acho muito difícil cair esse tipo de questão, que use esta fórmula, no ENEM, até porque dá para fazer sem elas.

Após essa explanação de P1, os participantes, intervieram propondo reflexões:

P4: Se a gente calcular o volume do cubo dividido por 6 da o volume de uma pirâmide.

P1: É isso que eu estou falando e eles (os alunos) terão que pensar para concretizar este raciocínio.
P3: Pelo que a P1 falou eu acho que a turma, que também estuda informática, sairia melhor nessa proposta
P2: Mas, então, o que você acha de dar o mesmo exercício para grupos diferentes e ver como cada um deles resolve?
P2: Importante pergunta. Eu acho que seria uma boa até porque você conseguiria ver como cada mm chegou na mesma resposta usando caminhos diferentes.

Os pesquisadores dialogaram com P1 sobre as propostas realizadas pelos pares e, no contexto, outras contribuições dos participantes surgiram:

M1 e M2: Mas então o que você acha dessa proposta P1?
P1: Isso é interessante, só que eu penso que com este problema não vai dar muito debate, porque não tem muita coisa para o aluno construir, ele só precisa visualizar que são seis pirâmides
P3: Mas pode ser fácil para nós, não para o aluno.
P1: Então, eu posso sim fazer isso só que repensando eu acho que não precisa de dividir em grupos, eu posso simplesmente colocar o problema no slide durante a aula e pedir para que os alunos analisem de forma bem rápida.

O exposto nos leva a refletir sobre o papel das interações em sala de aula. Ao apresentar uma determinada resistência quanto ao trabalho coletivo de seus alunos, P1 demonstra preocupação, novamente, em cumprir o currículo proposto para que atender os interesses institucionais, bem como, as avaliações externas como o Exame Nacional do Ensino Médio. Porém, como destacado por Breda (2019), as interações em classe podem subsidiar o trabalho do professor, pois:

- Ao observar os conflitos de significado dos alunos é possível reconhece-los e resolvê-los;
- As atitudes podem ser interpretadas em favor das aprendizagens;
- As discussões podem ser aliadas para o processo de sistematização do conhecimento;
- A observação dos diálogos e reflexões podem evidenciar os argumentos que demonstrem os avanços e desafios do estudante;
- Facilita uma prática educativa inclusiva;
- O ato de comunicar com o outro facilita a elaboração dos raciocínios;
- Ao interagir os estudantes podem assumir a responsabilidade pelo estudo (exploração, formulação e validação);
- Ao observar as interações o professor pode acompanhar o processo de desenvolvimento cognitivo dos alunos e;
- Possibilita avaliar a qualidade da relação aluno-aluno, aluno-professor, aluno-instituição educativa, aluno-material didático entre outras relações que se fazem presentes no processo de ensino e aprendizagem.

As repercussões do planejamento de P1, no âmbito do grupo participante desta investigação, convergem com as reflexões de Godino (2013) e Breda (2019) quando relatam a importância do construto teórico da idoneidade didática para guiar a reflexões dos professores sobre suas práticas. Tais reflexões, ao serem subsidiadas pelos componentes e indicadores do citado construto, mostram significativo potencial para que os professores questionem, não só suas próprias práticas, mas também, as estruturas cristalizadas nos sistemas educativos.

Conclusões

Para tecer estas considerações retomamos ao objetivo deste artigo que se constituiu em analisar as repercussões oriundas de um grupo colaborativo com foco nas reflexões sobre propostas de aulas para a educação básica, tendo por base a noção de idoneidade didática. A partir dos dados é possível destacar que o processo de ensino e aprendizagem da Matemática exige rigor teórico, ou seja, ao docente é requerido uma substancial base de conhecimento desta ciência. Tal fato, ficou evidenciado na fase de planejamento de P1 quando mostrou significativa destreza ao lidar com o conteúdo de Pirâmides. Além disso, há que se destacar a importância de o professor ter a capacidade de instrumentalizar suas propostas de aulas, em especial, com o uso de softwares educacionais, como o caso do GeoGebra. No caso de P1, ao abordar Pirâmides, o citado recurso contribuiu para a dinamicidade da visualização, facilitando processos de compreensão. Contudo, como sabemos, os processos de ensinar e aprender são complexos e carecem de diferentes olhares. Posto isso, destacamos que é premente entender o espaço da sala de aula de Matemática como um lugar, não só de conteúdos, mas de estabelecimento de relações sociais, afetividade e trabalho coletivo. Aprender é uma tarefa social, conforme sabemos das teorias sociointeracionistas, em especial a de Vygotsky. Desde modo, ao planejar uma aula de Matemática, os subsídios advindos da noção de idoneidade apontam caminhos que podem fomentar o trabalho em grupo, a valorização das relações, aproximação entre conteúdo e mundo social, entre outros.

Por fim, a idoneidade didática pode ser instrumento importante para guiar processos de formação continuada de professores que ensinam matemática, haja vista, a ausência de critérios para refletir sobre as práticas educativas desta Ciência.

Referências

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching. What makes it special? Journal of Teacher Education, 59(5), 389-407.

Breda, A. (2019). Criterios valorativos y normativos en la didáctica de las matemáticas: genesisi y desarrollo de la idoneidad didáctica. *ACTA LATINOAMERICANA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA*, 32(2), 440 - 447.

Fiorentini, D. (2004). Pesquisar práticas colaborativas ou pesquisar colaborativamente? En Fiorentini, D y Araújo, J. L. (Eds.), Pesquisa qualitativa em Educação Matemática (pp. 47-76). Autêntica.

Font, V., Planas, N. y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. Infancia y Aprendizaje, 33(1), 89-105, 2010.

Garnica, A. V. M. (2004). História Oral e educação Matemática. En Borba, M. C.; Araújo, J. L. (Eds.), Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática (pp. 77-98). Autêntica

Godino, J. (2013). Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, San José, n. 11 , p. 111 - 132 , dic . 2013

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20, 13-31.

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39 (1-2), 127-135.

Palanch, W. B. L. y Manrique, A. L. (2016). Ações colaborativas universidade - escola: formação de professores que ensinam matemática em espaços colaborativos. Revista Eletrônica de Educação, 10,188-202

Pino-Fan, L., Font, V. y Godino, J. D. (2014). El conocimiento didáctico-matemático de los profesores: pautas y criterios para su evaluación y desarrollo. En C. Dolores, M. García, J. Hernández, y L. Sosa (Eds.), Matemática Educativa: La formación de profesores (pp. 137 – 151). México, D. F.: Ediciones D. D. S. y Universidad Autónoma de Guerrero.

Pino-Fan, L. y Godino, J. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. PARADIGMA, 36(1), 87-109

Sbt. *Pirámide de Teotihuacán*. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=yiWDiLpn8dg. Acesso em 23 de Ago de 2018.

Schoenfeld, A., y Kilpatrick, J. (2008). Towards a theory of profiency in teaching mathematics. En D. Tirosh, y T. L. Wood (Eds.), Tools and processes in mathematics teacher education (pp. 321-354) Rotterdam: Sense Publishers.

Scholz, O. y Montiel, G. (2017). Problematización de la trigonometría en la génesis histórica de la trigonometría. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 30*, 1018-1026.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. Educational Researcher, 15(2), 4 - 14. Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. Harvard Educational Review, 57(1), 1-22.

Silva, J. F. da, y Manrique, A. L. (2021). Reflexiones emergentes de prácticas de un grupo colaborativo de profesores sobre los conocimientos necesarios para enseñar matemática. *PARADIGMA*, *42* (e2), 269-290.

Tinti, D., y Silva, J. (2021). A extensão universitária como possibilidade de constituição de espaços colaborativos para a formação de professores que ensinam matemática. *Com a Palavra, O Professor*, *6*(14), 337-352.

VOL34, NÚMERO 2, AÑO 2021

ALTERNATIVAS DE EVALUACIÓN EN UN CONTEXTO DE EDUCACIÓN REMOTA

ALTERNATIVES OF EVALUATION IN A REMOTE EDUCATION CONTEXT

Cristiam Felipe Villalobos Florián, Juan David López Baquero.
Universidad Distrital Francisco José de Caldas. (Colombia)
cfvillalobosf@correo.udistrial.edu.co , judlopezb@correo.udistrital.edu.co.

Resumen
Este artículo pretende dar a conocer algunas estrategias de evaluación que se encontraron oportunas al realizar un estudio de caso con educación remota en tiempos de confinamiento. Esta investigación se da en el marco de una intervención educativa sobre álgebra y trigonometría que contiene estrategias de evaluación. En cuanto a la metodología de investigación, en primer lugar, se hace una revisión teórica sobre la evaluación para seleccionar estrategias pertinentes como la socialización, la evaluación entre pares y un autoanálisis de las actividades mediante un portafolio de evidencias; seguido a ello, se realizó la propuesta de actividades centrando el análisis en la forma de evaluar, y por último se recolectó, sistematizó y analizó la información obtenida empíricamente con lo cual se sustenta la pertinencia de estas formas de evaluación, además de permitir hacer observaciones de éstas. Con base en esto, fue posible romper uno de los imaginarios que existe en torno a concebir la evaluación únicamente como una prueba aplicada al final del proceso de enseñanza.

Palabras clave: Evaluación, Educación Remota, Estrategias Alternativas.

Abstract
This article aims to present some evaluation strategies that were found to be appropriate when conducting a case study with remote education in times of confinement. This research is given in the framework of an educational intervention on algebra and trigonometry that contains assessment strategies. Regarding the research methodology, first of all, a theoretical review on evaluation is made to select relevant strategies such as socialization, peer evaluation and self-analysis of the activities through a portfolio of evidence; followed by a proposal of activities focusing the analysis on the way of evaluating; and finally, the information empirically obtained was collected, systematized and analyzed, which supports the relevance of these forms of evaluation, besides allowing their observations. Based on this study, it was possible to break one of the existing imaginary thoughts around conceiving evaluation only as a test applied at the end of the teaching process.

Key words: evaluation, remote education, alternative strategies.

Introducción

Actualmente, debido a la situación que atraviesa el mundo por la pandemia y particularmente en Bogotá-Colombia, la educación se desarrolla de manera virtual, motivo por el cual los docentes han sentido la necesidad de indagar, investigar y experimentar nuevas herramientas tecnológicas y estrategias de evaluación que les permitan de algún modo determinar los aprendizajes de los estudiantes. Este escenario de educación, anormal para muchos docentes, no estaba contemplado y conlleva a que la forma de concebir los componentes en los procesos de enseñanza – aprendizaje, y particularmente la evaluación, se vean afectados en el sentido de sufrir un tipo de reducción donde la dimensión de la componente en cuestión sea empleada de forma que cumpla un requisito y no de enriquecer los desarrollos educativos trabajados con los educandos.

Se reconoce la evaluación como acción común, esencial y necesaria dentro del aula de clase, que a la vez es un acto complejo, por lo que debe realizarse con cautela y responsabilidad. El examen se concibe socialmente como la forma de reconocer, comparar y medir conocimientos, aprendizajes y capacidades que un sujeto obtiene de algún proceso de aprendizaje que haya abordado además de utilizarse como mecanismo de control, dejando de lado una visión donde se presenta como un instrumento de diagnóstico, aprendizaje y comprensión dirigido hacia la mejora de los procesos educativos (Santos, 1996).

De este modo, es posible reconocer que a la evaluación se le atribuye una sobrecarga de “peso” en el ámbito educativo, tanto que pareciera que en un proceso de enseñanza y aprendizaje el acto evaluativo resulta ser la parte más importante del mismo, opacando sus demás componentes. Adicionalmente, una problemática adherida al examen es la tendencia presente en varias instituciones educativas a reducir el proceso evaluativo, la mayoría de las veces, a una prueba que normalmente se realiza al final de un periodo de tiempo (Díaz, 1994).

Por lo anterior, es posible dimensionar parte del trasfondo asociado a la valoración de aprendizajes que muchas veces es ignorado, donde actualmente se encuentra implícita la variable de tener que ejecutar ésta misma en un contexto de educación remota. Por consiguiente, nos resulta conveniente dar cuenta de algunas formas en las que se puede realizar la evaluación de los conocimientos estudiantiles en este mismo contexto educativo remoto, y con este trabajo el objetivo se enfoca en exponer algunas estrategias que resultan pertinentes de implementar en el panorama actual de la educación: la socialización, evaluación entre pares y autoanálisis de actividades mediante un portafolio de evidencias, las cuales pueden ser alternativas para los educadores al momento de hacer seguimiento a las comprensiones de sus estudiantes.

Para dar una presentación adecuada a las ya mencionadas estrategias, el documento inicialmente esboza las problemáticas que dieron lugar para realizar la investigación; luego, se presenta la indagación teórica relacionada con los temas puestos en juego y que cumplen el rol de sustentar el estudio; posteriormente, se describe la metodología utilizada para implementar dichas estrategias en una institución educativa; después, se presentan los análisis de resultados obtenidos de la intervención; y finalmente, se presentan los comentarios finales a los que se llegó con el trabajo realizado.

Planteamiento del problema

Las pandemias mundiales son eventos muy poco comunes, pero no imposibles. Actualmente, el mundo atraviesa la crisis sanitaria debido al virus COVID-19, lo cual ha generado consecuencias en todos los ámbitos de la vida. En la esfera de la educación, puede evidenciarse la suspensión temporal de todo tipo de actividad presencial con motivos de evitar que la propagación de esta enfermedad sea mayor. Ante este repentino cambio en el ámbito educativo y gracias a los adelantos tecnológicos tales como computadoras, aplicaciones para la interacción a distancia, redes sociales, foros virtuales, entre otros, ha sido posible generar alternativas de acción para que en muchos lugares las personas puedan seguir teniendo la oportunidad de educarse sin la necesidad de encontrarse en un mismo espacio físico, componiéndose así una serie de cambios que encaminan a los sujetos a adaptarse a la nueva realidad educativa que se está llevando a cabo de forma remota. El escenario anteriormente descrito condiciona de manera forzada y repentina a los docentes a trasladar los procesos de enseñanza y aprendizaje a un entorno de educación virtual, ámbito que representa muchas potencialidades respecto de la educación presencial; pero que un docente sea capaz de aprovechar las ventajas de este tipo de metodología implica un cierto nivel de apropiación de las herramientas que tiene a disposición, lo que se traduce en nuevos procesos de desarrollo profesional en el uso de herramientas tecnológicas para el aprendizaje y en la implementación de metodologías virtuales que permitan el logro de comprensiones en los educandos (Almodóvar-Lópes, Atiles, Chavarría-Vargas, Dias, y Zúñiga-León, 2020).

La labor docente es una tarea compleja por la cantidad de variables que se deben contemplar y ejecutar de forma acertada, entre las cuales se encuentra la evaluación, que por sí misma es un componente que dentro de los desarrollos educativos ya representa un gran reto por la cantidad de aspectos implícitos en la misma; ésta podría verse complejizada en la medida que se le agrega la variable, antes opcional y ahora obligatoria, de adaptarla al contexto de educación remota.

Cuando se habla de evaluación, es habitual que cualquier persona común y algunos docentes piensen que este componente de los procesos educativos es inherente al conocimiento, que sólo posee la función de evidenciarlo (Díaz, 1994). Esa concepción del examen es reduccionista en el sentido de que se ocultan muchas cualidades del mismo, viéndose afectados negativamente los procesos de enseñanza y aprendizaje. Por ejemplo, se pueden exponer algunas reducciones, en términos globales, con origen en la forma en que muchas veces se comprende, emplea e interpreta la evaluación: el examen tiene la responsabilidad de medir con calificaciones de carácter cuantitativo el saber que un individuo obtiene de un determinado proceso. Por ideas de esta índole es que la evaluación muchas veces se construye con el fin de reconocer, al final de un desarrollo educativo, requisitos técnicos desligados de la comprensión y reflexión del sujeto, donde un valor numérico específico cumple la misión de expresar todas las comprensiones del individuo.

En el contexto de educación remota las problemáticas mencionadas sobre el acto evaluativo siguen estando presentes con la particularidad de un cambio de representación, la mayoría de las veces en una versión de prueba virtual de selección múltiple. Pareciera que esta forma de ejecutar la evaluación es el único formato existente especialmente en cursos de matemáticas, de modo que muchos maestros dirigen a sus estudiantes indirectamente a preocuparse excesivamente por la memorización de conceptos y reproducción de técnicas específicas (Jiménez, Cervantes, y Pérez, 2018). Por consiguiente, nos fue posible formular una pregunta que dirige y centra nuestra investigación: ¿Qué alternativas de evaluación tiene un profesor de matemáticas en educación remota y cuáles son sus potencialidades?

Para ahondar en una respuesta al cuestionamiento planteado, se llevó a cabo una práctica docente con metodología remota en una institución educativa distrital en la ciudad de Bogotá, Colombia. En este lugar se diseñaron y desarrollaron procesos educativos con énfasis en la evaluación, lo cual se evidencia en la aplicación de tres estrategias evaluativas con motivo de invitar hacía innovación a la hora de implementar este componente de los procesos de enseñanza y aprendizaje, adoptar una concepción diferente a la tradicional de la misma y dar una muestra de las potencialidades de dichas estrategias que fueron obtenidas en el análisis de resultados de diversas evidencias.

Marco Teórico

En relación con la pregunta orientadora, es necesario definir teóricamente algunos conceptos que se abordarán como la socialización, la evaluación por pares y un auto análisis de las actividades por parte de los estudiantes mediante un portafolio de evidencias, así mismo se especificará qué se entiende por educación remota y cómo se involucra en la problemática de la evaluación.

Como se mencionó anteriormente, debido a la situación de confinamiento por la pandemia del COVID-19, la educación se desarrolló desde la distancia principalmente en los años 2020 y 2021. Teijero (2017) menciona que la educación a distancia apoyada con las tecnologías permite llegar a aquellas personas que no pueden recibirla presencialmente, supliendo así la necesidad de estudio de una audiencia que, aunque está separada geográficamente, puede participar y educarse académicamente.

Este tipo de educación puede estar enmarcada en dos divisiones: una es la educación virtual, que consiste en que la mayoría del proceso formativo se da de manera autónoma por parte del estudiante, generalmente a través de un ambiente virtual o plataforma de aprendizaje, recibiendo acompañamiento de los docentes asincrónicamente o de vez en cuando con un encuentro sincrónico. Otra, es la educación remota, que utiliza la tecnología para apoyar dichos procesos formativos de manera similar a la presencialidad, pero reemplazando las clases presenciales por sesiones sincrónicas, además de ayudarse con plataformas y recursos digitales para lograr la continuidad educativa de los estudiantes (Díaz, 2021).

La evaluación, desde la perspectiva de la comprensión, es entendida, según Santos (1996), como “un proceso y no como un momento final. La crítica atraviesa todas las dimensiones del proceso: la formulación de pretensiones, la fijación de criterios, el diseño y aplicación de instrumentos, la interpretación de resultados, etc.” (p. 9). Por lo que es evidente que el concepto de evaluación tiene muchos más componentes fuera de determinar con una nota la comprensión de cierto concepto o tema de estudio. Es ahí donde la evaluación cualitativa y formativa es definida por Morán (2007) como:

se entiende no como una actitud de enjuiciamiento para calificar o descalificar el desempeño escolar de una persona, sino para apoyar y realimentar los conocimientos, reformular estrategias de enseñanza y aprendizaje, replantear o fortalecer proyectos y programas de estudio, así como explorar formas más creativas de interacción pedagógica entre profesores y alumnos (p. 13).

Por lo que se convierte en una herramienta que le permite al docente identificar con mayor claridad los procesos y desarrollos de los estudiantes, además de contribuir en su desempeño y crecimiento académico.

Con respecto a las alternativas de evaluación que tienen los profesores de matemáticas y que son posibles de aplicar en un contexto de educación remota, Vygotsky, Mejías y Sandoval (como se citó en González y León, 2009) afirman que mediante la interacción verbal es posible provocar un proceso de enseñanza-aprendizaje en el cual la apropiación del conocimiento no consiste sólo en la posesión de un objeto sino la construcción de herramientas culturales y cognitivas. Lo anterior está en relación con lo dicho por Mercer (citado en González y León, 2009), quien señala que “mediante el lenguaje no sólo podemos compartir e intercambiar información, también podemos trabajar conjuntamente con ella. No sólo podemos influir en las acciones de otros, sino también alterar sus comprensiones” (p. 39).

Por lo anterior, es de resaltar la importancia de la socialización como instrumento de evaluación, ya que esta potencia la interacción entre los estudiantes y esto posibilita una ampliación de los puntos de vista que se tienen en cuanto a un determinado concepto u objeto matemático, relaciones existentes o tratamiento de situaciones que se dan de distintas maneras pero que con la socialización se conocen, analizan, razonan y argumentan, permitiendo así la construcción de conocimiento de manera conjunta. Reafirmando lo dicho por González y León (2009), “la interacción social ocurre en un escenario donde es posible que la dinámica entre lo cultural, lo colectivo y lo individual retroalimente los mismos ámbitos del conocimiento humano” (p. 31).

En cuanto a la evaluación por pares, ésta se hace relevante en el proceso de enseñanza – aprendizaje ya que es un espacio en el que los estudiantes toman un rol diferente al que están acostumbrados y eso conlleva a que adquiera otras responsabilidades y analice desde otro punto de vista las situaciones. Como indica Downes (2013), la evaluación por pares puede funcionar muy bien para entradas de blogs o foros de discusión. Estos espacios de discusión propician que los estudiantes pongan ideas en juego y ellos mismos evalúen su veracidad.

Como proceso al servicio del aprendizaje, en palabras de Bautista y Murga (2011), la evaluación por pares motiva al estudiante, de manera que se ve involucrado en el proceso formativo, facilitando así información útil para afianzar y enriquecer sus logros previstos, además de un desarrollo del juicio crítico, la autonomía y la responsabilidad. Es así como, por medio de la evaluación por pares, los estudiantes sienten la necesidad de indagar, profundizar y razonar acerca de las situaciones problema planteadas y no solamente entenderlas, sino que deben comprender los razonamientos de por lo menos uno de sus compañeros, analizarlos y generar argumentos que le permitan dar validez o negar las afirmaciones hechas. De este modo se transforma, de cierta manera, un imaginario que se tiene sobre las matemáticas, en las que hay una única respuesta y se analizan mejor los procedimientos y procesos que surgen en el tratamiento de un problema desde diferentes puntos de vista.

Como última estrategia de evaluación, se implementó un portafolio de evidencias en el que los estudiantes debían hacer un análisis de cada una de las actividades llevadas a cabo en las sesiones de clase. Esta forma de evaluar consiste en la sistematización de trabajos, permite al estudiante controlar su propio proceso de aprendizaje, lo cual es útil para el docente, ya que se obtiene información real sobre el proceso y desarrollo del sujeto (Sánchez, 2005). El análisis de cada evidencia da cuenta del nivel de desempeño de cada alumno y las problemáticas del proceso de enseñanza (Pascual y Trejo, 2020).

Esta estrategia es importante, ya que no solo es el docente quien interpreta y analiza cada uno de los procesos realizados, sino que es el mismo estudiante quien hace un retroalimentación de sus productos en las actividades y además puede plasmar por escrito si en cada uno de sus procesos tuvo dificultades que le impidieron el desarrollo de la situación, identificar posibles rutas o caminos de solución y complementar acciones que hayan quedado incompletas, llegando así a una última fase que sería la autoevaluación; que en palabras de Kwan y Leung, y Cheng y Warren (citado por Bernabé y Blasco, 2013), ayuda fundamentalmente a que los estudiantes adquieran más confianza en sus habilidades y sean capaces de reflexionar sobre el producto y el proceso, asuman mayores responsabilidades en el proceso de enseñanza-aprendizaje y logren ser más críticos, de modo que puedan convertirse en profesionales reflexivos.

Metodología de la investigación

La presente investigación es de carácter cualitativa, ya que se interpretan los resultados obtenidos de una intervención en el aula donde se pusieron en juego la socialización, evaluación entre pares y el portafolio de evidencias como estrategias de evaluación con el fin de analizar y concluir los beneficios que estas alternativas aportan a la hora de hacer un seguimiento de los conocimientos y comprensiones de los estudiantes. Para esto se llevó a cabo un estudio de caso; esta metodología ha sido usada como recurso de enseñanza para nuevos maestros con el objetivo de conocer cómo evolucionan los estudiantes cuando se aplica un proceso de enseñanza o técnica de estudio específica (Walker, 2002). La intención de un estudio de caso es comprender a profundidad un fenómeno; esta vez se quiere estudiar la pertinencia o no de las estrategias de evaluación propuestas.

El punto de partida para llevar a cabo el estudio de caso fue hacer una revisión teórica relacionada con la evaluación, lo cual permite ampliar la concepción, muchas veces reduccionista, que se tiene en cuanto a esta parte del proceso educativo. Para cambiar el estado de lo investigado de algo “plasmado teóricamente” a “actuado en un escenario específico” se crearon dos procesos de enseñanza y aprendizaje, uno con base en álgebra y otro enfocado en trigonometría, los cuales fueron diseñados teniendo en cuenta el enfoque de enseñanza para la comprensión que es adoptada por la institución educativa distrital donde se llevó a cabo la aplicación. Esto último puede definirse como una forma de enseñanza donde se busca que los estudiantes adquieran la habilidad de pensar y actuar con flexibilidad a partir de lo que ellos saben (Perkins, 1999). Dentro de este tipo de enfoque pueden identificarse cuatro elementos: tópicos generativos, metas de comprensión, desempeños de comprensión y evaluación diagnóstica continua. Los desarrollos educativos de álgebra y trigonometría se complementaron en las secuencias de actividades, con lo denominado como ingeniería didáctica; ya que en palabras de Douady (1995) este enfoque teórico puede entenderse como un conjunto de secuencias de clase con el fin de realizar un proyecto de aprendizaje. Con base en este desarrollo y la aplicación de estas estrategias, es pertinente aclarar que la intención de este trabajo está dirigida a que los docentes logren ampliar la concepción que se tiene sobre el acto evaluativo y dar a conocer las potencialidades identificadas de estas estrategias de evaluación, que al ser aplicadas en el aula contribuyen al logro de lo anteriormente mencionado.

La combinación entre las dos estrategias didácticas expuestas en las ideas anteriores, junto con la revisión teórica sobre la evaluación, se complementaron para lograr la construcción de las estrategias de evaluación y las herramientas de interacción necesarias para la aplicación de las mismas tales como Google Meet, Padlet, Classroom, GeoGebra Classroom, Powerpoint, Google Forms. La intervención se realizó con los estudiantes de una institución educativa distrital de Bogotá, Colombia. Con respecto a la población con la cual se llevó a cabo el trabajo en este espacio educativo, fue posible identificar que son alumnos que oscilan entre los 14 y 16 años donde la mayoría poseía acceso a la red, muchos de ellos se conectaban por medio de un celular inteligente por falta de herramientas tecnológicas como una computadora o Tablet. Los encuentros para el desarrollo de las actividades fueron sincrónicos con una intensidad por curso de dos horas diarias y un total de 4 a la semana. El acompañamiento se realizó por el lapso de dos meses en donde los docentes disponían de diferentes espacios de clase para resolver dudas, orientar y retroalimentar actividades por medio de comentarios, por mencionar algunas acciones complementarias.

Por último, se obtienen los resultados del trabajo realizado a partir de grabaciones y protocolos de clase, argumentos de los estudiantes consignados en los diferentes muros virtuales, formatos de portafolios de evidencias diligenciados por los educandos, entre los más relevantes. Todo ello fue sometido a un análisis e interpretación detallada donde se tuvo en cuenta la teoría consultada y de esta forma poder dar juicios de valor y comentarios respecto a las estrategias de evaluación empleadas que se encuentran en el desarrollo de este artículo.

Análisis de datos

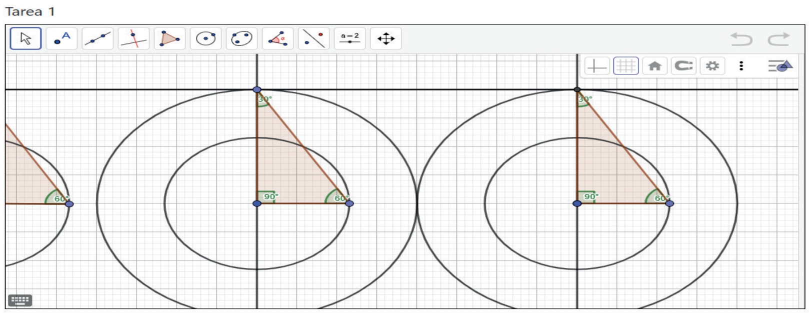
A continuación, se analizarán algunas evidencias hechas por los estudiantes en diferentes actividades propuestas, estas evidencias pueden ser escritas, ya sea mediante un taller, un comentario o reflexión acerca de un proceso, habladas a partir de socializaciones, discusiones, observaciones de clase, o representaciones semánticas de las situaciones problema propuestas. Todo esto con el fin de dar a conocer algunas de las potencialidades, aspectos relevantes o elementos a tener en cuenta en la aplicación de las alternativas de evaluación propuestas en el contexto de educación remota.

Como se mencionó anteriormente en este artículo, las alternativas de evaluación propuestas son la socialización, la evaluación por pares y un autoanálisis de las actividades por parte de los estudiantes mediante un portafolio de evidencias. La forma en que se llevaron a cabo estas alternativas de evaluación fue mediante sesiones de clase sincrónicas, apoyo de plataformas de estudio y recursos tecnológicos. Las evidencias de los procesos, discusiones y resultados obtenidos serán descritas a continuación.

1. Socialización

Este tipo de evaluación se pudo llevar a cabo primeramente con estudiantes de grado décimo en una actividad en la que se hacía uso del software de geometría dinámica GeoGebra. En éste, los estudiantes debían analizar una construcción dada, identificar cada una de sus componentes, medidas, forma, etc., y replicarla de tal manera que cada elemento de la construcción fuera igual a la inicial, para luego exponer ante sus compañeros sus avances, estrategias y maneras en las que desarrolló su proceso. Entre los procesos desarrollados por los estudiantes, es posible identificar las siguientes construcciones y estrategias utilizadas:

Figura 1. *Ejemplo de actividad construcción exacta.*



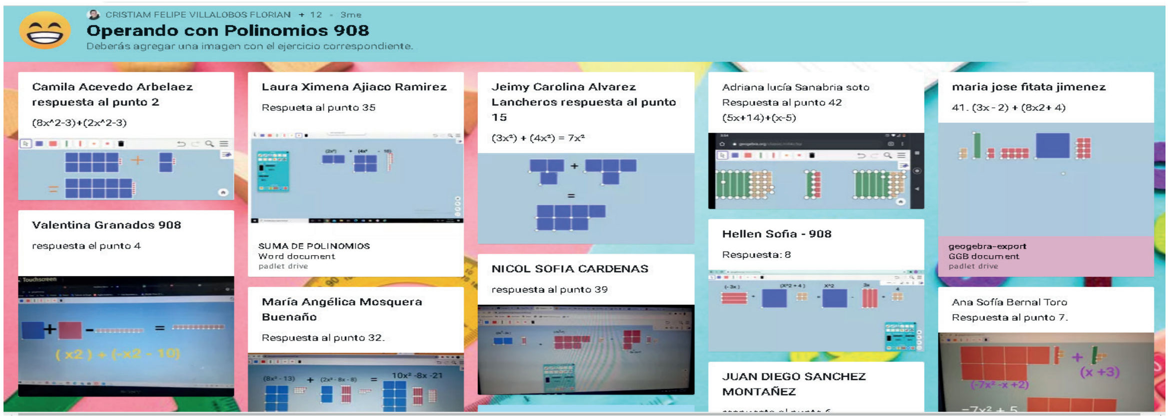
Elaboración propia

En la socialización de las construcciones hechas, los estudiantes pudieron dar cuenta de cada uno de los procesos que realizaron, expresando el cómo identificaron cada una de las características iniciales de la figura y exponiendo la forma en que construyeron una igual. Ante estas explicaciones, algunas diferentes de otras, surgieron preguntas de parte de los mismos compañeros, y a veces del docente, con el fin de generar discusiones sobre los conceptos que se pretendían tratar. Estas discusiones fueron beneficiosas, tanto para evaluar los desarrollos hechos por los estudiantes, en el sentido en que fue posible identificar las comprensiones que tuvieron acerca de la situación planteada y las formas de solución que presentaron, como para que ellos identifiquen que existen diferentes maneras para desarrollar una situación problema y en algunos casos construir una misma ruta de aprendizaje entre los mismos compañeros. Esto en relación con lo expuesto por García (citado en González y León, 2009), "la tarea del profesor es proporcionar un entorno educativo estimulante que posibilite la curiosidad, actividad, iniciativa… el avance en la socialización exige también la interacción con los demás" (p.33).

2. Evaluación por pares

Esta estrategia fue puesta en práctica con estudiantes de noveno grado en una actividad de álgebra denominada "Explorando los algetiles". Éste es un recurso característico en la metodología presencial compuesto por figuras como cuadrados "grandes" con área de x^2, rectángulos de altura equivalente a la de los cuadrados "grandes" con un área "x", y cuadrados "pequeños" con ancho igual al rectángulo y área 1; donde a cada figura, dependiendo de su color, se le asocia un valor: rojo equivale a valores negativos y color diferente a rojo corresponde a valores positivos. Por medio del software GeoGebra, los algetiles fueron adaptados a la virtualidad de forma que en el recurso se conserve el carácter visual y manipulativo, pero éste último pasa de tangible a intangible. La metodología de la actividad consistió en asignar un ejercicio de suma y resta de polinomios a cada uno de los estudiantes, los cuales debían deducir la forma de dar solución a cada problema de forma geométrica. Previamente se trabajó con ellos la representación de expresiones algebraicas y operaciones con números enteros con el recurso virtual; conocimientos que, junto a la interpretación de las medidas de área asignada a cada figura, fueron la base que permitió el abordaje a la situación planteada. La recolección de respuestas se realizó por un muro virtual de Padlet, donde los estudiantes subieron pantallazos de lo realizado. En la figura 2 se expone un ejemplo de lo anteriormente narrado:

Figura 2. *Foro virtual sobre operaciones suma y resta entre polinomios de forma geométrica.*



Elaboración propia.

A partir de las evidencias recogidas, se asignó a los estudiantes con el rol de evaluadores, tarea que consistía en revisar las respuestas dadas por sus pares haciendo énfasis en la forma de la estrategia utilizada para plantear la situación y la respuesta geométrica de la misma. Una potencialidad de emplear esta estrategia de evaluación se evidencia cuando cada estudiante expone ante sus compañeros y profesor juicios, afirmaciones o sugerencias sobre lo realizado. Dicho de otra forma, la estrategia posibilita que el estudiante se sienta protagonista dentro del proceso de enseñanza y aprendizaje, encontrando que sus opiniones son legítimas e importantes y se deben considerar al igual que la de sus pares. También es importante mencionar que la estrategia de evaluación permite en gran medida la retroalimentación cualitativa sobre las formas de actuar del compañero (Delgado, Miranda y Meza, 2018), exponiéndose así el ejemplo de que no es necesario otorgar o calificar con un valor numérico las acciones realizadas por un sujeto en el desarrollo de tareas de aprendizaje.

En esta actividad de aplicación, también fue posible identificar efectos desfavorables relacionados a la estrategia de evaluación, y aunque se presentaron en menor medida en comparación con sus potencialidades, es pertinente llevar a cabo observaciones críticas con el fin de refinar la forma de uso de dicha estrategia para evitar percances. Para la aplicación óptima de la evaluación entre pares y que ésta contribuya al aprendizaje, sugerimos considerar tres requisitos, los cuales adaptamos de Sánchez y Blanco (2013): corroborar que el alumno está capacitado conceptual y actitudinalmente para realizar y recibir juicios evaluativos; concientizar al estudiante que el intercambio de ideas, juicios y opiniones tienen el fin de identificar errores y corregir los mismos; y establecer pautas de evaluación, con lo cual se permite el enfoque en aquellos aspectos claves de analizar y de esta forma obtener un aprendizaje.

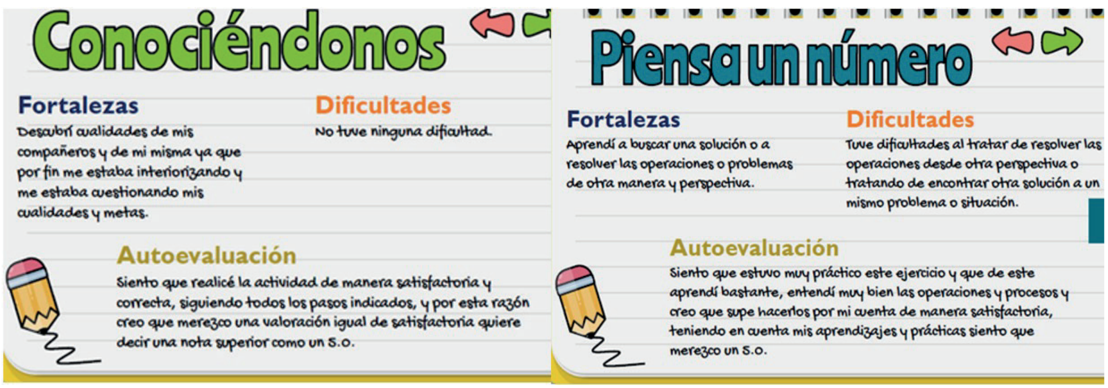
3. Análisis de actividades mediante un portafolio de evidencias

Para la ejecución de esta estrategia en la intervención pedagógica, fue necesario primeramente definir el formato de portafolio de evidencia. La organización y diseño de este formato la llevaron a cabo los docentes con la intención de orientar y centrar las reflexiones de cada uno de los estudiantes. El portafolio podría describirse como un prototipo de diario virtual, compuesto de apartados los cuales corresponden a todas las actividades trabajadas en el proceso de enseñanza y aprendizaje diseñado. Cada sección del formato se divide en subsecciones, donde se debe analizar las acciones realizadas durante las clases en función de las fortalezas y debilidades y a partir de ello asignar una nota a su proceso justificándola con las acciones realizadas. Adicional, se dispone de un espacio para adjuntar evidencias con relación a las actividades realizadas. Para que los estudiantes tuvieran claridad sobre la forma en que se debía diligenciar el formato, desde la primera sesión se dio a conocer el mismo, socializando cada uno de sus apartados y la intención que se tenía con los mismos.

Aunque la asignación de notas numéricas es algo que hemos criticado, no se puede desconocer que es un requisito en la mayoría de las instituciones educativas; y para aliviar este hecho, mediante el portafolio encaminamos al estudiante a que razone sobre sus formas de pensar y actuar al momento de abordar cada situación problema y comente sobre ello, con el fin de que la evaluación cualitativa también esté presente.

En el análisis de los portafolios se revela que esta estrategia de evaluación es muy completa en el sentido de contener implícitamente conceptos de evaluación continua y cualitativa, que invita a la reflexión mediante la autoevaluación y fomenta la autocrítica con el reconocimiento de los diferentes obstáculos presentes a la hora de desarrollar las tareas de aprendizaje, lo cual da pie, con ayuda del reconocimiento de las fortalezas, a plantear estrategias de superación de dichas dificultades. A continuación, se presentan algunos ejemplos de las reflexiones que surgen de la secuencia de actividades, lo cual se sistematizó en el portafolio de evidencias:

Figura 3. *Portafolios de evidencias diligenciados por estudiantes de grado noveno y décimo.*



Elaboración propia

Entre las observaciones que podemos hacer para optimizar la estrategia de evaluación podemos mencionar la pertinencia de que el tiempo entre la realización de una actividad y la redacción de un apartado del portafolio de evidencias sea lo más corto posible, ya que puede llegar a ocurrir que las reflexiones obtenidas de una actividad pierdan profundidad o se confundan las conclusiones adquiridas de diferentes tareas de trabajo.

Los buenos resultados obtenidos al aplicar la herramienta dieron pie para pensar la evaluación desde otras dimensiones, debido a que la finalidad en este caso fue únicamente evaluar el proceso de los estudiantes. Por ejemplo, se podría pensar un formato de portafolio de evidencias dirigido al seguimiento, reflexión y autocrítica de la labor docente durante un desarrollo educativo realizado y de esta forma obtener mejores resultados a futuro.

Comentarios finales

En cuanto a las estrategias de evaluación, se puede mencionar que potenciaron en el docente el reconocimiento de los procesos que cada uno de sus alumnos llevó a cabo durante la intervención en el aula; además posibilitaron que los estudiantes no se sintieran condicionados a una nota que se obtiene sólo al final del proceso, permitiendo así una participación en clase y resolución de las actividades de una forma más natural. De igual manera, fue posible identificar y reconocer dificultades dentro de la aplicación de las estrategias dentro de los desarrollos educativos con lo cual fue posible realizar ajustes de aplicación de las mismas con el fin de evitar posibles problemáticas que se interpongan en el desarrollo y reflexión de las tareas de aprendizaje.

Otro aporte de esta investigación es la disminución de la tensión que existe entre lo teórico y lo práctico porque se logra una ampliación sobre la forma de concebir la evaluación como un proceso que se debe llevar a cabo continuamente y no sólo desde una perspectiva cuantitativa, contribuyendo así a la eliminación del imaginario que existe en torno al acto de evaluar, donde equivocadamente se entiende como algo que sólo se realiza otorgando una nota al final del proceso. Adicionalmente, se reconoce que la evaluación además de ser un proceso continuo debe actuar como complemento para otros componentes de los procesos educativos, como el diseño y la gestión, donde éstos sean mejores a partir de la evaluación y viceversa en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Referencias

Almodóvar-López, Mayra, Atiles, Julia Teresa, Chavarría-Vargas, Aleida, Dias, Maria José, y Zúñiga-León, Irma. (2020). La enseñanza remota no viene sin retos. *Revista Electrónica Educare*, *24*(Suppl. 1), 55-59. https://dx.doi.org/10.15359/ree.24-s.15

Bautista-Cerro, M.J., y Murga, M.A. (2011). La evaluación por pares: una técnica para el desarrollo de competencias cívicas (autonomía y responsabilidad) en contextos formativos no presenciales. Estudio de caso. *XII Congreso de Teoría de la Educación, Universitat de Barcelona.*

Bernabé Valero, G., y Blasco Magraner, S. (2013). Evaluación por pares y autoevaluación en el aula universitaria: una visión desde el enfoque por competencias.

Delgado Celis, Z. Y., Miranda Díaz, G. A., y Meza Cano, J. M. (2018). La evaluación entre pares mediada por tecnología. *Memorias del 3er. Encuentro universitario de mejores prácticas de uso de TIC en la educación. Ciudad de México: Universidad Autónoma de México.*

Díaz Barriga, Ángel. (1994). Una polémica en relación al examen. *Revista Iberoamericana de educación*, *5*, 161-181.

Díaz, L. (2021, 25 de febrero). *Diferencias entre educación remota, educación virtual y educación a distancia.* YouTube. https://acis.org.co/portal/content/diferencias-entre-educaci%C3%B3n-remota-educaci%C3%B3n-virtual-y-educaci%C3%B3n-distancia

Douady, R. (1995). La Ingeniería Didáctica y la evolución de su relación conel conocimiento. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno y P. Gómez (Eds.)Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigacióny la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (pp.61-96),Bogotá: Una Empresa Docente-Grupo Editorial Iberoamericana.

Downes, S. (2013). Assessment in MOOCs. Consultado en http://halfanhour.blogspot.com.es/2013/05/assessmentin-moocs.html

González, B. y León, A. (2009). Interacción verbal y socialización cognitiva en el aula de clase. *Acción pedagógica, 18*(1), 30-41.

Jiménez, G., Cervantes, G., y Pérez, V. (2018). Evaluación con base en pruebas de selección múltiple y pruebas de desarrollo. En A. De Castro, y E. Domínguez, *Aulas Develadas 3: La práctica, con investigación, se cambia* (pp. 4-17). Barranquilla: Universidad del Norte.

Moran Oviedo, Porfirio. (2007). Hacia una evaluación cualitativa en el aula. *Reencuentro. Análisis de problemas universitarios*, (48), 9-19.

Pascual, A. I. y Trejo, C. (2020). Portafolio. *Evaluación del y para el aprendizaje: instrumentos y estrategias* (pp. 129 – 149). Imagia Comunicación.

Perkins, D. (1999). Capítulo 2.¿ Qué es la comprensión. M. Stone, La enseñanza para la comprensión (págs. 69-95). Buenos Aires: Paidos.

Sánchez, R. B. (2005). El Portafolio, metodología de evaluación y aprendizaje de cara al nuevo Espacio Europeo de Educación Superior. Una experiencia práctica en la Universidad de Sevilla.*Revista Latinoamericana de Tecnología Educativa-RELATEC*,*4*(1), 121-140.

Sánchez, P., y Blanco, C. (2013, July). Una metodología para fomentar el aprendizaje mediante sistemas de evaluación entre pares. In *Jornadas de Enseñanza Universitaria de la Informática (19es: 2013: Castelló de la Plana)*. Universitat Jaume I. Escola Superior de Tecnologia i Ciències Experimentals.

Santos Guerra, M. Á. (1996). Evaluar es comprender: De la concepción técnica a la dimensión crítica. *Revista Investigación en la Escuela, 30, 5-13.*

Teijero Paéz, S. (2017). Múltiples inteligencias y complejidad de la labor docente en el aula de clases mixta. *Higher Education and Society*, *23*(23), 61-84.

Walker, R. (2002). Case study, case records and multimedia. *Cambridge Journal of Education, 32,* 109-127.

VOL34, NÚMERO 2, AÑO 2021

ANÁLISIS DE LA IDONEIDAD DIDÁCTICA DE UNA TAREA DE MEDIDA CON FUTUROS MAESTROS DE EDUCACIÓN INFANTIL

DIDACTIC SUITABILITY ANALYSIS OF A MEASUREMENT TASK WITH EARLY CHILDHOOD EDUCATION PROSPECTIVE TEACHERS

Gemma Sala, Adriana Breda, Danyal Farsani
Universidad de Barcelona. (España), Universidad Finis Terrae. (Chile)
gsala@ub.edu, adriana.breda@ub.edu, danyal.farsani@gmail.com

Resumen
Este trabajo expone el análisis, desde la idoneidad didáctica, del diseño e implementación de una tarea de medida basada en la resolución de un problema abierto de contexto real. La implementación se realizó en el curso 2018-19 con 49 estudiantes de la asignatura de Didáctica de las Matemática del Grado de Educación Infantil de la Universidad de Barcelona (España). Los resultados muestran que la tarea presenta una alta valoración para los indicadores correspondientes a las idoneidades interaccional, emocional, mediacional y ecológica y permiten plantear un rediseño de esta focalizado la mejora de su idoneidad epistémica i cognitiva.

Palabras clave: diseño e implementación de tareas, formación de profesorado, idoneidad didáctica.

Abstract
This paper presents the analysis, from the didactic suitability, of the design and implementation of a measurement task based on a real-world context open-problem solving. It was put into practice with forty-nine students in the subject Didactics of Mathematics of the Early Childhood Education Degree at the University of Barcelona (Spain), in the academic year 2018-19. The results show that the task presents a high assessment for the indicators corresponding to interactional, emotional, mediating, and ecologic suitability; and allow proposing a redesign of the task focused on improving its epistemic and cognitive suitability.

Key words: task design and implementation, teacher training, didactic suitability.

Introducción

Los estudios centrados en el diseño, implementación y valoración de tareas matemáticas han centrado la atención tanto en las respuestas de los estudiantes, las estrategias y formas de resolverlas, como en el trabajo del profesor que concibe, diseña, implementa, analiza y valora las tareas, ya que las tareas matemáticas promueven el desarrollo cognitivo de los estudiantes, potencian el aprendizaje de diferentes conceptos y representaciones y fomentan la creatividad (Moreira, Gusmão y Font, 2020; Rodrigues y Gusmão, 2020).Por un lado, según estas investigaciones, diseñar, implementar y valorar tareas es un aspecto clave que el futuro profesor debe desarrollar en su proceso formativo. Por otro lado, los criterios de idoneidad didáctica (CI) (Breda, Font y Pino-Fan, 2018) – noción desarrollada en el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS) – resulta como una herramienta útil en la formación de futuros profesores de matemáticas o de profesores de matemáticas en servicio, entre otros aspectos, para guiar el diseño y la valoración de tareas matemáticas (Gusmão y Font, 2020).

En esa línea, el objetivo de este trabajo es estudiar la idoneidad didáctica presente en el diseño de una tarea de medida, implementada con futuros profesores de Educación Infantil. La tarea tenía como objetivo que los futuros profesores, a partir de la experimentación, reconociesen los elementos (conceptos, procedimientos, recursos, estrategias, etc.) necesarios para la adquisición del conocimiento de la enseñanza de la medida a partir de un problema de contexto real y pudiesen reflexionar sobre ello desde un punto de vista profesional.

En los apartados siguientes, se expone, en primer lugar, el marco teórico del estudio. A continuación, se detalla la metodología seguida. En tercer lugar, se presentan y discuten los resultados obtenidos y, finalmente, se aportan algunas consideraciones sobre el trabajo presentado en este artículo.

Marco teórico

En este apartado se exponen las principales fuentes teóricas en que se basa el estudio presentado en este artículo.

Diseño de tareas

Dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, las tareas ocupan un lugar central en el aprendizaje de los estudiantes y se definen como la propuesta de trabajo que un docente realiza para un alumno, intencional y cuidadosamente planificada por el docente para lograr un determinado objetivo de aprendizaje (Ponte, 2014).

Para Gusmão y Font (2020), con relación a la tipología, las tareas pueden ser clasificadas de tipo ejercicio, problema o proyecto de investigación. Las de tipo ejercicio tienen su importancia dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y son útiles para que los estudiantes pongan sus conocimientos en práctica (Ponte, 2005). Las tareas de tipo problema requieren que los estudiantes busquen elementos desconocidos, interpreten información, identifiquen elementos relevantes y realicen conexiones entre conceptos e ideas matemáticas (conexiones intramatemáticas) y con otros componentes curriculares y situaciones de lo cotidiano (conexiones extramatemáticas). Es decir, los estudiantes deben usar diferentes estrategias para resolver una misma situación y eso ayuda en la promoción del desarrollo de su autonomía y de su competencia comunicativa. Las tareas de tipo investigación requieren un mayor compromiso cognitivo de los estudiantes, pues el nivel de desafío es alto, ya que fomentan un alto grado de comunicación y argumentación, lo que justifica las conjeturas y las negociaciones en la búsqueda de una solución (Ponte, Brocardo y Oliveira, 2003).

En relación con la duración, las tareas se clasifican de corta duración (unos minutos), media duración (una clase, una semana) y larga duración (semanas, meses). En particular, las tareas a largo plazo, como los proyectos, son situaciones ricas en desafíos y pueden permitir que los estudiantes aprendan lecciones interesantes y consistentes a partir de la búsqueda de estrategias para la solución, los diálogos entre los involucrados y las justificaciones de las respuestas. (Ponte, 2005, p. 9). Por lo que se refiere al contexto, Ponte (2005) considera tres posibles contextos en el trabajo con tareas: vida real / realidad, matemáticas puras y semi-realidad. En cuanto a la naturaleza, las tareas matemáticas se pueden clasificar en abiertas o cerradas. Las tareas de carácter abierto admiten varias respuestas correctas, varían la duración entre media y larga, ofrecen espacios para argumentos, justificaciones y tienen un alto grado de impugnación. Además, según Gusmão (2019). La naturaleza de las tareas cerradas admite una única respuesta correcta. El enunciado suele dar pistas o especifica claramente lo que se da y lo que se pide (Ponte, 2005).

Otro aspecto relevante es la gestión de la tarea —planificación, implementación y evaluación, (Pereira, 2019)— en el aula que, según Sousa (2018), involucra la preparación inicial, contextualización, preguntas, provocaciones y problematización, distribución del tiempo, interacción profesor-alumno y alumno-alumno, entre otros.

Criterios de Idoneidad didáctica en el diseño y gestión de tareas

Los Criterios de Idoneidad didáctica (CI), propuestos en el EOS pueden servir para guiar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y para valorar sus implementaciones. En el EOS se consideran los siguientes CI (Breda, Font y Pino-Fan, 2018): 1. Idoneidad epistémica, para valorar si las matemáticas que están siendo enseñadas son "buenas matemáticas". 2. Idoneidad cognitiva, para valorar, antes de iniciar el proceso de instrucción, si lo que se quiere enseñar está a una distancia razonable de aquello que los alumnos saben y, después del proceso, si los aprendizajes adquiridos están cerca de aquello que se pretendía enseñar. 3. Idoneidad interaccional, para valorar si las interacciones resuelven dudas y dificultades de los alumnos. 4. Idoneidad mediacional, para valorar la adecuación de los recursos materiales y temporales utilizados en el proceso de instrucción. 5. Idoneidad emocional, para valorar la implicación —intereses y motivaciones— de los alumnos durante el proceso de instrucción. 6. Idoneidad ecológica, para valorar la adecuación del proceso de instrucción al proyecto educativo del centro, a las directrices curriculares, y a las condiciones del entorno social y profesional.

Gusmão y Font (2020) definieron un conjunto de indicadores observables con el fin de que los CI fueran operativos para poder valorar del grado de idoneidad de cada uno de estos criterios en el diseño y análisis de tareas. En el caso de diseño de tareas los indicadores son los incluidos en la Tabla 1.

Tabla 1. *Indicadores de diseño de tareas según los criterios de idoneidad didáctica.*

Indicadores de diseño de tareas / idoneidad epistémica
• ¿La descripción de la tarea se presenta en un lenguaje claro, correcto y apropiado para el nivel de educación? • ¿Se utilizan diferentes lenguajes y formas de expresión matemática (verbal, gráfica, simbólica, pictórico, etc.)? • ¿La selección de tareas es representativa y variada, incluye tareas de carácter cerrado y abierto? • ¿Son las tareas de diferentes tipos? • ¿Promueve la generación de hipótesis, el pensamiento abierto (pensamiento reversible, flexible, descentralizado) y fomenta el uso de procesos de argumentación y justificación?
Indicadores de diseño de tareas / idoneidad cognitiva
• ¿Se parte de los conocimientos previos de los alumnos? • ¿Se amplían, refuerzan y sistematizan los conocimientos? • ¿Se respeta el nivel de desarrollo cognitivo de los estudiantes? • ¿Se fomenta el uso de estrategias de resolución diferentes, creativas y originales? • ¿Se cumple con diferentes objetivos de aprendizaje y se lleva al resolutor a desarrollar diferentes habilidades cognitivas y metacognitivas?
Indicadores de diseño de tareas / idoneidad interaccional
• ¿Se prevén momentos de diálogo y discusión entre alumnos o entre profesor y alumnos? • ¿Se fomenta la resolución de tareas individualmente, en parejas o en grupos?

• ¿Permiten la generación de conflicto cognitivo (en el sentido piagetiano) y la negociación de significados? • ¿Fomentan la responsabilidad del estudio (exploración, formulación y validación)?
Indicadores de diseño de tareas / idoneidad emocional
• ¿Promueve la interactividad, la atracción, la diversión y la inclusión, elevando la autoestima, el sentimiento de inclusión, y el gusto por las matemáticas? • ¿Se valoran los diferentes tipos de razonamientos y respuestas? • ¿Se fomenta la participación y se genera interés? • ¿Favorecen la percepción de la utilidad de las matemáticas en la vida y en el trabajo? • ¿Se promueve la implicación del alumno en la resolución de tareas (devolución del aprendizaje en el sentido de Brousseau)? • ¿Se presentan posibles retos a alcanzar, desencadenando niveles de pensamiento, cada uno más complejo? • ¿Presentan la aplicación y la belleza de las matemáticas?
Indicadores de diseño de tareas / idoneidad mediacional
− ¿Se proporcionan materiales manipulables y / o tecnológicos o se recomienda su uso para ayudar en el logro? − ¿Se proporciona suficiente tiempo para su realización y para el mantenimiento de la concentración y el interés? − ¿Son los tiempos adecuados para cada uno de los diferentes tipos de tareas (reproducción, conexión, reflexión, etc.)? − ¿Se proporcionan espacios adecuados para su realización? − ¿Se proporcionan momentos de experimentación práctica para ayudar en la comprensión de conceptos y su aplicabilidad?
Indicadores de diseño de tareas / idoneidad ecológica
• ¿Se tienen en cuenta documentos curriculares oficiales (nacionales y locales)? • ¿Se busca la articulación entre diferentes contenidos de Matemáticas y entre diferentes áreas de conocimiento? • ¿Las tareas están contextualizadas con el entorno social y cultural? • ¿Los contenidos de las tareas son útiles para la vida social y laboral?

Tomado de: (Gusmão y Font, 2020).

Unidades de Medida

El acto de medir es inherente a la historia de la humanidad. Sin embargo, las necesidades de medición fueron diferentes según la época. El hombre nómada primitivo, por ejemplo, tenía rústicas necesidades de medidas: poder diferenciar entre mayor y menor e identificar el período más adecuado de caza y recolección. Las medidas antropométricas fueron difundidas e incluso estandarizadas en algunas civilizaciones de la Antigüedad. Sin embargo, los intentos de estandarización aún eran locales. El esfuerzo universal de normalización de la medida se inició en Inglaterra en el siglo XII: unidades determinadas para la longitud y la capacidad. Ya en Francia en 1790 se decretó el metro de origen griego "*métro*", que significa "lo *que mide*" —es la unidad estándar de medida de longitud y base del nuevo sistema métrico (Pozebon y Lopes, 2013). Por fin, fue en el XI Conferencia Internacional de Pesos y Medidas en 1960, donde se adoptó el Sistema Internacional de Unidades (SI). Actualmente, el SI consta de siete unidades básicas: metro, kilogramo, segundo, mol, candela, Kelvin y amperio. Los autores Bellemain y Lima (2002) muestran que la definición del concepto de "grandeza" es una cuestión de debate entre estudiosos desde hace mucho tiempo y que no siempre hay consenso. En sus estudios, señalan que el concepto de magnitud aparece siempre relacionado con algo que es posible disminuir, aumentar y comparar entre sí. Medir una cantidad puede entenderse como la acción de compararla con otra medida de la misma naturaleza. Pozebon y Lopes (2013, p. 7) los definen como "todo lo que se puede medir y contar, para que estas medidas se puedan aumentar o disminuir". Aun así, "[...] medir es comparar una cantidad que quieres cuantificar con otra de la misma especie [...]".

Así, cuando hablamos de "grandeza", nos referimos a algo que se puede medir: masa, longitud, área, perímetro, volumen, tiempo, temperatura, entre otros. Y cuando hablamos de "medida", nos referimos a un número que es el resultado del acto de medir, es decir, cuánto de cierta cantidad hay o cabe en un objeto, espacio, contenedor, etc. porque, cuando medimos, generamos un número. Por ejemplo: en la expresión $4\,m^2$, tenemos una cantidad de medida —representada por el número 4— del tamaño del área —representada por m^2. Según Lima y Bellemain (2010, p. 178), "medir una cantidad es asignar un número a esa cantidad".

Aspectos pedagógicos y didácticos de la medida

Es sabido que los estudios piagetianos indican que los niños y niñas deben superar distintos estadios para la construcción de una magnitud. Estos estadios se basan fundamentalmente en la noción de conservación que se va adquiriendo de forma progresiva como resultado de una adecuada maduración evolutiva y de las experiencias vividas.

En relación con la construcción de la noción de medida, Piaget define que los niños, en primer lugar, realizan comparaciones perceptivas directas (visuales, táctiles…), aunque pueden también utilizar intermediarios, como pueden ser partes de su cuerpo (manos, pies, etc.), como apoyo a la percepción. De hecho, en las primeras edades aparece un uso espontáneo de unidades naturales relacionadas con las distintas partes del cuerpo y empieza a constatarse que la medida depende de la unidad escogida (Chamorro, 2007). En un posterior estadio evolutivo los niños desplazan los objetos para precisar más en las comparaciones y, si esto no es posible, se ayudan de intermediarios independientes de las partes de su cuerpo. Posteriormente, cuando los niños y niñas ya dominan el principio de conservación de las cantidades, pueden realizar comparaciones indirectas basadas en razonamientos sobre la equivalencia de la medida del objeto intermediario en relación con el objeto de que se quiere medir.

Como indica Belmonte (2006), al final de esa evolución los niños desarrollan la noción de unidad. En un principio, la unidad está asociada a un único objeto (unidad objetal), con relación incluso con el objeto de que se quiere medir. Posteriormente, aunque la unidad depende todavía del objeto que se va a medir, se va cambiando para otros objetos, en función de la relación existente entre los mismos (unidad situacional). Por ejemplo, prefiere unidades más pequeñas para medir objetos de menor tamaño. Cuando la unidad va perdiendo la relación con los objetos a medir, aunque todavía no se asocia a figuras concretas, se trata de una unidad figural. No será hasta que la unidad se libere totalmente de la figura, tamaño y objeto a medir que se podrá considerar que se ha realizado la construcción de la verdadera noción de unidad. La unidad es una cantidad de magnitud particular pero no una figura concreta.

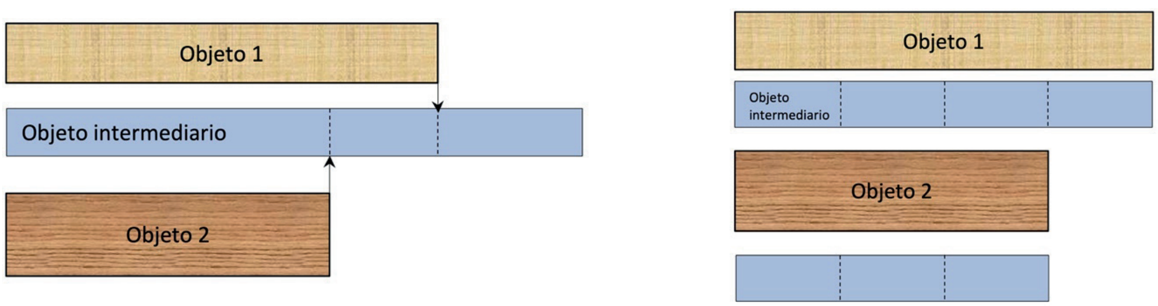
Cualquiera que sea la magnitud, son indispensables muchas manipulaciones ya que es lo que permite que los alumnos y alumnas puedan crearse un bagaje de experiencias sensibles de referencia. Aunque, según Berdonneau (2008), la experiencia no basta para que las nociones se asienten y es necesario, sobre todo, proponer situaciones que hagan necesaria una anticipación, formulación de hipótesis, para ser comprobada.

En lo que respecta a longitud, esta autora propone en una primera etapa, actividades para conocer las propiedades de los materiales, como, por ejemplo, para comprobar que un cordón enrollado, al estirarlo, tiene la misma longitud. Belmonte (2006) denomina a este tipo de actividades, actividades de *estimación sensorial*, donde se trata de aislar el atributo que define la magnitud por medio de los sentidos.

Posteriormente, Berdonnaeau (2008) propone la realización de actividades de comparar objetos de apariencia distinta para establecer su equivalencia desde el punto de vista de la magnitud considerada, o bien sobre su orden jerárquico. Son actividades, que Belmonte (2006) denomina, de *comparación directa*, donde el alumnado debe construir los criterios de equivalencia y orden respecto de las magnitudes lineales. Más tarde, se abre la posibilidad de escoger un modelo de referencia y usarlo para establecer una medida de la magnitud en función de ese modelo. Los cambios de modelos y la incidencia de ese cambio en el número que expresa esa medida contribuirán a dar sentido a la actividad. Actividades de *comparación indirecta* (Belmonte, 2006), donde los estudiantes no pueden desplazar los objetos para compararlos directamente (porque son muy pesados, por ejemplo) y deben servirse de un intermediario, aunque esto no suponga aun una medida común e independiente.

De acuerdo con Belmonte (2006), la comparación indirecta de longitudes, en la que se basa la experiencia de aula estudiada en este trabajo, puede realizarse de las dos formas siguientes: 1) Usando como intermediario un objeto más grande que la magnitud que se quiere medir: para realizar la comparación se marca en el intermediario la cantidad (que no tiene porqué ser numérica) de uno de los objetos que se va a comparar y luego se compara esta marca con la correspondiente al otro objeto (ver Figura 1a); 2) Usando un objeto intermediario más pequeño que la magnitud que se quiere medir: para realizar la comparación es necesario disponer de una cantidad de objetos intermediarios iguales suficientes para poder reproducir con éstos una cantidad de magnitud equivalente a cada uno de los objetos que se quiere comparar (ver Figura 1b). En la segunda forma de realizar la comparación aparece el uso de un patrón, que puede ser antropométrico (ya que los primeros patrones que se usan son las manos o palmos, los pies, los antebrazos, etc.) siendo ésta una noción que podrá evolucionar hacia el concepto de unidad de medida.

Figura 1. *Comparación indirecta con un objeto intermediario. (a) El objeto intermediario es más grande; (b) El objeto intermediario es menor y se puede repetir tantas veces como sea necesario.*



a. **b.**

Fuente: adaptación de (Belmonte, 2006).

El uso de estas primeras unidades de medida no estandarizadas, como es lógico, por su falta de homogeneidad, dan lugar a ciertas dificultades a la hora de, por ejemplo, comunicar la medida (por ejemplo, no todo el mundo tiene un palmo exactamente igual). Desde un punto de vista didáctico, esa misma dificultad, nos brinda un recurso para que el alumnado, por un lado, como se ha mencionado, se acerque a la noción de unidad con el uso de patrones antropométricos y, por otro lado, se pueda dar cuenta por si mismo de las propiedades esenciales que debe cumplir toda unidad de medida para cumplir su función. La unidad de medida, aunque pueda ser arbitraria, debe ser uniforme y debe estar convenida entre todos.

Metodología

En este apartado se contextualiza el estudio, se expone la tarea diseñada y los principales detalles de su implementación y se explica la metodología seguida para la realización del análisis de su idoneidad didáctica.

Contexto del estudio y participantes

La primera autora de este trabajo, actuando como formadora de futuros maestros de Educación Infantil, diseñó una tarea de medida de resolución abierta, basada en un contexto de semi-realidad y problemático. Esta tarea, de duración media, fue implementada durante dos sesiones, en un total de 4 horas más 1 hora de trabajo autónomo de los estudiantes.

Los participantes del estudio fueron 49 estudiantes de la asignatura de Didáctica de las Matemáticas que se realiza en el 2º curso del Grado de Educación Infantil de la Universidad de Barcelona (Catalunya, España), durante el año académico 2018-2019.

Detalles de la tarea y la implementación

La tarea, de tipo problema, que se presentó a los estudiantes, como un ejemplo de actividad para alumnado de educación infantil (Reggio Children, 1997), consistió en medir una de las mesas del aula para poder encargar por escrito a un carpintero que construyera una mesa nueva idéntica a la que tenían que medir. Es decir, se tenían que comunicar al carpintero las medidas de forma que las entendiera con solo ver/leer el documento escrito/dibujado. Se les puso la condición que actuaran como alumnado de último curso de la etapa de Educación Infantil (5 años), para que vivenciaran la actividad y empatizaran con su futuro alumnado. El alumnado de este nivel académico, normalmente, no conoce el uso de los instrumentos estándares o convencionales de medición como la cinta métrica o la regla y, en todo caso, se les indicó que no era un material disponible para la realización de la tarea.

El objetivo de enseñanza y aprendizaje de la tarea era que los futuros maestros de Educación Infantil realizaran comparaciones indirectas de longitudes (y/o de superficies) usando un objeto intermediario no convencional para establecer una medida (numérica). También era objetivo de la actividad que los estudiantes “redescubrieran” las propiedades esenciales de una unidad de medida y las dificultades a las que el alumnado de infantil se enfrenta para poder construir criterios de equivalencia y orden y, finalmente, la noción de magnitud y medida.

Durante la primera sesión, los estudiantes trabajaron en grupos de 4, 5 o 6 personas en el aula (en total había 9 grupos de trabajo), realizando las medidas de su mesa (ya que todas las mesas del aula son iguales) y anotándolas. También realizaron fotografías con sus teléfonos móviles para registrar e ilustrar el proceso de medición seguido en el informe que tuvieron que presentar.

Posteriormente, como trabajo autónomo fuera del aula, y con los mismos grupos de trabajo, realizaron el informe escrito que incluía: a) una explicación del proceso de medida de la mesa seguido por el grupo, justificando la selección de las unidades de medida y de los instrumentos que decidieron utilizar; b) una definición propia de “medir” y c) una breve reflexión, como futuros maestros, sobre la tarea.

En la segunda sesión, cada grupo de trabajo realizó una breve presentación oral para explicar su informe a los participantes y hacer una puesta en común. La profesora gestionó esa sesión con el objetivo de hacer notar que las medidas realizadas dependían todas ellas de la unidad escogida (que a la vez dependía del instrumento) y que las medidas realizadas por los diversos grupos no eran iguales, aunque las mesas sí lo eran (y, así, constatar la necesidad de establecer equivalencias entre ambas). Esta sesión fue grabada en audio. Después de esta sesión, cada grupo de estudiantes entregó a la profesora su informe, donde podían incluir cualquier reflexión o cambio sobre el informe presentado en la puesta en común.

Métodos de análisis

La investigación, de característica cualitativa, buscó describir y analizar la idoneidad de una tarea diseñada y aplicada a un contexto particular, un grupo de 49 futuros maestros de infantil de una universidad pública de Catalunya (Chizzotti 2017). Para interpretar y establecer el grado de idoneidad de la tarea, que es el objetivo del estudio, los autores aplicaron sistemáticamente los indicadores de los CI, incluidos en la Tabla 1, para analizar las evidencias de las notas de campo de la formadora de los futuros maestros recogidas durante la implementación, de los informes escritos presentados por los participantes y de las grabaciones de las presentaciones.

Análisis de la implementación

En este apartado se expone el análisis realizado por medio de algunos ejemplos relevantes que ilustran la aplicación de la metodología y los resultados obtenidos sobre la idoneidad didáctica de la tarea.

Respecto a la idoneidad epistémica

La tarea se presentó a los estudiantes en la primera sesión mediante una explicación apoyada por un *PowerPoint*, dándoles opción a realizar preguntas para aclarar cualquier duda. Además, se les facilitó un documento de *Word* como plantilla y guion para la confección del informe final donde se les pedía: 1) Dibujo y medidas de la mesa (no os olvidéis de las unidades); 2) Descripción de todos los pasos del proceso seguido desde el inicio; 3) ¿Qué es medir? Presentar una definición propia a partir del aprendizaje de esta actividad; 4) Conclusiones desde un punto de vista profesional, en relación con la construcción del concepto de medida; 5) Anexo: fotos del proceso de resolución de la actividad. También se recomendó la lectura de *Scarpa e metro*, en su versión en catalán, una lectura de Reggio Children (1997) donde se describe una actividad de medida con estudiantes de 5 años. La tarea, de carácter abierto, podía resolverse con estrategias diversas (la única condición era no utilizar ni unidades ni instrumentos convencionales) y las medidas se podían dar en el formato que se prefiriera, fomentando el uso de diferentes formas de expresión matemática.

Todos los grupos utilizaron unidades e instrumentos diferentes entre si (solo coincidieron tres grupos con el uso de la tarjeta del documento de identidad), pero ninguno de los grupos utilizó unidades antropométricas. Los otros grupos utilizaron como instrumento de medida, por ejemplo: monedas de un euro, bolígrafos de una marca muy comercializada, tarjetas de abono del transporte público, etc. Las estrategias de medida, al depender del uso del instrumento escogido fueron muy diversas y cada grupo explicó como las habían desarrollado y justificaron la selección del instrumento y la unidad de medida, así como, si realizaron subdivisiones de la unidad para aumentar la precisión de la medida. En este aspecto, la tarea, de alguna manera, ha propuesto el uso de procesos de argumentación y justificación.

La mayoría de los grupos mostraron las medidas en un dibujo hecho a mano alzada y solo los grupos 4 y 6 recurrieron al uso de dibujos digitales (ver Figura 3). Todos los grupos mostraron el proceso incluyendo sus fotografías ordenadas secuencialmente, según su propio criterio.

Respecto a la idoneidad cognitiva

La tarea planteada, en principio, no debía suponer absolutamente ninguna dificultad en cuanto a los conocimientos necesarios para realizar los procesos de medida de la mesa del aula y comunicar las medidas según la unidad escogida debido a que es un contenido curricular perteneciente a las primeras edades. No obstante, se observaron algunos errores conceptuales en cuanto a la medida de la base de las patas cilíndricas de las mesas en los grupos 1, 3, 7 y 9. Por otro lado, casi todos los grupos comunicaron las medidas necesarias para poder construir una mesa igual, excepto los grupos 2, 4 y 9. Aunque en algunos casos la unidad de medida no estaba definida con suficiente precisión. Las estrategias de resolución fueron distintas en cada grupo y, de alguna forma, creativas y originales.

Cabe destacar que para los futuros maestros lo que sí que resultó ser un reto fue “desaprender” todo lo sabido sobre medida para poder actuar durante el desarrollo de la tarea como un niño o una niña de 5 años. Ello se hizo explícito en el hecho de que, por ejemplo, en ningún grupo se hizo un uso espontáneo de unidades antropométricas, tal y como sucede en las primeras edades.

Tanto la parte manipulativa de la primera sesión como la presentación y puesta en común de la segunda sesión consiguieron que se cumplieran, algunos de los objetivos de enseñanza y aprendizaje de la tarea para los futuros maestros. Por ejemplo, el grupo 1 escribe en su informe:

A través de esta actividad los niños pueden empezar a construir su concepto de medida. Los niños descubrirán, a través de la experimentación propuesta, que es necesaria la utilización de un sistema de medida estándar y universal ya que, si usamos las manos, habrá mucha diferencia entre lo que mida el niño y lo que mida el carpintero, debido a que las medidas de sus manos son diferentes. Lo mismo pasa con los pies, los zapatos y muchos otros objetos o elementos. (Grupo 1).

Respecto a la idoneidad interaccional

Como se ha explicado anteriormente, en la primera sesión los participantes tuvieron que trabajar en grupo para, en primer lugar, consensuar una unidad de medida (después de ensayar y probar con distintas opciones) y también para conseguir realizar las mediciones, anotarlas y registrar el proceso con fotografías. En el aula se creó un clima de mucho movimiento y el nivel de sonido aumentó en relación con otras sesiones magistrales, aunque se debía a las discusiones entre los miembros del grupo y conversaciones entre grupos y con la profesora sobre diferentes aspectos de la tarea (dudas, contraste de ideas, pedir materiales, etc.), fomentando así el dialogo y discusión entre los alumnos y la profesora, lo cual conllevó a procesos de exploración, formulación y validación y a su resolución colectiva.

Por otra parte, la tarea reservaba un espacio de reflexión entre los miembros del grupo, con trabajo autónomo, para explicar el propio desarrollo de la actividad y concluir, desde un punto de vista profesional, sobre las implicaciones de la tarea que habían experimentado. Fruto de este espacio los estudiantes confeccionaron el informe. En la puesta en común, con la interacción con los otros grupos de forma ordenada, se pudieron escuchar mutuamente y preguntar y contrastar ideas sobre medida. Con ello, los grupos enriquecieron sus informes antes de presentarlos definitivamente a la profesora.

Respecto a la idoneidad emocional

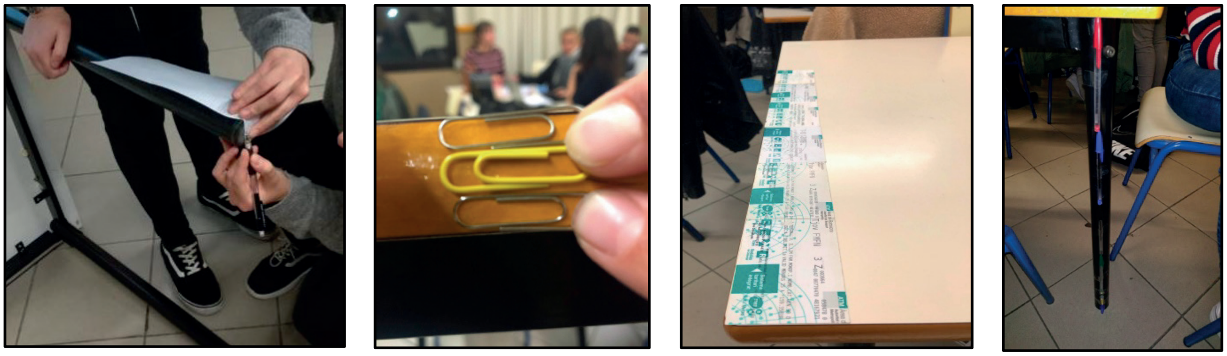
La experiencia de medida de las mesas del aula fue aceptada con mucho interés y motivación y eso se percibió en el clima que se creó en el aula, comentado anteriormente. Todos los grupos, en general, se esforzaron en utilizar unidades de medida distintas a las que utilizaban los otros grupos. Además, quedó explícito en la mayoría de los informes como, por ejemplo, en este párrafo del informe del grupo 2:

Esta tipología de actividades nos permite ver las matemáticas no como una cosa que tienes que realizar en el aula sentado en la silla y concentrado, sino como un acto divertido que nos servirá para la vida cotidiana, y que podemos realizar de forma cooperativa para aprender más los unos de los otros. Rompemos con el estereotipo que las matemáticas son complicadas, porque les damos una vuelta y ofrecemos actividades donde los niños tienen que actuar directamente con el objeto y tienen que pensar de verdad, no memorizando unas tablas y escribiéndolas luego en un examen. Aprenden el concepto "medida" de manera más vivencial y significativa, por lo tanto, favorecemos su aprendizaje significativo y garantizamos que los niños sean capaces de poner en práctica este concepto y no solo saberse la teoría. (Grupo 2).

Respecto a la idoneidad mediacional

Los estudiantes utilizaron objetos de su elección para realizar las medidas de su mesa y registrarlas. Todos ellos seleccionaron objetos intermediarios más pequeños que la longitud que querían medir apareciendo un patrón de repetición y tuvieron que buscar objetos iguales (o pedirlos a sus compañeros y compañeras de clase) para colocarlos a lo largo del objeto que querían medir, o bien aplicar una estrategia para ir cambiando de posición el instrumento de medida escogido (Figura 2).

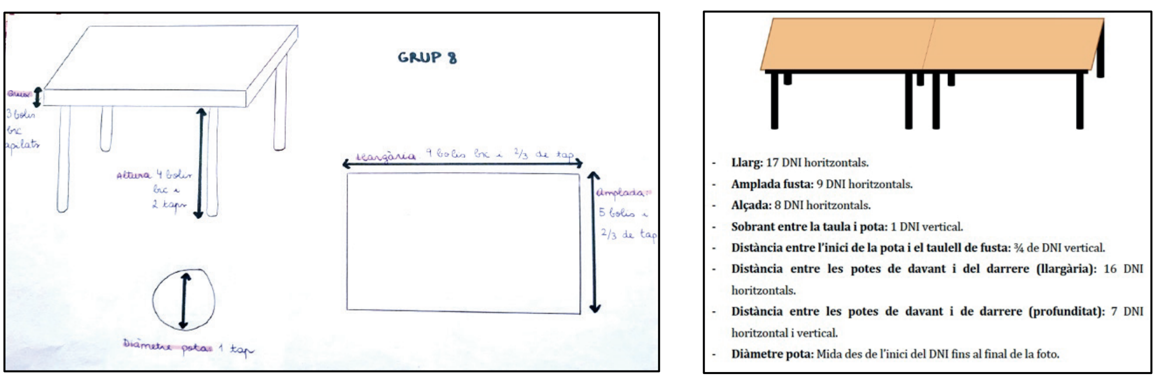
Figura 2. *Imágenes de distintos procesos de medida con instrumentos diversos.*



Elaboración propia.

La mayoría de los grupos no dieron importancia a la pérdida de precisión que suponía tener que ir cambiando de posición el instrumento de medida para cubrir el espacio a medir —en aquellos casos que no se disponía del número de objetos-instrumento suficientes para ponerlos uno a continuación del otro para repetir el patrón de medida hasta el final de la distancia a medir. El único grupo que da cuenta de ello en su informe es el grupo 8, cuyo instrumento de medida era el bolígrafo, que explica que para evitar la imprecisión fueron pidiendo prestados bolígrafos a todos los participantes.

Figura 3. *Dibujo a mano alzada de la mesa del grupo 8 y dibujo del grupo 4 con un programa de dibujo, ambos con su registro de medidas.*



Elaboración propia.

Los estudiantes utilizaron las cámaras de sus teléfonos móviles para dejar el proceso de medida registrado y, aunque la mayoría se sirvieron de un dibujo a mano alzada de la mesa para apuntar sus medidas, los grupos 4 y 6, utilizaron un programa de dibujo para obtener la imagen de las partes del objeto medido (ver Figura 3).

Respecto a la idoneidad ecológica

La naturaleza de la tarea propuesta estaba basada en un contexto de semi-realidad, es decir, se presentaba un problema que podría ser real (tener que comunicar las medidas de un objeto a un profesional para que lo construya) aunque se desarrollaba en un contexto escolar, y los estudiantes eran conscientes de que así era. No obstante, la actividad estaba altamente conectada con la realidad y con el currículo del segundo ciclo de Educación Infantil, porque se presentó como una actividad que los futuros profesores podrían implementar con su futuro alumnado para la enseñanza y aprendizaje de la medida.

Resultados y consideraciones

El análisis de la implementación de la tarea, donde los participantes actuaron como alumnos (realizando las medidas, registrándolas y confeccionando el informe) y también como futuros maestros (con la puesta en común, las reflexiones sobre las implicaciones del desarrollo de la tarea y la redacción del informe) evidenció una alta idoneidad ecológica y emocional, al articular el contenido de medida y su didáctica en una misma tarea de forma contextualizada, motivadora y significativa.

Es una tarea altamente manipulativa y de experimentación (indicadores de idoneidad mediacional y epistémica) cuya resolución abierta —rica en procesos matemáticos— requirió momentos de diálogo y discusión para ponerse de acuerdo en la selección del instrumento de medida y las estrategias a seguir (idoneidad interaccional). La idoneidad cognitiva y epistémica tuvieron una valoración más baja ya que, aunque se partió de los conocimientos previos de los estudiantes, se observó ciertas dificultades en el proceso de medida de las patas cilíndricas de la mesa, así como, las reflexiones expuestas, mostraron que no se consiguió alcanzar algunos de los objetivos de aprendizaje. El análisis desde la idoneidad didáctica permitió realizar una propuesta de rediseño de la tarea, focalizada en la mejora de su idoneidad cognitiva y epistémica, en particular, en los aspectos de hacer un paso previo para verificar los conocimientos previos de los futuros maestros de infantil con relación a la noción de magnitud y a los diferentes significados de la medida y establecimiento de relaciones y, también, conversiones.

Referencias

Belmonte, J.M. (2006). La construcción de magnitudes lineales en Educación Infantil. En M.C. Chamorro (Coord.) *Didáctica de las Matemáticas*. España: Pearson Prentice Hall.

Bellemain, P. M. B., y Lima, P. F. (2002). *Um estudo da noção de grandeza e implicações no ensino fundamental*. Natal: SBHMat.

Berdonneau, C. (2008). *Magnitudes geométricas: longitudes, áreas y volúmenes*. *Matemáticas activas (2-6 años).* Barcelona: Editorial Graó.

Breda, A., Font, V., y Pino-Fan, L. R. (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. *Bolema, 32*(60), 255-278.

Chamorro, M.C. (2007). De la comparació a la mesura i els seus costos cognitius associats. *Perspectiva Escolar, 314,* 16 – 22.

Chizzotti, A. (2017). *Pesquisa Qualitativa em Ciências Humanas e Sociais-Estudo de Caso*. Editora Vozes.

Gusmão, T. C. R. S. (2019). Do desenho à gestão de tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática. En *Anais do XVIII Encontro Baiano de Educação Matemática*. Ilhéus, Bahia: XVIII EBEM.

Gusmão, T. C. R. S., y Font, V. (2020). Ciclo de estudo e desenho de tarefas. *Educação Matemática Pesquisa*, *22*(3), 666-697.

Lima, P. F., Bellemain, P. M. B. (2010). Grandezas e medidas. En Carvalho, J. B. P. (Coord.) *Matemática: Ensino Fundamental. Coleção Explorando o Ensino* (pp. 167-200). Brasília: Secretaria da Educação Básica-MEC.

Moreira, C. B., Gusmão, T. C. R. S., y Font, V. (2018). Tarefas Matemáticas para o Desenvolvimento da Percepção de Espaço na Educação Infantil: potencialidades e limites. *Bolema, 32*(60), 231-254.

Pereira, L. S. A. (2017). *A gestão de tarefas matemáticas por professoras dos anos iniciais do ensino fundamental.* Tesis de maestria no publicada. Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Jequié, Brasil.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. En GTI (Ed.) *O professor e o desenvolvimento curricular.* Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2014). Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática. En Ponte, J. P. (Org.). *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (pp. 13-27). Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Ponte, J. P., Brocardo, J., y Oliveira, H. (2003). *Investigações matemáticas na sala de aula* (Vol. 7). Autêntica Editora.

Pozebon, S., y Lopes, A. R. L. V. (2013). Grandezas e medidas: surgimento histórico e contextualização curricular. En *VI Congresso Internacional de Ensino de Matemática*. Canoas: ULBRA.

Reggio Children (1997). Scarpa e metro. Italia: Reggio Children Paperback.

Rodrigues, G. S. S., y Gusmão, T. C. R. S. (2020). Desenho de tarefas matemáticas na perspectiva da criatividade. *Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática*, 5(2), 343-363.

Sousa, J. R. de. (2018). *(Re)desenho de tarefas para articular os conhecimentos intra e extramatemáticos do professor*. Tesis de maestria no publicada. Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Jequié, Brasil.

Acta Latinoamericana de Matemática Educativa
VOL34, NÚMERO 2, AÑO 2021

COMPETENCIA DE ANÁLISIS COGNITIVO DE TAREAS DE PROPORCIONALIDAD EN MAESTROS EN FORMACIÓN

PROSPECTIVE TEACHERS' COMPETENCE FOR COGNITIVE ANALYSIS OF PROPORTIONALITY TASKS

Mauro Rivas, María Burgos, Juan D. Godino
Universidad de Granada. (España)
maurorivas@ugr.es, mariaburgos@ugr.es, jgodino@ugr.es

Resumen
En el marco de una investigación de diseño, basada en el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos, se presentan los resultados de una intervención formativa con estudiantes para maestro de educación primaria centrada en el desarrollo de la competencia de análisis cognitivo en tareas de proporcionalidad. Esta competencia involucra los conocimientos implicados en los procesos de resolución de problemas, así como de los posibles conflictos que pueden surgir en su aprendizaje. Los estudiantes para maestro analizan las soluciones propuestas por alumnos de primaria a problemas de proporcionalidad. Para ello identifican los objetos y significados puestos en juego en las resoluciones, así como el nivel de algebrización de las mismas. Los resultados revelan la complejidad involucrada en el desarrollo de esta competencia, por maestros en formación inicial, quienes prefieren procesos de resolución basados en la regla de tres en detrimento de procedimientos intuitivo-informales o aritméticos.

Palabras clave: proporcionalidad, análisis cognitivo, enfoque ontosemiótico.

Abstract
In the framework of a design-based research, based on the onto-semiotic approach to mathematical knowledge and instruction, the results of a training intervention with prospective primary school teachers are presented, focused on developing the cognitive analysis competence in proportionality tasks. This competence involves the knowledge put at stake in problem-solving processes, as well as the possible conflicts that may arise in their learning. The prospective teachers analyze the solutions proposed by primary school pupils to some proportionality problems. To do so, they identify the objects and meanings involved in the solutions, as well as their algebraization levels. The results reveal the complexity of developing this competence by the prospective teachers, who would rather use problem solving processes based on the rule of three instead of intuitive-informal or arithmetic procedures.

Key words: proportionality, cognitive analysis, onto-semiotic approach.

Introducción

Diversas investigaciones en educación matemática señalan la necesidad de implementar estrategias formativas para promover el desarrollo de conocimientos didáctico-matemáticos del futuro profesor, mediante el análisis de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (English, 2008; Ponte y Chapman, 2016). Un conocimiento limitado del contenido matemático dificulta a los profesores la tarea de interpretar las respuestas de los alumnos para tomar decisiones pertinentes. Sin embargo, el conocimiento del contenido no es suficiente para que los profesores de matemáticas reconozcan la comprensión matemática de los alumnos (Fernández, Llinares y Valls, 2012; 2013; Son, 2013).

En el caso específico del razonamiento proporcional en educación primaria, lograr que los maestros adquieran los conocimientos y las competencias requeridos para un desarrollo adecuado de la actividad de enseñanza-aprendizaje en torno a la proporcionalidad, sigue siendo una tarea pendiente en el contexto de la formación inicial de profesores de primaria. Investigaciones como las de Fernández et al. (2012, 2013), muestran que los maestros tienen dificultades para interpretar las respuestas de alumnos de educación primaria cuando resuelven tareas relacionadas con la proporcionalidad, así como para identificar estrategias de resolución no habituales. En particular, los resultados de Fernández et al. (2012) ponen de manifiesto las limitaciones de los maestros en formación para identificar si las estrategias utilizadas por los estudiantes de primaria son correctas o no en diferentes situaciones proporcionales y no proporcionales, ya que no discriminan ambas situaciones, y que consideran menos potentes las estrategias de solución de alumnos que no usan algoritmos.

Esta investigación se enmarca en un proyecto de investigación cuyo objetivo general es analizar y promover el desarrollo profesional en los futuros maestros de educación primaria sobre conocimientos y competencias didáctico-matemáticas relativos al razonamiento proporcional y su conexión con el razonamiento algebraico. En particular, en este trabajo se informa del diseño, implementación y resultados de una acción formativa con futuros maestros de educación primaria dirigida al desarrollo de la competencia de análisis cognitivo utilizando una tarea de proporcionalidad.

Marco teórico

En el marco del Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos se ha elaborado un modelo de categorías de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas (modelo CCDM) del profesor de matemáticas (Godino, Giacomone, Batanero y Font, 2017) que puede orientar la formación de profesores de matemáticas. En dicho modelo se acepta que el profesor debe tener conocimiento matemático *per se*, esto es conocimiento común relativo al nivel educativo donde imparte su docencia, y conocimiento ampliado que le permita articularlo con los niveles superiores. Además, a medida que se ponga en juego algún contenido matemático el profesor debe tener un conocimiento didáctico-matemático de las distintas facetas (epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva, mediacional e instruccional) que afectan el proceso educativo. En particular, la faceta cognitiva concierne al conocimiento de cómo lo estudiantes aprenden, razonan y entienden las matemáticas y cómo progresan en su aprendizaje. Así, la competencia para el análisis cognitivo requiere: (a) identificar e interpretar diferentes estrategias de resolución de un problema, (b) reconocer los elementos matemáticos puestos en juego en cada caso y (c) analizar el carácter más o menos algebraico de las prácticas matemáticas involucradas en las resoluciones propuestas.

El modelo de niveles de algebrización de la actividad matemática de Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi (2014) permite a los profesores conocer las características del razonamiento algebraico elemental mediante el reconocimiento de objetos y procesos propios del mismo, por tanto, el reconocimiento por parte de los futuros profesores de los diferentes niveles de algebrización, se considera un aspecto clave del modelo CCDM. Los criterios para delimitar los distintos niveles están basados en los tipos de objetos (conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos), tipo de representaciones usadas (lenguajes en sus diversos registros), procesos de generalización implicados y el cálculo analítico que se pone en juego en la actividad matemática correspondiente. Esto permite distinguir distintos significados de la proporcionalidad, según la propuesta de Godino, Beltrán-Pellicer, Burgos y Giacomone (2017):

- *Aritmético, nivel 0 de algebrización*: se caracteriza por la aplicación de procedimientos de cálculo aritméticos (multiplicación, división). En la práctica intervienen valores numéricos particulares y se aplican operaciones aritméticas sobre dichos valores; no intervienen objetos y procesos algebraicos.
- *Proto-algebraico de nivel 1 de algebrización*: está centrado en la noción de proporción, de manera que comprende el reconocimiento del valor unitario en un procedimiento de reducción a la unidad, y el uso de representaciones diagramáticas de soluciones.
- *Proto-algebraico de nivel 2 de algebrización*, relativo a la resolución de un problema de valor faltante, basada en el uso de las razones y proporciones, que involucra el uso de una incógnita, el planteamiento de una ecuación de la forma $\mathrm{A}x = \mathrm{B}$ y el cálculo analítico involucrado en su resolución.
- *Algebraico-funcional, nivel 3 de algebrización*: se caracteriza por la aplicación de la noción y propiedades de la función lineal.

Método

La investigación en la que se enmarcan los resultados, de los cuales se informa en este documento, es una ingeniería didáctica en el sentido generalizado que proponen Godino y colaboradores (Godino, Rivas, Arteaga, Lasa y Wilhelmi, 2014), usando el EOS como teoría de base. Se trata de una experiencia formativa en el ámbito de la formación inicial de maestros de educación primaria con un grupo de 33 estudiantes, en el marco de la asignatura Diseño y Desarrollo del Currículum de Matemáticas, del tercer curso del grado de Educación Primaria en España.

En primer lugar, se llevó a cabo un taller de 2 horas de duración en el que se presentaron las características del Razonamiento Algebraico Elemental (RAE) en primaria, y el modelo de los niveles de algebrización de la actividad matemática de Godino et al. (2014). Se perseguía reflexionar y profundizar en la distinción de tipos de objetos y procesos algebraicos en tareas matemáticas escolares y la asignación de niveles de razonamiento algebraico a la actividad matemática realizada al resolver tareas escolares, algunas de las cuales correspondían a situaciones de proporcionalidad. En concreto, dado que se espera desarrollar en los futuros maestros la competencia para analizar las prácticas desarrolladas por alumnos de primaria, se utilizó la situación del puzle de Brousseau para presentar: 1º el análisis epistémico de posibles soluciones con distintos niveles de algebrización, y 2º el análisis cognitivo de respuestas dadas por alumnos de 5º curso de educación primaria a la misma, dándoles a los futuros maestros la posibilidad de reflexionar sobre la presencia de objetos algebraicos en las producciones de alumnos.

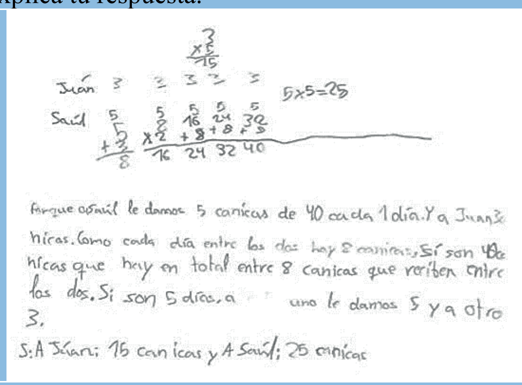
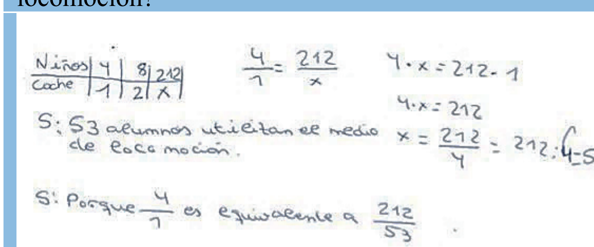
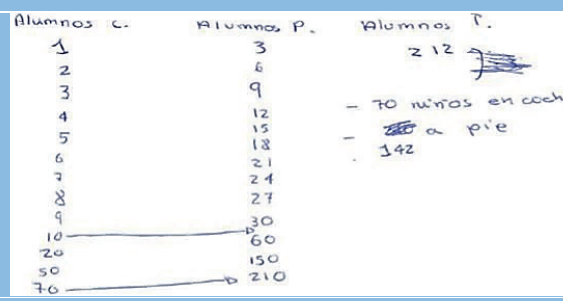
En la siguiente sesión (también de 2 horas de duración), los futuros maestros debían trabajar en equipos para responder a las siguientes consignas:

1. Resolver cuatro problemas matemáticos relativos a la proporcionalidad directa en educación primaria, haciendo uso de al menos dos procedimientos de resolución.
2. Identificar la secuencia de prácticas elementales y los objetos matemáticos (conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos) puestos en juego en los procesos de resolución aplicados.
3. Identificar dificultades que potencialmente se pueden presentar en la resolución de los problemas tratados.
4. Asignar de forma justificada los niveles de algebrización implicados en las resoluciones realizadas.
5. Enunciar tareas cuya resolución implique cambios en los niveles de algebrización requeridos.
6. Analizar las respuestas dadas por cuatro alumnos (A, B, C, D) de educación primaria a dos problemas de proporcionalidad directa: dos alumnos (A, B) dan respuesta al primer problema y otros dos alumnos (C, D) dan respuesta al segundo problema. Para la realización de esta sexta y última actividad, por parte de los maestros en formación inicial, se les planteó las cuestiones siguientes:
    a. *¿Crees que son correctas las respuestas (procedimiento y argumento) dadas por los niños? Justifica tu respuesta.*

b. *Identifica los tipos de lenguajes (natural, numérico, diagramático, simbólico, ...), conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos que identificas en dichas soluciones.*
c. *Asigna de forma justificada el nivel de algebrización a sus actividades.*

Por razones de espacio, en este documento sólo se informa sobre los resultados de la realización de esta última actividad. La descripción antes expuesta, de las actividades precedentes a esta última, tiene como objeto contextualizar su realización Mencionemos además que las respuestas de los alumnos de primaria que los participantes debían analizar habían sido usadas como ejemplo de análisis epistémico y reconocimiento de objetos y procesos algebraicos en la fase de formación. En la Figura 1 se presentan los enunciados de estos dos problemas y las soluciones propuestas por los alumnos de primaria.

Figura 1. *Problemas propuestos y resoluciones dadas por alumnos de primaria.*

Problema 1: Se quiere repartir 40 canicas entre Juan y Saúl según la razón 3:5. ¿Cuántas recibirá cada niño? Explica tu respuesta.	
	
Resolución dada por el alumno A	Resolución dada por el alumno B
Problema 2: Para ir a la escuela los alumnos utilizan dos medios de locomoción. Por cada alumno que va en coche hay 3 que van andando. Si hay 212 alumnos en la escuela ¿cuántos alumnos utilizan cada medio de locomoción?	
	
Resolución dada por el alumno C	Resolución dada por el alumno D

Elaboración propia.

Un análisis cognitivo previo de estas soluciones mostró aspectos de interés didáctico-matemático para la formación inicial de profesores. Entre algunos de los aspectos generales identificados cabe destacar los siguientes:

- El alumno A obtiene correctamente el resultado por medio de una estrategia de construcción progresiva, basada en una idea intuitiva de reparto. Se emplea un lenguaje natural, numérico e icónico y se opera con valores particulares. La actividad matemática que desarrolla se considera de nivel 0 de algebrización.
- La resolución realizada por el alumno B también es correcta. Una vez determinado el "todo parcial" (número de grupos de canicas en reparto mínimo), plantea las fracciones que corresponden a la relación de canicas que recibe cada niño respecto del total en el reparto y resuelve, mediante operaciones aritméticas (multiplicación en

cruz). El nivel de algebrización en este caso es 1, puesto que, a pesar de expresar las razones involucradas y usar *x* para referirse a un valor desconocido, no formula una ecuación y los procedimientos realizados son de carácter aritmético.

- Para determinar el número de alumnos que van en coche, el alumno C plantea una ecuación proporcional a partir de la tabla, y la resuelve, por lo que la actividad matemática tiene un nivel de algebrización 2. La justificación se basa en la equivalencia de fracciones obtenidas a partir de la relación de proporcionalidad entre las magnitudes "alumnos que van al colegio andando" y "alumnos que utilizan el coche para ir".
- La resolución realizada por el alumno D se basa en una idea intuitiva de la relación de proporcionalidad. Aunque no llega a la respuesta correcta, establece la secuencia de valores que se corresponden entre las magnitudes "niños en coche" (columna: "Alumnos C") y "niños a pie" (columna: "Alumnos P"), buscando las cantidades que cumplen que la suma de ambos es 212. El nivel de algebrización es 1, puesto que establece una correspondencia entre magnitudes proporcionales y usa una secuencia de las mismas.

Los estudiantes para maestro trabajaron en ocho equipos, en su mayoría de cuatro estudiantes.

El trabajo se desarrolló siguiendo la dinámica habitual de las sesiones de clases prácticas: (a) tienen lugar después de la sesión de teoría, (b) durante una hora, en la que se da la práctica, tiene lugar una breve explicación del profesor (15 minutos aproximadamente) y el inicio de su realización por parte de los estudiantes (45 minutos aproximadamente), (c) generalmente requieren de tiempo adicional de trabajo en equipo no presencial para su finalización. Al concluir los informes relativos a las prácticas, estos son entregados al profesor, por medio de la plataforma de trabajo Moodle.

La información a ser analizada se obtuvo de las respuestas dadas, en forma escrita, por los futuros maestros a la consigna propuesta. Los resultados se obtuvieron por medio del análisis de contenido de tales respuestas. Este análisis estuvo orientado a la identificación de respuestas significativas sobre el estado inicial de los significados personales de los estudiantes, el reconocimiento de conflictos y evaluación de los progresos en el desarrollo de la competencia pretendida.

Los tipos de datos a ser considerados provienen de los apartados de la consigna. Para su análisis hemos seguido la siguiente codificación:

- RCa: valoración argumentada del procedimiento y el argumento dado por los alumnos de primaria a sus soluciones, lo cual se refiere, específicamente, a la identificación de prácticas y corrección en la solución de los alumnos de primaria.
- RCb: identificación de los tipos de objetos matemáticos (lenguajes, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos) puestos en juego en la resolución, lo cual se refiere al reconocimiento de objetos en las prácticas de los alumnos de primaria.
- RCc: asignación argumentada de los niveles de algebrización o identificación del nivel de algebrización en las prácticas de los alumnos de primaria.

Asimismo, haremos uso la codificación: E1, E2, …, E8, para referirnos a los ocho equipos de trabajo. Para referirnos a la valoración realizada por un equipo, por ejemplo E1, a la resolución de un alumno, por ejemplo A, emplearemos la codificación E1-A.

Resultados

Identificación de prácticas y corrección en la solución de los alumnos de primaria

En general, la mayoría de los maestros en formación evalúan apropiadamente el procedimiento y resultado de los cuatro alumnos de primaria. Sin embargo, sus interpretaciones de los argumentos expuestos en las resoluciones se basan principalmente en la descripción de los procedimientos y no en los significados (Burgos, Godino y Rivas, 2019; Fernández et al, 2013). En la Figura 2 se muestra, como ejemplo de este tipo de respuestas, la explicación dada por el equipo E1 a la respuesta del alumno A. Asimismo, se puede ver en esta figura que el equipo E1 muestra poca comprensión del procedimiento empleado por el alumno A y la conexión con su argumento, lo cual es una manifestación común por parte de la mayoría de los equipos al valorar la resolución del alumno A.

Figura 2. *Valoración de E1 del grado de corrección de la solución de A.*

En el caso de la solución del alumno A el procedimiento sería el adecuado ya que va repartiendo por igual las canicas a Saúl y Juan pero el argumento que da más abajo resulta lioso ya que habla de repartir las canicas según los días y viene a confusión ya que emplea el 8 que ha sacado de 3:5 sin tener conocimiento de que eso no es así,el procedimiento no tiene nada que ver con el argumento dado.El lenguaje utilizado es tanto natural como numérico haciendo hincapié en

…

Elaboración propia.

Se observa que los maestros en formación inicial muestran dificultades para analizar y evaluar estrategias de resolución no usuales de las tareas propuestas. Al igual que E1 piensa que existe un error en la argumentación que presenta el alumno A (Figura 2), E7 considera incorrecta esta resolución, mientras que E4 señala: "…se podría resolver de manera más sencilla, utilizando un lenguaje menos enrevesado, que al fin y al cabo, más adelante le costará entender". Esto también se puede observar en la Figura 3, en las valoraciones realizadas por E6.

Figura 3. *Argumentos sobre el uso de la regla de tres dados por E6.*

Consideramos que la respuesta que aporta el alumno A es correcta pero los argumentos que expone no quedan completamente claros; puesto que el procedimiento que sigue es abstracto y en el resultado no expresa de manera entendible el proceso que ha seguido.

[…]

Consideramos que la respuesta que aporta el alumno B es correcta ya que argumenta de manera ordenada y clara especificando los pasos que sigue y la información sobre la que trabaja.

Elaboración propia.

Una situación similar a la anterior se presenta al valorar la resolución dada por el alumno D. Por ejemplo, E8 hace una valoración muy limitada al considerar que el alumno D desarrolla un procedimiento erróneo (Figura 4). E8 parece obviar que este alumno hace uso de una sucesión de magnitudes proporcionales, que podrían conducir a la solución correcta del problema. Estos resultados parecen indicar que la valoración positiva de las respuestas a un problema, por parte de maestros en formación inicial, se basa esencialmente en el uso de procedimientos usuales (sobre todo el de la regla de tres).

En este sentido, se observa que el uso de la regla de tres juega un papel fundamental en las valoraciones dadas por los maestros en formación inicial, quienes lo consideran el procedimiento preferible en las situaciones de proporcionalidad. Por ejemplo, en la respuesta de E8 (Figura 4), se puede observar esta tendencia. Además, como se muestra en la Figura 4, aun cuando el procedimiento empleado conduzca a una solución correcta, el uso de la regla de tres es el mejor valorado por los maestros en formación inicial. Estos resultados parecen indicar que, para los estudiantes para maestro, la regla de tres ocupa un lugar central para caracterizar la relación de proporcionalidad.

Figura 4. *Respuesta del E8 al evaluar las resoluciones dadas por los alumnos C y D.*

> En el problema 2 podemos observar como el alumno C aporta una solución correcta con un simple procedimiento como es una regla de tres entre los alumnos que van en coche y el número total de alumnos lo que le da una perfecta concordancia entre por cada alumno que va en coche tres van andando sin que le sobre ninguno, que es lo que le ha pasado al alumno D, que su procedimiento es erróneo ya que ha llevado la proporción hasta casi el número total de alumnos, sobrándole dos, con lo cual piensa que estos van andando si o si, pero con esta solución no habría 1 alumno en coche por cada 3 que van andando ya que sobran dos, con lo cual este alumno está equivocado.

Elaboración propia.

Por otro lado, se debe reconocer que posiblemente la buena organización y la facilidad que ofrece seguir la resolución dada por el alumno B, deseables en cualquier resolución de problemas, haya influido para obviar o desconocer el aspecto intuitivo y "natural" de las resoluciones de los alumnos A y D.

Reconocimiento de objetos matemáticos en las prácticas de los alumnos de primaria

En lo relativo a la identificación de los tipos de objetos matemáticos puestos en juego en la resolución (lenguajes, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos), hemos identificado tres tipos de respuestas representativas de las 32 presentadas por los equipos:

- *Identificación nominal-descriptiva de objetos* (nombres de objetos, descripción de procedimientos). En esta categoría se encuentran análisis como el de E8, en la descripción de los objetos involucrados en la práctica desarrollada por el alumno B.
  Solución Alumno B$\Longrightarrow$ Lenguaje natural, numérico, icónico, gestual, se usan símbolos para operar con ellos. Conjuntos, clases o tipos de números, significado relacional de la igualdad, operaciones aplicando propiedades del álgebra del conjunto de números naturales e igualdad como equivalencia (E8).
  Observamos en la descripción de E8 que la descripción de los objetos se conecta con los característicos de los niveles de algebrización aunque no de forma correcta.
- *Lista de objetos identificados*. En esta categoría de respuestas se encuentran aquellas en las que los futuros maestros enumeran los objetos según sus tipos. Por ejemplo, tal es el caso de la descripción de E5 para la solución del alumno C:
  Solución C:
  Tipo de lenguaje: escrito, numérico, simbólico y tabular.
  Conceptos: cantidades, cifras, proporcionalidad directa, despejar x, multiplicación y división.
  Procedimientos: tabla representativa, proporcionalidad directa, multiplicar y dividir
  Argumento: el problema va acompañado de una solución redactada por parte del alumno.
  Observamos que E5 indica conceptos que son procedimientos ("despejar x") y procedimientos que son conceptos o propiedades ("proporcionalidad directa"). El argumento hace referencia a la presencia de explicación por parte del alumno y no al tipo de éste.

- *Uso de una tabla objetos/significados.* En la Figura 5 mostramos un ejemplo de esta categoría, en la que el equipo E3 elabora una configuración donde los objetos están referidos a cada práctica elemental identificada.

Figura 5. *Identificación de objetos asociada a prácticas elementales de la solución de A, por E3.*

b)

Secuencia de prácticas elementales para resolver la tarea	*Objetos referidos en las prácticas (conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos.)*
1. Se supone que el reparto es constante día a día.	Conceptos: cantidad, suma, secuencia limitada. Proposición: el reparto es constante.
2. Se reparten 8 canicas al día. Para Juan 3 canicas y para Saúl 5.	Conceptos: correspondencia entre cantidades y personas. Proposición: la imagen de la suma es la imagen de las imágenes.
3. Hay 40 canicas, por lo que se reparten en 5 días.	Procedimiento: cálculo de días según las canicas que se dan cada día, hasta llegar a 40. Argumento: se realiza una división de 40 entre 8 y da un resultado de 5 días.
4. Si son 5 días a uno le damos 5 canicas y al otro 3.	Procedimiento: cálculo de canicas según días y canicas totales. Argumento: si son 5 días y uno recibe 5 y el otro 3 se multiplica cada cantidad por los días y da resultado el número total de cada uno.

Elaboración propia.

La respuesta de los equipos a la identificación de los objetos, corresponde a la primera categoría. Salvo E5 que realizó un listado de objetos según tipos y E3 que elaboró configuraciones ontosemióticas como la mostrada en la figura 5 para las distintas respuestas. Aun cuando E2 y E3 presentan una tabla para identificar objetos/significados puestos en juego en la resolución de los problemas, la identificación que hace E2 no es similar a la de E3. En la Figura 6 se muestra la identificación de objetos en la resolución del alumno A, elaborada por el E2. En esta se puede observar que, de manera general, E2 presenta una identificación nominal-descriptiva de objetos del tipo RCb1, sin embargo lo hace en una tabla e intenta dar significados a algunos de los objetos identificados: significado operacional de la igualdad y tipo de lenguaje simbólico. No obstante, se observa que E2 sólo identifica los significados más elementales asociados a la identificación del nivel de algebrización de las prácticas de los alumnos (figura 6) lo cual también es realizado por la mayoría de los equipos incluidos en la primera categoría.

Figura 6. *Lista de objetos elaborada por E2 en el análisis de la resolución del Alumno A.*

b)

OBJETOS	TRANSFORMACIONES	LENGUAJES
- Números particulares -Significado operacional de la igualdad (operación igual a respuesta) -Símbolos literales como receptores de números particulares	Operaciones aritméticas con números particulares	Natural, numérico, icónico, gestual; pueden intervenir símbolos que refieren a datos desconocidos pero no se opera con ellos.

Elaboración propia.

Por su parte, en el reconocimiento realizado por el E3 (Figura 5), se observa una actuación más acertada al dar un significado de uso a los objetos identificados. Se puede observar que E3 muestra una mayor comprensión de la resolución analizada. Esto podría ser un indicador de que el uso de la configuración ontosemiótica (secuencia de prácticas elementales, identificación de objetos emergentes en éstas) permite una mayor reflexión sobre las prácticas realizadas en la resolución del problema. Se debe hacer notar que este equipo es el único que califica con un "muy bien" la resolución dada por el alumno A. Este hecho, en todo caso, requerirá de mayor investigación.

Teniendo en cuenta estos resultados, se observa que la mayoría de los maestros en formación inicial muestran dificultades para identificar proposiciones y argumentos en las soluciones elaboradas por los alumnos de primaria. En las respuestas dadas por los equipos, estos sólo reconocen con mayor pertinencia los tipos de lenguaje, los conceptos y los procedimientos puestos en juego en las resoluciones analizadas. Además, este reconocimiento es generalmente nominal-descriptivo (nombres de los conceptos, descripción de los procedimientos), es decir, no se presentan significados de uso asociados a los mismos (Burgos et al, 2019; Fernández et al, 2013). Sólo uno de los equipos (E3) presenta una secuencia de las prácticas elementales puestas en juego en las cuatro resoluciones e identifica objetos y significados utilizados en esas prácticas. Es interesante observar que esto no se le pedía en la consigna de la tarea, lo cual es un indicador de que el equipo decide utilizar la herramienta de identificación ontosemiótica para facilitar su análisis.

Identificación del nivel de algebrización en las prácticas de los alumnos de primaria

Con relación a la asignación justificada de los niveles de algebrización, se observa que la mayoría de los equipos asigna correctamente los niveles de algebrización a las prácticas de los alumnos (19 de 32), aunque encontramos 13 de 32 asignaciones incorrectas. Las asignaciones erróneas se dan en los dos sentidos: una asignación de nivel inferior a uno superior (por 5 equipos en las prácticas de C y D) y una asignación de nivel superior a uno inferior (por 4 equipos, en la práctica de B, fundamentalmente). Veamos cómo se manifiestan estos dos tipos de asignaciones.

El primer tipo de asignaciones erróneas se presentan con las prácticas de los alumnos C y D, en las figuras 7 y 8 se presentan ejemplos de cada caso. En el caso del alumno C, se puede observar que E1 niega el cálculo analítico realizado en la práctica de dicho alumno. Este tipo de error puede estar asociado a una omisión o desconocimiento del cálculo analítico en el que se opera con *x*.

Figura 7. *Asignación de nivel 1 a la actividad del alumno C (nivel 2) realizada por E1.*

lenguaje natural, numérico y simbólico utilizando la incógnita en la resolución del problema, analizado todo esto este problema se asocia con el nivel 1 ya que introduce una incógnita aunque no opera con ellas pero si realiza operaciones con números particulares.

Elaboración propia.

En el caso del alumno D, los equipos identifican el uso de números particulares, lenguaje no simbólico y operaciones aritméticas como caracterizadores del nivel 0 de algebrización, dejando sin efecto las relaciones que se establecen entre los números y el grado de generalidad con que se hace uso de éstas.

Figura 8. *Asignación de nivel 0 a la actividad del alumno D (nivel 1) realizada por E2.*

c) Nivel 0, porque usa números particulares, aunque no plasma ninguna operación realizada. Utiliza un lenguaje natural y gestual. También hace uso de números particulares y operaciones aritméticas.

Elaboración propia.

Un aspecto común observado en la asignación errónea de un nivel superior a uno inferior (4 de 7) es considerar que el simple uso de la *x* en la práctica realizada es suficiente para asignar un nivel 2 o 3 de algebrización. Esto fue observado en la asignación de 4 equipos del nivel de algebrización a la práctica realizada por el alumno B. En la figura 9 se muestra un ejemplo de este tipo de asignación.

Figura 9. *Asignación de nivel 2 a la actividad de B (nivel 1) por E3.*

c) El nivel de algebrización de la respuesta es 2, ya que utiliza variables como incógnitas aunque no se realizan operaciones con las variables para obtener formas canónicas de expresión. Sí se opera con números naturales aplicando una estructura algebraica y se utiliza simbólico aunque literal.

Elaboración propia.

Al observar las asignaciones correctas de los niveles de algebrización realizados por los maestros en formación inicial, se puede ver que los objetos mayormente identificados, en un orden decreciente de uso, son: los tipos de lenguajes (simbólico versus no-simbólico), el uso de la incógnita, el uso de números particulares, significado de la igualdad, uso de una ecuación y, con muy poca frecuencia, el cálculo analítico implicado en la resolución. Asimismo, buena parte de la identificación de estos objetos se basan en la descripción del procedimiento de resolución sin llegar a evaluar correctamente el papel de los símbolos literales y el cálculo analítico involucrado en la práctica algebraica. Es necesario profundizar en el carácter algebraico de la actividad matemática, discriminar con mayor precisión las actividades aritméticas de las algebraicas, considerando los tipos de objetos, representaciones, procesos de generalización y cálculo analítico.

Conclusiones

El foco de atención de este trabajo ha sido el diseño, implementación y evaluación de una acción formativa centrada en el desarrollo de conocimientos y competencia para el análisis cognitivo de maestros en formación sobre tareas de proporcionalidad. El desarrollo de la competencia de análisis cognitivo del profesor, que incluye reconocer estrategias de resolución no habituales y valorar su grado de corrección, constituye un reto en la formación inicial de maestros. Como hemos observado, la regla de tres sigue ocupando un lugar central en la percepción que tienen los futuros maestros sobre la relación de proporcionalidad, lo cual ha constituido un obstáculo para el desarrollo de esta competencia. Por otro lado, se hace necesaria una mayor instrucción para que los futuros maestros conozcan las formas de argumentación y puedan leer entre líneas el argumento que usan explícita o implícitamente sus alumnos.

Las herramientas de estudio puestas en juego para desarrollar la competencia de análisis cognitivo de maestros en formación inicial, han permitido determinar ciertos conflictos de aprendizaje cuando ellos evalúan las prácticas realizadas por estudiantes de educación primaria al resolver problemas de proporcionalidad directa. Entre algunas de las dificultades identificadas se encuentran: la comprensión, análisis y evaluación de procedimientos de resolución no usuales al resolver problemas de proporcionalidad directa, y la preferencia por el uso de la regla de tres como procedimiento de resolución de este tipo de problemas, llegando este proceso de resolución a jugar un papel fundamental para la caracterización de la relación de proporcionalidad en los maestros en formación inicial (Son, 2013; Toluk-Ucar y Bozkus, 2018).

Consideramos que el desarrollo de la competencia de reconocimiento de los niveles de algebrización fomentará en los maestros en formación inicial la posibilidad de valorar con mayor pertinencia los tipos de problemas y actividades a desarrollar con sus alumnos. En tal sentido, al poner en juego la herramienta de identificación ontosemiótica de reconocimiento de objetos y procesos ha fomentado la identificación de objetos matemáticos que facultan a una correcta asignación de los niveles de algebrización.

Finalmente, la presencia de dificultades como las referidas, la complejidad de realización de tareas de análisis aquí puestas en juego y la importancia que hemos visto le confiere a la regla de tres los maestros en formación inicial, pueden constituir fuentes de conflictos para promover actividades dirigidas al desarrollo del razonamiento proporcional desde la escuela en los términos propuestos por Mochón Cohen (2012). Los resultados de las actuaciones de los equipos de trabajo indican que este tipo de tareas son un reto para los maestros en formación inicial, resultando conflictivas la identificación y discriminación de los tipos de objetos algebraicos y significados en las prácticas matemáticas desarrolladas por estudiantes de educación primaria.

Reconocimiento

Investigación realizada como parte del proyecto de investigación PID2019-105601GB-I00 / AEI / 10.13039/501100011033, Grupo FQM-126 (Junta de Andalucía, España).

Referencias

Burgos, M., Godino J. D y Rivas, M. (2019) Análisis epistémico y cognitivo de tareas de proporcionalidad desde la perspectiva de los niveles de algebrización. *Acta Scientiae, 21* (4), 63-81.

English, L. D. (2008). Setting an agenda for international research in mathematics education. In *Handbook of international research in mathematics education*, 2nd Edition (pp. 3-19). New York y London: Taylor and Francis (Routledge).

Fernández, C., Llinares, C., y Valls, J. (2012). Learning to notice students' mathematical thinking through online discussions. *ZDM. Mathematics Education*, DOI 10.1007/s11858-012-0425-y

Fernández, C., Llinares, S., y Valls, J. (2013). Primary school teacher's noticing of students' mathematical thinking in problem solving. *The Mathematics Enthusiast, 10*(1), 441-468.

Godino, J. D., Aké, L., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, 32(1), 199-219.

Godino, J. D., Beltrán-Pellicer, P., Burgos, M. y Giacomone, B. (2017). Significados pragmáticos y configuraciones ontosemióticas en el estudio de la proporcionalidad. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Disponible en http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html.

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema, 31*(57)

Godino, J. D., Rivas, H., Arteaga, P., Lasa, A. y Wilhelmi, M. R. (2014). Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico-semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 34(2/3), 167-200.

Mochón Cohen, S. (2012). Enseñanza del razonamiento proporcional y alternativas para el manejo de la regla de tres. *Educación matemática, 2*4(1), 133-157.

Ponte, J. P., y Chapman, O. (2016). Prospective mathematics teachers' learning and knowledge for teaching. In L. D. English y D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (3rd ed., pp. 275–296). New York, NY: Routledge.

Son, J. W. (2013). How preservice teachers interpret and respond to student errors: ratio and proportion in similar rectangles. *Educational studies in mathematics, 84*(1), 49-70.

Toluk-Ucar, Z., y Bozkus, F. (2018). Elementary school students' and prospective teachers' proportional reasoning skills. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning, 19*(2), 205-222.

LA REFLEXIÓN SOBRE LA PRACTICA POR MEDIO DEL USO DE CLASES VIDEOGRABADAS EN UN CONTEXTO DE LESSON STUDY: UN RELATO DE EXPERIENCIA CON FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICAS

REFLECTION ON PRACTICE THROUGH THE USE OF VIDEO-RECORDED LESSONS IN A LESSON STUDY CONTEXT: AN EXPERIENCE REPORT WITH PROSPECTIVE MATH TEACHERS

Viviane Hummes, Adriana Breda, Rodrigo Sychocki da Silva
Universidad de Barcelona. (España), Universidade Federal do Rio Grande do Sul. (Brasil)
vhummes@ub.edu, adriana.breda@ub.edu, sychocki.rodrigo@ufrgs.br

Resumen
El objetivo de este trabajo es presentar un relato de experiencia sobre una conferencia-taller, realizada con futuros profesores de matemáticas de una universidad estatal del sur de Brasil, sobre el uso del recurso video grabación de las clases como una herramienta que sirve de apoyo al desarrollo de la reflexión sobre la práctica docente. Para ello, en la conferencia-taller, el grupo de ocho futuros profesores analizó un recorte de un episodio de clase de geometría video grabada, implementada en Chile en un contexto de *Lesson Study*. Los resultados apuntan que los comentarios que realizan los futuros profesores, al reflexionar sobre el episodio de clase videograbado, están relacionados con las matemáticas, con el aprendizaje de los alumnos, con la gestión de la clase, con el uso de materiales, con la afectividad y con uso de diferentes contextos. Los hallazgos de esta experiencia sugieren que trabajar con el futuro profesor de matemáticas herramientas que desarrollen la reflexión sobre la práctica con el aporte de clases videograbadas es un camino importante para llevarlos a una mejor práctica profesional docente.

Palabras clave: video grabación, *lesson study*, reflexión docente

Abstract
This work is aimed at reporting an experience about a conference-workshop, carried out with prospective mathematics teachers from a state university in southern Brazil, on the use of the lesson video- recording resource as a tool that supports the development of reflection on teaching practice. So, in the conference-workshop, the group of eight prospective teachers analyzed a clipping of an episode of a geometry class video-recorded, implemented in a Lesson Study context, in Chile. The results indicate that prospective teachers' comments, when reflecting on the recorded video class episode, are related to mathematics, to students' learning, to class management, to the use of materials, to affectivity and to the use of different contexts. The findings of this experience suggest that working with mathematics prospective teachers by using tools that develop reflection on practice, with the contribution of video-recorded lessons, is an important way to lead them to a better professional teaching practice.

Key words: video recording, lesson study, teacher reflection

Introducción

Para algunos autores, la Didáctica de las Matemáticas es una disciplina científica que busca el abordaje de tres ejes: cuestiones teóricas del propio conocimiento matemático y de su enseñanza y aprendizaje; cuestiones descriptivas, explicativas y predictivas que sirven para explicar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; y cuestiones prescriptivas y valorativas, que sirven para guiar la mejora de dichos procesos (Godino, Batanero y Font, 2019; Breda, Seckel, Farsani, Silva y Calle, 2021). Estos dos últimos ejes están muy relacionados con la reflexión del profesor.

Un objetivo fundamental del aprendizaje profesional de futuros docentes es el desarrollo de su capacidad para analizar y evaluar su propia práctica y la práctica pedagógica ajena. En esta perspectiva, la reflexión tiene un papel en muchos marcos teóricos usados en la investigación sobre la formación del profesorado, tales como: la investigación-acción (Elliot, 1993), la práctica reflexiva (Schön, 1983), la competencia de mirar con sentido (Mason, 2002), la mirada profesional (Llinares, 2012), el estudio del concepto (Davis, 2008), el cuarteto del conocimiento (Rowland y Ruthven, 2011), la idoneidad didáctica (Godino *et al*., 2019; Breda, Font y Pino-Fan, 2018) y el *Lesson Study* (Huang, Takahashi y Da Ponte, 2019; Isoda, Arcavi, Y Lorca, 2012).

Algunos recursos utilizados para apoyar el desarrollo de la reflexión, como, por ejemplo, los episodios de clase grabados en video, pueden ser empleados en los programas de formación inicial docente con la finalidad de analizar lo que ocurre en el aula. Por un lado, la observación que hacen los futuros docentes de un episodio de clase, genera elementos que fomentan la discusión con sus tutores de lo que ha ocurrido en el aula estimulando, de alguna manera, la reflexión personal sobre la clase observada. Por otro lado, desde hace unos años, la acción de hacer video grabaciones de clases se ha convertido en una adecuada y ordinaria herramienta de análisis y reflexión sobre la práctica docente. En particular, la utilización de videos para hacer análisis de procesos de instrucción es una estrategia utilizada actualmente para evaluar las capacidades y competencias de un profesor y valorar los procesos de instrucción implementados (Borko, Koellner, Jacobs y Seago 2011; Kaiser, Busse, Hoth, König y Blömeke, 2015).

Un ejemplo de esta práctica se puede ver en la investigación realizada en Bello y Breda (2007), en la cual futuros profesores de matemáticas, en un contexto de prácticas preprofesionales, analizaron sus clases video grabadas y reflexionaron sobre la necesidad de una mejora de la enseñanza de las matemáticas desde: el contenido matemático y sus aplicaciones a contextos extra matemáticos; las gestiones e interacciones del aula; el rol y actitudes del profesor. En esta investigación, se concluye que el análisis de la propia clase grabada en video es un medio que posibilita a los futuros docentes reflexionar sobre la implementación realizada. Otro ejemplo se encuentra en la investigación de Morales y Font (2019), dónde se documenta los principales elementos de análisis y valoración que una profesora en servicio de Costa Rica utiliza cuando se le pide que comente una clase que impartió y que fue grabada en video. La profesora, al reflexionar sobre la instrucción matemática que realizó pudo reconocer elementos de mejora en su práctica educativa.

Otro mecanismo bastante difundido para el desarrollo de la reflexión es la estrategia profesional *Lesson Study* que se focaliza en el aprendizaje colectivo a partir de actitudes investigativas de la práctica de enseñanza y aprendizaje. Un ejemplo reciente es la investigación de tipo *cross-border* que involucró el diseño e implementación conjunta de un *Lesson Study* (planificación colectiva de la clase, video grabación de la clase implementada y reflexión colectiva de la clase implementada), en dos idiomas, para las culturas brasileña y chilena, en contextos escolares distintos. Los resultados muestran que la profesora que implementó la clase, al participar de la reflexión colectiva de su clase grabada en video, desarrolló la capacidad de reflexionar sobre el valor educativo de las tecnologías y apropiarse de formas didácticas de enseñanza (Baldin, Isoda, Olfos y Estrella, 2018). Otro ejemplo es el trabajo realizado por Hummes, Font y Breda (2019) en que, profesores en ejercicio, participantes de un máster profesional, han realizado un ciclo completo de *Lesson Study* y, al reflexionar, sobre la clase video-grabada implementada han argumentado aspectos de ella que se deberían mejorar en una implementación futura.

Dada la importancia de: 1) la reflexión del profesorado como estrategia para el desarrollo profesional y la mejora de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, 2) la potencialidad del enfoque *Lesson Study* como dispositivo formativo y 3) las clases video grabadas para el desarrollo de dicha capacidad reflexiva, el objetivo de este trabajo es presentar un relato de experiencia sobre una conferencia-taller, realizada con futuros profesores de matemáticas de una universidad estatal del sur de Brasil, sobre el uso del recurso video grabación de las clases - en un contexto de *Lesson Study* implementado en Chile - como una herramienta que sirve de apoyo al desarrollo de la reflexión sobre la práctica docente.

Este documento, después de una introducción donde se explica el contexto y objetivo del estudio, continúa explicando el marco teórico (el enfoque *Lesson Study* e investigaciones sobre el uso de las clases grabadas en video para la reflexión de la práctica docente). Después se explica la metodología, los resultados y su discusión. Por último, se presentan las consideraciones finales sobre la experiencia realizada.

El enfoque *Lesson Study*

Lesson Study (en inglés) o Estudio de Clases (en español) surgió en Japón como una metodología de trabajo docente apoyada en actitudes investigativas y prácticas colaborativas entre profesores, que objetivan, al mismo tiempo, el aprendizaje de los estudiantes, la mejora de la práctica docente y el desarrollo profesional de los profesores. Consiste básicamente en el diseño colaborativo y detallado de una clase, de su implementación y observación directa en el aula, y de un análisis conjunto posterior (Fernández y Yoshida, 2004; Lewis, 2002; Murata y Takahashi, 2002; Wang-Iverson y Yoshida, 2005; Hart, Alston y Murata, 2011).

La idea es que un grupo de profesores y especialistas se reúnan con una problemática en común sobre el aprendizaje de sus alumnos, planeen una lección para que el alumno aprenda, y, por último, examinen y discutan lo que ellos observan en dicha implementación. A través de múltiples interacciones de este proceso, los profesores tienen muchas oportunidades para discutir el aprendizaje de los alumnos y cómo la enseñanza incide sobre dicho aprendizaje.

Según investigadores internacionales, existen diferentes modelos de ciclos de *Lesson Study*. Un ciclo realizado en Chile, por ejemplo, considera las siguientes etapas: estudio del currículo y metas; planificación de la clase; realización y observación de la clase; reflexión conjunta sobre los datos registrados y rediseño. Para cada etapa del ciclo, existen algunos criterios que deben ser considerados para que se lleve a cabo el desarrollo de un ciclo completo de *Lesson Study* (Hurd y Lewis, 2011; Lim-Ratnam, 2013).

En la primera etapa, *currículo y metas*, se analizan cómo cada tópico del currículo se presenta y se distribuye en las diferentes etapas educativas (ciclos, cursos, etc.), además se estudia cómo el currículo conceptualiza el aprendizaje del estudiante. Para ello, es imprescindible que el grupo de profesores conozca el currículo de la institución educativa en la cual trabaja (currículo local), así como el currículo regional y el nacional. La reflexión en esta primera etapa debe enfocarse en el estudio del currículo, del material didáctico, del estudio de investigaciones científicas que abordan la enseñanza del tema que será el núcleo del *Lesson Study,* de la investigación sobre los conocimientos previos de los estudiantes y de la construcción de las metas de aprendizaje. Se recomienda, además, que toda esa discusión sea registrada para que sea contrastada en la segunda etapa del ciclo (planificación de la clase).

La *planificación de la clase*, se inicia después de la elección del tema que el grupo de profesores desearía que sus alumnos aprendiesen. Además, en esta fase, deben constar de forma explícita las justificaciones de cómo, en la planificación de esta clase, van a trabajar las metas fijadas en la etapa anterior. Los siguientes pasos se enfocan en el diseño de la secuencia de tareas, en la selección de los materiales que serán utilizados, en los instrumentos de evaluación y de las estrategias de gestión de la lección.

En la tercera etapa, *implementación y observación*, un profesor imparte su clase mientras los demás observan y registran el proceso de enseñanza y aprendizaje. Para ello, este profesor debe estar de acuerdo en que los demás puedan presenciar su clase en vivo o que la clase sea grabada para ser examinada en la próxima etapa, la de reflexión de la clase. En esta fase, se procura la participación activa de los alumnos en cada etapa de resolución de las tareas propuestas, desde la comprensión de la misma, al establecimiento de estrategias y análisis de la resolución. Se trata de una etapa donde se da mucha importancia al proceso de resolución de problemas, en particular, el profesor que implementa la clase debe estimular momentos en los cuales los alumnos, cuidadosamente guiados por él, comparten sus comprensiones, analizan, comparan y contrastan críticamente sus ideas y razonamientos.

En la cuarta etapa, *reflexión crítica*, que tiene lugar después de la clase implementada, el grupo de profesores que la ha planificado, conjuntamente con otros profesionales invitados que la han observado, se reúnen para analizar los impactos de la enseñanza sobre el aprendizaje de los alumnos. En este momento, cada observador expone sus impresiones sobre el aprendizaje de los alumnos, la gestión de la clase, etc. Luego de la reflexión del grupo es posible que los profesores realicen ajustes para una clase futura sobre el mismo tópico. Eso corresponde al inicio de un nuevo ciclo - *rediseño y re implementación*. Esta nueva planificación e implementación puede ser aplicada en otras escuelas o con otros alumnos.

El recurso Video Grabación en la práctica reflexiva

Hace más de 80 años, en su libro "*How We Think"* Dewey (1933) expresó la importancia de la reflexión como una acción necesaria para una mejor práctica y una manera innovadora de abordar los desafíos de la enseñanza y el aprendizaje de los estudiantes.

En ese sentido, Rich y Hannafin (2009) estudiaron herramientas específicas, ubicuas y fáciles de usar, como las grabaciones de clases en video para desarrollar la reflexión del profesor.

En esta línea (Goodlad, 1984; Moreira, 2001) también han puesto de manifiesto las ventajas que presenta el uso de clase video grabadas para desarrollar la reflexión del profesorado. Desde el campo de la Didáctica de las Matemáticas, Něměčková y Pavlasová (2019) estudiaron las reflexiones de cuarenta docentes sobre el uso de grabaciones de video de sus propias clases de matemáticas (durante dos años de desarrollo profesional en la enseñanza de las matemáticas). Los autores destacan que los beneficios del uso de videos de las propias clases de los participantes impactan en la planificación, instrucción, creencias y colaboración entre los profesores. Además, los resultados indican que el uso de la video grabación de las clases de los profesores promueve cambios en la práctica docente, aumentando, por ejemplo, la atención de los profesores sobre el pensamiento de los estudiantes.

Una de las ventajas de las video grabaciones de las clases es que recoge muchos detalles y se pueden ver cuantas veces sea necesario, lo que no ocurre con la observación en vivo. La video grabación se puede ver muchas veces y el material pude ser analizado desde muchas perspectivas diferentes (Moreira, 2001). Sin embargo, el uso de la grabación de video de las clases implica que los profesores estén dispuestos a que sus clases sean públicas y a aceptar que sus pares las puedan analizar y criticar. Para ello, es necesario crear con un clima de confianza para que se haga una crítica constructiva. En Kaiser, Busse, Hoth, König, Blömeke (2015) se indica que esta estrategia de presentar video grabaciones es importante pues da un panorama más amplio de las situaciones en el aula y permite valorar mejor la capacidad y conocimiento de los profesores que son evaluados. Por otro lado, estos autores advierten que podría existir una limitación cuando las clases grabadas son construidas artificialmente, pues se pierden las acciones auténticas que ocurren en una clase real. García (1994) menciona que una de las dificultades del uso de las video grabaciones en la formación de profesores es que en algunos grupos y culturas los profesores son reticentes a que sus clases sean grabadas, aspecto este que queda superado al trabajar con el enfoque *Lesson Study*.

Metodología

Contexto y participantes

La experiencia que se presenta en este trabajo corresponde a un relato de una conferencia-taller que fue realizada con futuros profesores de matemáticas - ocho estudiantes de la carrera de Licenciatura en Matemáticas de una universidad estatal del sur de Brasil. La conferencia-taller tuvo lugar en la *Universidade Federal de Rio Grande do Sul* (UFRGS) en el primer semestre de 2019 en la asignatura de pregrado titulada *Educação Matemática e Tecnologia* que tenía como objetivos: i) el uso de diferentes *softwares* para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la escuela, acompañados de práctica pedagógica; ii) análisis de sitios web relacionados a la enseñanza y aprendizaje de la matemática y sus posibles usos en el aula; iii) construcción de un marco teórico en el área de tecnología informática aplicada a la Didáctica de la Matemática. Para cumplir a esos objetivos, la asignatura, además de proponer la apropiación y el uso de diferentes *softwares* para la enseñanza de las matemáticas, también propuso realizar seis seminarios con investigadores de la Didáctica de la Matemática, especialmente con estudios e investigaciones en el área de Tecnologías Digitales.

La conferencia-taller titulada *importancia de las clases grabadas en video para el desarrollo de la reflexión en la formación de profesores de matemáticas* tuvo duración de 2 horas y fue impartida por dos investigadoras de la Universidad de Barcelona de acuerdo con los momentos siguientes:

a) En el primero se explicó la noción de Didáctica de las Matemáticas como una disciplina científica;
b) En el segundo se presentó un panorama teórico relacionado al desarrollo de la competencia reflexiva en la formación docente;
c) En el tercero se explicó el abordaje *Lesson Study*, sus objetivos, características y etapas de trabajo;
d) En el cuarto se mostró a los ocho estudiantes una experiencia de *Lesson Study* videograbada, realizada en Chile, producto del Centro de Perfeccionamiento, Experimentación e Investigaciones Pedagógicas del Ministerio de Educación de Chile (CPEIP, 2012). La experiencia videograbada tiene tres partes. En la primera, los maestros se reúnen para planificar colectivamente una clase de matemáticas basada en un estándar de desempeño del currículo chileno para nivel básico 2: a) caracterizan prismas rectos y pirámides considerando el número y la forma de las caras y el número de aristas y vértices; b) seleccionan redes de prismas y pirámides para armar un cuerpo geométrico dadas algunas características de éste. En la segunda, un maestro que participó de la planificación implementa la clase con los alumnos de nivel básico 2 (duración aproximada de 10 minutos ya que algunos segmentos de la implementación se han recortado). En la tercera, el colectivo de maestros hace una reflexión, poniendo atención en cómo los alumnos y alumnas reaccionaron en el aula, cómo expresaron sus ideas y cómo el profesor condujo el proceso de aprendizaje. Para los futuros profesores participantes de la conferencia-taller se ha presentado la segunda parte de la experiencia que corresponde a la implementación de la clase planificada por los maestros (tercera etapa de un ciclo de *Lesson Study*).
e) En el quinto se hizo una presentación de los objetivos de la clase grabada en video (construir pirámides de diferentes bases, observar características y elementos de las pirámides, registrar en una tabla el número de lados del polígono regular de la base, el número de aristas y el número de vértices, encontrar una relación entre el número de lados del polígono la base, el número de vértices y el número de aristas de la pirámide);
f) En el sexto se fomentó con los ocho estudiantes una discusión sobre la clase grabada en video;
g) En el septimo se reflexionó sobre la importancia de las clases grabadas en video y del abordaje *Lesson Study* para el desarrollo de la reflexión docente y se presentaron algunas investigaciones sobre estos dos aspectos (Hummes, Breda, Sánchez y Font, 2020; Hummes, Breda, Seckel y Font, 2020; Hummes, Breda y Seckel, 2019).

Datos

Para el análisis, de tipo descriptivo, se ha tenido en cuenta los momentos *f* y *g* del apartado anterior, es decir, los comentarios realizados por los futuros profesores: a) al reflexionar sobre la clase videograbada implementada por un maestro en un contexto de *Lesson Study*; b) cuando reflexionan sobre la importancia de las clases videograbadas y sobre los aportes del *Lesson Study* para el desarrollo de la reflexión docente colectiva.

Resultados y discusión

La conferencia-taller impartida, tuvo la intención de aproximar a los futuros profesores de matemáticas al marco teórico del *Lesson Stud*y y a explicarles la importancia de las clases grabadas en video como herramientas para el desarrollo de la reflexión sobre la propia práctica (o sobre la práctica ajena). En particular, al explicarles la metodología del *Lesson Study* y mostrarles la clase grabada en video (tercera etapa del *Lesson Study*), los futuros profesores pudieron reflexionar y argumentar aspectos relacionados a la clase que consideraron positivos y otros que se deberían mejorar, tales como:

Es visible en la clase grabada en video la motivación de los alumnos en el aula (Futuro profesor A).

Figura 1. *Alumnos atentos y motivados en el aula.*

Fuente: CPEIP (2012).

Es increíble como el material utilizado (pajitas de plástico y un cartel de papel) fueron suficientes para hacer la construcción de las pirámides (Futuro profesor C).

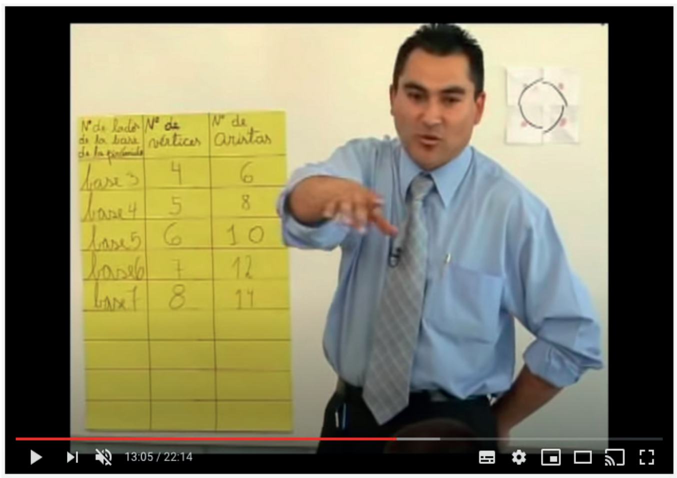
En la clase no se observa que se haya realizado una contextualización del contenido matemático (pirámides) con otras asignaturas o contextos de la vida real de los estudiantes (Futuro profesor H).

El maestro, antes de empezar el nuevo contenido, averigua los conocimientos previos de los estudiantes con relación a los vértices y aristas de un prisma de base triangular antes de trabajar con las pirámides. (Futuro profesor B).

El maestro va pasando en los grupos que se han formado en la clase y fomenta la interacción entre los estudiantes, solicitando que ellos se ayuden mutuamente en la realización de la tarea propuesta (Futuro profesor D).

El maestro comete un error en la representación tabular cuando escribe en la primera fila de la tabla "numero de lados de la base de la pirámide" y escribe las palabras "base 3", "base 4", "base 5" etc., en lugar de poner pirámide de base triangular o una pirámide que tenga como base un polígono regular de tres lados. (Futuro profesor H).

Figura 2. *Tabla realizada por el profesor en la clase videograbada.*



Fuente: CPEIP (2012).

En los comentarios presentados por los futuros profesores, se evidencian valoraciones de la clase implementada por el maestro desde diferentes aspectos relacionados a: disciplina (matemática), en particular a la valoración negativa sobre el error que comete el maestro en el lenguaje utilizado en la representación tabular; aprendizaje de los alumnos, en particular que el maestro empieza la clase haciendo una retomada de los conocimientos previos; la afectividad, por ejemplo, cuándo argumentan que los alumnos están motivados en la clase; a las conexiones extra matemáticas, valorando que no se hizo una buena conexión de las matemáticas con las situaciones de la vida real; la gestión del aula, valorando positivamente la promoción de la interacción entre los alumnos en el aula. Los comentarios valorativos realizados por los futuros profesores están de acuerdo con un consenso que hay en la comunidad de Educación Matemática de que, para tener una enseñanza y aprendizaje de las matemáticas adecuada, es importante tener en cuenta las siguientes tendencias/principios: presentación de matemáticas contextualizadas; dar importancia a la enseñanza de procesos matemáticos; considerar que conocer matemáticas implica ser competente en aplicarla a contextos extra matemáticos; incorporación de recursos materiales e nuevas tecnologías de la información y la comunicación (TIC); tener en cuenta un aprendizaje activo de tipo constructivista dónde se contemple los conocimientos previos de los alumnos, etc. (Guzmán, 2007; NCTM, 2000).

Al finalizar la conferencia-taller los futuros profesores presentaron algunos comentarios sobre sus percepciones y reflexiones con relación al contenido de la conferencia-taller y a las actividades propuestas en ello. Los comentarios se relacionan, sobre todo, con la importancia de la reflexión sobre práctica docente y con el apoyo de la tecnología (clase grabada en video) para la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. A continuación, siguen algunas de ellas:

Sin duda esta conferencia fue la que más me traje aportes, ya que en la carrera de grado en matemáticas no siempre es posible ser un oyente de conferencias tan importantes. La experiencia que los oradores aportaron con temas que *forman parte de su investigación fue enriquecedora, especialmente con mi visión de mi formación como futuro profesor. Hoy se plantearon muchos comentarios sobre el aula grabada en video. (Futuro profesor C).*

La oportunidad de mejorar el conocimiento sobre temas como teorías de reflexión como Lesson Study proporciona a cada uno más elementos para entender primero que el tema tiene numerosas ramificaciones y segundo para darse cuenta de que el papel del profesor va mucho más allá de la clase. Este mismo profesor necesita, y necesitará más y más, para enfrentar sus miedos, reflexionar sobre su enseñanza, tendrá que saber cuándo y dónde "cortar la cuerda". (Futuro profesor B).

Usar la tecnología para el autodesarrollo como profesor es un tema sobre lo que reflexionamos durante la conferencia impartida. (Futuro profesor D)

Debemos usar estas herramientas para acercar las matemáticas presentadas en la escuela a la vida diaria del alumno. Un desafío diario debe ser buscar siempre mejorar, reevaluar nuestras clases y nuestra postura. Grabarlas en video es un aspecto que ayuda hacer un autoanálisis (Futuro profesor E).

En los comentarios de los futuros profesores, se pudo observar la valoración positiva que hacen sobre la conferencia-taller impartida. En particular, algunos de ellos destacan la importancia de discutir los temas relacionados al uso de la tecnología como un medio para la formación docente, el autodesarrollo del profesorado y la importancia de siempre mejorar y reevaluar la propia clase por medio de la clase grabada en video. Otro aspecto que se destacó, fue la importancia de apropiarse y hacer uso de herramientas que apoyen la reflexión sobre la práctica docente. Dichos comentarios de los estudiantes permiten inferir que la conferencia-taller *importancia de las clases grabadas en video para el desarrollo de la reflexión en la formación de profesores de matemáticas* tuvo un cierto impacto en su formación.

Consideraciones finales

Dado que la Didáctica de las Matemáticas es una disciplina científica que considera la acción reflexiva sobre la práctica como un aspecto relevante para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, este trabajo tenía como objetivo presentar un relato de experiencia sobre una conferencia-taller, realizada con futuros profesores de matemáticas de una universidad estatal del sur de Brasil, sobre el uso del recurso video grabación de las clases - en un contexto de *Lesson Study* implementado en Chile - como una herramienta que sirve de apoyo al desarrollo de la reflexión sobre la práctica docente. En ese sentido, es importante subrayar que la actividad realizada en la conferencia-taller, con el grupo de futuros profesores, estuvo en línea con el objetivo de la asignatura, que era *desarrollar y mejorar las habilidades y capacidades para el uso de tecnologías, en particular las tecnologías digitales para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*.

Como conclusión de la experiencia realizada con ocho futuros profesores de matemáticas brasileños, se pudo observar, por un lado, que en sus reflexiones con relación a una clase de geometría del espacio grabada en video, se infieren comentarios relacionados a las matemáticas, al aprendizaje de los alumnos, a la afectividad, a la falta de conexiones de las matemáticas con las situaciones de la vida real y a la gestión del aula. Estos comentarios, de tipo valorativo, están de acuerdo con las tendencias actuales en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y con algunos de los principios y estándares de los NCTM (2000). Por otro lado, se pudo concluir que los futuros profesores presentan comentarios de que participar de conferencias-talleres como la relatada les da la oportunidad de comprender la importancia sobre la reflexión en la formación de profesores con el apoyo del uso de la tecnología, en particular, las clases videograbadas.

Los hallazgos de esta experiencia sugieren que trabajar con el futuro profesor de matemáticas herramientas - como la video grabación de la clase - y metodologías - como el *Lesson Study* - que desarrollen la reflexión sobre la práctica es un camino importante para llevarlos a una mayor conciencia de sus fortalezas y debilidades en el aula y, en última instancia, una mejor práctica profesional docente.

Agradecimientos

Trabajo desarrollado en el marco del proyecto de investigación en formación de profesorado PGC2018-098603-B-I00 (MCIU/AEI/FEDER, UE) y con el apoyo del programa de Doctorado Pleno en el Exterior proceso número 88881.173616/2018-01 (CAPES).

Referencias

Baldin, Y., Isoda, M., Olfos, R., y Estrella, S. (2018). A STEM cross-border lesson on energy for primary education under APEC lesson study Project. *Proceedings of the 8th ICMI-East Asia Regional Conference on Mathematics Education*, Vol 1, Taipei, Taiwan: EARCOME, pp 236-247,

Bello, S. E. L., y Breda, A. (2007). Saberes, práticas e dificuldades pedagógicas: Implicações curriculares para novos estágios de docência nos cursos de Licenciatura em Matemática. *Anais do IX Encontro Nacional de Educação Matemática ENEM*. Belo Horizonte, Brasil: SBEM.

Borko, H., Koellner, K., Jacobs, J., y Seago, N. (2011). Using video representations of teaching in practice-based professional development programs. *ZDM*, *43*(1), 175-187. Doi: https://doi.org/10.1007/ s11858-010-0302-5.

Breda, A., Font, V., y Pino-Fan, L. (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. *Bolema, Rio Claro*, *32*(60), 255-278.

Breda, A., Seckel, M. J., Farsani, D., Silva, J. F., y Calle, E. (2021). Teaching and learning of mathematics and criteria for its improvement from the perspective of future teachers: a view from the Ontosemiotic Approach. *Mathematics Teaching Research Journal, 13*(1), 31-51.

CPEIP [Centro de Perfeccionamiento, Experimentación e Investigaciones Pedagógicas del Ministerio de Educación de Chile]. (2012, 24 de enero). *Estudio de Clases – Geometría* [Archivo de video]. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=VUPTkKJ8ij8.

Davis, B. (2008). Is 1 a prime number? Developing teacher knowledge through concept study. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 14(2), 86-91.

Dewey, J. (1933). How We Think: A restatement of the relation of reflective thinking to the educative process. Boston: D.C. Heath.

Elliot, J. (1993). *El cambio educativo desde la investigación-acción*. Madrid: Morata.

Fernández, C., y Yoshida, M. (2004). *Lesson study: a Japanese approach to improving mathematics teaching and learning*. Mahwah: Erlbaum.

Garcia, C. (1994). Investigación sobre formación del profesorado: El conocimiento sobre aprender a enseñar. In L. Nieto, y V. Jiménez, (coord.). *La Formación del Profesorado de Ciencias y Matemáticas en España y Portugal,* (pp.3-35). Badajoz: Universidad de Extremadura.

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2019). The onto-semiotic approach: implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics, 39*(1), 37- 42.

Goodlad, J. (1984). *A place called school.* New York: McGraw-Hill.

Guzmán, M. (2007). Enseñanza de las ciencias y la matemática. Revista Iberoamericana de Educación, 43, 19-58.

Hart, L. C., Alston, A. S., y Murata, A. (2011). *Lesson Study Research and Practice in Mathematics Education*. Netherlands: Springer.

Huang, R., Takahashi, A., y da Ponte, J. P. (2019). Theory and Practice of Lesson Study in Mathematics around the World. In *Theory and Practice of Lesson Study in Mathematics* (pp. 3-12). Springer, Cham.

Hummes, V. B., Breda, A., Sánchez, A., y Font, V. (2020). Didactical Suitability Criteria in Videos of Lesson Study. *Quaderni di Ricerca in Didattica*, *3*(1), 257-268.

Hummes, V. B., Breda, A. y Seckel, M. J. (2019). Idoneidad didáctica en la reflexión de profesores: análisis de una experiencia de estudio de clases. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 381-390). Valladolid: SEIEM.

Hummes, V. B., Breda, A., Seckel, M. J., y Font, V. (2020). Criterios de Idoneidad Didáctica en una clase basada en el Lesson Study. *Revista Praxis y Saber: Maestría en Educación*, *11*(26), e10667.

Hummes, V. B., Font, V. y Breda, A., (2019). Combined Use of the Lesson Study and the Criteria of Didactical Suitability for the Development of the Reflection on the own Practice in the Training of Mathematics Teachers, *Acta Scientiae, 21*(1), 64-82.

Hurd, J., y Lewis, C. (2011). *Lesson Study Step by Step: How Teacher Learning Communities Improve Instruction.* EUA: Heinemann Educational Books (164 p).

Isoda, M., Arcavi, A., y Lorca, A. M. (2012). *El estudio de clases japonés en matemáticas: Su importancia para el mejoramiento de los aprendizajes en el escenario global*. Ediciones Universitarias de Valparaíso de la Universidad Católica de Valparaíso.

Kaiser, G., Busse, A., Hoth, J., König, J., y Blömeke, S. (2015). About the complexities of video-based assessments: Theoretical and methodological approaches to overcoming shortcomings of research on teachers' competence. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 13(2), 369-387. Doi: https://doi.org/10.1007/ s10763-015-9616-7.

Lewis, C. C. (2002). *Lesson study: A handbook of teacher-led instructional change*. Research for Better Schools. Inc. y Global Education Resources: LLC.

Lim-Ratnam, C. (2013). Lesson Study Step by Step: How Teacher Learning Communities Improve Instruction. *International Journal for Lesson and Learning Studies*, 2(3), 304-306.

Llinares, S. (2012). Construcción de conocimiento y desarrollo de una mirada profesional para la práctica de enseñar matemáticas en entornos en línea. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *2*, 53-70.

Mason, J. (2002). *Researching your own practice. The discipline of noticing.* London: Routledge-Falmer.

Morales, Y., y Font, V. (2019). Valoración realizada por una profesora de la idoneidad de su clase de matemáticas. *Educação e Pesquisa, 45,* e189468.

Moreira, M. A. (2001). *A investigação-ação na formação reflexiva do professor estagiário de Inglês*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Murata, A., y Takahashi, A. (2002). Vehicle To Connect Theory, Research, and Practice: How Teacher Thinking Changes in District-Level Lesson Study in Japan. *Teaching children mathematics*, 436-443.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: NCTM, 2000.

Němečková, L., y Pavlasová, L. (2019). The individual watching of one's own video and its influence on future biology teachers´ professional vision. *Tuning Journal for Higher Education*, *7*(1), 93-113.

Rich, P. J., y Hannafin, M. (2009). Video annotation tools: Technologies to scaffold, structure and transform teacher reflection. *Journal of Teacher Education, 60*(1), 52-67.

Rowland, T., y Ruthven, K. (2011). (Eds) *Mathematical Knowledge in Teaching*. London and New York: Springer.

Schön, D. A. (1983). *The Reflective Practitioner: how professionals think in action*. New York: Basic Books.

Wang-Iverson, P., y Yoshida, M. (Eds.). (2005). *Building our understanding of lesson study*. Research for Better Schools, Inc. y Global Education Resources: LL.

Clame Acta Latinoamericana de Matemática Educativa

SECCIÓN 4 / EL PENSAMIENTO DEL PROFESOR, SUS PRÁCTICAS Y ELEMENTOS PARA SU FORMACIÓN PROFESIONAL

VOL34, NÚMERO 2, AÑO 2021

FUNDAMENTOS PARA LA ENSEÑANZA DEL SISTEMA DE NUMERACIÓN

FUNDAMENTALS TO TEACH THE NUMBERING SYSTEM

Olga Emilia Botero Hernández, Ana María Jiménez Echavarría, María Camila Ocampo-Arenas
Colegio Gimnasio Los Pinares y Universidad de Antioquia. (Colombia)
oebotero@gmail.com, ana.jimeneze13@gmail.com, camila.ocampo@udea.edu.co

Resumen
En este artículo se presenta un análisis de una experiencia llevada a cabo en modalidad taller con un grupo de docentes de una institución privada del municipio de Medellín, Colombia. En el análisis de la información recolectada reconocemos en los espacios de formación continuada de docentes una posibilidad para generar reflexiones en cuanto a la práctica y las posibilidades de dinamizar el proceso de enseñanza aprendizaje, especialmente en la educación a la primera infancia. De igual forma, se logró reflexionar con respecto a la enseñanza de aspectos fundamentales de la numeración y el juego como posibilidad de dinamizar las clases de matemáticas desde el trabajo en red e interdisciplinar. Como reflexiones resaltamos la importancia de que los espacios de formación continuada se den en las instituciones de manera constante y se haga un acompañamiento a los participantes para retroalimentar sus reflexiones.

Palabras clave: Educación inicial, Juego, Formación de profesores, enseñanza de la numeración, sistema de numeración

Abstract
This article reports an analysis of a workshop, which was carried out with a group of teachers from a private institution of Medellin, Colombia. In the analysis of the collected data, we recognized in the teachers' continuing training spaces, a chance to think about the teaching practice and the possibilities to activate the teaching and learning process of mathematics, especially in early childhood education. Similarly, in this workshop it was possible to reflect on the teaching of essential aspects of the numbering system and the game as a strategy to activate math lessons through network and interdisciplinary work. This article also highlights the importance of systematically providing continuous training spaces in the academic institutions as well as accompaniment to the participants in order to feedback their reflections on the workshop's topics.

Key words: Early education, game, teacher training, numbering teaching, numbering system

Introducción

La enseñanza de la numeración es una de las tareas principales que se confieren al docente de matemáticas en la escuela y se reconoce que el desarrollo del pensamiento numérico les permitirá a las personas contar con las herramientas necesarias para participar de manera activa y asertiva en la sociedad. De esta manera, el aprendizaje de la numeración es un aprendizaje fundamental para el desarrollo social y cognitivo de cualquier persona. Obando, Vanegas y Vásquez (2006) indican que el papel de la escuela es promover situaciones en las que se potencie la construcción del concepto de número a partir de la interacción social. Así, se requiere que el docente reconozca que la constitución de estos conocimientos en el nivel inicial permite avanzar con mayor seguridad en el desarrollo de este pensamiento a lo largo de la escolaridad, y que por ende su reflexión debe ser constante, reconociendo la complejidad que implica el aprendizaje de la numeración y destacando su uso en los diferentes aspectos del contexto cercano al sujeto que aprende.

Por esta razón, en este artículo reportamos una experiencia de taller que se desarrolló con docentes de preescolar y primaria en el nivel inicial (4-7 años) como un espacio de reflexión y diálogo alrededor de la enseñanza y el aprendizaje de la numeración en la escuela. De esta manera, analizamos cómo las participantes comparten sus estrategias, experiencias y la posibilidad de contar con un conocimiento para su actuar en el aula y posibilitar en los niños y las niñas el desarrollo de habilidades numéricas que se deben propiciar en los niveles iniciales de escolaridad, además comprender y reflexionar sobre sus implicaciones en la constitución de otros saberes a lo largo de la educación básica.

Fundamento teórico

Las matemáticas son un saber social que se constituye de manera histórica a partir de las dinámicas sociales y diferentes prácticas en respuesta a las necesidades que las diferentes comunidades enfrentaron a lo largo de la historia de la humanidad, considerando esta visión sociocultural "El conocimiento es conocimiento cultural considerado como socialmente producido, siempre potencialmente cambiable, trabado con valores sociales y regulado socialmente" (Sierpinska y Lerman, 1996, p.846). De esta manera se constituye conocimiento matemático es una constructo social y se reconoce la necesidad de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática en la escuela, puesto que las matemáticas son consideradas un saber esencial para las personas que integran la sociedad, como lo indica Radford (2014) cuya teoría se inscribe en la línea de las teorías socioculturales actuales se considera que "El objetivo mayor de la enseñanza de las matemáticas es que el alumno aprenda a reflexionar de acuerdo con ciertas formas culturales de pensamiento históricamente constituidas que la distinguen de otras formas de reflexión" (p.115).

En relación a lo anterior, las matemáticas como saber fundamental forman parte del currículo escolar desde las etapas iniciales de formación, particularmente en Colombia en la ley general de educación ley 115 de 1994 en el artículo 16 en el cual se describen los objetivos específicos de la educación preescolar, en el literal b se especifica que en este nivel inicial deben brindarse las disposiciones iniciales para el aprendizaje de las matemáticas, de manera específica se determina que "El crecimiento armónico y equilibrado del niño, de tal manera que facilite la motricidad, el aprestamiento y la motivación para la lecto-escritura y para las soluciones de problemas que impliquen relaciones y operaciones matemáticas" (Ley 115, 1994).

En este sentido, una vez iniciada la educación preescolar los niños y niñas deben contar con experiencias que le permitan desarrollar sus saberes y habilidades matemáticas, la tarea del docente generar ambientes y proponer situaciones que le permitan a los niños constituir los saberes que lo disponen para el desarrollo de sus habilidades matemáticas a lo largo de la vida escolar. Se pueden determinar algunas habilidades fundamentales que se deben desarrollar en esta etapa inicial, en este trabajo se toma como eje fundamental para la reflexión los aspectos que se refieren de manera específica a la enseñanza y aprendizaje del pensamiento numérico, el cual según el Ministerio de Educación Nacional (MEN) en los estándares básicos de competencia se entienden como:

El desarrollo de los procesos curriculares y la organización de actividades centradas en la comprensión del uso y de los significados de los números y de la numeración; la comprensión del sentido y significado de las operaciones y de las relaciones entre números, y el desarrollo de diferentes técnicas de cálculo y estimación (MEN, 2006, p. 58).

Los sistemas numéricos son el objeto central en el desarrollo del pensamiento numérico, el cual se desarrolla de manera gradual a partir en el inicio de la vida escolar hasta finalizar la educación media. En este sentido, el MEN (1998) en lo lineamientos básicos para la educación matemática en Colombia indican que “El pensamiento numérico se adquiere gradualmente y va evolucionando en la medida en que los alumnos tienen la oportunidad de pensar en los números y de usarlos en contextos significativos” (p.43), por tanto se entiende que los conceptos y habilidades que se desarrollen desde la etapa inicial son fundamentales para garantizar el aprendizaje escalonado de estos conceptos y habilidades.

Dentro de las habilidades fundamentales para el desarrollo del pensamiento numérico encontramos el aprendizaje del sistema de numeración decimal, el cual es una construcción social que cuenta con una reglas y características en su constitución que son esenciales para acercarse a otros conceptos de las matemáticas, entre estas características se encuentra que es un sistema de base 10 en el cual se usan diez dígitos para la construcción de cualquier numeral 1,2,3,4,5,6,7,8, y 9, para buscar economía en la representación se realizan agrupaciones de 10 y el valor de cada cifra se determina por la posición de la cifra en la numeral de izquierda a derecha y es un sistema mixto, es decir aditivo y multiplicativo, estas dos propiedades aditiva y multiplicativa descritas por Ross (citado en Zunica, 2012) se refiera a

> Propiedad aditiva: la cantidad representada por todo el numeral es la suma de los valores representados por cada uno de los dígitos que lo componen.
> Propiedad multiplicativa: el valor de un dígito se da multiplicando su valor aparente por el valor asignado a su posición.

En este sentido el valor total del numeral está dado por la suma de los productos relativos de cada cifra dependiendo de la posición, por ejemplo el 345= (3 x10^2)+ (4 x10^1)+ (5x 10^0).

Comprender la complejidad de este sistema, permite reflexionar acerca de su enseñanza y las implicaciones para acceder a otros conceptos más avanzados de la matemática como lo son los algoritmos convencionales, al respecto Terigi y Wolman (2007) indican que “la enseñanza usual se diseña sobre el supuesto de que los niños tienen que comprender el sistema de numeración antes de comenzar a utilizarlo, pues el uso deviene de la correcta aplicación de los principios conceptuales que rigen al sistema” (p.72)

Una habilidad fundamental para la enseñanza de la numeración es el conteo y las técnicas de conteo como una de las primeras habilidades que se constituyen en la edad infantil, a partir de la interacción en diferentes contextos sociales aún antes de ingresar al contexto escolar los niños y niñas se enfrentan a situaciones en las cuales el conteo emerge como una estrategia para reconocer la cantidad de elementos presentes en un conjunto, en este sentido se entiende que contar consiste en “la acción de establecer la correspondencia biunívoca, cada nueva palabra número usada expresa la totalidad de objetos contados hasta el momento, y no tan solo como una etiqueta que representa el último objeto contado” (Obando y Vásquez, 2006, p.5). Esta herramienta de conteo le permite a los niños y niñas acercarse a otros procesos más complejos derivados de manera específica de las técnicas de conteo como lo son la composición, la descomposición y los conteos múltiples.

El proceso de descomposición corresponde a la práctica por medio de la cual una cantidad puede expresarse como la adición de dos o más partes menores a ellas por ejemplo el número 10 puede descomponerse de diferentes maneras, tales como 9+1, 5+5, 6+3+1 etc. La composición, por su parte, se considera como un proceso inverso a la descomposición, por medio del cual a partir del agrupamiento de las partes se obtiene una cantidad. Como puede observarse de manera natural, estas dos técnicas son fundamentales para constituir habilidades y estrategias de cálculo mental y escrito alrededor del pensamiento aditivo, en palabras de Obando y Vasquéz (2008):

> La composición y descomposición aditiva se constituyen en uno de los procesos fundamentales a través de los cuales el alumno logra la estructuración conceptual del número. Como tal no son operaciones matemáticas, sino procesos a través de los cuales se estructura un entramado conceptual base, tanto para el concepto de número, como para las operaciones aditivas (suma y sustracción). (p.9)

Por otra parte, la técnica del conteo múltiple, es una práctica que comprende el uso de unidades diferentes al conteo uno a uno, esto puede ser a partir del conteo de dos en dos, tres en tres, cuatro en cuatro etc. los cuales son esenciales para desarrollar habilidades de cálculo mental y escrito, así como la comprensión y uso de los algoritmos de la adición y sustracción, pero adicionalmente presentarán una base necesaria para la comprensión de la multiplicación y la división en tanto que se diseñen situaciones en las cuales los niños y niñas puedan realizar estos conteos de manera ascendente y descendente con fluidez. Adicionalmente, como indica Obando y Vasquéz (2008) “De especial importancia son los conteos de cinco en cinco y de diez en diez. Estos conteos, son claves para una buena comprensión del Sistema de Numeración Decimal, y para desarrollar estrategias de cálculo mental eficientes” (p.21)

De manera adicional, pueden encontrarse otras habilidades fundamentales en el desarrollo del pensamiento numérico como lo son las operaciones, la resolución de problemas, la estimación y el cálculo, entre otras. en las cuales se hace uso del número y que se desarrollan a lo largo de la vida escolar y le permiten a los estudiantes contar con herramientas necesarias para comprender y participar en la sociedad de la cual hacen parte. De esta manera, es fundamental que en la escuela se ofrezcan experiencias de aprendizaje para el desarrollo de estas habilidades numéricas a partir de contextos cotidianos y el uso del juego como un contexto ideal en el cual el uso del número cobra significado.

En relación a lo anterior, diversos autores como Bruner (1995), Decroly y Monchamp (2002), Michelet (1998) entre otros, señalan la existencia de diferentes contextos que se pueden considerar en el aula para el desarrollo del pensamiento numérico, y resaltan entre ellos el juego como una herramienta que dentro y fuera del aula, en contextos educativos, convoca a sus integrantes a participar y socializar y que al llevarse al aula con fines educativos representa una estrategia que es de manera natural motivadora, en la cual los niños y las niñas desarrollan sus procesos de comunicación, desarrollo corporal y cognitivo, entre otras ventajas que supone esta estrategia, descritas de manera amplia en la literatura por los autores mencionados.

En el contexto colombiano, el MEN presenta una serie de orientaciones pedagógicas para la educación inicial en el marco de la atención integral, en dichas orientaciones podemos encontrar de manera puntual el documento N° 22 en el cual se describe el juego en la educación infantil como una estrategia para la atención integral y de manera específica para al referirse al juego este se define como:

> Una creación humana, como fenómeno cultural y como una práctica social que informa sobre la organización ideológica, cultural y mental de las sociedades. Pensar el juego de esta manera ha comenzado a abrir un nuevo camino en el escenario educativo para reconocerlo y comprenderlo más allá de lo instrumental, para pensar que las variaciones culturales llevan a cambios en los modos de pensar y representar la realidad (MEN, 2014, p.18)

En relación a lo anterior, es tarea del docente identificar contextos cercanos para los estudiantes y promover en el aula ambiente para construcción de los saberes alrededor del número y habilidades fundamentales en matemáticas para su desarrollo escolar, es por esto que el juego se presenta como un ambiente ideal para esto, así como el desarrollo de otras habilidades como el trabajo en equipo, la toma de decisiones, argumentación, socialización entre otros, por esta razón es importante que los docentes participen de espacios de formación continua en los cuales puedan reflexionar de manera constante sobre su práctica misma y sus implicaciones en los procesos de aprendizaje de las matemáticas.

De manera particular, el docentes en formación y ejercicio debe comprender la esencia de los objetos de conocimientos con los cuales actúa en su práctica diaria de enseñanza, reconocer su carácter histórico y social, así como reflexionar sobre las prácticas matemáticas que llevan a cabo los estudiantes con dichos objetos y sus implicaciones para su desarrollo escolar futuro, esto le permitirá al docente transformar sus concepciones sobre este saber y de esta manera convertir su práctica de aula en un quehacer en constante movimiento y transformación.

En este trabajo de investigación se propone un espacio de formación continua de maestros con el objetivo de contribuir a la consolidación de conocimientos y reflexiones de las docentes de preescolar de un colegio de carácter privado de la ciudad de Medellín, a partir de experiencias alrededor del juego para la construcción de saberes y habilidades fundamentales de las matemáticas en las niñas de la institución, al reconocer que la formación continua de los docentes y las experiencias de formación son un espacio privilegiado para la transformación de las concepciones que los docentes tienen de la enseñanza y que de manera directa impactan los procesos de aprendizaje por parte de los estudiantes en el aula, de esta manera es común ver como desde las políticas públicas y los aspectos normativos para la educación se promueven estos espacios de formación para docentes, en el caso de Colombia en el decreto Decreto 709 de 1996 por el cual se establece el reglamento general para el desarrollo de programas de formación de educadores y se crean condiciones para su mejoramiento profesional, ya reglamentados en la ley 115 de 1994 en la ley general de educación.

Estos espacios de formación continua deben pensarse de tal manera que los participantes puedan encontrar herramientas para llevar a su práctica de aula al trascender los aspectos teóricos en función de pensar a partir de ellos nuevas experiencias y ambientes para llevar a cabo su tarea de formación, dichas experiencias de formación de docentes pueden tener variedad en la intencionalidad y el impacto en los docentes participantes y contribuir de manera significativa su desarrollo profesional, al posicionarlo como un ser que posee un saber y que dicho saber se construye y reconstruye en relación a la reflexión constante sobre su práctica, al respecto Guskey (2000) indica que el desarrollo profesional son “aquellos procesos y actividades diseñado para mejorar el conocimiento, las habilidades y las actitudes profesionales de los educadores para que, a su vez, mejoren el aprendizaje de los estudiantes” (p.16).

Para analizar el impacto de estos espacios de formación y sus implicaciones en el proceso de desarrollo profesional, Krainer (1987) presenta 4 dimensiones fundamentales que permiten analizar el éxito de una experiencia de formación de docentes, descritas de la siguiente manera:

> Acción: La actitud y la competencia en trabajo dirigido a un objetivo constructivo y experimental
> Reflexión: La actitud y la competencia en ser crítico de las propias acciones que se reflejan sistemáticamente en el trabajo;
> Autonomía: La actitud y la competencia en ser proactivo, organizarse y ser determinante en el trabajo.
> Trabajo en red: actitud y competencia en el ámbito comunicativo y trabajo cooperativo con cada vez más relevancia pública (p.282)

Estas cuatro dimensiones se presentan como aspectos fundamentales para mejorar los procesos de formación de docentes, de manera que les permitan a los participantes del espacio trascender aspectos teóricos para pensar el otras acciones que puedan impactar su práctica y construir comunidades de aprendizaje como resultado de la reflexión constante de su práctica y acción concreta en el aula.

Metodología

Dado que el objetivo de este artículo fue analizar cómo un grupo de docentes de educación infantil comparten sus estrategias, experiencias y la posibilidad de contar con un conocimiento para su actuar en el aula y posibilitar en los niños y las niñas el desarrollo de habilidades numéricas en los niveles iniciales de escolaridad, nos movemos en un paradigma fenomenológico hermenéutico y un enfoque cualitativo. Esta elección la fundamentamos en que es una metodología que nos permite reconocer la realidad a partir de diferentes miradas y además de ello, apoyarnos en aspectos sociales y en la experiencia. Para este artículo, el paradigma y el enfoque nos permitieron analizar de manera local y específica la información recolectada (Guba y Lincoln, 2000).

El taller que acá analizamos fue llevado a cabo con 10 maestras de Educación preescolar que enseñan matemáticas a niñas entre los 4 y 7 años aproximadamente de un colegio de carácter privado del municipio de Medellín, para esta época las maestras utilizaban la modalidad de alternancia (virtual y presencial) dada la contingencia presentada por el virus SARS-CoV-2, causante del Covid-19, la institución en la que prestan sus servicios se caracteriza por el trabajo con situaciones cotidianas y que tengan cierta aplicabilidad, además que es indispensable el uso de las fichas numéricas como material didáctico. Aclaramos que por permisos de uso de datos recopilamos y analizamos la información de 4 de las maestras participantes.

Para el desarrollo del taller con docentes en ejercicio utilizamos tres momentos. El primero corresponde a la reflexión sobre aquellos saberes que se consideran fundamentales para acceder al aprendizaje del pensamiento numérico. El segundo propone el desarrollo de varias tareas en la modalidad de carrusel (por bases). Y, el tercer momento tuvo como objetivo sintetizar las reflexiones que las maestras desarrollaron acerca de su práctica docente, a partir de la experiencia en las diferentes bases. En dichas bases se propusieron diversas tareas, propias de la educación preescolar y primaria, mediadas por el uso de billetes decimales, regletas y juegos estructurados entre otras, a través de las cuales los participantes exploran conceptos y habilidades correspondientes al pensamiento numérico que se desarrollan en la etapa de la educación inicial, pero que tienen incidencia directa en los aprendizajes posteriores relacionados con dicho pensamiento.

En este taller se propuso el desarrollo de 5 situaciones que se desarrollaron por los docentes participantes, las cuales permitieron generar reflexiones en torno a la enseñanza de la numeración en la primera infancia y de esta manera promover asuntos que pueden mejorar el desempeño en grados de escolaridad más avanzados. En la tabla 1 mostramos cada una de las situaciones propuestas con una breve descripción, sus materiales y algunos asuntos matemáticos trabajados.

Tabla 1. *Descripción de las situaciones propuestas a las docentes.*

Nombre de la tarea	Descripción	Materiales	Asuntos matemáticos
Canastas mágicas	En el desarrollo de esta tarea los niños y niñas se involucran en un juego que les permite desarrollar sus habilidades de cálculo a partir de conteos múltiples, la adición y comparación de números.	10 tapas de gaseosa 1 canasta de huevos vacía, pintada de 4 colores diferentes Tabla de registro	Razonamiento multiplicativo Comunicación Suma
Regletas de colores	Este material está destinado a que los niños y niñas comprendan la noción de número, realicen composición y descomposición e iniciarles en las actividades de cálculo, por medio de diversas representaciones del 10.	Regletas	Composición y descomposición Comparación de números.
Billetes decimales	En esta tarea se utiliza un material desarrollado por una de las autoras, compuesto por potencias de 10 para reconocer las características del sistema de numeración y operaciones básicas.	Fichas rectangulares con denominaciones de 1, 10, 100, 1000 etc.	Composición y descomposición Sumas y restas Multiplicaciones y divisiones

Play a Game (Hechos numéricos que dan 10)	Este es un juego tomado del material propuesto por la editorial Pearson para potenciar habilidades de composición de hechos numéricos que suman 10.	Tablas para registrar Fichas del 0 al 9 en una bolsita para elegirlas de manera aleatoria	Hechos numéricos de 10 Suma Composición y descomposición

Elaboración propia.

Para identificar los elementos que iban surgiendo en la implementación del taller utilizamos las grabaciones de audio y video, observación participante y documentos producidos por las docentes como técnicas (Gewandsznajder y Alvez-Mazzoti, 1998). Las cuales fueron documentadas por medio de instrumentos como transcripciones de las grabaciones y reflexiones a partir de nuestras discusiones, las cuales nos permitieron describir cómo las maestras utilizan sus experiencias y lo aprendido en las formaciones para transformar su actuar en el aula y posibilitar en los niños y las niñas el desarrollo de habilidades numéricas en los niveles iniciales de escolaridad.

A lo largo de la recolección de información y análisis, nosotras como investigadoras adquirimos una responsabilidad con respecto a la información utilizada y por ende debemos responder a esa responsabilidad por medio de algunos elementos. El primero de ellos tiene que ver con la firma de un consentimiento informado en donde especificamos posibilidades, riesgos y características de la participación en el proceso; además de que nos comprometimos a mantener informados a las maestras en todo lugar y momento de lo que se pretende con la información producida por ellas (Galeano, 2016).

En este artículo utilizamos las producciones orales y escritas de las docentes. Lo anterior implicó un análisis en el que sus voces y nuestras percepciones como investigadoras se pusieron en diálogo con los aportes teóricos revisados con respecto a la enseñanza de aspectos fundamentales en la enseñanza de la numeración Obando, Vanegas y Vásquez (2006), el uso del juego como herramienta didáctica y la evaluación de este espacio de formación de maestros a partir de cuatro dimensiones fundamentales como lo son la acción, la reflexión, la autonomía y el trabajo en red. Utilizamos el análisis de una palabra, frase u oración (Strass y Corbin, 2002) al identificar, analizar y reportar aspectos que son repitentes con respecto a las ideas y percepciones de las docentes, y su articulación con su práctica utilizados para defender sus propuestas.

Para el análisis de la información hicimos un proceso de codificación de los audios recolectados en la implementación del taller y una encuesta realizada unos meses después de culminado el proceso. Para la codificación utilizamos una tabla de excel en la que clasificamos la información acorde con lo planteado por Krainer (1987) en sus 4 dimensiones para la evaluación y planeación de los espacios de formación de maestros y sus implicaciones para el desarrollo profesional a partir de cuatro dimensiones: la acción, la reflexión, la autonomía y el trabajo en red. Allí utilizamos la diferenciación por colores de cada una de las categorías como se muestra en la tabla 1.

Tabla 2. *Categorías para el análisis de la información.*

Categorías			
Acción	**Reflexión**	**Autonomía**	**Trabajo en red**
Hace referencia a la actitud y la competencia en trabajo dirigido a un objetivo constructivo y experimental	Hace referencia a la actitud y la competencia en ser crítico de las propias acciones que se reflejan sistemáticamente en el trabajo	Hace referencia a la actitud y la competencia en ser proactivo, organizarse y ser determinante en el trabajo.	Hace referencia a la actitud y competencia en el ámbito comunicativo y trabajo cooperativo con cada vez más relevancia pública

Elaboración propia.

Resultados

En este espacio de formación de docentes emergieron diferentes reflexiones y posturas alrededor de la práctica docente de las participantes, así como nuevos planteamientos alrededor de su quehacer diario en el aula e implicaciones en el desarrollo del pensamiento matemático de sus estudiantes.

Al hacer un análisis de los datos recolectados por medio de las grabaciones, fotografías y encuestas que se hicieron a las participantes, como se muestra en la figura 1, se identificó que espacios de formación permite que los participantes tomen un papel activo en el proceso, interactúen de manera directa con los materiales y así desarrollen las tareas que se proponen, posicionándose en el papel del estudiante.

Figura 1. *Interacción de las docentes en el desarrollo de las situaciones.*

Elaboración propia.

En este proceso se destacan las dimensiones como (i) la acción, que permite reconocer la importancia de direccionar sus prácticas a un objetivo común, en este caso la enseñanza de la numeración. (ii) La reflexión, la cual transforma la mirada que los adultos pueden tener sobre los saberes, conceptos y habilidades matemáticas, los cuales de manera general se naturalizan al dejar de lado la complejidad que supone la construcción de estos saberes y objeto matemáticos, el recorrido histórico que permitió su constitución, entre otras. (iii) la autonomía, que dinamiza los espacios en pro de una organización del trabajo en comunidad para lograr un objetivo. Y, (iv) el trabajo en red que reconoce la cooperación para el desarrollo de experiencias.

La primera dimensión que se destacó en el proceso fue la acción dado que las participantes constantemente daban a conocer lo que realizaban y su importancia a partir de lo que se compartió con ellas en el taller, en las discusiones encontrábamos frases como: "Acá tenemos que hacer una tabla [maestra refiriéndose a lo que deben hacer para solucionar una tarea propia del juego que estaba desarrollando]" (Grabación 5 de octubre 2020 minuto 0:58), “En la virtualidad yo las puse a hacer papeles, la semana pasada las puse a hacer papeles y entonces era así: Las puse a hacer lectura de números y les dije que tenían que guardarlas para trabajar con ellas" (Grabación 5 de octubre 2020 minuto 12:18) y “Podríamos decirle a la niña te salió el 8 ¿cuál te falta? [maestra refiriéndose a lo que podrían hacer con sus estudiantes a partir de una actividad]”. (Grabación 5 de octubre 2020 minuto 14:17). En estas afirmaciones dadas por las participantes se reconoce el sentido de identificar cuál es el papel del conocimiento en las diversas actividades y cómo a partir de estas las profes develan cómo podrían ser vividas por sus estudiantes.

Con respecto a la reflexión puede observarse en la siguiente transcripción de uno de los audios, es este episodio P1 (participante 1) desarrolló una tarea que involucra el uso de los billetes decimales para la representación de cantidades y avanzó en su tarea hasta preguntarse por la representación de números que involucran millares, lo cuales se usan de manera particular en la denominación del dinero a lo cual ella comenta " Es muy difícil comprender el valor del dinero, pues tan chiquitas"(23:15), esto nos permite observar cómo su mirada sobre la enseñanza de este saber se transforma para comprender su complejidad, más adelante la misma participante le comenta a una de sus compañeras "Piensa como tu hija, no pienses como adulto"(26:28), esta última es una invitación que ella hizo para que sus compañeras se posicionarán también como unas estudiantes en el desarrollo de la tarea, lo cual les permite encontrar los problemas que podría encontrar sus estudiantes, los análisis que ellos podrían hacer de la tarea, así como las estrategias y procedimientos que podría utilizar y que les permite adelantarse para la planeación de futuras actividades y/o su planificación.

Otro de los momentos en los que se identifica que las participantes lograron reflexionar alrededor de la importancia de su participación en el espacio de formación fue cuando se les pide explicar con sus palabras los objetivos del espacio, una de las participantes indicó que: “buscar nuevas estrategias para desarrollar los diferentes pensamientos matemáticos en el aula”, lo cual evidencia que la participante logró reconocer la importancia de proponer otros ambientes de participación en el aula para la enseñanza de la numeración y de manera adicional. En este sentido otra de las participantes profundiza un poco más al indicar que el objetivo del taller es “Dar a conocer estrategias, herramientas y material didáctico que se trabaja en primaria para tener una idea como debemos ir preparando a las niñas de preescolar”, lo cual destaca la importancia del desarrollo de las habilidades fundamentales en matemáticas en los niveles iniciales para garantizar que los estudiantes desarrollen su pensamiento matemático de manera efectiva en los siguientes años de escolaridad.

En cuanto a la autonomía, uno de los objetivos del espacio de formación fue presentarles algunas posibles situaciones para el desarrollo de las habilidades fundamentales como la composición, conteos múltiples, sistema de numeración entre otras, con el objetivo de que las participantes lograran proponer estas u otras actividades para ser llevadas en el aula. Durante el desarrollo mismo del taller, las participantes proponen variaciones para la actividades o adecuaciones que ellas podrían hacer al comprender la metodología de alternancia con la cual se trabajaba en el momento, los intereses de sus estudiantes, ritmos y procesos atencionales, un ejemplo de ello puede observarse en el siguiente diálogo “P1 estaba haciendo una propuesta con el juego anterior de las fichas que salen (se refiere a make a ten): Si dado el caso el niño se demora y se demora y se demora...Y saque el 4 puedo preguntarle mejor ¿cuánto te falta?... P1: Eso puede dar mucho análisis”, esto evidencia que la metodología mediante la cual se desarrolló el taller y en el cual las participantes resuelven e interactúan con las tareas y el material permite que las docentes puedan replantearse alternativas para su desarrollo en clase en relación a su contexto e intereses educativos. SIn embargo,para garantizar el desarrollo efectivo de estos procesos de formación y que tengan un impacto en los procesos de enseñanza y aprendizaje en el aula, es necesario un acompañamiento a los participantes sobre su ejecución y planeación en el aula, ya que como podemos observar, 8 meses después del espacio de formación solo una de las participantes comentó en la encuesta haber desarrollado de manera autónoma un actividad similar, ella indica lo siguiente: “La verdad he trabajado conteo con material concreto , comparación de cantidades , descomponer cantidades en grupos de dieces y de unos , conteo de 2 en 2 , 3 en 3 , 4 en 4 , 5 en 5 , 10 en 10 , ordinalidad , seriación numérica (número anterior y posterior) todo esto enmarcado en los proyectos de aula", en cuanto a las demás participantes comentan que no lo recuerdan o que fue difícil desarrollarlo en la metodología de virtualidad.

En cuanto al trabajo en red es una dimensión que no se prioriza en este espacio de formación, si bien se permitió la reflexión conjunta por parte de las participantes, esto no logró materializarse, ya que al preguntarles ¿con qué frecuencia te reunes con compañeras para llevar a cabo la planeación de actividades encaminadas al desarrollo de las habilidades trabajadas en el taller? dos participantes respondieron que solo algunas veces planean con sus compañeras, mientras una de ellas indicó que siempre planea sola y solo una respondió casi siempre planean juntas, Para enriquecer el trabajo en esta dimensión en futuros espacios de formación, puede proponerse actividades para la creación conjunta de tareas que permitan desarrollar estas habilidades matemáticas fundamentales en los estudiantes de primera infancias, de manera que las participantes cuenten la una experiencia previa de trabajo en red y puedan contemplar sus beneficios para la reflexión y planeación de sus actividades de aula.

Finalmente, las maestras resaltaron la importancia de este tipo de tareas como la base de los procesos numéricos que los estudiantes seguirán en la básica (8-15 años) e incluso en la educación media (15-17 años), los cuales influyen de manera significativa en su relación con las matemáticas y el desarrollo de habilidades fundamentales para su transitar en la vida escolar. De igual forma reconocieron en las tareas contextos intencionales como la lúdica, el juego y el arte, entre otros, que permiten relacionar diversos pensamientos y dinamizar los procesos de aprendizaje de las matemáticas en el aula de clase y sus implicaciones para los aprendizajes futuros y las relaciones emocionales que pueden formar con el aprendizaje de las matemáticas. Este espacio de formación, les permitió posicionarse como un estudiante frente al entendimiento y ejecución de una tarea, lo cual enriquece los procesos de planeación y acompañamiento de estos espacios una vez se lleven al aula.

Conclusiones

El objetivo de este artículo fue analizar cómo un grupo de docentes de etapa preescolar comparten sus estrategias, experiencias y la posibilidad de contar con un conocimiento para su actuar en el aula y posibilitar en los niños y las niñas el desarrollo de habilidades numéricas en los niveles iniciales de escolaridad, para ello utilizamos el análisis del discurso desde la palabra, frase u oración, en el que como investigadoras y articulando los elementos teóricos de las 4 dimensiones, para la planeación y evaluación de espacios de formación propuestos para maestros, reconocimos que con este tipo de espacios se logra develar categorías como la acción, la reflexión y la autonomía.

Las situaciones que se propusieron el en taller y los aspectos metodológicos que se consideraron permitió que las docentes participantes establecieran diversas reflexiones en torno a los saberes y habilidades que esperan que sus estudiantes desarrollen en sus clases, al colocar una mirada diferente siendo ellas quienes desarrollaban las tareas les implicó vincular esta experiencia con su saber pedagógico y proponer diversas variaciones de las situaciones de manera que pudieran responder a las necesidades del contexto propio en el cual desarrollan su práctica docente y tomar un papel más activo en este espacio de formación.

En este sentido la metodología de taller permitió que las docentes resolvieran tareas y que al interactuar con el material comprendieran las formas de accionar, pensar y resolver las tareas por sus estudiantes; sin embargo, se reconoce que se deben replantear acciones en las que puedan priorizarse asuntos como la autonomía en el sentido de generar posibilidades y espacios para proponer actividades en red que enriquezca el proceso de formación de las participantes y lograr impactar los procesos educativos dentro del aula. Si bien, se profundizó en las reflexiones y sobre los fundamentos para la enseñanza de la numeración, es importante que en estos espacios aprovechando la sensibilidad frente al tema que aporta la experiencia en el taller, se permita un espacio para la construcción y diseño por parte de los docentes en los cuales puedan poner en práctica los elementos trabajados con miras a ser llevado a la práctica de aula.

Así, proponemos que, para llegar a estas últimas categorías (la autonomía y el trabajo en red), este tipo de procesos de formación debe incluir espacios para la construcción y diseño por parte de los participantes para que puedan poner en práctica los temas trabajados, así como brindar espacios de acompañamiento y asesoría en la implementación de los mismos, así garantizar la puesta en práctica de los aprendizajes compartidos y las herramientas trabajadas en el taller.

Referencias

Congreso de Colombia. (8 de febrero de 1994) Ley General de Educación. [Ley 115 de 1994]. DO: 41.214.

Galeano, M., 2016. Diseño de proyectos en la investigación cualitativa. 1st ed. Medellín: Universidad Eafit, pp.1-83.

Gewandsznajder, F., e Alves–Mazzotti, A. (1998). *O método nas Ciências Naturais e Sociais*. São Paulo: Pioneira.

Guba, E., y Lincoln, Y. (2000). Paradigmas en competencia en la investigación cualitativa. En *Por los rincones. Antología de métodos cualitativos en la investigación social* (pp. 113-145).

Guskey, T., 2000. Evaluating professional development. 1st ed. California: Corwin, pp.1-221.

Krainer, K. (2002). Investigation into practice as a powerful means of promoting (student) teachers' professional growth. In European research in mathematics education II. Proceedings of the second conference of the European Society for Research in Mathematics Education (pp. 281-291).

Ministerio de Educación Nacional. (1998). Lineamientos Curriculares de Matemática. Bogotá, Colombia: Magisterio.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Bogotá, Colombia: Magisterio.

Obando, G. y Vásquez, N. (2008). Pensamiento numérico del preescolar a la educación básica. Curso dictado en 9° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (16 al 18 de Octubre de 2008). Valledupar, Colombia.

Obando, G. Vanegas, M. y Vásquez, N. (2006). Pensamiento numérico y sistemas numéricos: Módulo 1. Universidad de Antioquia (Colombia).

Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Special Issue on Semiotics, Culture and Mathematical Thinking, 103-129.

Scholz, O. y Montiel, G. (2017). Problematización de la trigonometría en la génesis histórica de la trigonometría. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 30*, 1018-1026.

Sierpinska A., Lerman S. (1996) Epistemologies of Mathematics and of Mathematics Education. In: Bishop A.J., Clements K., Keitel C., Kilpatrick J., Laborde C. (eds) International Handbook of Mathematics Education. Kluwer International Handbooks of Education, vol 4. Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-009-1465-0_2

Strauss, A. and Corbin, J., 2016. Bases de la investigación cualitativa. Técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada. 1st ed. Medellín: Editorial Universidad de Antioquia, p. 1-354.

Terigi, F. y Wolman, S. (2007). Sistema de numeración: Consideraciones acerca de su enseñanza. Revista Iberoamericana de Educación, 43(4), 59-83.

Zunica, Y. (2012). Conceptualización del valor posicional en la escritura de números en el sistema decimal en los alumnos del cuarto grado de la escuela sotero barahona (Tesis de maestría). Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, Tegucigalpa, Honduras.

VOL34, NÚMERO 2, AÑO 2021

CUESTIONES ACTUALES EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

CURRENT ISSUES IN TRAINING OF MATHEMATICS TEACHERS

Myrian Luz Ricaldi Echevarria
Universidad Femenina del Sagrado Corazón. (Perú)
myrianluz@hotmail.com

Resumen
En el escrito se analizan los aportes vinculados a la variable formación de profesores de matemáticas y se plantea una propuesta para la capacitación continua de docentes en actividad. El estudio forma parte de una investigación, aún en desarrollo, que pretende transparentar los vínculos entre la formación de profesores y la evaluación de los aprendizajes. La investigación recoge aportes teóricos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico y el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática para caracterizar la formación de profesores de matemática atendiendo a la formación inicial y continua, con el objetivo de tender puentes que los vinculen para un ejercicio profesional efectivo. Los aportes teóricos permiten un análisis multidimensional que cobra sentido en la ejecución, la cual está condicionado por decisiones políticas e institucionales que se espera vean a la formación de profesores como una oportunidad real para transformar la educación. En cuanto a la metodología, el escrito es descriptivo y se enmarca dentro del paradigma cualitativo. Algunos de los aspectos priorizados son la reflexión como práctica cotidiana, el acompañamiento docente, la influencia de la formación docente en el aprendizaje de los estudiantes y el desarrollo de competencias en contextos institucionales.

Palabras clave: Formación de profesores, matemática, didáctica de la matemática

Abstract
This paper analyses contributions linked to the variable training of teachers of mathematics and proposes a proposal for the continuous training of in-service teachers. The study is part of ongoing research that aims to make the links between teacher training and learning assessment transparent. The research includes theoretical contributions from the Anthropological Theory of the Didactics and the Ontosemiotic Approach to Cognition and Mathematical Instruction to characterize the training of mathematics teachers in terms of initial and continuous training, with the aim of building bridges that link them to an effective professional practice. The theoretical contributions allow a multidimensional analysis that makes sense in the implementation, which is conditioned to political and institutional decisions that see in the training of teacher a real opportunity to transform education. In terms of methodology, the paper is descriptive and is framed within the qualitative paradigm. Some of the aspects prioritized are reflection as daily practice, teacher accompaniment, the influence of teacher training on student learning and the development of competencies in institutional contexts.

Key words: Teacher training, mathematics, didactic of mathematics

Planteamiento del problema

La mayoría de docentes de matemática del nivel secundaria del Perú, se forman en universidades e institutos de educación superior; así lo confirman los resultados de la Encuesta Nacional a Docentes (Ministerio de Educación del Perú, 2018) que señala que el 93,4% de los docentes en ejercicio estudió educación como primera carrera. Además, de los docentes de secundaria, el 18,7% son de la especialidad de matemática. La gran mayoría adquiere su formación didáctica como parte de su formación profesional, ya en el ejercicio profesional basan su práctica en la experiencia, en el contacto con colegas y en capacitaciones. La formación de los docentes de matemática está condicionada por planes curriculares y propuestas de formación continua, principalmente de las instituciones de formación profesional y del Ministerio de Educación (MINEDU); además, ya en su ejercicio profesional los docentes, generalmente, utilizan las estrategias y métodos de enseñanza que se emplearon con ellos durante su experiencia como estudiantes (Ministerio de Educación, 2018).

En Perú, se cuestiona la calidad de los profesores, especialmente los de matemática. Por ello, se intentan definir una buena docencia desde el análisis de los planes de formación inicial y continua de los profesores de matemática. Esto exige, al mismo tiempo, una intensa preparación conceptual, no solo sobre la disciplina matemática, sino también sobre los aspectos didácticos de este campo del conocimiento. Esta preparación debería incluir también el conocimiento de las dificultades y errores que los estudiantes muestran en el aprendizaje de la matemática a nivel escolar y, el planteamiento de actividades que superen estas limitantes. Sin embargo, los cuestionamientos no profundizan en aspectos técnicos y propios de la disciplina matemática tales como que la acción didáctica del profesor de matemática obedece a cuestiones instituciones, no personales. El presente escrito de carácter documental describe el status de las investigaciones sobre la formación didáctica del profesor de matemática, priorizando los estudios que miran reflexivamente las prácticas del propio docente y las que reconocen al profesor como principal agente de mejoras en el aprendizaje de la matemática. Consideramos que el punto de partida es explorar las percepciones del propio docente sobre los aspectos vinculados a su formación y a partir de ellos proponer cambios profundos en los mecanismos para profesionalizar su labor. Por ello, planteamos el siguiente objetivo: Analizar las dimensiones consideradas en el estudio de la variable formación didáctica del profesor de matemática en el contexto Latinoamericano.

Dada su relevancia en el contexto de la investigación en educación aplicada a la didáctica de la matemática se considera importante desarrollar el presente estudio, ya que mostrará evidencias de las posibilidades y dificultades de cambios en la formación didáctica del profesor de matemática. Esta investigación forma parte de una investigación en curso cuyos resultados pretenden constituirse en una estrategia reflexiva para la generación de un modelo de formación didáctica, específica, para los docentes de matemática. La propuesta culmina con el establecimiento de algunos ejes en torno a los cuáles se estructuraría un plan de entrenamiento docente para la reeducación de profesores de matemática.

Revisión de literatura

Santillán (2020), determina la incidencia de la formación profesional docente en las habilidades matemáticas en una unidad educativa de la ciudad de Lima. El estudio recogió información de una muestra de 15 docentes del área de matemáticas, a través de dos cuestionarios de 30 ítems cada uno. La investigación es de tipo no experimental, presenta un enfoque cuantitativo, con diseño correlacional causal. Se concluyó que la formación profesional docente incide de forma significativa en las habilidades matemáticas de los docentes del contexto donde se realizó el estudio. En razón a lo anterior, el autor recomienda realizar cursos de didáctica matemática, puesto que estos cursos inciden de forma significativa en las habilidades matemáticas de los docentes.

Muñiz- Rodríguez, Aguilar- González y Rodríguez- Muñiz (2020) identifican los perfiles del futuro profesor de matemática a partir de la percepción de los propios docentes sobre la adquisición de sus competencias, relacionándolos con su formación previa. La muestra del estudio estuvo formada por 124 sujetos procedentes de universidad públicas y privadas de España. La recolección de los datos del estudio se realizó mediante un cuestionario on-line que toma como referencia 33 competencias clasificadas en 12 áreas con respuestas tipo escala Likert. El análisis de los resultados permitió identificar tres perfiles que tienen diferentes correlaciones con la percepción de haber adquirido las competencias de conocimiento matemático y pedagógico- tecnológico. Este estudio justifica la necesidad de diseñar e implementar intervenciones que permitan superar las debilidades de cada uno de estos perfiles durante el periodo de formación inicial docente. Para los autores es preciso poner mayor énfasis en el desarrollo de competencias relacionadas con la gestión del aula, la retroalimentación y la toma de decisiones en la comunidad educativa. Por otro lado, consideran recomendable contrastar estos resultados con un instrumento de análisis basado en la observación de la práctica docente durante el periodo de formación.

También Mendoza (2019) analiza las creencias que poseen los estudiantes de la especialidad de Matemática- Física del Instituto Pedagógico Nacional Monterrico sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. El autor desarrolla la investigación en tres dimensiones: las creencias sobre la matemática como ciencia, el papel de las matemáticas en la sociedad y sobre la enseñanza, aprendizaje. El estudio utilizó una metodología cuantitativa, para recoger la información se tomó el cuestionario original de Camacho, Hernández y Socas al cual se le redujeron el número de ítems. Algunos resultados del estudio revelan que el 77% de los futuros maestros creen que la matemática es una ciencia abstracta y que tanto la reflexión como el cálculo son importante en la resolución de problemas. En relación al conocimiento matemático, consideran que éste permite comprender situaciones del entorno, acceder al conocimiento de otras ciencias y reconocen su valor para desarrollar otras habilidades de pensamiento superior.

Ruiz-Olarría, Bosch y Gascón (2019) se plantearon la pregunta: ¿Cuáles son las cuestiones cruciales que deben afrontar los profesores en su práctica docente y qué puede hacer la formación para ayudarlos a construir respuestas satisfactorias a estas cuestiones? Para responder a este cuestionamiento, los autores proponen una metodología de reconstrucción de praxeologías matemáticas para la enseñanza basada en el dispositivo didáctico: recorridos de estudio e investigación (REI) en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD). En el escrito se señala que los REI son procesos de estudio que buscan integrar la razón de ser de los saberes escolares y con esto generar condiciones para una actividad más funcional. Bajo esta perspectiva, es totalmente natural la transformación de las condiciones de trabajo del profesorado, además de un replanteamiento radical del tipo de formación necesaria para la enseñanza de la matemática. La propuesta, en el marco de la TAD, plantea preguntas iniciales que forman parte de la problemática de la profesión y para las cuáles se irán elaborando poco a poco respuestas colectivas a partir de las respuestas personales de los participantes. En el transcurso de este proceso deben emerger variedad de respuestas institucionales para distintos escenarios. Finalmente, para los autores se debe cuestionar y analizar en profundidad la dinámica del REI, en lo que respecta a las praxeologías matemáticas construidas, la organización didáctica del proceso, la articulación de los momentos de estudio, las técnicas y tecnologías aplicadas.

Monteiro (2018), estudia la relación entre la formación del profesorado de matemáticas y el fracaso/éxito en la asignatura de Matemáticas, del 5º al 8º año de escolaridad en la isla de Santiago, en Cabo Verde, con el fin de comprender si la formación que se imparte en las escuelas de formación otorga a los profesores competencias científicas, didácticas y pedagógicas y si, con esas competencias, logran superar los problemas relativos al fracaso que surgen en la enseñanza de la asignatura. El estudio es de enfoque mixto, para la recolección de datos emplea tres técnicas, dos cualitativas (análisis documental y entrevista semiestructurada) y una cuantitativa (cuestionario). La investigación concluye que, el éxito en el aprendizaje de la matemática está relacionado con la formación inicial y continua de los profesores, que la buena enseñanza de la matemática está estrechamente relacionada a los conocimientos matemáticos y a la actitud del profesor hacia la innovación e inserción en la comunidad profesional. Además, que el perfil de ingreso de los futuros docentes condiciona el perfil de salida.

Medina (2017) tuvo como objetivo principal mejorar el rendimiento de los alumnos de secundaria en la asignatura de Matemáticas mediante la modificación de la calidad didáctica de los profesores de esa asignatura. Para ello diseñó una escala para evaluar la calidad didáctica de los docentes, analizó si la calidad didáctica predice el rendimiento en la asignatura en matemática, y por último analizó la eficacia de una intervención online para profesores. El método aplicado en la investigación fue cuantitativo-experimental, la muestra estuvo formada por

548 alumnos de educación secundaria y 26 profesores. Para evaluar la eficacia de la intervención online a los profesores se recogieron datos de los estudiantes a través de un cuestionario y del docente investigador quién observó a los docentes durante su trabajo en clases. El estudio concluyó que a nivel interclase, la calidad didáctica predice el rendimiento de los estudiantes y que los estudiantes logran mejores resultados si son capaces de perseverar en el estudio. También que, la implicación se comportaba como una variable mediadora entre la calidad didáctica del profesor y el rendimiento en matemática; que existe relación entre los comportamientos específicos de los profesores en relación a la calidad académica y el funcionamiento académico óptimo. Al mismo tiempo, el escrito afirmó que la intervención online fue eficaz, ya que luego de su aplicación los factores relacionados con la calidad didáctica, la motivación para aprender y las calificaciones fueron mejores en el grupo experimental.

Por otro lado, Seckel (2016) analizó las competencias profesionales que debe tener un profesor para enseñar matemática. El foco de atención de su estudio es la práctica pedagógica En el escrito la autora profundiza en el conocimiento de los procesos formativos que se llevan a cabo para desarrollar la competencia en análisis didáctico en la Formación Inicial de Profesores de Educación Básica con Mención en Matemática en Chile, contexto en el que dicha competencia recibe el nombre de competencia reflexiva. Para su investigación, Seckel, propuso dos objetivos generales, el primero fue describir el estado actual de la competencia reflexiva en estudiantes de la carrera de Pedagogía Básica con Mención en Matemática y, el segundo, fue comprender las prácticas pedagógicas de una profesora luego de recibir una formación para desarrollar dicha competencia en sus estudiantes. Algunos de los hallazgos de su estudio evidencian que antes no se había planificado de manera intencionada el desarrollo de esta competencia en los futuros profesores y que éstos desconocían de marcos de referencia para su ejecución. El efecto positivo de la propuesta se observa en la práctica reflexiva tanto de la profesora como de sus estudiantes. Los lineamientos teóricos aplicados en la propuesta corresponden al Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS).

Por otro lado, Pochulu, Font y Rodríguez (2016) explican el proceso de construcción de una secuencia de tareas profesionales, realizadas por formadores de futuros profesores de Matemáticas, y analizan cómo esto influye en el desarrollo de su competencia en análisis didáctico. El estudio describe cómo los formadores de futuros profesores incorporan y usan adecuadamente herramientas para la descripción, explicación, valoración y mejora de procesos de enseñanza de los futuros profesores de secundaria, todo esto en estricta coherencia con las orientaciones curriculares. El aporte de Pochulu y otros formó parte de un curso virtual a docentes en Argentina el cual tuvo las siguientes fases: seminario virtual, encuentro presencial inicial, implementación de la secuencia de tareas, selección de episodios de las clases registradas en vídeo, análisis didáctico presencial y un encuentro presencial final. El marco teórico que empleo fue el Enfoque Ontosemiótico de la Instrucción y la Cognición de Godino, Giacomone, Batanero y Font (2017), especialmente, lo relacionado a los criterios de idoneidad didáctica los cuáles según el estudio tienen relevancia en el proceso de diseño instruccional y de ejecución misma, si es acompañada de indicadores operativos que permitan la posterior reflexión.

Fundamentos teóricos

En referencia a los estudios mencionados en el acápite anterior, los marcos teóricos que fundamentan las investigaciones en el contexto Latinoamericano están principalmente asociadas a la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) y al Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS).

Con relación a la TAD, desarrollada por Yves Chevallard (2001) se aportan los constructos praxeologías y las funciones didácticas. También, la TAD ofrece un modelo epistemológico para el análisis de la actividad humana en su dimensión institucional. Entendiéndose esta como una organización social estable que enmarca las actividades humanas y que las hace posible, al mismo tiempo, según el enfoque teórico de la TAD las instituciones ofrecen recursos tanto materiales como intelectuales producidas por las comunidades para resolver problemas con regularidad y eficiencia.

Por otro lado, el EOS aplica las herramientas de análisis didáctico propuestas desde el modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas (CCDM), las cuales se basan en constructos del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática de Godino et al (2017). Buscamos a partir de los aportes teóricos de estas dos teorías, ya consolidadas en el campo de la educación matemática, construir un sistema de justificaciones que permitan proponer un marco de referencia para la variable formación didáctica del profesor de matemática.

Formación didáctica del profesor de matemática

Definimos la formación didáctica del profesor de matemática como la descripción de la habilidad adquirida al ejecutar el acto de enseñar matemática, esto incluye la habilidad para planificar acciones didácticas en matemáticas, utilizar diversas estrategias de enseñanza, conectar áreas de desarrollo de la matemática y de otras disciplinas; y su capacidad para diseñar y aplicar instrumentos de evaluación eficaces y pertinentes. Es decir, nos ubicamos en el saber didáctico de lo pedagógico y del saber hacer de la enseñanza- aprendizaje. La utilización de diversos tipos de problemas y estrategias, proporcionan diferentes conocimientos y habilidades que en contextos escolares se deben hacer evidentes, por tanto, se considera relevante revisar los planes de formación docente para evaluar la presencia de estos elementos. En este sentido, partimos de las premisas que la formación de los profesores incide sobre la relación del profesor de matemáticas con el contenido que debe enseñar; asimismo, que la formación del docente debe estar atravesada por la concepción de formación permanente, en este sentido, ya en actividad, se requiere facilitar a los docentes un espacio y tiempo para reflexionar sobre sus acciones, compartir experiencias con otros docentes y, elaborar proyectos conjuntos para el desarrollo de competencias interdisciplinares. Al mismo tiempo, se hace necesario diseñar un plan para vincular la formación inicial con la formación permanente de los profesores en general y de los docentes de matemática en particular. Esto exige cambios estructurales que partan de un financiamiento económico y una propuesta real en el largo plazo, que supere intereses particulares y visiones reactivas que cuestionan y critican las iniciativas positivas.

La teoría antropológica de lo didáctico y la formación de los profesores

La TAD fue uno de los primeros enfoques en considerar como objeto de estudio e investigación, no sólo las actividades de enseñanza y aprendizaje en el aula, sino todo el proceso que va desde la creación y utilización del saber matemático hasta su incorporación en la escuela como saber enseñado. Dicho objeto de estudio incluye, además, todas las instituciones que participan en este proceso entre las que se cuentan los profesores, considerados como institución, y también aquellas que intervienen en su formación inicial y continua. El aporte de las investigaciones, desde la TAD, a la formación de profesores se focaliza en los siguientes aspectos:

- El de la profesión, incluye al conjunto de los actores de la enseñanza de las matemáticas, así como los formadores de profesores, los responsables ministeriales de la enseñanza de las matemáticas e incluso los investigadores de la enseñanza de las matemáticas.
- El de los problemas de la profesión, los que surgen en el ejercicio mismo de la docencia o los que se identifican por la observación y el análisis de las condiciones y de las restricciones que la afectan.

Desde esta perspectiva, para la TAD, los problemas y dificultades que encuentran los docentes no son debido a sus limitaciones personales, sino que se deben al desarrollo incipiente de su profesión como institución. En consecuencia, la interpretación de los problemas docentes son problemas de la profesión. La responsabilidad de buscar respuestas a los mismos no recaería sobre el profesor individualmente sino sobre la institución de la profesión. Así lo corroboran Gascón y Bosch (2007) cuando afirman "se pone el acento en el profesor como individuo más que como sujeto o agente de una institución y, entonces, se reduce la capacidad educativa del sistema de enseñanza a la suma de lo que cada profesor puede ofrecer en su clase" (p. 211). Realmente, la posición de la TAD que mira al docente como parte de un sistema mayor, es una cuestión real. Si las competencias que todo docente debe tener son conocidas y el sistema de formación permite adquirirlas y desarrollarlas, luego las deficiencias en la enseñanza son responsabilidad individual de los profesores; sin embargo, las competencias del docente de matemática están en cambio y revisión permanente y el sistema escolar no se ajusta a esos cambios. En otras palabras, los sistemas de formación distan mucho de atender a los requerimientos del docente.

Otro aporte de Chevallard (2006) es que es imprescindible pensar en la dialéctica que existe ente el sistema de enseñanza de las matemáticas (SEM), el sistema educativo (SE) y el sistema de formación de profesores de matemática (SFM). Este autor afirma que de no hacerlo caeríamos en una perspectiva reduccionista, y por lo mismo demanda la necesidad de investigaciones que aborden la problemática del docente desde una visión institucional. Propone analizar primero el estado de desarrollo de la ciencia didáctica, luego el desarrollo del sistema escolar y su adecuación al estado de los conocimientos científicos. En este sentido, la presente investigación, aún en curso, considera analizar la formación docente desde una dimensión institucional tomando como dimensiones la formación inicial del futuro docente y la formación continua del docente en actividad con esto se atiende el SE y el SFM. Por otro lado, las investigaciones desarrolladas en el marco de la TAD postulan que la profesión de profesor de matemática, es una profesión en construcción así Ruíz- Olarría y Sierra (2011) proponen que el problema de la formación del profesorado se plantee como uno de los grandes problemas de la didáctica: el de los vínculos entre desarrollo de la ciencia didáctica, el desarrollo del sistema de enseñanza y la formación de sus agentes.

Para la TAD y siguiendo el trabajo de Cirade (2006), se distinguen tres tipos de praxeologías docentes directamente relacionadas con la formación de los profesores de matemáticas:

- Las praxeologías matemáticas a enseñar (conocimientos matemáticos que hay que enseñar).
- Las praxeologías matemáticas para la enseñanza (conocimientos matemáticos necesarios para enseñar). Comprende los saberes matemáticos que se tienen que enseñar, que van más allá de lo que aprenden en su formación inicial.
- Las praxeologías didácticas (necesarias para gestionar, analizar y evaluar la manera de realizar la enseñanza).

Todos estos elementos considerados por la TAD se constituyen en base fundamental para el análisis de la formación didáctica del profesor de matemática.

Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática

Este enfoque propone un modelo de conocimientos y competencias didáctico-matemáticas (CCDM) que abarca las dimensiones matemática, didáctica y meta didáctico-matemático. La primera dimensión alude a los conocimientos matemáticos que debe tener un profesor; la segunda dimensión didáctica refiere a los conocimientos sobre aspectos involucrados en los procesos de enseñanza y aprendizaje de matemáticas y la tercera dimensión el meta didáctico-matemática trata a los conocimientos que debe tener un profesor para poder sistematizar la reflexión sobre su práctica y así emitir juicios valorativos sobre su práctica o la de otros (Breda et al., 2017; Pino-Fan et al., 2016).

Para el enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS) el énfasis está en las competencias matemática y didáctica cuya caracterización según Breda et al. (2017) consiste en “Diseñar, aplicar y valorar secuencias de aprendizaje propias, y de otros, mediante técnicas de análisis didáctico y criterios de calidad, para establecer ciclos de planificación, implementación, valoración y plantear propuestas de mejora”. Esto implica que el profesor tenga conocimientos para describir y explicar lo que sucede en el proceso enseñanza aprendizaje. Así también requiere conocimiento para proponer mejoras, las cuáles emergen principalmente de su experiencia y, que forman parte de su formación inicial y continua en el ejercicio de su profesión docente.

El EOS formula cinco sub-competencias, las cuales están asociadas a cinco herramientas conceptuales y metodológicas:

- Competencia de análisis de significados globales (basada en la identificación de situaciones-problemas y prácticas operativas, discursivas y normativas implicadas en su resolución).
- Competencia de análisis ontosemiótico de las prácticas (identificación de la trama de objetos y procesos implicados en las prácticas)
- Competencia de gestión de configuraciones y trayectorias didácticas (identificación de la secuencia de patrones de interacción entre profesor, estudiante, contenido y recursos)
- Competencia de análisis normativo (reconocimiento de la trama de normas y metanormas que condicionan y soportan el proceso instruccional)
- Competencia de análisis de la idoneidad didáctica (valoración del proceso instruccional e identificación de potenciales mejoras).

Formación inicial docente

Reconocemos que los profesores encaminan el éxito educativo: su conocimiento y desempeño son factores que contribuyen para el logro de un aprendizaje idóneo y por ello su formación ocupa un lugar importante en la gestión de políticas educativas de los gobiernos. Ducoing, Orozco, Chuquilin y González (2017) consideran el desarrollo profesional como "un proceso multidimensional que articula la formación docente (inicial y en servicio), la carrera docente (condiciones laborales) y la evaluación del desempeño".

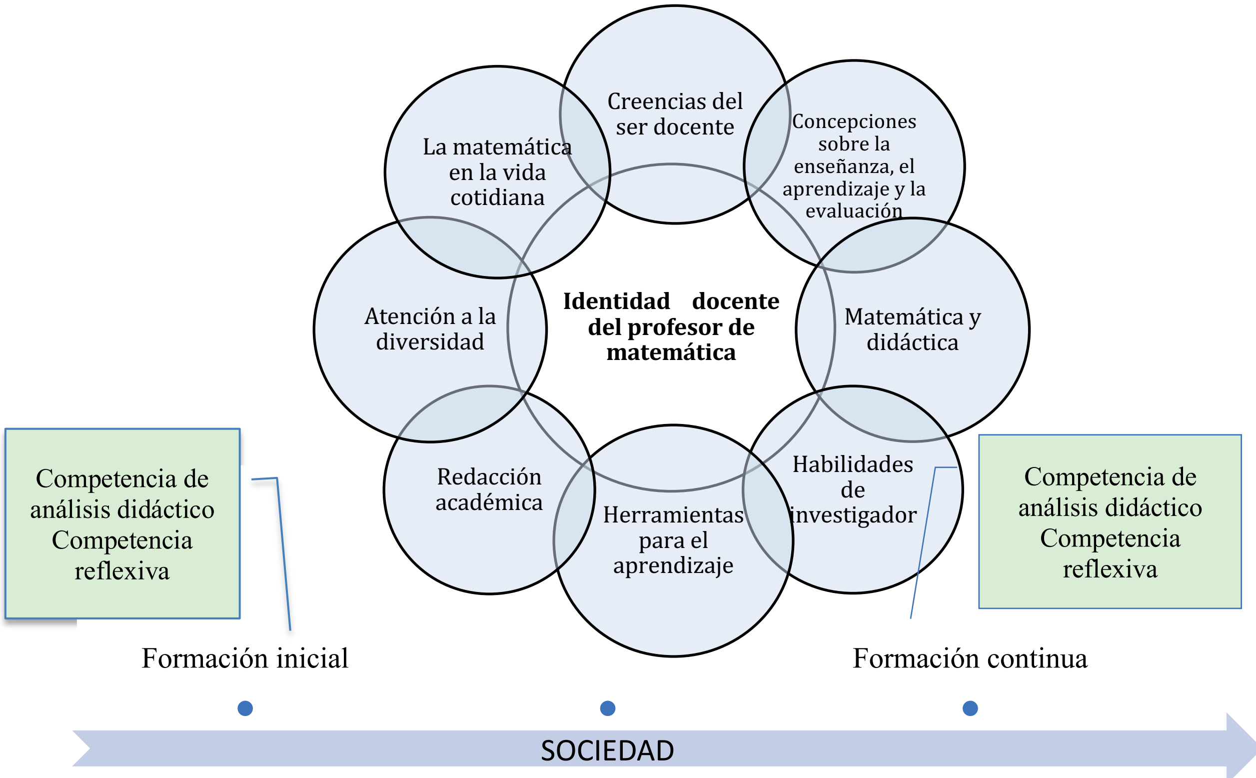
Formación continua docente

En cuanto a la formación en servicio de los docentes el dominio 4 del Marco del Buen Desempeño Docente está relacionado al desarrollo de la profesionalidad y la identidad docente, así indica textualmente "comprende el proceso y las prácticas que caracterizan la formación y desarrollo de la comunidad profesional de docentes. Refiere la reflexión sistemática sobre su práctica pedagógica … y su participación en actividades de desarrollo profesional" (Ministerio de Educación del Perú, 2014, p. 26). Además, en el mismo documento se precisa la competencia 8: "reflexiona sobre su práctica y experiencia institucional y desarrolla procesos de aprendizaje continuo de modo individual y colectivo, para construir y afirmar su identidad y responsabilidad profesional" (Ministerio de Educación del Perú, 2014, p. 27). En este escenario, la formación continua ocupa un lugar importante en el discurso teórico, los maestros son considerados actores clave del éxito educativo. En ese sentido, estudios recientes como el de Bruns y Luque (2014) han aportado evidencias que indican que la calidad del desempeño docente es un factor clave para el logro de los aprendizajes de los alumnos. A este respecto, el desarrollo profesional articula tres componentes: la formación inicial que tiene que ver con las experiencias previas y los saberes prácticos de los docentes, las características y necesidades de las prácticas educativas específicas y las instituciones que organizan las acciones de formación continua. Estos elementos están asociados a los indicadores que pretendemos analizar en la presente investigación. El estudio del contexto, la realidad del Perú nos obliga a considerar la influencia de otros factores, como los institucionales, socio-comunitarios y las condiciones de trabajo, en el desarrollo profesional. Aspectos de creciente interés y considerados tanto por la TAD y como por el EOS.

En ese sentido, la formación continua está atravesada por cuestiones idiosincráticas, las cuáles definiremos como creencias o concepciones del docente. Ese elemento idiosincrático, es un elemento que caracteriza la complejidad de los planes de formación. Creemos que es imprescindible considerar las creencias, concepciones y conocimientos que los profesores tienen y encaminar estos hacia una identidad docente del profesor de matemática.

De lo dicho, se hace necesario mirar la figura del docente desde un enfoque multidimensional. En el ejercicio profesional se tiene que definir la identidad docente del profesor de matemática; a continuación, se presenta una propuesta de las dimensiones que se tienen que atender en los planes de formación docente inicial y continua.

Figura 1. *Dimensiones para los planes de formación docente.*



Elaboración propia.

Discusión

Pochulu, Font y Rodríguez (2016) describen y construyen un perfil docente sobre la base de las competencias didácticas, su propuesta tiene el importante valor que es validada desde la práctica, en ese sentido, la metodología de trabajo podría simularse en la presente investigación en curso. En diferentes países de Latinoamérica, incluyendo el Perú, la formación de docentes en inicio y en actividad, es un aspecto que está promoviendo y que está generando cambios en los planes de formación. Sin embargo, considero que este se tiene que planificar en el largo plazo, con una visión multidimensional y considerando los aportes de la investigación didáctica específica. Al mismo tiempo, las propuestas de formación deben tener un fundamento epistemológico que ubique la formación del profesor de matemática en un contexto más amplio, institucional, tal como lo propone la Teoría Antropológica de lo Didáctico. Esta visión institucional permitirá superar los marcos de periodos gubernamentales y analizar las conexiones entre las instituciones de un país.

Otro aspecto priorizado en las investigaciones tiene que ver con valorar las percepciones del propio docente, su experiencia profesional y el reconocimiento de necesidades profesionales no atendidas, tal como mencionan Muñiz-Rodríguez, Aguilar- González y Rodríguez- Muñiz (2020).

En referencia a los aportes desde la Educación Matemática, se tiene que precisar que se están construyendo marcos teóricos que aportan importantes elementos para el análisis de las prácticas docentes. Así, no sólo se debe orientar al aspecto práctico, sino fundamentalmente al aspecto teórico, el tránsito natural de la teoría a la práctica y viceversa es lo que se enfatiza en aportes como el de Seckel (2016), la profundidad de sus aportes y la valoración de la reflexión didáctica es un elemento que bien vale la pena considerar en una nueva propuesta de formación docente. Un aspecto todavía en desarrollo es el cómo ejecutamos estos en planes disciplinares densos, tal vez la respuesta está en la transdisciplinariedad, quizá sea el momento de dejar la atomización de cursos porque ello complica el prestar atención a todo. Actualmente, los gobiernos están orientados a mejorar los planes de formación docente, entendiéndose que los profesores son parte de la solución del problema educativo y, de ninguna manera son parte del problema. La complejidad del fenómeno educativo hace que se plantee el cuestionamiento, sino será necesario un cambio radical en nuestras prácticas y a todo lo que asumimos como aceptado, tal vez allí esté el germen de un verdadero cambio positivo.

Propuesta

Las instituciones formadoras de profesores, es decir, universidades e institutos de educación superior deben ser el canal para implementar una propuesta masiva, gradual y de alcance nacional para capacitar a los profesores de manera continua a nivel de cursos de posgrado. Esto implica un importante reembolso económico de los gobiernos y una adecuada estructuración de los planes curriculares y propuestas de formación. Lo que se requiere es cambiar la estructura de pensamiento de los docentes y satisfacer las necesidades de enseñanza con cursos reestructurados para atender las nuevas demandas.

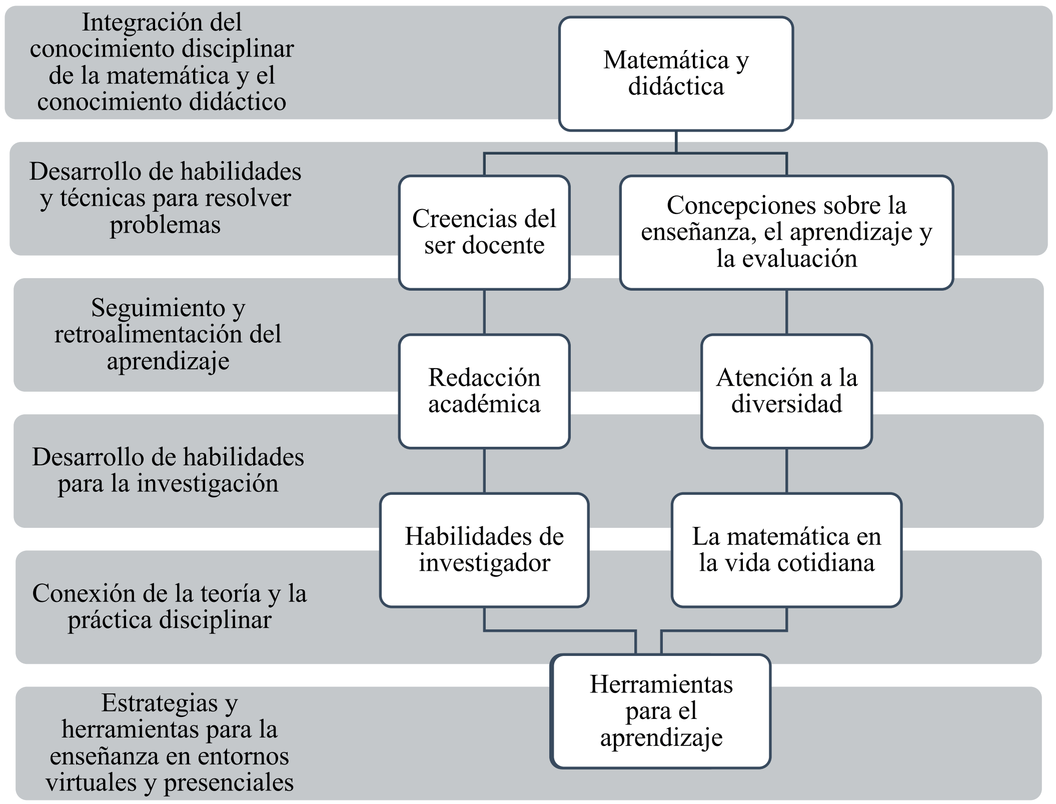
Creemos, basándonos en las experiencias de otros países, que sería ideal que durante el periodo de capacitación en posgrado el docente se dedique de manera exclusiva a estudiar e investigar. Lamentablemente, en Perú, propuestas de formación como las descritas no forman parte de iniciativas gubernamentales.

Teniendo en cuenta la revisión teórica consideramos organizar la propuesta de formación en función a los siguientes ejes:

- Integración del conocimiento disciplinar de la matemática y el conocimiento didáctico.
- Desarrollo de habilidades y técnicas para resolver problemas.
- Seguimiento y retroalimentación del aprendizaje de los estudiantes.
- Desarrollo de habilidades para la investigación
- Conexión de la teoría y la práctica disciplinar.
- Estrategias y herramientas para la enseñanza en entornos virtuales y presenciales.

Al mismo tiempo, consideramos relevante reconceptualizar la experiencia del docente y encaminarla hacia la reflexión de su propia práctica, para ello, nos basamos en la experiencia y validación de estudios previos. Para ello, es vital diseñar actividades, oportunidades, herramientas y un entorno que promueva metacognición, autoanálisis y reflexión. Sin ser exhaustivos, precisamos que la propuesta de entrenamiento incluya acciones de práctica, en centros educativos anexados a las universidades o centros, especialmente, seleccionados que se convertirían en escenarios para las prácticas del programa de entrenamiento.

Figura 2. *Relación entre los ejes y las dimensiones para los planes de formación docente*



Elaboración propia.

Referencias

Breda, A., Pino-Fan, L., y Font, V. (2017). Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: criteria for the reflection and assessment on teaching practice. *Eurasia Journal of Mathematics, Science y Technology Education, 13*(6), 1893-1918.

Bruns, B. y Luque, J. (2014). *Profesores excelentes. Cómo mejorar el aprendizaje en América Latina y el Caribe*. Banco Mundial.

Chevallard, Yves. (2001). Aspectos problemáticos de la formación docente. *Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas*, pp. 1-10. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=15

Chevallard, Y. (2006). Las matemáticas en las escuelas y la revolución epistemológica venidera. *Journées de l´APMEP,* Clermont- Ferrand.

Cirade, G. (2006). *Devenir professeur de mathématiques: entre problèmes de la profession et formation en IUFM: Les mathématiques comme problème professsionel* [Tesis doctoral]. Université de Provence.

Ducoing, P., Orozco, B., Chiquilin, J. y González, O. (2017). La formación docente en Europa y América Latina: Reino Unido, Perú y Bolivia. *Congreso Nacional de Investigación Educativa.* San Luis Potosí.

Gascón, J. y Bosch, M. (2007). La miseria del "generalismo pedagógico" ante el problema de la formación del profesorado. En L. Ruiz-Higueras, A. Estepa y F. J. García (Eds.), *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico* (TAD) (pp. 201- 240). Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Godino, J., Giacomone, B., Batanero, C., y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema, 31*(57), 90-113.

Medina, E. (2017). *La calidad didáctica en Matemáticas: una propuesta de evaluación y una intervención breve* [Tesis doctoral]. Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, Las Palmas de Gran Canaria.

Mendoza, J. (2019). *Creencias que tienen los futuros maestros sobre las matemáticas y su enseñanza- aprendizaje*. [Tesis de maestría]. Universidad de Piura, Lima.

Ministerio de Educación del Perú. (2018). Encuesta Nacional a Docentes de Instituciones Educativas Públicas y Privadas (ENDO). http://escale.minedu.gob.pe/uee/-/document_library_display/GMv7/view/5384052;jsessionid=e944965a5473de785b43fc67d44

Ministerio de Educación del Perú (2014). Marco del Buen Desempeño Docente

Monteiro, L. (2018). *Formación de profesores de matemática y el fracaso en la disciplina de matemática.* [Tesis Doctoral]. Universidad de Extremadura.

Muñiz- Rodríguez, L., Aguilar- González, A. y Rodríguez- Muñiz, L. (2020). Perfiles del futuro profesorado de matemáticas a partir de sus competencias profesionales. *Enseñanza de las Ciencias, 38* (2), 141-161.

Pino-Fan, L., Godino, J., y Font, V. (2016). Assessing key epistemic features of didactic-mathematical knowledge of prospective teachers: the case of the derivative. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 1-32.

Pochulu, M., y Font, V., y Rodríguez, M. (2016). Desarrollo de la competencia en análisis didáctico de formadores de futuros profesores de matemática a través del diseño de tareas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 19* (1), 71-98.

Ruíz- Olarría, A. y Sierra, T. (2011). La formación matemático-didáctica del profesorado de secundaria. En M. Bosch, J. Gascón, A. Ruíz-Olarría, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, G. Cirade, C. Ladage y M. Larguier (Eds*). Un panorama de la TAD* (pp. 465-483). CMR Documents, vol 10. Centre de Recerca Matemática.

Ruiz- Olarría, A., Bosch, M., y Gascón, J. (2019). Construcción de una praxeología para la enseñanza en la institución de formación del profesorado. *Educación Matemática, 31*(2), 132-160.

Santillán, R. (2020). *Formación profesional docente y su influencia en habilidades matemáticas en una unidad educativa, cantón San Miguel, provincia de Bolívar.* [Tesis de maestría]. Universidad César Vallejo.

Seckel, M. (2016). *Competencia en análisis didáctico en la formación inicial de profesores de educación general básica con mención en matemática.* [Tesis doctoral]. Universidad de Barcelona, Barcelona.

VOL34, NÚMERO 2, AÑO 2021

PERCEPCIONES DE LA FORMACIÓN INICIAL DE FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICAS PARA EL NIVEL MEDIO SUPERIOR. CASO UAMCEH – UAT

PERCEPTIONS OF THE INITIAL TRAINING OF FUTURE TEACHERS OF MATHEMATICS FOR THE HIGHER MIDDLE LEVEL. CASE UAMCEH – UAT

Evelyn Anahi Soto Jasso, Evelia Reséndiz Balderas
Universidad Autónoma de Tamaulipas. (México)
evelynsotojasso@hotmail.com, erbalderas@docentes.uat.edu.mx

Resumen
El objetivo general del trabajo de investigación es analizar el enfoque formativo a través de la percepción de los egresados de la Licenciatura de Ciencias de la Educación con acentuación en Enseñanza de las Matemáticas. Se realizó una investigación cualitativa a través del método de estudio de caso, basado en la teoría socioepistemológica. Se realizaron 10 entrevistas y a través del análisis de estas entrevistas se pudo describir que el enfoque formativo que sigue la acentuación se basa en la *Socioepistemología*, aportando aspectos no solo cognitivos, sino también, didácticos, epistemológicos y socioculturales.

Palabras clave: formación de profesores, enseñanza de las matemáticas, educación media superior

Abstract
The general objective of this research work is to analyze the formative approach through the perception of graduates of the Bachelor’s degree in Education Sciences focused on Mathematics Teaching. A qualitative research was carried out, through the case study method, based on the socio-epistemological theory. Through the analysis of ten conducted interviews, it was possible to describe that the formative approach used in mathematics teaching is based on socio-epistemology, providing not only cognitive aspects, but also didactic, epistemological, and socio-cultural aspects.

Key words: teacher training, mathematics teaching, upper-secondary education

Introducción

Esta investigación aborda las percepciones de la primera generación de egresados de la Universidad Autónoma de Tamaulipas (UAT), respecto a su formación inicial docente para así, conocer el enfoque teórico – formativo, es decir, cómo se enseña en una unidad académica en la Licenciatura de Ciencias de la Educación con Acentuación en Enseñanza de las Matemáticas, los egresados de esta licenciatura son formados para trabajar en el nivel básico y Nivel Medio Superior (a partir de aquí lo llamaremos NMS).

La presente investigación se origina al reflexionar la importancia del papel del docente en el proceso de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas donde podemos decir que la labor del profesor de matemáticas es fundamental para desarrollar entre sus estudiantes el interés por el conocimiento, para favorecer el desarrollo de su propio pensamiento matemático y para coadyuvar al crecimiento del saber (Reséndiz, 2004). Para que el docente pueda despertar el interés en el estudiante, él debe tener ciertas aptitudes y habilidades las cuales las adquiere en el ejercicio profesional o bien, en la formación profesional. Por ello, la importancia de esta formación, que no solo sea rica en conocimientos, sino también, en aspectos pedagógicos. Todo ello relacionándolo con el bajo rendimiento de los alumnos en la Educación Media Superior (a partir de aquí la llamaremos EMS), PLANEA (2017) muestra un bajo rendimiento y a través de distintas investigaciones se ha dicho que tiene gran influencia el tipo de enseñanza y para esto, el docente juega un papel muy importante, la forma de enseñanza del docente es una imitación del cómo aprendió, es decir, en esta investigación se debe analizar desde el origen, la formación de los profesores de matemáticas para la EMS. La investigación se realiza porque se considera de gran importancia conocer que están haciendo algunas escuelas formadoras de profesores de matemáticas para EMS.

Las investigaciones de Vaillant (2013) y la Comisión Nacional de Acreditación (2018), afirman que a nivel latinoamericano la formación inicial docente, presenta algunas problemáticas respecto a su enseñanza, ya que está enfocada en aspectos teóricos y las prácticas pedagógicas no están enfocadas correctamente. La Comisión Económica para América Latina y el Caribe (CEPAL, 2003), reporta que, cerca de 37% de los adolescentes latinoamericanos que tienen entre 15 y 19 años, abandonan la escuela a lo largo del ciclo escolar. Es por eso el interés por estudiar la enseñanza de este nivel educativo. Es decir, el tipo de práctica docente que se imparte podría ser uno de los factores por el cual existe bajo rendimiento, y en el peor de los escenarios, deserción escolar.

El objetivo general es analizar el enfoque formativo a través de la percepción de los egresados de la Licenciatura de Ciencias de la Educación con acentuación en Enseñanza de las Matemáticas (primera generación). Los objetivos específicos son: identificar la formación de los profesores de educación superior que preparan a los futuros profesores de matemáticas para NMS, identificar las habilidades, destrezas y aptitudes que debe tener un profesor de matemáticas de EMS y mostrar cómo se está enseñando a los futuros profesores de matemáticas para el NMS.

Marco teórico

La teoría socioepistemológica propone un Rediseño del Discurso Matemático Escolar (RDME) que considere al saber matemático como conocimiento en uso alejándose así del tradicional enfoque en los objetos matemáticos, considerando las experiencias cotidianas de los individuos a través de prácticas socialmente compartidas (Cantoral, Reyes-Gasperini y Montiel 2014). Esta teoría es tomada como base del trabajo, ya que se busca analizar si existen prácticas socialmente compartidas en la formación de los futuros profesores de matemáticas o en el mejor de los casos, si su plan de estudio y programa está basado en dicha teoría. Además, dicha práctica docente será analizada desde este enfoque teórico.

La Socioepistemología, en tanto aproximación teórica emergente de la Matemática Educativa, da explicaciones incorporando la dimensión social sobre cómo los seres humanos construyen conocimiento matemático situado, poniendo en primer plano la idea de práctica social como norma de la construcción del saber. Dentro de esta disciplina, la Socioepistemología ha hecho planteamientos novedosos, poniendo al centro de la discusión, más que a los conceptos, a las prácticas sociales asociadas a determinado conocimiento. […] En este sentido, [se ha logrado] romper la centración en conceptos y en individuos que aprenden, por otra que pone el énfasis en las prácticas y en las comunidades. Ello exige de marcos teóricos adecuados a los tiempos (Cantoral, 2010, pp. 1051-1052).

Con lo anterior, podemos afirmar que aquel futuro profesor de matemáticas que se esté formando bajo esta teoría, será un profesional que no considere solo al conocimiento como primordial sino, que considere que la construcción social del saber puede lograrse a través de prácticas socialmente compartidas. Y así como la Socioepistemología da pautas de las cuestiones que son parte de la construcción del conocimiento matemático, ha dado también elementos de análisis para entender al rol docente y a la Formación Docente en particular (Crespo, Homilka y Léston, 2013). Esto último es de gran interés ya que no solo mira que la práctica docente sea aquella que considere distintos aspectos, sino que, si se analiza desde la formación de futuros profesores, ésta será mucho más natural al momento de llegar al aula de clase.

De forma general, esta teoría propone una alternativa al programa clásico que se tiene, el cual se resume en la siguiente tabla:

Tabla 1. *Alternativa al programa clásico.*

PROGRAMA CLÁSICO	PROGRAMA ALTERNATIVO
Racionalidad universal	Racionalidad contextualizada
Currículum fijo	Currículum flexible
Basado en objetos	Basado en prácticas
Discurso Matemático Escolar-fijo	Rediseño del Discurso Matemático Escolar
Reificación como norma	Práctica social como norma
Centrada en el sujeto	Centrada en comunidades

Tomado de (Cantoral, 2016).

La tabla 1 nos muestra algunos cambios propuestos por la teoría para que los programas educativos consideren distintos aspectos, teniendo como objetivo *aprendizajes significativos* para el estudiante, así como desarrollar el pensamiento matemático. En primer lugar, nos habla sobre la contextualización del conocimiento matemático, es decir, que se considere el contexto real del alumno. También se busca que el currículo sea flexible, es decir, que el docente tenga libertad para manejar ciertos aspectos, como, por ejemplo, la selección de contenido matemático. Además, propone que el programa este basado en prácticas y no solo en objetos, es decir, que se pueda experimentar, hacer, construir, relacionar conocimiento matemático. También es importante rediseñar ese dME que ha estado establecido por muchos años (y se sigue permeando), es decir, que se reconsidere y rediseñe la forma en cómo se está enseñando dentro del aula. También, eliminar esa idea de la reificación como norma y considerar la práctica social, es decir, dejar de ver al estudiante como una persona que no es consciente ni libre para adquirir aprendizajes sino, que a través de las prácticas sociales involucrar al estudiante en el contenido matemático para que éste pueda construir este conocimiento. Por último, se propone que el aprendizaje deje de estar centrado en el sujeto y se centre en comunidades, es decir, considerar más aspectos a la hora de llevar a cabo el proceso de enseñanza – aprendizaje.

Según Montiel (2010) el diseño de un programa de formación docente, aunque esté centrado en un propósito didáctico debe considerar a quién o quiénes va dirigido, es decir, debe considerar variables según donde se lleve a cabo dicho programa. Aunque se tengan objetivos generales para los docentes, los programas deben contener características específicas para mayor eficiencia ya que influirá mucho el contexto donde se llevará a cabo.

La Organización de las Naciones Unidas para la Educación la Ciencia y la Cultura (UNESCO, 2014) refiere que el conocimiento que el docente tiene de la asignatura de matemáticas suele reflejarse claramente en la puntuación o el aprovechamiento de los alumnos en las pruebas estandarizadas, ella solo considera como "importante" o "relevante" que el docente tenga conocimientos de matemáticas, pero está dejando de lado la didáctica, la cual hemos analizado que es fundamental para que el alumno obtenga un aprendizaje significativo. Es decir, si el docente no sabe cómo enseñar, el estudiante difícilmente obtendrá aprendizajes. Además, sin profundizar en el tema de las pruebas estandarizadas podemos decir que éstas solo se enfocan en la memorización de contenidos matemáticos y dejan de lado el uso y razonamiento que se pretende que el alumno tenga respecto a la matemática educativa.

Hoy en día, en la enseñanza de la matemática en EMS y cualquier otro nivel, deben considerarse distintos aspectos y desde la Socioepistemología hay que considerar 4 dimensiones según Reyes (2016): la *dimensión didáctica* que se ocupa de los mecanismos de difusión institucional del saber, la *dimensión cognitiva* que se ocupa de los procesos de apropiación del saber, la *dimensión epistemológica* que trata sobre la naturaleza del saber y la *dimensión social* (o sociocultural) que concierne al uso situado del saber.

También, hay un acuerdo generalizado en el área de educación matemática, el profesor de matemáticas debe tener un cierto nivel de competencia matemática, es decir, ha de conocer y ser capaz de realizar las prácticas matemáticas necesarias para resolver los problemas matemáticos usualmente abordables por los estudiantes del nivel correspondiente, y debe saber articularlos con los bloques temáticos posteriores (Godino, Giacomone, Batanero y Font, 2017). Con ello, podemos afirmar que es importante el conocimiento matemático siempre y cuando se articule con una enseñanza significativa ya que hoy en día el no saber cierto conocimiento no es de gran relevancia ya que gracias a las tecnologías podemos acudir a ellas y obtener aquellos pasos a seguir o cierto conocimiento que queremos saber, por lo tanto, lo esencial es saber cómo enseñar el conocimiento que se tiene y buscar la forma más efectiva para que los alumnos adquieran un aprendizaje significativo.

De forma general, la formación de profesores toma distintos caminos según donde se esté educando al futuro docente, para nuestra investigación se tomó la definición que comparte Santos (2010) donde nos dice que existen dos modos de propiciar la formación, en el primero, el profesor es un aplicador de teorías y prescripciones que han nacido fuera de la entraña de su quehacer, el otro modelo considera al profesional como una persona capaz de diagnosticar, comprender y transformar su práctica. El profesor se interroga e investiga para encontrar la respuesta a las preocupaciones que le presenta el desarrollo su actividad cotidiana. Ambos modelos son realistas, aunque siguiendo la teoría que es base para nuestra investigación, podemos asegurar que el cambio encamina hacia allá, es decir, buscamos que la enseñanza para el profesor le permita desenvolverse en el segundo modelo, que, si bien es importante tener conocimiento teórico, consideramos de gran importancia que el docente este abierto a nuevas alternativas según las necesidades de sus alumnos y el cambio que la sociedad sufre al paso del tiempo.

Es importante mencionar que distintos autores han estudiado la formación que reciben los futuros profesores de matemáticas y encuentran que su formación se centra mayormente en el conocimiento matemático, al menos en los cursos tradicionales de matemáticas que cursan, se centra en aspectos abstractos, es decir, solamente en definiciones y conceptos de la matemática escolar (Opazo, Cordero y Silva, 2018a y 2018b; Soto, 2014). Como menciona Flores (2014), la formación que se le da a los profesores que ejercerán en preescolar y educación básica está a cargo de las normales y de los centros de actualización del magisterio, sin embargo, los futuros profesores para NMS y superior no tienen estos espacios para formarse, por lo tanto, estas plazas son cubiertas por profesionales egresados de universidades o centros de educación superior cuya formación es de ingenierías, matemáticos, contadores, actuarios o provienen de otras profesiones, por lo que se hacen profesores de Matemáticas durante el ejercicio de su profesión. Lo antes mencionado, nos demuestra que la persona que está frente a un grupo de alumnos en el NMS puede tener conocimientos suficientes sobre la matemática, pero carece del saber de cómo se enseña dicha ciencia, es por eso por lo que la enseñanza tradicional sigue siendo de gran impacto y utilizada en la actualidad. Es decir, si los docentes de matemáticas siguen una enseñanza tradicional es que fueron formados de forma tradicional o bien, que su formación no está orientada en la pedagogía, es por eso, que el problema viene desde la formación de los futuros profesores de matemáticas. Por eso, es de gran importancia conocer quiénes están formando a los futuros profesores de matemáticas de NMS y cómo los están formando (enfoque formativo), aquí radica la importancia de nuestro trabajo de investigación.

Metodología

En esta investigación se considera el enfoque cualitativo porque interesa conocer la percepción de la primera generación egresada de la acentuación en Enseñanza de las Matemáticas sobre la formación que recibieron y así poder hablar sobre el enfoque formativo que dicha licenciatura y en particular dicha acentuación sigue. Es importante conocer la percepción de los egresados porque ellos podrán describir cómo fue la formación que recibieron.

El tipo de estudio que se realizó fue el estudio de caso, siguiendo a Hernández, Fernández y Baptista (2014), nos dicen que el tamaño mínimo de muestra sugerido es de 6 a 10 personas y si son en profundidad, de 3 a 5. La muestra de participantes fue voluntaria obteniendo un total de 10 entrevistas de las 14 planeadas. Nuestro estudio de caso es único debido a que los sujetos entrevistados pertenecen al mismo contexto y así, estudia la percepción de 9 egresados de la Licenciatura de Ciencias de la Educación con acentuación en Enseñanza de las Matemáticas de la Universidad Autónoma de Tamaulipas (UAT) (primera generación) ubicada en Cd. Victoria, Tamaulipas, la entrevista restante es la realizada a la coordinadora de la acentuación para conocer más sobre la carrera y poder hacer algunas comparaciones con lo descrito por los egresados.

Para recolectar datos se decidió trabajar con entrevistas ya que como dice Hernández et al., (2014) el cual cita a Savin-Baden y Major, 2013; y King y Horrocks, 2010 nos dicen que la entrevista cualitativa es más íntima, flexible y abierta que la cuantitativa. Por lo tanto, se consideró pertinente porque se buscaba conocer la percepción de los egresados sobre la formación que recibieron, además las preguntas fueron elaboradas considerando el objetivo, es decir, las preguntas fueron elaboradas con el objetivo que evidenciara como fue la formación que recibieron los entrevistados. Se contactó a la población que se estudiaría para solicitarles una entrevista, la cual se realizó por medio de Teams y Zoom ya que son plataformas que permitían grabar las entrevistas, con el objetivo de poder hacer transcripciones y así tener la mayor información posible para poder hacer el análisis de resultados. Una vez obtenidas las transcripciones se analizaron para realizar categorías. Consideramos importante realizar categorías para encontrar precisiones entre las respuestas de los entrevistados y relacionarlo con lo descrito por la coordinadora de la acentuación. Sobre los momentos abordados, decidimos atender a las situaciones que se repiten y que permiten inferir algunas regularidades, así como recoger y analizar otras de excepción, como también se señala en Candela (1999). A partir de los datos recolectados se produjeron diversas formas de reducción. Por ejemplo, se agruparon aspectos relacionados con la gestión escolar y que posteriormente se volvieron a conglomerar en torno a los matices sobre diversos temas; así de manera sucesiva, se construyeron nuevas formas de agrupación. Se organizaron cada una de las agrupaciones con la intención de construir una visualización general que nos permitiera hallar relaciones entre los datos y definir nuevas formas de jerarquizar la información.

A continuación, se muestran las categorías encontradas en el análisis de las transcripciones: evaluación diagnóstica, inicio de una clase normal, una clase normal, conocimiento guiado, sugerencias de los alumnos, materiales de apoyo, evaluaciones, eventos académicos, reflexionar en clase, como enseño, enseñaré y planes profesionales.

Para efectos de este artículo, se analizarán las categorías:

- **Conocimiento guiado**
- **Reflexionar en clase**
- **Como enseño, enseñaré**

Análisis de resultados

De forma general, se puede concluir que los egresados de la primera generación fueron formados bajo un currículum que está basado en la teoría socioepistemológica, ya que tres de sus profesores fueron formados en Cinvestav (área de educación superior). A través de las entrevistas se concluye que la UAMCEH, en particular la Licenciatura estudiada, considera los 4 aspectos señalados anteriormente para formar a los futuros profesores de matemáticas, dándoles distintas herramientas para que ellos puedan integrarse al campo laboral.

De forma resumida, podemos observar el perfil de los profesores que imparten clases en la acentuación de matemáticas en la tabla 2:

Tabla 2. *Perfil de los profesores que imparten clase en la acentuación de Enseñanza de las Matemáticas.*

Profesor	Licenciatura	Maestría	Doctorado
1	Físico – matemático con especialidad en docencia superior	Ciencias con especialidad en Matemática Educativa	Ciencias en Matemática Educativa
2	Físico – matemático con especialidad en docencia superior	En educación superior	Investigación e Intervención Educativa
3	Físico – matemático	Ciencias con especialidad en Matemática Educativa	Ciencias en Matemática Educativa
4	Físico – matemático	Ciencias con especialidad en Matemática Educativa	Gestión e Innovación Educativa (cursando)

Elaboración propia.

Con esta información respondemos a nuestro primer objetivo específico que es *identificar la formación de los profesores de educación superior que preparan a los futuros profesores de matemáticas para NMS*. Los datos que se muestran en la tabla son del total de profesores responsables de las asignaturas de la acentuación. Es importante mencionar la formación de los docentes que preparan a los futuros profesores de matemáticas porque los estudios han demostrado que el alumno ejercerá su profesión (forma en cómo va a enseñar), como éste fue enseñado y el profesor que prepara a los futuros profesores juega un papel fundamental ya que es un actor del proceso, es uno de los sujetos involucrados y el ejemplo a seguir de los futuros profesores de matemáticas.

Otro de nuestros objetivos específicos es *identificar las habilidades, destrezas y aptitudes que debe tener un profesor de matemáticas de EMS*, es por eso por lo que a los egresados entrevistados se les preguntó por estas características que considera debe tener el profesor de matemáticas de EMS y por consiguiente son las características que ellos deben poseer porque esa es su profesión. La mayoría de los entrevistados alude que el docente de esta área debe tener conocimientos matemáticos, pero sin duda siendo primordial el amor por la enseñanza, amor por la matemática, que tenga habilidad para desarrollar estrategias didácticas para construir conocimiento, que desafíe a los alumnos y los aliente para construir su propio conocimiento, habilidades tecnológicas, paciencia, constante actualización, entre otras.

E1: Amor a las matemáticas, amor a la enseñanza.
E2: (…) Lo primero sería la empatía (…) saber que no todos tenemos las mismas capacidades, las mismas habilidades en esa área y que tenga un amplio conocimiento de todos los contenidos que abarca esta materia, muchas estrategias didácticas que no solamente sean juegos, que sean realmente que el estudiante tenga que ir construyendo su conocimiento a partir de varios retos o desafíos que a la vez resulten interesantes para los alumnos puesto que ahorita realmente por lo que he visto, investigado, hay muchas actividades didácticas donde básicamente es un juego.

E3: Yo creo que en base a lo que vi en la carrera, un maestro debe tener varias aptitudes, no solo ser ese docente que enseña conocimientos en frente de un grupo sino también poner al alumno a que él investigue, que se dé cuenta en qué momento de la vida puede utilizar las matemáticas y también este no ser tradicionalista de solo hacer uso de libro de texto ni de evaluaciones escritas, se pueden utilizar aplicaciones que ayudan bastante la verdad tener otra perspectiva de los objetos geométricos o también de evaluaciones que pudieran ser prácticas, no sólo resolver problemas, problemas a mano.

E8: Primero que nada, debería estar abierto, abierto a que no porque yo sea el docente se debe hacer estrictamente lo que yo diga, sino que hay que considerar las opiniones de los chicos y chicas (…) estar en constante investigación y estar proponiendo nuevas actividades de pensar, más reflexivas, que incite a ser más críticos a los estudiantes y así se les va a quedar más que sí yo solo los pongo a que memoricen.

E9: Yo pienso que tendría que ser alguien con una constante actualización en el aspecto de las tecnologías, del pensamiento de los jóvenes o niños que está educando, contextualizar siempre (…).

Los egresados manifiestan esas características fundamentales que debe tener el profesor de matemáticas, sin duda, son variadas sus respuestas, pero podemos observar que ninguna alude a solo tener conocimiento matemático, sino que, debe ser acompañado por otras aptitudes y actitudes. Todas las características mencionadas por el docente como la respuesta de la entrevista 8 que nos dice "(…) considerar las opiniones de los chicos y chicas (…)" son consideradas por la teoría socioepistemológica (lo podremos ver más adelante).

Ahora bien, se le hizo a la coordinadora de la acentuación esta misma pregunta, donde debería describir las características que debe tener el profesor de matemáticas egresado de la acentuación considerando que su enfoque formativo es la teoría socioepistemológica (más adelante podremos ver esta afirmación) para así poder comparar la visión de la acentuación con lo que los alumnos percibieron en su formación.

La doctora hace hincapié que el egresado debe tener habilidades que le permita enseñar una matemática que no solo se vive dentro de la escuela, sino que, se vive en el día a día. Otra característica es que debe compartir conocimientos con otras personas como colegas o padres de familia. Que sea capaz de tomar decisiones, que tenga habilidades para hacer a sus alumnos críticos y reflexivos sobre lo que se está aprendiendo, entre otros aspectos.

E10: (…) Está el que se nos pidió que fue formar docentes para el nivel secundaria y el medio superior (…) el otro sería que ustedes como egresados pudiesen tener habilidades que les permitan enriquecer la cultura matemática de la población en general, es decir, poder enseñar matemáticas dentro de la escuela pero también poder enseñar está matemática que se vive en el día a día y poder también trabajarla o compartirla con personas que no sean estudiantes, es decir, profesionales ya en alguna formación o padres y madres de familia, adultos mayores incluso y afortunadamente hemos tenido espacios para tener un poco estas prácticas, sobre cómo las personas podrían acercarse a la matemática y usarla como una herramienta para reflexionar en su día a día o para tomar decisiones de manera personal o de manera social (…) otra cosa que siempre hemos estado buscando con su participación en congresos es que además de tener una comunidad en los congresos donde discutan sobre esta manera de innovar en enseñanza de las matemáticas también piensen un poco en la investigación en enseñanza de las matemáticas ya sea para reforzar esta idea de hacerlos siempre críticos y reflexivos y que tengan herramientas sobre cómo hacerlo, herramientas de investigación pero también porque un futuro profesional puede ser la investigación en enseñanza de las matemáticas para ustedes y para ello tendría que formarse o elegir formarse en un posgrado que tenga que ver con estos temas o incluso existen los posgrados profesionalizantes que también retoman algunos elementos de investigación para fortalecer información como docentes.

Es decir, las características que menciona la coordinadora de acentuación es aquel perfil de egreso de los estudiantes de Enseñanza de las matemáticas desde la visión socioepistemológica, ésta, es la misma que adquieren y ahora proyectan los egresados ya que mencionan en otra de sus respuestas, que la visión de "qué es un profesor de matemáticas" cambió gracias a la formación que tuvieron. Ahora bien, a través de la investigación hemos hablado de estas habilidades, destrezas y aptitudes, destacando ciertas características fundamentales, desde la visión socioepistemológica, como lo son:

- El profesional no debe considerar al conocimiento como primordial sino, que debe considerar que la construcción social del saber puede lograrse a través de prácticas socialmente compartidas.
- Debe tener habilidad para poder contextualizar el conocimiento matemático.
- El docente debe ser capaz de poder seleccionar los contenidos matemáticos que desde su experiencia y conociendo al grupo donde imparte, será el seleccionado.
- Debe de conocer y ser capaz de realizar las prácticas matemáticas necesarias para resolver los problemas matemáticos usualmente abordables por los estudiantes del nivel correspondiente, y debe saber articularlos con los bloques temáticos posteriores, siempre y cuándo se articule con una enseñanza significativa pero además debe considerar enseñar con diversos factores (psicológicos, sociológicos, pedagógicos, tecnológicos etc.). Es decir, por ejemplo, debe tener aptitud, destreza y habilidad para poder utilizar las tecnologías.
- El docente debe tener habilidades que permitirán una enseñanza que genere conocimiento, habilidades, destrezas, entre otros aspectos para los alumnos y su futuro.

Se podría concluir que, desde esta visión teórica, no se busca que el profesor de matemáticas tenga un gran dominio sobre el contenido matemático, sino más bien, que sea capaz de hacer reflexionar al alumno para que éste pueda construir su propio conocimiento. Con todo lo anterior, podemos ver que la acentuación considera a la teoría socioepistemológica como enfoque formativo y existe una conexión con lo que nos dice la investigación, con lo que se establece por escrito para la acentuación y con lo que percibieron, recibieron y ahora proyectan los egresados de la acentuación.

Nuestro último objetivo específico, nos dice *Mostrar cómo se está enseñando a los futuros profesores de matemáticas para NMS*, el cuál será fundamental para contestar nuestro objetivo principal. Gracias a la información obtenida por la entrevista a la coordinadora, podemos contestar a nuestro último objetivo específico, es decir, conocer el enfoque formativo. Textualmente menciona que éste es trabajado desde la teoría socioepistemológica, en el cuál menciona que buscan que el alumno se vuelva reflexivo sobre lo que está aprendiendo y que se haga algunas preguntas: ¿cómo enseñar?, ¿qué enseñar?, ¿para qué enseñar?

Con esta información podemos conocer el enfoque formativo, pero es momento de recordar nuestro objetivo general. Conocemos el enfoque por la información obtenida por la coordinadora, pero ahora es momento de comprobar dicha información, conocer el enfoque formativo, pero desde la información obtenida por los estudiantes, es decir, desde su percepción. En las categorías, se analizó la enseñanza que recibieron los alumnos y así podemos analizar si ésta tiene la misma visión que plantea la coordinadora de acentuación que es desde la visión socioepistemológica. En ellas, pudimos analizar y darnos cuenta de que la percepción de los egresados del tipo de enseñanza que se imparte en la acentuación está conectada con lo que nos dice la coordinadora, es decir, vemos reflejada la teoría socioepistemológica en la enseñanza que recibieron. Por espacio se plantean solo algunos ejemplos de los resultados obtenidos de las categorías.

Conocimiento guiado

En esta categoría se les preguntó sobre la acción que realizaba el docente cuando el alumno manifestaba tener alguna duda, sin duda, la respuesta fue repetitiva entre los entrevistados y comentaron que el docente no resolvía la duda, sino que, los guiaba para que reflexionaran sobre la duda que estaban teniendo y pudieran resolverlo por ellos mismos. También se mencionó que cuando eran dudas concretas sobre el resultado de algún ejercicio, en ocasiones se decía, pero la mayoría de las veces no era así.

E3: Yo creo que era más guiado, no era como que resolverlo, sino que era para que tú mismo encontrarás el resultado a eso, te daban ciertas pistas, ciertas ayudas y ya partir de eso tú terminabas por completar la resolución de la duda.

E6: Yo siento que no te resolvían la duda si no que te orillaban a que pensaras cuál podría ser la posible respuesta y siento que eso te ayuda un poco más qué a que te den la pura respuesta y no hayas pensado por tu cuenta que es probablemente lo que estuvo bien, lo que estuvo mal, si, te orillaban a que tú solo dedujeras qué era lo que estaba pasando.

E9: Ahí también son dos caminos que ellos tomaban, cuando era una duda referente a una situación didáctica ellos nos encaminaban para nosotros entender, pero entender por nuestra propia cuenta (….) el caso contrario que la respuesta fuera una sola respuesta, ahí sí nos explicaban si no entendíamos de una manera, en lo particular, si yo no entendía se contextualizaban a lo que yo sabía, a lo que yo entendía a como lo manejaba a mi tipo de aprendizaje para poder explicarme y quedarme sin dudas.

Con ello podemos observar que los docentes siempre fueron una guía para el alumno, que lo que buscaban es que tuvieran una mentalidad abierta y ser capaces de poder resolver un sinfín de problemáticas, pero sin dejarlos solos, es decir, esta guía fue un acompañamiento constante durante toda su formación. Los alumnos muestran agradecimiento por dicha acción ya que ello los obligaba a que reflexionaran sobre el conocimiento, como lo mencionó uno de los egresados: *"Yo creo que era más guiado (...) estoy agradecida con eso porque me orillaban a que reflexionara, aportó para ser una persona más reflexiva"*. Aquí podemos ver que el rol que juega el docente no es solo de transmisor de conocimientos, como lo menciona Prieto (2008), sino que también es un agente socializador que, transmite una serie de valores que van a impactar, de una forma ya sea directa o indirectamente, en la formación de menores y jóvenes. Ello lo podemos comprobar ya que los egresados a lo largo de la entrevista muestran el gran impacto que ocasionó su formación y por ende los docentes en su visión de la Matemática Educativa. Es decir, los docentes con su actuar influyen en los estudiantes y esta influencia que logran deja de lado la tradicional donde solo importa transmitir conocimientos, sino que los valores y otros aspectos influyen en ello.

-Reflexionar en clase

Se les preguntó sobre la reflexión que se hacía en clase, coincidiendo los alumnos que todo el tiempo se estaba reflexionando en clase. Podemos decir que la reflexión es de suma importancia en el proceso de aprendizaje (Castellanos y Yaya, 2013). Ello es un ejemplo de algunos aspectos que considera la socioepistemología, así como lo afirma Cantoral, Reyes-Gasperini y Montiel (2014).

-Como enseño, enseñaré

Los egresados manifiestan que quieren enseñar de la misma forma que fueron formados porque creen que hay gran potencial y grandes beneficios. Mencionan: *"Sí, puesto que hay muchas formas, bueno, durante la carrera vi que existen muchas más formas de poder enseñar a los alumnos, muchas técnicas, muchas estrategias y que no simplemente se vayan con eso que ya vengo mencionando desde hace un rato de memorizar (...)"* podemos comprobar la idea de que el maestro enseña de la misma forma en que fue enseñado. En muchas ocasiones se puede hacer inconscientemente pero aquí, vemos que los egresados están conscientes de que existen distintas formas de enseñanza ya que por su propia experiencia han vivido en ellas, y mencionan que se quedarían con la aprendida en el nivel superior porque en su persona, consideran que es una forma más amplia de enseñar y que en lo personal a ellos les aportó más, considerando que a sus alumnos también les puede servir.

Conclusiones

A lo largo de esta investigación hemos estudiado que los profesores de EMS tienen perfiles profesionales distintos a los sugeridos anteriormente, por lo tanto, al carecer de la didáctica, se desarrollan ciertas problemáticas para el estudiante ya que el docente busca enseñar de la misma forma en que fue enseñado. Con nuestra investigación, podemos confirmar lo anterior gracias a las investigaciones y al estudio de caso ya que, los estudiantes manifestaron que cuando ejerzan, buscan reproducir esa misma forma de enseñanza en la que fueron formados en su formación profesional pero ahora, siendo conscientes de que siempre se puede mejorar.

Nuestra investigación se basó en la teoría socioepistemológica, por lo tanto, consideramos que existen 4 aspectos fundamentales que el profesor de matemáticas debe considerar en el ejercicio de su profesión, los cuales son aquellos aspectos epistemológicos, cognitivos, didácticos y socioculturales.

De forma general, se puede concluir que los egresados de la primera generación fueron formados bajo un currículum que está basado en la teoría socioepistemológica, a través de las entrevistas se concluye que la UAMCEH, en particular la Licenciatura de Ciencias de la Educación con acentuación en Enseñanza de las Matemáticas, considera los 4 aspectos señalados anteriormente para formar a los futuros profesores de matemáticas, dándoles distintas herramientas para que ellos puedan integrarse al campo laboral.

Por último, consideramos que nuestro estudio deja algunas aportaciones importantes que pueden servir para los estudios posteriores de la acentuación, quedando esta investigación como un primer estudio formal sobre la forma de enseñanza en la acentuación, como así también, para considerar la perspectiva de los alumnos egresados para los cambios futuros en el currículum de la acentuación, siempre pensando en un aprendizaje con mayor significado e impacto en la vida personal y profesional del egresado. Es decir, nuestra mayor aportación es conocer la perspectiva de los egresados sobre su formación, así como también, la entrevista con la coordinadora nos permite ver lo planteado formalmente con lo que los alumnos recibieron y percibieron, a partir de ello, los docentes o personal a cargo de la acentuación, podrá estudiar si lo que los alumnos percibieron, era el objetivo real de la acentuación o se pueden hacer algunas modificaciones.

Referencias

Candela, A. (1999). *Ciencia en el aula. Los alumnos entre la argumentación y el consenso.* México: Paidós.

Cantoral, R. (2010). Tendencias de la investigación en Matemática Educativa: del estudio centrado en el objeto a las prácticas. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 23* (pp. 1043-1053). México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A.C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Cantoral, R. (2016). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Barcelona: Gedisa.

Cantoral, R., Reyes-Gasperini, D., y Montiel, G. (2014). Socioepistemología, Matemáticas y Realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática,* 7(3), 91-116.

Capítulo 4 las categorías en la investigación social. (s/f). n/a. https://www.javeriana.edu.co/blogs/mlgutierrez/files/Rico-de-Alonso-Et-al-CAPÍTULO-4-Categor%C3%ADas1.pdf

Castellanos, S. y Yaya, R. (2013). La reflexión docente y la construcción de conocimiento: una experiencia desde la práctica. *Revista Electrónica Sinéctica,* (41), 1-18 https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=99828325005

Comisión Económica para América Latina y el Caribe. (2003). *Elevadas tasas de deserción escolar en América Latina.* Recuperado el 10 de junio de 2020 de https://www.cepal.org/cgi-bin/getProd.asp?xml=/prensa/noticias/comunicados/0/11260/P11260.xml

Comisión Nacional de Acreditación. (2018). *Carreras de pedagogía. Análisis de fortalezas y debilidades en el escenario actual. Serie Estudios sobre Acreditación.* Recuperado el 03 de octubre de 2020 de http://www.investigacion.cnachile.cl/novedades-detalle.php?id=17573975

Crespo, C., Homilka, L., y Léston, P. (2013). La Elección De La Carrera De Profesorado De Matemática: Motivos Y Expectativas. En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 26* (pp. 1773–1782). México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A.C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Flores, C. (2014). La formación profesional de los profesores de matemáticas. En C. Dolores, M. García, J. Hernández y L. Sosa (Eds), *Matemática educativa: La formación de profesores*, (pp. 15-27), México: Universidad Autónoma de Guerrero y Ediciones Díaz de Santos.

Godino, J., Giacomone, B., Batanero, C., y Font, V. (2017). Enfoque Ontosemiótico de los Conocimientos y Competencias del Profesor de Matemáticas. *Bolema Boletim de Educação Matemática, 31*(57), 90-113.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P., (2014). *Metodología de la investigación.* México D.F.: McGraw-Hill.

Montiel, G. (2010). Hacia el rediseño del discurso: formación docente en línea centrada en la resignificación de la matemática escolar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 13(4-I), 64-84.

Opazo, C., Cordero, F., y Silva, H. (2018a). ¿Por qué estudiar la identidad disciplinar en la formación inicial del docente de matemáticas? *Premisa* 20(77), 5-20.

Opazo, C., Cordero, F., y Silva, H. (2018b). La identidad disciplinar: un instrumento de recuperación de las argumentaciones autónomas del docente en formación. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 31 (2), 1702-1709.

Planea. (2017). *Planea Resultados Nacionales 2017: Educación Media Superior.* Recuperado el 14 de septiembre de 2020 de https://www.inee.edu.mx/wp-content/uploads/2019/08/PLANEA_Resultados-EMS-2017.pdf

Prieto, E. (2008). El papel del profesorado en la actualidad. Su función docente y social. *Foro de Educación, 6*(10), 325-345. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=447544585017

Reséndiz, E. (2004). *La variación en las explicaciones de los profesores en situación escolar.* Tesis de Doctorado no publicada, Centro de investigación y de estudios avanzados del IPN, D.F. México.

Reyes, D. (2016). *Empoderamiento docente y Socioepistemología. Un estudio sobre la transformación educativa en Matemáticas.* Barcelona, España: *Gedisa.*

Santos M. (2010). La formación del profesorado en las instituciones que aprenden. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado* 24(2) ,175-200.

Soto, D. (2014). *La dialéctica Exclusión-Inclusión entre el discurso Matemático Escolar y la Construcción Social del Conocimiento Matemático.* Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, D.F. México.

UNESCO, 2014. *Enseñanza y aprendizaje. Lograr la calidad para todos.* Recuperado el 16 de septiembre de 2020 de http://unesdoc.unesco.org/images/0022/002256/225654s.pdf

Vaillant, D. (2013). Formación inicial del profesorado en América Latina: dilemas centrales y perspectivas. *Revista Española de Educación Comparada* 22(2013), 185-206.

PROBLEMAS MATEMÁTICOS ABIERTOS: PERSPECTIVA DOCENTE

OPEN MATHEMATICAL PROBLEMS: A TEACHING PERSPECTIVE

Gilberto Chavarría, Veronica Albanese
Universidad Nacional. (Costa Rica), Universidad de Granada. (España)
gilberto.chavarria.arroyo@una.cr, vealbanese@ugr.es

Resumen
La resolución de problemas es uno de los ejes vertebradores del currículo matemático de Costa Rica. Aquí nos centramos en las opiniones de docentes en ejercicio de Costa Rica sobre el empleo de problemas abiertos o cerrados, es decir que presenten (o no) varias soluciones y métodos de resolución. La encuesta realizada evidencia un grado de acuerdo medio o bajo respecto a la elección y creación de problemas matemáticos abiertos, sin diferencias significativas entre grupos determinados por el grado de formación, la experiencia laboral y la dedicación a la planificación. Igualmente, entre los problemas propuestos por los docentes, casi todos son cerrados. Esto evidencia la necesidad de brindar capacitaciones a los docentes para la creación de problemas cuyos contextos permitan diversas formas de resolverlos.

Palabras clave: resolución de problemas, perspectiva docente, problemas abiertos

Abstract
Problem solving is one of the main axes of Costa Rican mathematics curriculum. Here we focus on the opinions of in-service teachers in Costa Rica, on the use of open or closed problems, that is, those that present (or not) various answers and problem-solving methods. The survey carried out shows a medium or low degree of agreement regarding the choice and creation of open mathematical problems, without significant differences among the groups, determined by the degree of training, work experience and dedication to planning. Likewise, almost all the problems proposed by the teachers are closed.

Key words: mathematical problems, teaching perspective, open problems

Introducción

La resolución de problemas ha estado presente a lo largo de la historia de las matemáticas y del desarrollo mismo de la humanidad. Las inquietudes y necesidades que se iban presentando en las diversas culturas, dieron paso a problemas matemáticos cuyo abordaje fue tan variable, que incluyó desde respuestas inmediatas, soluciones diversas –o ausencia de soluciones- y hasta estudios que abarcaron siglos de trabajo.

La resolución de problemas matemáticos no fue exclusiva para personas brillantes, matemáticos inmortalizados en libros de historia o culturas específicas. Ya desde la Edad Antigua, con la aparición de las escuelas, tanto la escritura como las matemáticas tomaron espacios privilegiados dentro de la enseñanza. Y desde ese entonces, la resolución de problemas tomó un rol protagónico dentro del aprendizaje de las matemáticas (Sigarreta et al., 2006).

En esta línea, para Blanco y Pino (2015) la educación formal puede atender tres aspectos: enseñar para resolver problemas, enseñar sobre la resolución de problemas o bien enseñar vía resolución de problemas. Los tres aspectos no son para nada excluyentes; sin embargo, es precisamente el último, uno de los ejes disciplinares del currículo matemático en Costa Rica, donde se sitúa esta investigación (MEP, 2012).

En este contexto, es esperable que el docente sea capaz de escoger, adaptar o crear problemas que estimulen la acción estudiantil. Esta ha sido una tarea particularmente demandante para los docentes desde que se han implementado los Programas de Estudios de Matemáticas en Costa Rica (Baltodano, 2018). A casi una década de ponerse en marcha estos programas se hace necesario *conocer la perspectiva de docentes respecto a la elaboración y escogencia de problemas matemáticos para desarrollar sus clases a nivel de secundaria* (periodo de la educación formal costarricense que abarca desde séptimo hasta undécimo/duodécimo nivel, para edades entre los 12 y 18 años). Esta comunicación se centrará en las percepciones de los docentes sobre los problemas según la cantidad de soluciones y posibles procedimientos para llegar a la respuesta.

Problemas cerrados y abiertos

Trabajar en un enfoque de resolución de problemas, hace imperativo pensar sobre el significado de problema matemático. A pesar de que no existe una única definición, autores como Blanco y Pino (2015) concuerdan que una actividad matemática será un problema cuando presente alguna complejidad en su resolución y que en el momento que se asimile el procedimiento para llegar a la solución, dejará de ser un problema. Es este sentido, conciben que un problema no es inherente a la tarea matemática, sino a la relación que hay entre el individuo y esa tarea. Distinguen un problema de un ejercicio en tanto que el resolutor, cuando se enfrenta a un problema, no cuenta con un procedimiento algorítmico que le conducirá de manera certera a la solución. Además, cabe destacar que lo que se presenta como un problema matemático para un estudiante de primer nivel de primaria, no lo será para un estudiante universitario.

Estándares internacionales indican la resolución de problemas como uno de los procesos vertebrados del currículo de matemática en todas las etapas educativas (NCTM, 2013). En los currículos actualmente vigentes en muchos países la resolución de problemas cobra un papel determinante, y Costa Rica, donde se realiza esta investigación, no es una excepción. En efecto, según el Ministerio de Educación Pública de Costa Rica “un problema es un planteamiento o una tarea que busca generar la interrogación y la acción estudiantil utilizando conceptos o métodos matemáticos” (MEP, 2012, p. 29).

Aunque existe una vasta clasificación para los problemas, para este estudio solo nos basaremos en la que relaciona los problemas con la cantidad de resoluciones y soluciones posibles. A este respecto, Blanco y Pino (2015) recopilan una clasificación que distingue los problemas en cerrados y abiertos. Para ellos, “la posibilidad de varias soluciones y, simultáneamente, diferentes estrategias de [re]solución sería lo que caracterizaría a los problemas abiertos” (p.

189). En contraposición, los problemas cerrados tienen una única solución y una formulación tal que el resolutor es guiado a realizar un único proceso de resolución.

Con respecto a los problemas abiertos, Pita et al. (2011) mencionan tres características que los distinguen:

1. No se ofrece de forma explícita toda la información que es necesaria para resolverlo, pero el resolutor cuenta con los conocimientos y de los medios para obtenerla.
2. La estructura del problema permite a quien intenta resolverlo mostrar creatividad y originalidad para redefinirlo.
3. Existe libertad para elegir restricciones y métodos matemáticos diferentes, permitiendo diversas soluciones

Por su parte, el MEP (2012) menciona a los problemas abiertos como problemas de final abierto y los define como: "Aquellos que admiten varias soluciones y aproximaciones, y que pueden ser oportunidades muy valiosas para introducir conceptos y procedimientos, para organizar la lección o para trabajos extra clase por medio de proyectos." (p. 475).

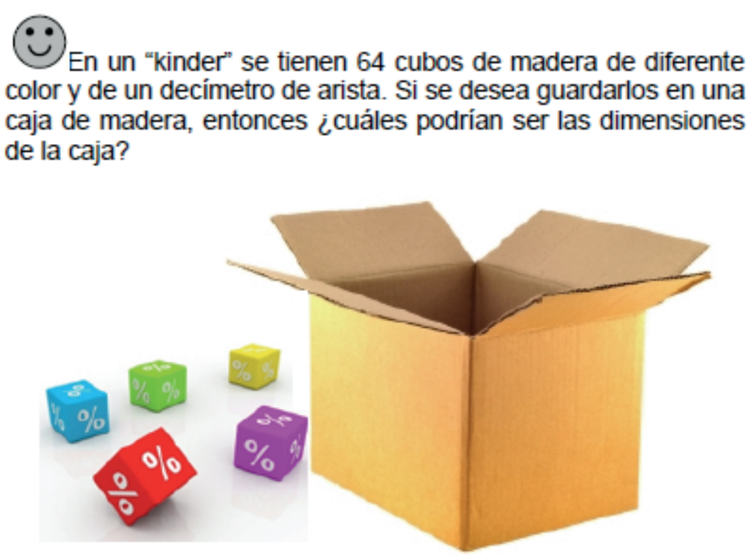
Además, el MEP (2012) en los Programas de Estudio de Matemáticas proporciona algunos ejemplos de problemas abiertos. A modo de ilustración, para introducir el conocimiento del Teorema de Pitágoras, proponen este problema:

Diego necesita comprar una escalera para subirse al techo de su casa. El techo está a una altura de 97 pulgadas. Para poder tener una buena estabilidad en la escalera al apoyarse en la pared, las patas de la escalera deben estar a una distancia de entre 30 y 40 pulgadas. ¿Cuál podría ser la medida aproximada de la escalera? (MEP, 2012, p. 315)

Aunque en otro nivel educativo, este podría ser un problema cerrado, no lo es para quienes aún no han trabajado sobre Teorema de Pitágoras. Incluso, en el mismo documento se recalca que: "Es importante analizar tanto las soluciones como las estrategias utilizadas. Además, hay que tomar en cuenta que hay gran variedad de soluciones correctas." (MEP, 2012, p. 315)

Otro problema abierto que plantea el MEP (2012) se presenta en la figura 1

Figura 1. *Ejemplo de un problema abierto proporcionado por el Ministerio de Educación Pública de Costa Rica.*



Elaboración propia.

En este caso, tanto la metodología de resolución, como la solución no son únicas, especialmente al considerar los conocimientos previos que tienen los estudiantes a quienes se les propone este problema.

Metodología

Este estudio es de naturaleza exploratoria y descriptiva, con un enfoque mixto: cuantitativo y cualitativo.

Los participantes fueron 67 profesores de matemáticas en ejercicio de Costa Rica, seleccionados mediante un muestreo virtual (González et al., 2018). La muestra se caracterizó según:

- la formación: 43 (el 64,18%) docentes presentan estudios superiores al bachillerato de la especialidad, mientras los restantes 24 (35,82%) poseen bachillerato o un diplomado
- los años de experiencias docente: 29 docentes (43,28%) tienen menos de 10 años de experiencia laboral, mientras 38 docentes tienen 10 o más años de experiencia laboral, para un 57,72%.
- el número de horas que dedican a la planificación: 32 docentes declaran dedicar 3 o más horas semanales a la escogencia o elaboración de problemas, lo que corresponde a un 47,76%, mientras que 35 invierten dos o menos horas en esa labor (52,24%).

Se utilizó un cuestionario como instrumento de recolección de datos, previamente validado mediante juicio de expertos. Para ello se contó con nueve especialistas en distintas áreas de investigación.

Figura 2. *Ejemplo de algunas preguntas aplicadas a los docentes.*

Según la escala anterior, seleccione la opción que corresponde a su grado de acuerdo con la correspondiente afirmación: *

Marca solo un óvalo por fila.

	1	2	3	4	5
Cuando escojo un problema , prefiero que este permita un solo método de resolución.					
Elijo problemas que solamente tengan una respuesta posible.					

Elaboración propia.

Los datos analizados en esta comunicación corresponden a ítems construidos de manera tal que los encuestados deben proporcionar un grado de acuerdo o desacuerdo según Escala Likert (de 1 a 5) respecto a afirmaciones elaboradas por los investigadores sobre diversos aspectos relacionados con la creación y selección de problemas matemáticos para las clases de matemáticas. Además, se analizaron las respuestas a un ítem de respuesta abierta en donde se pedía escoger o elaborar un problema matemático que hubiesen utilizado recientemente en sus clases.

Se realizaron pruebas estadísticas de contraste de hipótesis no paramétricas, debido al tamaño limitado de la muestra.

Resultados

Es importante aclarar que, en cada ítem se pidió a los docentes indicar qué tan de acuerdo estaban con determinadas afirmaciones, donde 1 significa estar totalmente en desacuerdo y 5 estar totalmente de acuerdo. Cabe destacar también que los ítems sobre las características de los problemas matemáticos empleados en las clases se formularon diferenciando la creación de problemas matemáticos con la escogencia de problemas matemáticos.

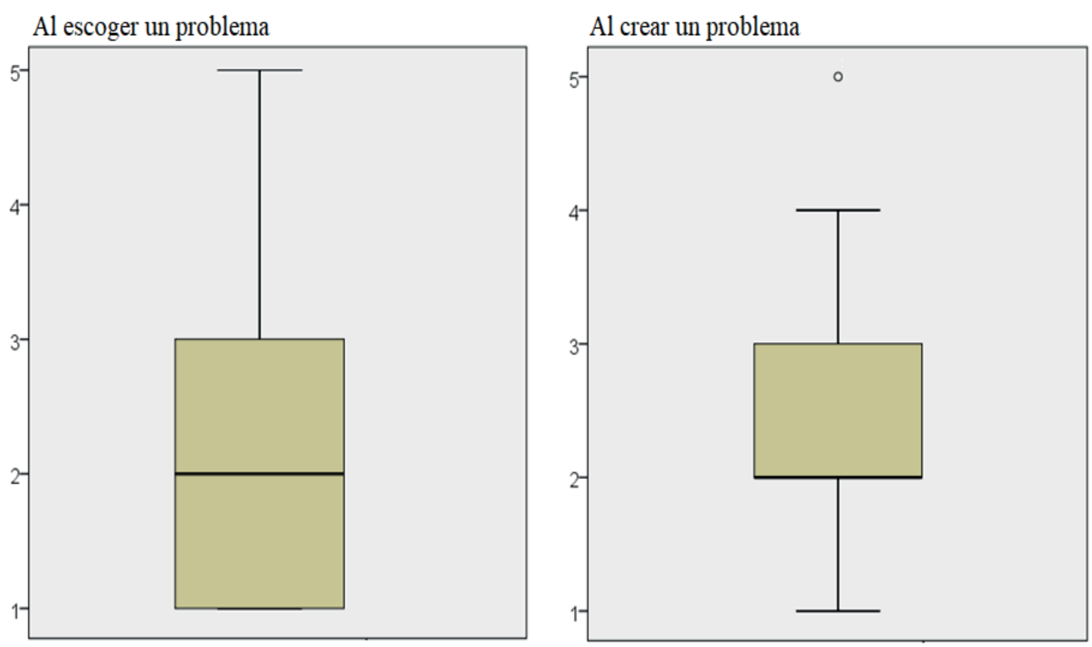
Al consultar a los docentes sobre si estaban de acuerdo en escoger problemas que permitan un solo método de resolución, la media fue de 2,29. En efecto, 59,7% de los encuestados consideraron estar en desacuerdo o totalmente en desacuerdo (puntuación 1 o 2) con escoger problemas cerrados, en contraste con un 10,5% que sí están de acuerdo o totalmente de acuerdo (puntuación 4 o 5). Los docentes que no estaban ni en acuerdo ni en desacuerdo (puntuación 3) fueron el 29,8%.

Con respecto a *crear* problemas con un solo método de resolución, la media fue de 2,37 y un 60% presentó un cierto grado de desacuerdo (puntuación 1 o 2) en elaborar problemas que tienen un solo método para resolverse, contra un 6,2% que está a favor (puntuación 4 o 5). Quienes dieron una puntuación de 3 (medianamente de acuerdo) abarcaron un 33,8%.

Al realizar la prueba de signos de Wilcoxon, se obtuvo como valor estadístico -0,629 y un valor de significación de 0,529 con lo que se concluye que no hubo diferencias significativas entre las opiniones sobre elegir o crear problemas.

En la figura 2 se muestra el diagrama de cajas que sintetiza las opiniones de los docentes, respecto a escoger y crear problemas que tengan un único método de resolución.

Figura 3. *Nivel de acuerdo de los docentes con respecto a escoger y crear problemas con un único método de resolución.*

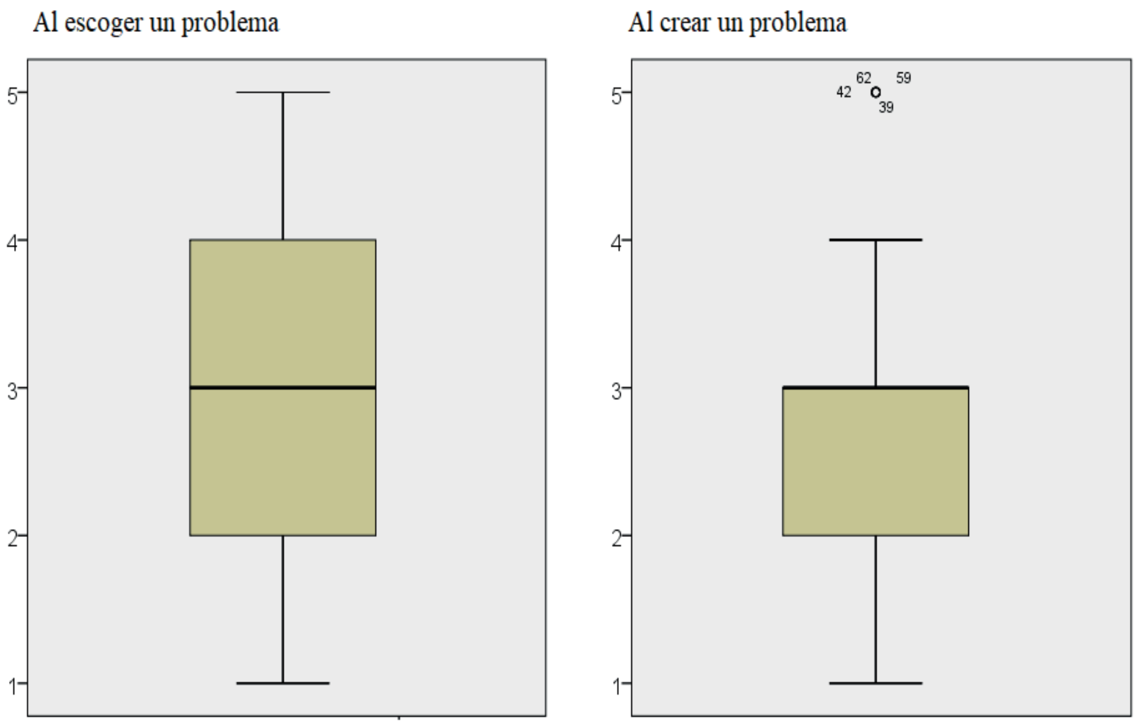


Elaboración propia.

El gráfico muestra como las medianas en ambos casos se ubican en 2, que equivale a estar en desacuerdo. Con respecto a crear problemas matemáticos que tengan un solo método de resolución, se aprecia un valor extremo ubicado en el valor 5 (totalmente de acuerdo). En ambos casos, el 75% de los encuestados consideran estar de medianamente de acuerdo o totalmente en desacuerdo con este tipo de problemas.

Por su parte, en la figura 3, se muestra las opiniones de los docentes respecto a diseñar y escoger problemas con una única solución. En este caso las medianas coinciden en el valor 3.

Figura 4. *Nivel de acuerdo de los docentes con respecto a escoger y crear problemas con una única solución.*



Elaboración propia.

Además, al realizar la prueba no paramétrica de Mann Whitney sobre la escogencia de problemas con un único método de resolución, no se identificaron diferencias estadísticamente significativas entre el grado de acuerdo y desacuerdo entre el grupo de docentes que presenta una formación más avanzada que incluya estudios superiores al bachillerato, y los que no presentan formación superior en enseñanza de las matemáticas. Tampoco se presentaron diferencias significativas entre los grupos de docentes según los años de experiencias, o el tiempo que dedican a planear problemas por semana (ver Tabla 1).

Tabla 1. *Estadísticos de la prueba Mann Whitney respecto a las opiniones de docentes sobre la escogencia de problemas con un único método de resolución.*

Condición	Valor del estadístico Z	Valor de significancia
Experiencia laboral en docencia	-1,425	0,154
Formación profesional	-0,130	0,897
Horas semanales en planear problemas	-0,242	0,809

Elaboración propia.

Por otro lado, en relación con *escoger* problemas que tengan una única solución, la mayoría de los participantes opinaron estar medianamente de acuerdo, con una media de 3,02 detectándose pocos valores extremos. Una situación muy similar se presenta al consultarles sobre la *creación* de problemas con esta condición. En este caso la media del grado de acuerdo y desacuerdo fue de 2,83. Tampoco se presentan diferencias estadísticamente significativas en opiniones con respecto a crear o escoger problemas con una única solución. En las pruebas de Mann Whitney no se evidenciaron diferencias estadísticamente significativas entre las respuestas de los participantes según su experiencia laboral, formación o el número de horas dedicados a la planificación.

Tabla 2 *Estadísticos de la prueba Mann Whitney respecto a las opiniones de docentes sobre escogencia de problemas con una única solución.*

Condición	Valor del estadístico Z	Valor de significancia
Experiencia laboral en docencia	0,856	-0,182
Formación profesional	0,804	-0,248
Horas semanales en planear problemas	0,176	-1,353

Elaboración propia.

Tabla 3. *Estadísticos de la prueba Mann Whitney respecto a las opiniones de docentes sobre creación de problemas con una única solución.*

Condición	Valor del estadístico Z	Valor de significancia
Experiencia laboral en docencia	-0,152	0,880
Formación profesional	-0,399	0,690
Horas semanales en planear problemas	-0,382	0,702

Elaboración propia.

Por otra parte, al analizar los 27 problemas que los participantes presentaron en el cuestionario, destacamos que solo 1 de ellos es un problema abierto, que podía admitir más de una respuesta. Esto equivale al 3,7% del total (no todos los docentes contestaron la pregunta)

El único problema abierto tiene como contexto una Cooperativa de productos Lácteos de Costa Rica (Dos Pinos), en la cual se desea cambiar la presentación del envase de la leche semidescremada de un litro, que es la más comercializada en el país. Para tal fin, se realiza un concurso donde se solicita a las personas que indiquen las dimensiones del nuevo envase, de tal modo que se minimicen los gastos de producción, sabiendo que por centímetro cuadrado de cartón Tetra – Pack el costo es de 0,5 colones. Se solicita, por tanto, las dimensiones del envase y el costo según las condiciones dadas.

En este problema, el docente deja libertad al estudiante sobre el método de resolución y aunque la pregunta supone una respuesta única, y con conocimientos de cálculo en efecto esto se cumple, para el nivel de secundaria no es de esperar que se converja a una única solución. Incluso parece que el objetivo del problema no está realmente en la solución sino en su proceso. Para este caso, con los conocimientos previos de los estudiantes, se esperaría que calculen el área de cada pareja de caras congruentes del envase y que, utilizando las estrategias de ensayo y error vayan cambiando las longitudes hasta encontrar la menor área y por ende el menor costo. Otra posibilidad es usar algún software como Excel y crear las fórmulas en términos del largo, ancho y altura del envase, e ir haciendo las pruebas respectivas; esto también podría ejecutarse con la calculadora. Al ser valores aproximados, podrá haber ciertas diferencias en las soluciones, aunque deberían ser similares. El problema deja abierta la creatividad, e incluso los estudiantes pueden usar el envase ya existente para deducir las fórmulas y realizar las respectivas operaciones. A nivel universitario, si el estudiante tiene conocimientos de cálculo, esto sería un problema cerrado; pero no para secundaria.

La mayoría de los problemas cerrados estaban planteados de manera que se formulara una ecuación o se aplicara una fórmula determinada. Dos ejemplos de este tipo son:

A. El padre de Juan decide dar la herencia a sus tres hijos, a María le va a tocar la mitad de Juan y a José la tercera parte de María. Si en total son 12 mil metros cuadrados, ¿cuántos, metros cuadrados, recibe cada uno?
B. Alejandro es arquero en el equipo de fútbol del Liceo Experimental Bilingüe de Belén, en un partido contra el equipo del CTP de Mercedes Norte, rechaza un balón, el cual describe un movimiento parabólico, según la función $h(t) =-0,48t^2 + 2,4t$, donde "t" representa los segundos transcurridos en alcanzar la altura "h", en metros, a la cual se encuentra el balón. De acuerdo con la información anterior, conteste:
   ¿Cuál es la altura del balón, un segundo después haber "pateado" el balón?
   ¿Cuál es la altura a los dos segundos?
   ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el balón, y los cuántos segundos alcanza esa altura?
   ¿Cuántos segundos dura el balón en el aire, hasta llegar nuevamente al césped?

En los dos casos, dependiendo del nivel educativo del estudiante, puede que la actividad planteada sea más un ejercicio que un problema. Esto dependerá de si los alumnos se han ya enfrentado a situaciones similares con anterioridad.

Para el problema A, un estudiante con conocimientos algebraicos buscará plantear una ecuación, o bien, realizar algunas pruebas algebraicas. Si se realiza un procedimiento correcto, se llegará a una única solución.

El problema B podría ser abordado de manera algebraica o con geometría analítica; obteniendo -independientemente del método- una misma respuesta para cada inciso.

Conclusiones

Los resultados permiten destacar que hay diferencias de opinión con respecto a la creación o elección de problemas matemáticos que tengan uno o más soluciones, aunque un mayor porcentaje de los encuestados expresan un grado de acuerdo medio o medio-bajo respecto a la creación o selección de problemas matemáticos que tengan uno o más métodos de resolución.

Además, no se evidencia una diferencia estadísticamente significativa entre las opiniones relacionadas a la creación y escogencia de problemas matemáticos cerrados o abiertos y el nivel académico del docente, o sus años de experiencia.

Por otro lado, se destaca que casi todos los problemas propuestos por los docentes (excepto uno) permiten una sola solución y un solo método de resolución. Estos, en su mayoría, pueden resolverse mediante alguna ecuación, aplicación de fórmulas o procedimientos mecánicos. Esto cobra cierta relevancia si se piensa que desde la investigación se sugiere la propuesta en las aulas de matemáticas de problemas que tengan más soluciones y diversos métodos de resolución (Pita et al., 2011). Esta situación motiva a incentivar a los docentes para que creen problemas matemáticos abiertos, lo cual podría ser posible mediante el uso de contextos reales. De acá se desprendió la necesidad de elaborar un curso que tenga como finalidad la elaboración de problemas contextualizados cercanos a la realidad de los estudiantes que permitan distintas formas de resolverlos y soluciones diversas.

Referencias

Baltodano, M. (2018). Desafíos que enfrentan los docentes de Matemática en relación con la planificación didáctica y la mediación pedagógica en la educación secundaria. *Umbral*, *41*(2), 25–34. http://www.colypro.com/ee_uploads/revista/UMBRAL-41.pdf.

Blanco, L., y Pino, J. (2015). ¿Qué entendmeos por problema de matemáticas?. In L. Blanco, J. Cárdenas, y A. Caballero (Eds.), *La resolución de problemas de Matemáticas en la formación inicial de profesores de Primaria* (pp. 81-93). Universidad de Extremadura. Servicio de Publicaciones. http://ddd.uab.cat/record/23388.

González, L., Sosa, G., y Fierro, S. (2018). Muestreo virtual online basado en redes sociales para localización de teletrabajadores como participantes de un estudio realizado en Victoria de Durango, México. *PAAKAT: Revista de Tecnología y Sociedad*, *8*(15), 21–38. https://doi.org/10.18381/pk.a9n15.333.

MEP. (2012). *Programas de Estudio Matemáticas. Educación General Básica y Ciclo Diversificado*. Ministerio de Educación Pública de Costa Rica.

NCTM, N. C. of T. of M. (2013). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. SEAM Thales.

Pita, G., Añino, M., Ravera, E., Miyara, A., Merino, G. A., y Escher, L. (2011). Enseñar Matemática a través de problemas abiertos: un desafío para los docentes (CO). *XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática*, *March 2015*, 11. http://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/view/1168/0.

Sigarreta, J. M., Rodríguez, J. M., y Ruesga, P. (2006). La resolución de problemas : una visión histórica-didáctica. *Boletín de La Asociación Matemática Venezolana*, *XIII*(1), 53–66. https://www.emis.de/journals/BAMV/conten/vol13/pruesga.pdf.

VOL34, NÚMERO 2, AÑO 2021

ANÁLISIS DE LA IDONEIDAD DIDÁCTICA DE LA PROBABILIDAD EN EL PROGRAMA CURRICULAR DE EDUCACIÓN SECUNDARIA PERUANA

ANALYSIS OF THE DIDACTIC SUITABILITY OF PROBABILITY IN THE PERUVIAN SECONDARY EDUCATION CURRICULUM

Bethzabe Cotrado, María Burgos, Pablo Beltrán-Pellicer
Universidad Nacional del Altiplano. (Perú), Universidad de Granada. (España), Universidad de Zaragoza. (España)
bcotrado@unap.edu.pe, mariaburgos@ugr.es, pbeltran@unizar.es

Resumen
En este trabajo aplicamos los criterios e indicadores de idoneidad didáctica al análisis del Programa Curricular de Educación Secundaria peruana en probabilidad. La investigación tiene un enfoque cualitativo, y la metodología empleada es el análisis de contenido apoyado en las categorías del EOS. Los resultados muestran una priorización del significado clásico y frecuencial sobre el significado intuitivo. Se proponen situaciones de comprobación experimental relacionados al significado clásico y frecuencial de la probabilidad, sin sugerir procedimientos de experimentación y simulación. Además, se presta una limitada atención a los conocimientos previos sobre experimento aleatorio y estimación frecuencial, lo que puede ocasionar dificultades y sesgos de razonamiento probabilístico. Finalmente se observa en el programa curricular carencias en lo que respecta a la dimensión afectiva, participación interactiva y el uso de recursos manipulativos e informáticos en probabilidad.

Palabras clave: análisis didáctico, currículo, enfoque ontosemiótico, probabilidad.

Abstract
In this work, we apply the criteria and indicators of didactic suitability to the analysis of the Peruvian secondary education curricular syllabus in probability. The research has a qualitative approach, and the methodology used is content analysis based on the Onto-Semiotic Approach (OSA) categories. The results show a given priority to classical and frequency meaning over intuitive meaning. Situations of experimental proof related to the classical and frequency meaning of probability are proposed, without suggesting experimentation and simulation procedures. In addition, limited attention is paid to prior knowledge on random experiment and frequency estimation, what can cause difficulties and probabilistic reasoning biases. Finally, some deficiencies are observed in the curricular syllabus with regard to the affective dimension, interactive participation and the use of manipulative and computer resources in probability.

Key words: didactic analysis, curriculum, onto-semiotic approach, probability.

Introducción

Durante las últimas décadas viene cobrando fuerza a nivel internacional la incorporación del análisis de datos y la probabilidad como estándares de contenido desde los primeros niveles educativos (Batanero y Borovcnik, 2016). El currículum escolar peruano no es ajeno a esta demanda, y así, la integración y consolidación del bloque estadística y probabilidad, desde el primer ciclo educativo, persigue promover la competencia en resolución de problemas de gestión de datos e incertidumbre. En ese contexto, surge la necesidad de analizar los textos normativos curriculares que condicionan y constituyen un referente para organizar la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad.

Desde el Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino, Batanero y Font, 2007) se asume que la Didáctica de las Matemáticas debe aportar conocimientos descriptivos y explicativos de los procesos de enseñanza y aprendizaje de temas específicos que ayuden a comprender dichos procesos, así como orientar de manera fundamentada posibles cambios y mejoras progresivas. En este marco, se ha introducido la noción de idoneidad didáctica como un criterio sistémico de pertinencia que amplía el análisis y valoración del grado de adecuación de un proceso de estudio planificado o implementado en educación matemática (Godino, 2013). Analizar la idoneidad didáctica de textos o documentos normativos curriculares permite reflexionar de manera sistemática y detallada sobre la relación coherente entre los significados de referencia, sus propiedades y características relativos al nivel educativo, considerando los conocimientos didáctico-matemáticos sobre un determinado tema. También supone indagar si la normativa es acorde a los niveles cognitivos, necesidades, intereses y diversidad de los estudiantes.

Teniendo esto en cuenta, en este trabajo revisamos, describimos y aplicamos los indicadores de idoneidad didáctica necesarios a tomar en consideración para analizar y valorar un texto normativo curricular en relación a la probabilidad.

Marco teórico

En el marco del EOS, se define la idoneidad didáctica de un proceso de estudio (o una parte de este) como el grado en que dicho proceso reúne ciertas características que permiten calificarlo como óptimo o adecuado. Supone la adaptación de los significados personales logrados por los estudiantes (aprendizaje) y los significados institucionales pretendidos o implementados (enseñanza), teniendo en cuenta las circunstancias y recursos disponibles (entorno). Para que un proceso de estudio logre un grado de idoneidad adecuada se requiere la articulación coherente y sistémica de aspectos que conciernen a las distintas facetas que afectan a los procesos de enseñanza y aprendizaje (Godino, 2013). Así, puede hablarse de:

- *Idoneidad epistémica,* requiere una adecuada representatividad de los significados institucionales pretendidos respecto a un significado de referencia.
- *Idoneidad cognitiva,* que refiere al grado en que los significados implementados estén en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos.
- *Idoneidad afectiva*, que expresa el grado de implicación (interés, motivación, etc.) del alumnado en el proceso de instrucción.
- *Idoneidad interaccional*, que indica el grado en que los tipos de configuraciones didácticas implementadas y su articulación permiten identificar y resolver los conflictos semióticos potenciales que se producen durante el proceso de instrucción.
- *Idoneidad mediacional*, como grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios en el proceso de enseñanza aprendizaje.
- *Idoneidad ecológica*, que concierne al ajuste pertinente del currículo a las condiciones de la sociedad y entorno socio-profesional.

Para dotar de operatividad a cada una de estas dimensiones, Godino (2013) estableció unos criterios e indicadores de idoneidad empírica que sirven de guía de análisis y valoración de procesos de estudio planificados o implementados en cualquier nivel educativo. Puesto que nuestro objetivo es analizar un texto normativo curricular en el tema de la probabilidad, aplicaremos la guía de valoración de idoneidad didáctica (GVID) en probabilidad a partir de la revisión y adecuación de los criterios e indicadores desarrolladas en Beltrán-Pellicer, Godino y Giacomone (2018).

Metodología

Seguimos una investigación de enfoque cualitativo, donde se analiza el documento normativo curricular de educación secundaria de Perú con la técnica del análisis de contenido, apoyado en el uso de las categorías del EOS. Como sugieren Godino, Rivas y Arteaga (2012), el análisis de contenido de propuestas curriculares permite la mejora progresiva de los instrumentos de evaluación de la idoneidad de procesos de instrucción matemática.

Centramos nuestra atención en el bloque de gestión de datos e incertidumbre del ciclo VI del Programa Curricular de Educación Secundaria (PCES), que concierne a estudiantes de primer y segundo grado. El contenido del texto curricular se divide en unidades de análisis que consisten en fragmentos, expresiones o enunciados que se relacionan con los indicadores de cada componente de la GVID en probabilidad. Seguidamente, estas unidades de análisis son codificadas mediante letras iniciales y dígitos numéricos (ver Anexo). Por ejemplo, el código NC3 Nivel de competencia del ciclo 3 y el código DG1.1 Desempeño de primer grado 1. Para su estudio, cada unidad analítica codificada fue clasificada según las facetas y componentes propuestas en la Teoría de la Idoneidad Didáctica.

Indicadores de idoneidad didáctica para la probabilidad en educación secundaria

En esta sección se revisan y adecuan los criterios e indicadores de idoneidad didáctica de procesos de estudio de probabilidad sobre la base de Beltrán-Pellicer et al. (2018), para aplicar al análisis de contenido de textos normativos curriculares.

Indicadores de idoneidad epistémica

Los indicadores de idoneidad epistémica miden aspectos que conducen a la representatividad de los significados institucionales pretendidos respecto a un significado de referencia. En ese sentido, las normativas curriculares escolares deben incluir los significados de referencia de la probabilidad: intuitivo, subjetivo, frecuencial y clásico (Batanero, 2005; Batanero y Borovcnik, 2016; Beltrán-Pellicer et al., 2018), en tanto cada significado comporta sistemas de prácticas (operativas y discursivas) y objetos matemáticos (situaciones-problemas, lenguajes, reglas, argumentos y relaciones) diferentes (Batanero, 2005; Batanero y Godino, 2002; Beltrán-Pellicer et al., 2018).

Así, los programas curriculares deben: a) proponer el uso y el planteamiento de situaciones-problemas reales o virtuales que muestren y relacionen los diferentes significados de la probabilidad y permitan que el estudiante genere, experimente y simule problemas sobre experiencias aleatorias (problematización); b) destacar el papel central de los registros lingüísticos y el uso diferenciado de las diversas representaciones específicas de la probabilidad como son las expresiones verbales, simbólico-numéricas, tabulares y gráficas (Gómez, Ortiz, Batanero y Contreras, 2013); c) comprender la probabilidad como sistema interconectado de reglas (definiciones, procedimientos y proposiciones), aceptando la diversidad de los significados de la probabilidad; d) reconocer la importancia de la argumentación como medio para demostrar o justificar las proposiciones y procedimientos de solución en el que puede o no manifestarse un razonamiento inductivo o deductivo.

Indicadores de idoneidad cognitiva

Los indicadores de idoneidad cognitiva consideran aquellos factores que permitan lograr una adaptación progresiva de los significados institucionales pretendidos a los significados personales previos y logrados de los estudiantes (Godino, 2013). Así, un programa curricular ha de contemplar los conocimientos previos, el progreso en los aprendizajes y la adaptación curricular a las diferencias individuales. En particular, esto supone fijar las maneras progresivas de conocer y comprender la probabilidad. Al respecto, Batanero y Godino (2002), Serrano, Batanero y Cañizares (1999) señalan que el primer paso para enseñar de forma comprensiva la probabilidad implica el entendimiento correcto del concepto de aleatoriedad y diferenciar fenómenos aleatorios de los deterministas. El segundo paso, es que pueda estimar la probabilidad de los sucesos en una serie de experimentos e identificar qué sucesos aparecen con mayor y menor frecuencia (Batanero y Godino, 2002). Las investigaciones muestran que las intuiciones en relación a la frecuencia relativa mejoran con la edad, especialmente en “casos donde las predicciones tienen algún resultado práctico” (Godino, Batanero y Cañizares, 1996, p. 45). En las operaciones formales el cálculo de la probabilidad tiene rápida aceptación, incluso cuando las fracciones a comparar tienen diferentes denominadores (Batanero y Godino, 2002).

Conforme a la progresión gradual de los aprendizajes de probabilidad que se van desarrollando de acuerdo con niveles educativos, también van surgiendo distintos sesgos y errores usuales de razonamiento probabilístico que deben ser considerados en las normativas curriculares. Algunos de estos sesgos, como son la representatividad y equiprobabilidad pueden dificultar la asimilación de conceptos y la interpretación incorrecta de los enunciados en probabilidad al menos en el nivel educativo secundaria (Godino et al., 1996).

Finalmente, para valorar el progreso y las dificultades de los aprendizajes en los diferentes significados de la probabilidad las normas curriculares deben promover el uso de diversos instrumentos que permitan evaluar los niveles de comprensión de la probabilidad.

Indicadores de idoneidad afectiva

En este caso, se trata de analizar de qué manera la normativa curricular tiene en cuenta los intereses y necesidades de los estudiantes en relación a sus emociones, actitudes y creencias que interactúan de manera cíclica durante el proceso de resolución de una situación-problema (Gómez, 2000). Esto supone: promover en el programa curricular orientaciones de búsqueda, selección y adaptación de situaciones reales que generen interés y tengan utilidad en la vida cotidiana del estudiante, así como, impulsar la organización y gestión del aula para favorecer la autoestima, participación, perseverancia y responsabilidad en las actividades del estudiante evitando el rechazo y miedo a las matemáticas. Orientar el desarrollo gradual de los significados de la probabilidad, como ya hemos mencionado, tiene mucho que ver con las creencias y emociones de los estudiantes, ya que este primer filtro podría generar actitudes positivas en los comportamientos de los estudiantes frente a situaciones estocásticas.

Indicadores de idoneidad interaccional

Los indicadores de idoneidad interaccional guían la reflexión sobre las formas interactivas entre docente y estudiantes o entre estudiantes. Los programas curriculares deben reconocer el papel de los diversos tipos de diálogo (crítico, reflexivo) para guiar la interacción comunicativa en el aula (Schwarz, Dreyfus, Hadas y Hershkowitz, 2004). Durante la interacción comunicativa y activa, los estudiantes son estimulados a realizar situaciones-problemas de experimentación y simulación con materiales manipulativos y softwares (Ortiz y Serrano, 2008). El uso adecuado de estas herramientas didácticas posibilita la argumentación y elaboración de juicios probabilísticos de forma colaborativa, a medida que se desarrollan y articulan los diferentes significados de probabilidad (Batanero, 2005).

Indicadores de idoneidad mediacional

En este caso, los programas curriculares deben promover la pertinencia y el oportuno uso de los recursos manipulativos e informáticos, así como las condiciones del aula, la ratio de los estudiantes y la gestión del tiempo de enseñanza y aprendizaje. Entre los recursos didácticos manipulativos destacan los dados, monedas, barajas de carta, ruletas, tablas de números aleatorios, calculadoras y entre otros (Godino et al., 1996). Por otro lado, cobran importancia los recursos virtuales o applet interactivos y los softwares que varían desde la exploración de conceptos básicos de probabilidad hasta representaciones de mayor nivel de formalidad y abstracción (Inzunsa, 2013). Como señalan Beltrán-Pellicer et al. (2018), el número de alumnos y el horario son variables más pedagógicas que didácticas, aunque influyen directamente en la enseñanza y aprendizaje de conocimientos matemáticos.

Indicadores de idoneidad ecológica

Los indicadores de idoneidad ecológica establecen pautas observables en relación a la adaptación y conexión de un proceso de estudio a las normas curriculares (fijan los campos temáticos, su implementación y evaluación), tecnológicas (establecen orientaciones basadas en la investigación e integración de nuevas tecnologías de información y comunicación), socio-culturales (contribuyen a la formación de ciudadanos competentes y comprometidos con el desarrollo social en situaciones de incertidumbre) y axiológicas (contemplan la formación en valores democráticos y pensamiento crítico-reflexivo). Toda esta diversidad de factores condiciona la adaptación y conexión del proceso de estudio a otras disciplinas y entre niveles educativos, favoreciendo la alfabetización probabilística (Gal, 2005).

Análisis del programa curricular en probabilidad

En este apartado mostramos la aplicación de los criterios e indicadores de la GVID en probabilidad al caso de un programa curricular escolar peruano.

Faceta epistémica

En esta faceta contemplamos los cinco componentes: situaciones-problema, lenguajes, reglas, argumentos y relaciones, de análisis para la idoneidad epistémica del currículo.

Situaciones – problema

El programa curricular de manera general y normativa anuncia que en el área de matemática “el marco teórico y metodológico que orienta la enseñanza y el aprendizaje corresponde al enfoque centrado en la resolución de problemas” (MINEDU, 2016, p. 148). En ese sentido, expresa que “Toda actividad matemática tiene como escenario la resolución de problemas planteados a partir de situaciones” (MINEDU, 2016, p. 148).

La expresión atribuye un papel central a la resolución de problemas refiriéndose a cualquier contenido matemático, que también es válida para la probabilidad. Pero, para referirse de forma específica a la probabilidad el programa curricular menciona que el estudiante del ciclo VI al resolver problemas:

> Expresa la probabilidad de un evento aleatorio como decimal o fracción, así como su espacio muestral; e interpreta que un suceso seguro, probable e imposible, se asocia a los valores entre 0 y 1. Hace predicciones sobre la ocurrencia de eventos y las justifica (MINEDU, 2016, p. 172).

Dicho enunciado propone situaciones-problemas que no directamente están relacionados con algún significado de la probabilidad, por lo cual podría referirse al significado clásico, frecuencial o intuitivo. Sin embargo, en las expresiones referidas a los desempeños DG1.1 al DG1.5 de primer grado y en DG2.1 al DG2.5 de segundo grado, se pueden fijar la muestra de situaciones-problemas que a continuación se resume en la siguiente tabla.

Tabla 1. *Situaciones-problemas identificados en el PCES según los significados de la probabilidad*

Situaciones-problemas	Significados			Ciclo VI	
	Clásico	Frecuencial	Intuitivo	1°	2°
Reconocer las condiciones que definen una situación aleatoria	x	x	x	x	x
Expresar el valor de la probabilidad como más o menos probable	x	x		x	
Determinar el espacio muestral	x	x	x		x
Expresar el valor de la probabilidad como seguro, probable o imposible	x	x	x		x
Determinar la probabilidad de sucesos con la regla de Laplace o el cálculo de su frecuencia relativa	x	x		x	x
Interpretar información de diversos textos con valores de situaciones aleatorias	x	x	x	x	x
Plantear afirmaciones o conclusiones sobre la probabilidad de ocurrencia de sucesos	x	x	x	x	x

Elaboración propia.

En la Tabla 1 se proponen situaciones de comprobación experimental relacionadas con el significado clásico, frecuencial e intuitivo de la probabilidad, sin sugerir situaciones que impliquen experimentación y simulación. De igual forma, no se observan situaciones donde el estudiante problematice; el currículo sólo expresa de manera general que “Los problemas que resuelven los estudiantes pueden ser planteados por ellos” (MINEDU, 2016, p. 148).

Lenguajes/representaciones

En el programa curricular las representaciones y registros lingüísticos de la probabilidad se proponen mediante la capacidad “Representa datos con gráficos y medidas probabilísticas” (MINEDU, 2016, p. 170). También, en DG1.2 y DG2.2 se sugiere que el estudiante al resolver problemas de incertidumbre, “Expresa con diversas representaciones y lenguaje matemático su comprensión sobre (…) el valor de la probabilidad …” (p. 277). Dicho enunciado refleja una orientación general sobre el lenguaje de la probabilidad, cuando es necesario reconocer el uso diferenciado y específico de las expresiones verbales, simbólico-numéricos, tabulares y gráficos para describir experiencias aleatorias (Gómez et al., 2013). Aun así, en los enunciados referidos al NC6 y desempeños de primer (DG1.1, DG1.3, DG1.4 y DG1.5) y segundo grado (DG2.1, DG2.3, DG2.4 y DG2.5) identificamos expresiones verbales, simbólico-numéricos (enteros, decimales, fracciones y porcentajes), gráficos (barras, circulares, histogramas) y tabulares adecuados al nivel educativo al que se dirigen.

Reglas (definiciones y procedimientos)

En el programa curricular los segmentos que hacen referencia a los conceptos-definiciones y procedimientos se expresan en las capacidades, en la descripción de niveles de competencia (NC6) y en los desempeños de primer (DG1.1 al DG1.5) y segundo grado (DG2.1 al DG2.5). A continuación, resumimos en la siguiente tabla:

Tabla 2. *Reglas identificadas en el PCES según los significados de la probabilidad.*

Reglas	Significados			Ciclo VI	
	Clásico	Frecuencial	Intuitivo	1°	2°
Conceptos-definiciones					
Situación aleatoria	x	x	x	x	x
Espacio muestral	x	x	x		x
Sucesos, sucesos simples	x	x	x	x	x
Suceso seguro, probable e imposible	x	x	x		x
Probabilidad	x	x	x	x	x
Frecuencia, frecuencia relativa		x		x	x
Procedimientos					
Identificación de las condiciones de una situación aleatoria	x	x	x	x	x
Comparar valores de la probabilidad	x	x	x	x	x
Enumeración de sucesos elementales	x	x	x	x	x
Aplicación de la regla de Laplace	x	x		x	x
Representación simbólica o gráfica.	x	x	x	x	x
Lectura de tablas, gráficos y textos con situaciones aleatorias	x	x	x	x	x
Relacionar el valor de la probabilidad con suceso seguro, probable o imposible	x	x	x		x
Cálculo de la frecuencia relativa y porcentaje		x		x	x
Proposiciones					
Regla de Laplace	x	x		x	x
La frecuencia relativa de un suceso varía entre 0 y 1		x		x	x
La probabilidad de un suceso se asocia a un número entre 0 y 1	x	x		x	x
El suceso seguro siempre ocurre y el suceso imposible nunca se verifica	x	x	x		x

Elaboración propia.

Los conceptos-definiciones y proposiciones que se muestran en la tabla son coherentes al nivel educativo al que se dirigen. Solo se echa en falta las definiciones de experimento determinista, equiprobabilidad y estimación en primer grado y suceso compuesto en segundo grado. En cuanto a los procedimientos no se ha identificado, la comparación cualitativa de probabilidades y la aplicación de técnicas combinatorias sencillas (tablas y diagramas de árbol). Respecto al significado frecuencial, solo se propone procedimientos de naturaleza estadística, mas no procedimientos de experimentación, estimación y simulación, los cuales son sugeridos para este nivel educativo según los criterios de la GVID en probabilidad.

Argumentos

El programa señala que cuando el estudiante de primer y segundo grado resuelve problemas:
"Sustenta conclusiones o decisiones con base en la información obtenida" (MINEDU, 2016, p. 170).

> Plantea afirmaciones o conclusiones sobre (…) la probabilidad de ocurrencia de sucesos (MINEDU, 2016, p. 173).
> Plantea afirmaciones o conclusiones sobre (…) la probabilidad de ocurrencia de sucesos en estudio. Las justifica usando la información obtenida, y sus conocimientos estadísticos y probabilísticos. Reconoce errores en sus justificaciones y en las de otros, y los corrige (MINEDU, 2016, p. 173).

En estas expresiones se propone el empleo de argumentos para afirmar o concluir la probabilidad de ocurrencia de sucesos y justificar sus conocimientos y errores probabilísticos. No encontramos enunciados que refieran al uso de los tipos de argumentos para justificar una propiedad o proposición sobre conceptos y procedimientos.

Significados y relaciones

En la descripción del NC6, así como en las expresiones relativos a los desempeños de primer y segundo grado podemos identificar objetos matemáticos como lenguajes (simbólico y verbal), conceptos-definiciones (situación aleatoria, espacio muestral y tipos de suceso) y argumentos (justifica sobre la ocurrencia de eventos) que están relacionados y conectados entre sí. Pero, la articulación de los significados de la probabilidad (intuitivo, subjetivo, frecuencial y clásico) por medio de objetos asimilables a cada uno de ellos no se identifican claramente.

Faceta cognitiva

En relación con aspectos cognitivos, el programa curricular menciona de forma general que:
"(…) resolver problemas (…) demanda desarrollar un proceso de indagación y reflexión social e individual que les permita superar las dificultades u obstáculos que surjan en la búsqueda de la solución" (MINEDU, 2016, p. 148).

"Los estudiantes aprenden por sí mismos cuando son capaces de autorregular su proceso de aprendizaje y de reflexionar sobre sus aciertos, errores, avances" (MINEDU, 2016, p. 148).
Estos enunciados hacen referencia a promover procesos metacognitivos teniendo en cuenta las diferencias individuales y evaluación de aprendizajes de los estudiantes, que también son válidos para la probabilidad.

El programa no refleja de forma explícita expresiones que sugieren el tratamiento de los conocimientos previos para estudiantes de ciclo VI. Sin embargo, establece diferentes niveles de competencia (NC3, NC4, NC5, NC6, NC7 y NCD) donde se plantean elementos lingüísticos y conceptos esperados al finalizar cada ciclo escolar desde la educación primaria hasta después de culminar la educación secundaria. En ningún caso, se propone de forma explícita tratar la aleatoriedad como un objeto de enseñanza, ni diferenciar lo aleatorio de lo determinista (Batanero y Godino, 2002).

Suponiendo, que el concepto de aleatoriedad ha sido comprendido, el siguiente tema a tratar son las estimaciones de las frecuencias relativas. Al respecto, en las expresiones de los niveles de competencia NC3, NC4, NC5 y NC6 no se tiene claro si el estudiante debe realizar experimentos donde se puedan estimar frecuencias relativas. Lo dicho se refleja también en los desempeños de primer grado, donde se propone que el estudiante al resolver problemas:
"(…) compara las frecuencias de sus sucesos y representa su probabilidad a través de la regla de Laplace o representa su probabilidad mediante su frecuencia dada en porcentajes" (MINEDU, 2016, p. 172).

Esta expresión da a entender que la frecuencia relativa ya fue trabajada o es conocida por los estudiantes de primer grado de educación secundaria, cuando su tratamiento refleja posibles limitaciones durante la educación primaria. Así pues, el programa curricular presenta atención restringida a los conocimientos previos, así como expresiones que no hacen referencia a los sesgos de razonamiento más comunes de probabilidad: equiprobabilidad y representatividad (Godino et al., 1996; Serrano et al., 1999).

Faceta afectiva

Respecto a los intereses y necesidades de los estudiantes, el currículo indica que se deben diseñar o seleccionar situaciones que respondan a los intereses de los estudiantes, expresando que resolver problemas de incertidumbre consiste en:
"que el estudiante analice datos sobre un tema de interés o estudio o de situaciones aleatorias, que le permitan tomar decisiones, elaborar predicciones razonables y conclusiones respaldadas en la información producida" (MINEDU, 2016, p. 170).

Si bien el currículo no muestra evidencias específicas sobre emociones, actitudes y creencias de los estudiantes hacia las situaciones aleatorias, sí se registra de manera general para toda el área de la matemática que: "Las emociones, actitudes y creencias actúan como fuerzas impulsadoras del aprendizaje" (MINEDU, 2016, p. 148).

Faceta interaccional

El programa curricular propone la interacción docente – discente, mediante la expresión "Comunica su comprensión de los conceptos probabilísticos" (MINEDU, 2016, p. 170), promoviendo instancias para compartir e interactuar a partir del mejor argumento. También mediante los desempeños DG1.5 y DG2.5 hace mención a sustentar conclusiones o decisiones de los conocimientos e información obtenida durante el proceso de resolución de problemas. Sin embargo, no se ofrecen orientaciones para guiar la interacción comunicativa entre estudiantes, ni para favorecer la inclusión en el grupo evitando la exclusión.

Faceta mediacional

El uso de recursos materiales manipulativos e informáticos no se explicita directamente para la probabilidad en el currículo; aunque, mediante la expresión "(…) usa estrategias y procedimientos para recopilar y procesar datos" (MINEDU, 2016, p. 170), se puede inferir la orientación del uso de recursos que permitirán viabilizar el cálculo de medidas probabilísticas. No se observan indicaciones sobre el número de estudiantes, horario, tiempo y condiciones del aula que también corresponden al aspecto mediacional.

Faceta ecológica

El currículo cuenta con dos competencias transversales que pueden ser desarrolladas y promovidas en las diferentes áreas curriculares: "Se desenvuelve en entornos virtuales generados por las TIC" y "Gestiona su aprendizaje de manera autónoma" (MINEDU, 2016, p. 29). Con la primera se pretende integrar las Tecnologías de Información y Comunicación (TIC) al desarrollo de actividades de aprendizaje de todas las áreas curriculares y la segunda contempla la formación autónoma del estudiante. Los valores y principios en el currículo son viabilizados mediante los enfoques transversales, en donde se establecen valores y actitudes que operan en distintas interacciones que involucran a docentes, discentes y otros actores educativos. Si bien los indicadores de esta faceta no se mencionan directamente en el área de la matemática, ni en el contenido específico de la probabilidad, se pueden evidenciar en el currículo en las orientaciones generales para cualquier área.

Conclusiones

En esta investigación abordamos la problemática de analizar la pertinencia del proceso de enseñanza y aprendizaje previsto en el PCES de Perú en el tema de la probabilidad. Para ello, revisamos y adecuamos los indicadores en la GVID en las diferentes facetas epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica.

En la faceta epistémica, hemos observado en el programa curricular, cierta distinción por el significado clásico y frecuencial sobre el intuitivo, a partir de las situaciones-problemas, conceptos-definiciones, procedimientos y proposiciones que se relacionan con cada uno. En toda la educación secundaria, no se promueve que el propio estudiante plantee problemas sobre experimentos aleatorios y simulaciones, pero sí el uso de los diferentes registros y representaciones para describir y determinar las condiciones de las situaciones aleatorias. Se echan en falta definiciones fundamentales en ambos significados, así como procedimientos de comparación cualitativa de probabilidades, aplicación de técnicas combinatorias sencillas (tablas y diagramas de árbol) y estabilidad de frecuencias relativas, que también son adecuados para este nivel educativo (Batanero y Godino, 2002).

Por otro lado, la verificación de los indicadores que caracterizan la idoneidad cognitiva nos permite concluir que en el programa curricular se presta una atención limitada al tratamiento de los conocimientos previos de aleatoriedad, estimación frecuencial y a los errores y sesgos de probabilidad al enfatizar el significado clásico y frecuencial de la probabilidad.

En lo afectivo, el currículo solo menciona de manera general para toda el área de la matemática que las emociones, actitudes y creencias son fuerzas que impulsan el aprendizaje. En lo interaccional, se insiste en la comunicación del razonamiento probabilístico y actuación a partir del mejor argumento. En lo mediacional se observa una ligera orientación sobre el uso de estrategias y recursos que permitirán viabilizar el cálculo de medidas probabilísticas.

Por consiguiente, el análisis de idoneidad didáctica del PCES en probabilidad nos ha permitido evidenciar algunos puntos críticos y de mejora que el profesor debe conocer y tener en cuenta a la hora de diseñar e implementar procesos instruccionales.

Agradecimientos

Este trabajo se ha desarrollado dentro del proyecto PID2019-105601GB-I00 / AEI / 10.13039/501100011033 y del grupo S60_20R - Investigación en Educación Matemática (Gobierno de Aragón y Fondo Social Europeo).

Referencias

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 8*(3), 247-263

Batanero, C., y Borovcnik, M. (2016). *Statistics and probability in high school*. Rotterdam: Sense Publishers.

Batanero, C., y Godino, J. D. (2002). *Estocástica y su didáctica para maestros*. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Beltrán-Pellicer, P., Godino, J. D., y Giacomone, B. (2018). Elaboración de indicadores específicos de idoneidad didáctica en probabilidad: aplicación para la reflexión sobre la práctica docente. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *32*(61), 526-548.

Gal, I. (2005). Towards “probability literacy” for all citizens: Building blocks and instructional dilemmas. En G.A. Jones (Ed.) *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 39-64). New York: Springer.

Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 8* (11), 111-132.

Godino, J. D., Batanero, C., y Cañizares, M. J. (1996). *Azar y probabilidad: Fundamentos didácticos y propuestas curriculares*. Madrid: Síntesis.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM The International Journal on Mathematics Education, 39* (1-2), 127-135.

Godino, J. D, Rivas, H. y Arteaga, P. (2012) Inferencia de indicadores de idoneidad didáctica a partir de orientaciones curriculares. *Práxis Educativa*, *7* (2), 331-354.

Gómez, I. M. (2000). *Matemática emocional: los afectos en el aprendizaje matemático* (Vol. 83). Madrid: Narcea Ediciones.

Gómez, E., Ortiz, J. J., Batanero, C., y Contreras, J. M. (2013). El lenguaje de probabilidad en los libros de texto de Educación Primaria. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 35*, 75-91.

Inzunsa, S. (2013). Simulación y modelos en la enseñanza de la probabilidad: un análisis del potencial de los applets y la hoja de cálculo. *Educación Estadística en América Latina: Tendencias y Perspectivas,* 9-29.

MINEDU (2016). *Programa Curricular de Educación Secundaria*. Lima-Perú.

Ortiz, J. J., y Serrano, L. (2008). La simulación de la Estadística y la Probabilidad en los libros de texto de Educación Secundaria. *Publicaciones,* (38), 49-61.

Schwarz, B., Dreyfus, T., Hadas, N. y Hershkowitz, R. (2004). Teacher guidance of knowledge construction. En M.J. Hoines y A.B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Annual Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education* (pp. 169-176). Bergen: Norway.

Serrano, L., Batanero, C., y Cañizares, M. J. (1999). Concepciones sobre distribuciones aleatorias planas en alumnos de secundaria. *Epsilon*, *43*(44), 149-162.

Anexo. Síntesis de códigos y unidades de análisis del Programa Curricular de Educación Secundaria en probabilidad

Códigos	Unidades de análisis
	Descripción de nivel de desarrollo de la competencia esperada por ciclo
NC3	Expresa la ocurrencia de sucesos cotidianos usando las nociones de posible o imposible y justifica su respuesta.
NC4	Expresa la ocurrencia de sucesos cotidianos usando las nociones de seguro, más probable, menos probable, y justifica su respuesta.
NC5	Realiza experimentos aleatorios, reconoce sus posibles resultados y expresa la probabilidad de un evento relacionando el número de casos favorables y el total de casos posibles. Elabora y justifica predicciones, decisiones y conclusiones, basándose en la información obtenida en el análisis de datos o en la probabilidad de un evento.
NC6	Resuelve problemas en las que (…). Expresa la probabilidad de un evento aleatorio como decimal o fracción, así como su espacio muestral; e interpreta que un suceso seguro, probable e imposible, se asocia a los valores entre 0 y 1. Hace predicciones sobre la ocurrencia de eventos y las justifica
NC7	Expresa la ocurrencia de sucesos dependientes, independientes, simples o compuestos de una situación aleatoria mediante la probabilidad, y determina su espacio muestral; interpreta las propiedades básicas de la probabilidad de acuerdo a las condiciones de la situación; justifica sus predicciones con base a los resultados de su experimento o propiedades.
NCD	Resuelve problemas referidos a situaciones aleatorias (…). Interpreta la información sobre (…) la probabilidad condicional.
	Desempeños de primer grado de secundaria
DG1.1	Determina las condiciones de una situación aleatoria, compara la frecuencia de sus sucesos y representa su probabilidad a través de la regla de Laplace (valor decimal) o representa su probabilidad mediante su frecuencia dada en porcentajes. A partir de este valor, determina si un suceso es más o menos probable que otro.
DG1.2	Expresa con diversas representaciones y lenguaje matemático su comprensión sobre (…) el valor de la probabilidad para caracterizar como más o menos probable la ocurrencia de sucesos de una situación aleatoria.
DG1.3	Lee tablas y gráficos de barras o circulares, así como diversos textos que contengan valores (…) o descripciones de situaciones aleatorias, para comparar e interpretar la información que contienen. A partir de ello, produce nueva información.
DG1.4	Selecciona y emplea procedimientos para determinar (…) la probabilidad de sucesos simples de una situación aleatoria mediante la regla de Laplace o el cálculo de su frecuencia relativa expresada en porcentaje. Revisa sus procedimientos y resultados.

DG1.5	Plantea afirmaciones o conclusiones sobre (…) la probabilidad de ocurrencia de sucesos. Las justifica usando la información obtenida y sus conocimientos estadísticos. Reconoce errores en sus justificaciones y los corrige.
	Desempeños de segundo grado de secundaria
DG2.1	Determina las condiciones y el espacio muestral de una situación aleatoria, y compara la frecuencia de sus sucesos. Representa la probabilidad de un suceso a través de la regla de Laplace (valor decimal) o representa su probabilidad mediante su frecuencia relativa expresada como decimal o porcentaje. A partir de este valor determina si un suceso es seguro, probable o imposible de suceder.
DG2.2	Expresa con diversas representaciones y lenguaje matemático su comprensión sobre (…) sobre el significado del valor de la probabilidad para caracterizar como segura o imposible la ocurrencia de sucesos de una situación aleatoria.
DG2.3	Lee tablas y gráficos (…) así como diversos textos que contengan valores de (…) de situaciones aleatorias, para comparar e interpretar la información que contienen y deducir nuevos datos. A partir de ello, produce nueva información.
DG2.4	Selecciona y emplea procedimientos para determinar (…) la probabilidad de sucesos de una situación aleatoria mediante la regla de Laplace o el cálculo de su frecuencia relativa expresada como porcentaje. Revisa sus procedimientos y resultados.
DG2.5	Plantea afirmaciones o conclusiones sobre (…) la probabilidad de ocurrencia de sucesos en estudio. Las justifica usando la información obtenida, y sus conocimientos estadísticos y probabilísticos. Reconoce errores en sus justificaciones y en las de otros, y los corrige.

PROPUESTA DE ACTIVIDADES PARA LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

A PROPOSAL OF ACTIVITIES TO WORK MATHEMATICAL MODELING

Ana Luisa Llanes Luna, Carlos Ledezma, Vicenç Font
Universidad de Los Lagos. (Chile), Universitat de Barcelona. (España)
analuisa.llanes@alumnos.ulagos.cl, cledezar25@alumnes.ub.edu, vfont@ub.edu

Resumen
Se reporta la reflexión sobre el diseño de un taller, el cual se encuentra dirigido a profesores de matemática de educación secundaria, cuyo objetivo es introducir a los participantes en la modelización matemática desde un enfoque didáctico-cognitivo. Para ello, se consideran como referentes teóricos, por una parte, el ciclo de modelización desde una perspectiva cognitiva y, por otra, las herramientas propuestas por el Enfoque Onto-Semiótico para el análisis de la actividad matemática. La estructura del taller permite que los participantes pongan de manifiesto sus concepciones sobre el tema, resuelvan problemas ad-hoc a las fases de este ciclo, y que asuman un rol –tanto de estudiantes como de profesores– al momento de abordar la modelización en el aula, pudiendo analizar la actividad matemática que subyace a este proceso. Finalmente, se comentan algunas experiencias previas de implementación de este taller (en su formato extendido) con profesores en distintos niveles de formación, además de reflexionar sobre sus implicancias en la enseñanza.

Palabras clave: formación de profesores, enfoque onto-semiótico, modelización matemática.

Abstract
This paper reports a reflection on the design of a workshop, addressed to secondary school mathematics teachers, which is aimed at introducing participants to mathematical modeling from a didactic-cognitive approach. So, the modeling cycle from a cognitive perspective and the tools provided by the Onto-Semiotic Approach for the analysis of mathematical activity, are considered as theoretical reference. The structure of this workshop allows participants to reveal their conceptions on the topic, to solve ad-hoc problems according to the phases of this cycle, and to assume a role –of both students and teachers– when addressing modeling in the classroom, being able to analyze the mathematical activity that underlies this process. Finally, some previous experiences of implementing this workshop (in its extended format) with teachers at different levels of academic training are discussed, in addition to reflecting on its implications in teaching.

Key words: mathematical modeling, onto-semiotic approach, teachers' training.

Introducción

Actualmente, existe un amplio consenso a nivel internacional sobre la importancia de incluir la modelización matemática en los currículos de todos los niveles educativos escolares, y en el desarrollo de las competencias asociadas a este proceso (Kaiser, 2020), así como también en la formación de profesores. En la literatura especializada en el campo de la Didáctica de la Matemática, se ha reportado que el trabajo con modelización trae consigo una serie de beneficios, como ayudar a los estudiantes en la mejora de su entendimiento del mundo, dar soporte al aprendizaje de la matemática (motivación, formación de conceptos, mejora en la comprensión y retención), contribuir al desarrollo de varias competencias matemáticas y actitudes apropiadas, propiciar una imagen adecuada de esta disciplina, entre otras (Blum, 2011).

No obstante, en lo que no se ha llegado a un acuerdo transversal, es en cómo hacer concretamente dicha incorporación en el currículo escolar, ya que –además de la problemática que plantean algunos estudios sobre el desconocimiento de algunos profesores para implementar la modelización en el aula (véase Aparisi y Pochulu, 2013; Maaß y Gurlitt, 2010, entre otros)– no hay consenso en cuanto a los objetivos del proceso y a la justificación teórica en el diseño e implementación de su enseñanza, ello derivado de la diversidad de enfoques que se han propuesto en torno a la modelización matemática (Borromeo, 2013).

Con base en lo antes planteado, se diseña este taller para introducir a los profesores del nivel secundario en la modelización matemática desde un enfoque didáctico-cognitivo, cuya importancia reside en que los participantes trabajarán distintas actividades, siguiendo una dinámica activo-participativa, que les permitirá asumir un rol –tanto de estudiantes como de profesores– al momento de abordar la modelización matemática en el aula.

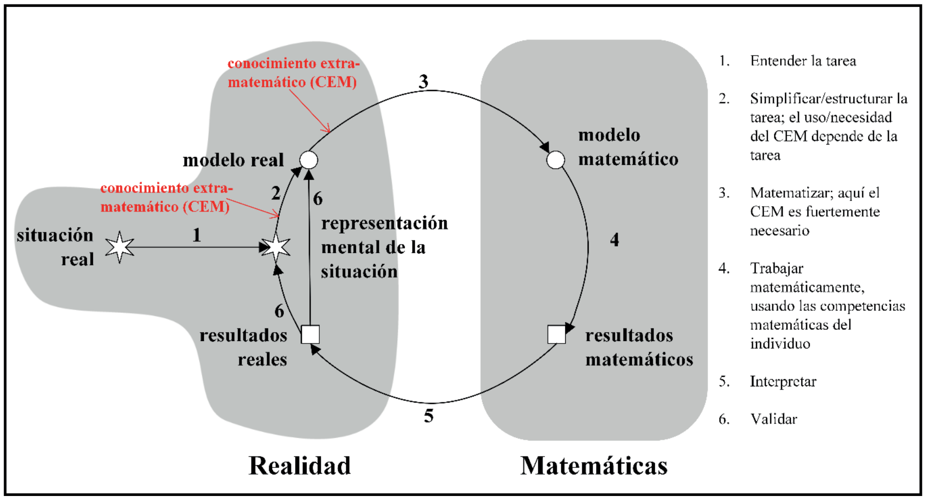
A continuación, se describe la estructura de este trabajo: después de esta introducción, se presenta el fundamento teórico sobre el que se cimenta esta propuesta; luego, se describe la estructura del taller y se presenta un extracto del análisis de la actividad matemática de modelización; finalmente, se comentan algunas experiencias previas de implementación de esta propuesta (en su formato extendido) con profesores en distintos niveles de formación, además de reflexionar sobre sus implicancias en la enseñanza.

Fundamento teórico

En términos generales, el proceso de modelización es entendido como un pasaje sistémico entre el mundo real y el matemático, para así dar solución a una situación-problema de la realidad. Si bien se han diseñado diferentes ciclos para explicar este proceso (Borromeo, 2006), y han emergido distintas perspectivas sobre su implementación (Abassian, Safi, Bush y Bostic, 2020), existe un claro consenso en que su inclusión curricular es necesaria para mejorar el aprendizaje de la matemática.

Este taller considera como referente teórico el ciclo de modelización desde una perspectiva cognitiva (ver Figura 1), propuesto por Borromeo (2018). La elección de este ciclo en particular, se justifica en el alto impacto que tiene en estos momentos dentro de la comunidad académica interesada en la investigación sobre modelización en el ámbito educativo.

Figura 1. *Ciclo de modelización matemática desde una perspectiva cognitiva.*



Fuente: Traducido desde Borromeo (2018, p. 15)

Para explicar este ciclo, se utiliza como ejemplo el problema *El Puerto de Hamburgo* que se presenta en la Figura 2.

Figura 2. *Problema de modelización El Puerto de Hamburgo.*

El Puerto de Hamburgo

En 2007, se enviaron 9,9 millones de contenedores a través del puerto de Hamburgo. Esto lo convierte en el noveno puerto más grande del mundo. En 365 días sólo se colocan dos o tres contenedores en el lugar equivocado. Entonces comienza la búsqueda. El trabajador portuario que encuentra el contenedor tiene un día libre. Por cierto: nunca se ha perdido ningún contenedor en Hamburgo.
Texto original de un boletín de seguros: AOK Rheinland/Hamburg No.2/2008.
¿Qué tamaño tiene el área para el transbordo de los contenedores?

Fuente: Adaptado desde Borromeo (2018, p. 44).

Al leer el enunciado, se pueden observar ciertas características que lo sitúan como un problema de modelización matemática. La información que se presenta no incluye muchos datos relevantes para responder la pregunta que se plantea, lo que hace que el enunciado sea *abierto* y, al mismo tiempo, hace que la situación a resolver sea *compleja*. Además, el contexto en que se sitúa el enunciado es *realista*, pues considera elementos del mundo real (el puerto, los contenedores, la ciudad de Hamburgo) y es consistente con un hecho que ocurre en la realidad, atribuyéndole el carácter de *auténtico*. Bajo estas condiciones, la tarea es claramente un *problema* que, además, puede ser *solucionable mediante un ciclo de modelización*.

Al asignar este problema al estudiante, éste se encuentra con una *situación real* que debe comprender para formar una *representación mental de la situación*. En el tránsito a simplificar la situación, pueden emerger preguntas como: *¿qué tamaño tienen los contenedores?*, *¿cómo se acomodan?*, *¿cuántos se transportan diariamente?*, etc. Estas preguntas pueden guiarle a una serie de simplificaciones, derivadas de su *conocimiento extra-matemático* (experiencias, estimaciones, imágenes mentales), para así construir un *modelo real* de la situación inicial en que, por ejemplo, puede estimar que el área ocupada por cada lote de contenedores es de 30 m^2, que se apilan cinco en cada espacio, y que están en promedio cuatro días antes de ser retirados del puerto. Con estas consideraciones, el tránsito del mundo real hacia el matemático (matematización) hace que emerja un *modelo matemático*, en que una serie de operaciones aritméticas pueden llevar a la obtención de *resultados matemáticos* que, al ser interpretados en la realidad del problema, permiten la obtención de *resultados reales*, y cuya validación es posible, por ejemplo, vía internet (una descripción más detallada de la resolución de este problema se encuentra en Borromeo, 2018, pp. 45-46).

Este ciclo se enmarca dentro de la perspectiva realista de modelización, cuyo foco se centra principalmente en el desarrollo de la *competencia en modelización matemática* (Abassian et al., 2020). Ésta se define, en términos de Niss y Højgaard (2019), como el ser capaz de trabajar (construir, analizar críticamente, evaluar) con modelos matemáticos y tomar en cuenta los elementos del dominio extra-matemático, conforme se concretan las fases del ciclo de modelización. Esta competencia se lleva a cabo a través de distintas *subcompetencias de modelización* (numeradas en la parte derecha de la Figura 1), que posibilitan el tránsito entre las fases del ciclo (véase Maaß, 2006).

Junto con el proceso de modelización, se consideran las herramientas que propone el Enfoque Onto-Semiótico (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007, 2019) para el análisis de la actividad matemática que subyace al proceso de modelización. En una propuesta teórico-reflexiva desarrollada con anterioridad (véase Ledezma, Font y Sala, 2021b), se ponen en juego estas herramientas, de modo tal que se precisan y desvelan elementos explícitos (*prácticas* y *objetos matemáticos*, *procesos*) e implícitos (*normas epistémicas*) que permiten ilustrar con detalles la estructura y funcionamiento de las fases del ciclo de modelización matemática desde una perspectiva cognitiva. En términos del EOS, se define como *práctica matemática* a "cualquier acción o manifestación (lingüística o de otro tipo) llevada a cabo por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar la solución a otras personas, así como para validar y generalizar esa solución a otros contextos y problemas" (Godino y Batanero, 1998, p. 182, traducción de los autores). Mientras que se consideran seis tipos de *objetos matemáticos primarios*: 1) elementos lingüísticos (términos, expresiones, gráficos, etc.), 2) situaciones-problemas, 3) conceptos-definiciones, 4) proposiciones, 5) argumentos, y 6) procedimientos. En el apartado siguiente, se presenta un fragmento del análisis realizado en que se ponen en juego estos elementos.

En el EOS, la modelización matemática es considerada como un *híper* o *mega proceso* (Godino et al., 2007), puesto que implica otros *procesos* más elementales (representación, argumentación, idealización, etc.), y su potenciación en el aula se considera un aspecto que mejora la *idoneidad* del proceso de instrucción (Ledezma, Font y Sala, 2021a; Sala, Font, Giménez y Barquero, 2017).

Descripción del taller y diseños didácticos

El taller que aquí se reporta corresponde a la adaptación de una experiencia previamente implementada (descrita en el apartado siguiente) y que, por razones de disponibilidad de tiempo, se ha estructurado de la forma que se presenta en la Tabla 2.

Tabla 2. *Descripción de las actividades del taller por sesiones.*

Sesión	Actividades
Primera	– Presentación del taller, sus expositores y la dinámica de trabajo. – Resolución del problema de modelización *Pilas de alfalfa* (ver Figura). – Análisis del problema con las herramientas del EOS. – Análisis del problema desde el ciclo de modelización.
Segunda	– Continuación de la resolución y análisis de problemas de modelización. – Reflexión sobre las actividades implementadas y su aplicabilidad en el aula.

Elaboración propia.

Como se muestra en la tabla anterior, el primer problema de modelización que se plantea a los participantes es el de las *Pilas de alfalfa* (ver Figura 3), en el que se solicita calcular la altura de una montaña de pilas de alfalfa a través de una imagen. Este problema es luego analizado y discutido en forma plenaria desde dos perspectivas: primero, utilizando las herramientas de análisis de la actividad matemática que aporta el EOS; segundo, utilizando una de las resoluciones que se tienen documentadas sobre este problema para ejemplificar el ciclo de modelización considerado. Este análisis permite a los participantes asumir la postura tanto de estudiantes como de profesores cuando se enfrentan a una tarea de modelización matemática.

Figura 3. *Problema de modelización Pilas de alfalfa.*

Pilas de alfalfa

Hacia el final del verano, se pueden ver montañas de pilas de alfalfa en el campo, como las de la imagen. Las pilas se acomodan de manera que se ubiquen cinco en la base, cuatro en la siguiente fila, luego tres, dos y, finalmente, una bola de alfalfa en la cúspide.

Intenta hallar la altura de la montaña de pilas de alfalfa.

Fuente: Adaptado desde Borromeo (2007, p. 2084)

La elección de este problema en particular se sustenta, por una parte, en que ha sido analizado desde diferentes enfoques dentro de la literatura especializada (por ejemplo, Borromeo, 2007; Hankeln, Adamek y Greefrath, 2019; Ledezma et al., 2021b; Tekin-Dede, 2019; entre otros) y, por otra parte, por ser un ejemplo paradigmático para describir el ciclo de modelización desde una perspectiva cognitiva (véase Borromeo, 2011, 2018).

Para el análisis de la actividad matemática –con base en las herramientas del EOS–, se plantea a los participantes, por ejemplo, que identifiquen los pasos para resolver el problema (*prácticas matemáticas*), así como la matemática puesta en juego a la hora de resolver el problema (*objetos matemáticos*, *procesos*), y las posibles dificultades a las que se podría enfrentar un estudiante resolutor. Como se ha declarado en el apartado preliminar, se desarrolló con anterioridad una propuesta teórico-reflexiva en que se utilizan estas herramientas para analizar la actividad matemática que subyace al proceso de modelización, y en la Tabla 3 se presenta un fragmento de la misma.

Tabla 3. *Fragmento del análisis del problema con las herramientas del EOS.*

Prácticas matemáticas	Procesos	Objetos matemáticos
Modelo real → Modelo matemático → Resultados matemáticos		
Calcular la parte de la altura de las filas pares que no se superpone con la altura de las filas impares, mediante una comparación visual	– Representación	– Comparación visual de longitudes (procedimiento) – Proposición matemática: *la altura de las filas pares que se superpone con la altura de las impares es ¾ del diámetro de la circunferencia*. – Propiedad monótona de la medida $\left(\mu(A) \leq \mu(B)\right)$
Realizar los cálculos para obtener la altura total de la montaña de pilas de alfalfa	– Argumentación	– Propiedad aditiva de la medida de longitudes $(m[A \cup B] = m[A] + m[B])$ – Medida indirecta (procedimiento) – Proposición (tesis del argumento): *la altura total es de 6,75 m, aproximadamente*. – Argumento (razones): *aplicando el procedimiento de estimación se obtiene que*: a) *el diámetro de la pila es menor que la altura de la mujer; como la mujer mide 1,7 m, la pila mide 1,5 m, aproximadamente*. b) *la altura de las filas pares que se superponen con las impares, es aproximadamente ¾ del diámetro de la circunferencia*. c) *la altura total es la suma de las alturas de las filas impares más la altura de las filas pares*.

Adaptado desde Ledezma et al., 2021b, p. 372.

Tomando en cuenta la pluralidad de contextos educativos de los participantes, son los expositores quienes introducen los elementos constitutivos, tanto del ciclo de modelización considerado como de las herramientas que aporta el EOS para analizar este tipo de actividad matemática. De este modo, no se espera que los participantes realicen el mismo análisis presentado en la Tabla 3 sino que, a partir de interacción y discusión sobre el problema presentado, logren identificar sus elementos constitutivos, más allá de la matemática en juego.

Para la segunda sesión del taller se continúa con la misma dinámica que en la primera, con la diferencia que se dejan a elección de los participantes el problema a resolver de entre un compendio con el que se cuenta. Finalmente, y basados en todo el análisis y la discusión sobre los problemas resueltos, el taller culmina con una reflexión sobre la implementación de la modelización matemática en el aula, de acuerdo a los contextos educativos de los participantes.

Experiencias de implementación

A partir de la operacionalización de la propuesta teórico-reflexiva mencionada en el apartado de Fundamento teórico, es que se diseñó un taller que fue implementado en distintos niveles de formación de profesores (pregrado, máster y doctorado) que cursan sus estudios en dos universidades de la ciudad de Barcelona (España).

En una primera fase de esta experiencia se intervino con dos grupos: uno con 60 profesoras de educación primaria en formación inicial (pregrado), en el contexto de un módulo sobre resolución de problemas; y otro con 20 profesores de matemática de educación secundaria en formación continua (máster profesionalizante), en el contexto de un módulo sobre modelización matemática. La dinámica con ambos grupos fue la siguiente: primero, se introdujo a los sujetos en los aspectos generales de la modelización matemática (conceptualización teórica, diferentes perspectivas, etc.); segundo, se les presentó el problema *Pilas de alfalfa* para su resolución en equipos, y se les pidió que registraran sus resultados; tercero, se presentaron los resultados en forma plenaria y se discutieron las estrategias utilizadas por cada grupo; finalmente, se les presentó el ciclo de modelización desde una perspectiva cognitiva, ejemplificándolo con una de las resoluciones documentadas sobre el problema en cuestión.

Una diferencia sustancial en cuanto a las resoluciones obtenidas durante esta fase fue que, mientras los profesores de educación primaria privilegiaron un *modelo matemático* que les permitió finalmente obtener *resultados reales* para dar respuesta al problema, los profesores de educación secundaria utilizaron más de un *modelo matemático*, pero no vieron la necesidad de llevar sus *resultados matemáticos* a la realidad, ello justificado en el carácter abierto del enunciado. Este tipo de hallazgos se encuentra en consonancia con los reportados por Verschaffel y colaboradores, en estudios de similares características llevados a cabo con profesores de matemáticas de educación primaria y secundaria (véase Chen, Van Dooren, Chen y Verschaffel, 2011; Van Dooren, Verschaffel y Onghena, 2003; Verschaffel, De Corte y Borghart, 1997; entre otros).

En una segunda fase de esta experiencia se intervino con dos grupos más: uno con estudiantes de un máster de investigación en Educación Matemática, en el contexto de una sesión sobre modelización matemática; y otro con estudiantes de un programa de doctorado en Didáctica de la Matemática, en el contexto de un seminario de investigación. A diferencia de las intervenciones de la fase anterior, los sujetos participantes ya contaban con herramientas teóricas sobre modelización matemática, por lo que la dinámica con ellos se centró, principalmente, en la resolución del problema en cuestión para la posterior discusión, tanto de los resultados obtenidos como de las posibles adaptaciones que se podían hacer al enunciado del problema.

Consideraciones finales

Tal como se declaró en el apartado Fundamento teórico, existen distintos ciclos que permiten explicar el proceso de modelización, así como diferentes perspectivas sobre su implementación. Por lo tanto, en este taller se considera un ciclo y una perspectiva específicos para el trabajo con modelización, enfocados ambos principalmente en el desarrollo de la *competencia en modelización matemática*. No obstante, y tomando en cuenta que las propuestas teóricas pueden en ocasiones desconectarse del contexto del aula común de matemáticas, es que en este taller se privilegia la componente de utilidad práctica del ciclo de modelización considerado y, a raíz de la discusión docente con los participantes, se pretende reflexionar sobre su implementación en el aula.

En términos generales, se han consensuado algunos elementos que los profesores deben considerar al momento de abordar la modelización de mejor forma en el aula, como los siguientes:

- Conocimiento de las tareas de modelización, en cuanto a sus características, tipos y propósitos de evaluación (véase Haines y Crouch, 2001; Houston, 2007; Maaß, 2010; Niss, 1993; Vos, 2007).

- Habilidad para diagnosticar dificultades de los estudiantes y/o bloqueos durante las fases del ciclo de modelización (Galbraith y Stillman, 2006).
- Conocimiento de un amplio espectro de modos de intervención (Leiß, 2007) y la habilidad para realizarlos de manera apropiada.
- Lograr un balance permanente entre la independencia de los estudiantes en su trabajo de resolución, y la guía del docente durante el desarrollo de la tarea (Blum, 2011).

Finalmente, diversos estudios han sido realizados con foco en el rol de la modelización matemática dentro de la formación de profesores y su impacto en la enseñanza futura, los cuales han sido desarrollados desde diferentes perspectivas y contextos a nivel mundial. Por citar algunos, en el contexto alemán, Kuntze (2011) compara las visiones –entre profesores en formación y en ejercicio– sobre las tareas de modelización y su complejidad; en el contexto australiano, Stillman y Brown (2011) estudian las creencias sobre el uso de este tipo de tareas, al mismo tiempo que analizan las diferencias entre profesores que recibieron una formación en modelización matemática de forma paralela (durante el pregrado) o especializada (después del pregrado), y sus implicancias en el ejercicio docente. En el contexto español, Ledezma y colaboradores (Ledezma et al., 2021a; Ledezma, Sala, Breda y Sánchez, 2021) analizan la reflexión docente que realizaron los futuros profesores de matemática de educación secundaria en sus Trabajos Finales de Máster, tomando como herramienta los Criterios de Idoneidad Didáctica propuestos por el EOS.

En otros contextos, también se ha estudiado el conocimiento profesional sobre las competencias en modelización (Kaiser, Schwarz y Tiedemann, 2013), sobre su futura enseñanza en la educación escolar (Tan y Ang, 2013), sobre su aprendizaje durante la formación de profesores (Winter y Venkat, 2013), y su rol en la formación de ingenieros (Cosmes, 2020; Cosmes y Montoya, 2021).

Agradecimientos

Este estudio fue realizado en el marco del Proyecto ANID/PFCHA nro. 72200458 (Chile), y del Proyecto de Investigación en Formación de Profesorado PGC2018-098603-B-I00 (MCIU/AEI/FEDER, UE).

Referencias

Abassian, A., Safi, F., Bush, S. y Bostic, J. (2020). Five different perspectives on mathematical modeling in mathematics education. *Investigations in Mathematics Learning, 12*(1), 53-65. https://doi.org/10.1080/19477503.2019.1595360

Aparisi, L. y Pochulu, M. (2013). Dificultades que enfrentan los profesores en escenarios de modelización. En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 26* (pp. 1387-1397). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Blum, W. (2011). Can modelling be taught and learnt? Some answers from empirical research. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo y G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling: ICTMA 14* (pp. 15-30). Dordrecht, Países Bajos: Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_3

Borromeo, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38*(2), 86-95. https://doi.org/10.1007/bf02655883

Borromeo, R. (2007). Personal experiences and extra-mathematical knowledge as an influence factor on modelling routes of pupils. En D. Pitta-Pantazi y C. Philippou (Eds.), *European Research in Mathematics Education V: Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2080-2089). Lárnaca, Chipre: University of Cyprus, ERME.

Borromeo, R. (2011). *Wege zur Innenwelt des mathematischen Modellierens: Kognitive Analysen zu Modellierungsprozessen im Mathematikunterricht*. Wiesbaden, Alemania: Vieweg+Teubner Verlag. https://doi.org/10.1007/978-3-8348-9784-8

Borromeo, R. (2013). Mathematical modelling in European education. *Journal of Mathematics Education at Teachers College, 4*(2), 18-24.

Borromeo, R. (2018). *Learning How to Teach Mathematical Modeling in School and Teacher Education*. Cham, Suiza: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68072-9

Chen, L., Van Dooren, W., Chen, Q. y Verschaffel, L. (2011). An investigation on Chinese teachers' realistic problem posing and problem solving ability and beliefs. *International Journal of Science and Mathematics Education, 9*(4), 919-948. https://doi.org/10.1007/s10763-010-9259-7

Cosmes, S. (2020). *La modelización matemática en la formación de ingenieros. El caso de Ingeniería Civil* (Tesis doctoral). Recuperado desde Catálogo Bibliográfico de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. (https://catalogo.pucv.cl/cgi-bin/koha/opac-detail.pl?biblionumber=432566)

Cosmes, S. y Montoya, E. (2021). Understanding links between mathematics and engineering through mathematical modelling – The case of training civil engineers in a course of structural analysis. En F. K. S. Leung, G. A. Stillman, G. Kaiser y K. L. Wong (Eds.), *Mathematical Modelling Education in East and West* (pp. 527-537). Cham, Suiza: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-66996-6_44

Galbraith, P. y Stillman, G. (2006). A framework for identifying student blockages during transitions in the modelling process. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38*(2), 143-162. https://doi.org/10.1007/bf02655886

Godino, J. D. y Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area for research in Mathematics Education. En A. Sierpinska y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity. An ICMI Study* (pp. 177-195). Dordrecht, Países Bajos: Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-011-5470-3_12

Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM – Mathematics Education, 39*(1), 127-135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2019). The Onto-Semiotic Approach: implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics, 39*(1), 38-43.

Haines, C. y Crouch, R. (2001). Recognizing constructs within mathematical modelling. *Teaching Mathematics and its Applications: An International Journal of the IMA, 20*(3), 129-138. https://doi.org/10.1093/teamat/20.3.129

Hankeln, C., Adamek, C. y Greefrath, G. (2019). Assessing sub-competencies of mathematical modelling – Development of a new test instrument. En G. A. Stillman y J. P. Brown (Eds.), *Lines of Inquity in Mathematical Modelling Research in Education* (pp. 143-160). Cham, Suiza: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-14931-4_8

Houston, K. (2007). Assessing the "phases" of mathematical modelling. En W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn y M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI Study* (pp. 249-256). Boston, MA: Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1_26

Kaiser, G. (2020). Mathematical modelling and applications in education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (2da ed.) (pp. 553-561). Cham, Suiza: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_101

Kaiser, G., Schwarz, B. y Tiedemann, S. (2013). Future teachers' professional knowledge on modeling. En R. Lesh, P. L. Galbraith, C. Haines y A. Hurford (Eds.), *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies: ICTMA 13* (pp 433-444). Boston, MA: Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-6271-8_37

Kuntze, S. (2011). In-service and prospective teachers' views about modelling tasks in the mathematics classroom – Results of a quantitative empirical study. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo y G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling: ICTMA 14* (pp. 279-288). Dordrecht, Países Bajos: Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_28

Ledezma, C., Font, V. y Sala, G. (2021a). Análisis de la reflexión realizada por un futuro profesor sobre el papel de la modelización matemática en la mejora de un proceso de instrucción para enseñar trigonometría. *PARADIGMA, 42* (Extra 2), 290-312. https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2021.p290-312.id1043

Ledezma, C., Font, V. y Sala, G. (2021b). Un análisis onto-semiótico de la actividad matemática del proceso de modelización. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 367-375). Valencia, España: SEIEM.

Ledezma, C., Sala, G., Breda, A. y Sánchez, A. (2021). Analysis of a preservice teacher's reflection on the role of mathematical modelling in his master's thesis. En M. Inprasitha, N. Changsri y N. Boonsena (Eds.), *Proceedings of the 44th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 195-204). Khon Kaen, Tailandia: PME.

Leiß, D. (2007). *Lehrerinterventionen im selbständigkeitsorientierten Prozess der Lösung einer mathematischen Modellierungsaufgabe*. Hildesheim, Alemania: Franzbecker.

Maaß, K. (2006). What are modelling competencies?. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38*(2), 113-142. https://doi.org/10.1007/bf02655885

Maaß, K. (2010). Classification scheme for modelling tasks. *Journal für Mathematik-Didaktik, 31*(2), 285-311. https://doi.org/10.1007/s13138-010-0010-2

Maaß, K. y Gurlitt, J. (2010). Designing a teacher questionnaire to evaluate professional development in modelling. En V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne y F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2056-2065). Lyon, Francia: Institut National de Recherche Pédagogique, ERME.

Niss, M. (Ed.). (1993). *Investigations into Assessment in Mathematics Education: An ICMI Study*. Dordrecht, Países Bajos: Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-017-1974-2

Niss, M. y Højgaard, T. (2019). Mathematical competencies revisited. *Educational Studies in Mathematics, 102*(1), 9-28. https://doi.org/10.1007/s10649-019-09903-9

Sala, G., Font, V., Giménez, J. y Barquero, B. (2017). Inquiry and modelling in a real archaeological context. En G. Stillman, W. Blum y G. Kaiser (Eds.), *Mathematical Modelling and Applications: Crossing and Researching Boundaries in Mathematics Education* (pp. 325-335). Cham, Suiza: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-62968-1_28

Stillman, G. y Brown, J. P. (2011). Pre-service secondary mathematics teachers' affinity with using modelling tasks in teaching years 8-10. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo y G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling: ICTMA 14* (pp. 289-298). Dordrecht, Países Bajos: Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_29

Tan, L. S. y Ang, K. C. (2013). Pre-service secondary school teachers' knowledge in mathematical modelling – A case study. En G. A. Stillman, G. Kaiser, W. Blum y J. P. Brown (Eds.), *Teaching Mathematical Modelling: Connecting to Research and Practice* (pp. 373-383). Dordrecht, Países Bajos: Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-6540-5_31

Tekin-Dede, A. (2019). Arguments constructed within the mathematical modelling cycle. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 50*(2), 292-314. https://doi.org/10.1080/0020739X.2018.1501825

Van Dooren, W., Verschaffel, L. y Onghena, P. (2003). Pre-service teachers' preferred strategies for solving arithmetic and algebra word problems. *Journal of Mathematics Teacher Education, 6*(1), 27-52. https://doi.org/10.1023/a:1022109006658

Verschaffel, L., De Corte, E. y Borghart, I. (1997). Pre-service teachers' conceptions and beliefs about the role of real-world knowledge in mathematical modelling of school word problems. *Learning and Instruction, 7*(4), 339-359. https://doi.org/10.1016/s0959-4752(97)00008-x

Vos, P. (2007). Assessment of applied mathematics and modelling: Using a laboratory-like environment. En W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn y M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI Study* (pp. 441-448). Boston, MA: Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1_49

Winter, M. y Venkat, H. (2013). Pre-service teacher learning for mathematical modellling. En G. A. Stillman, G. Kaiser, W. Blum y J. P. Brown (Eds.), *Teaching Mathematical Modelling: Connecting to Research and Practice* (pp. 395-404). Dordrecht, Países Bajos: Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-6540-5_33

SECCIÓN 5

USO DE RECURSOS TECNOLÓGICOS EN EL PROCESO DE APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

MOVILIZACIÓN DE PROCESOS DE MATEMÁTICOS EN LA PRÁCTICA ARGUMENTATIVA USANDO EL SOFTWARE GEOGEBRA

MOBILIZING MATHEMATICAL PROCESSES IN ARGUMENTATIVE PRACTICE USING GEOGEBRA SOFTWARE

Guadalupe Morales Ramírez, Víctor Larios Osorio, Norma Violeta Rubio Goycochea
Universidad Autónoma de Querétaro, (México), Pontificia Universidad Católica, (Perú).
gmorales28@alumnos.uaq.mx, vil@uaq.mx, nrubio@pucp.edu.pe

Resumen
En este artículo se muestran los primeros resultados de un proyecto en desarrollo, cuyo objetivo es dar cuenta de la movilización de algunos procesos matemáticos propuestos por el enfoque ontosemiótico, cuando un grupo de alumnos de bachillerato justifica y argumenta situaciones en el contexto geométrico mediante el uso del software de GeoGebra. El análisis cualitativo se centró en las respuestas manifestadas en las hojas de trabajo y en los archivos dinámicos elaborados en el GeoGebra, esto en el contexto de los teselados regulares y semirregulares. Se concluye que los alumnos movilizan principalmente el proceso de materialización, visualización y significación, lo que conlleva a desencadenar argumentos poco estructurados mediante el uso de un lenguaje informal, pues los significados referenciales sobre las traslaciones isométricas se muestran de manera superficial, lo que conlleva a los alumnos a justificar ambiguamente.

Palabras clave: enfoque ontosemiótico, procesos matemáticos, GeoGebra

Abstract
This article shows the first results of an ongoing project, whose objective is to account for the mobilization of some mathematical processes proposed by the onto-semiotic approach, when a group of high school students justify and argue situations in the geometric context by using GeoGebra software. The qualitative analysis focused on the responses expressed in the worksheets and in the dynamic files elaborated in GeoGebra, this in the context of regular and semi-regular tessellations. It is concluded that students mainly mobilize the process of materialization, visualization, and meaning, which leads to unleashing unstructured arguments through the use of informal language; since the referential meanings on isometric translations are shown superficially, which leads students to justify ambiguously.

Key words: onto-semiotic approach, mathematical processes, GeoGebra

Introducción

El aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes de cualquier nivel educativo está asociado con las experiencias que desarrolla durante su vida académica, las cuales tienen que ver con procesos cognitivos relacionados con pensar, explicar, percibir, memorizar, razonar, etc. Según Piaget (1961) el individuo es capaz de abstraer reflexivamente a través de sus acciones operacionales, es decir, todas las actividades cognitivas que pone en juego el sujeto para extraer de ellos ciertos caracteres y utilizarlos con otros fines (nuevas adaptaciones o nuevos problemas). Así que, desde esta perspectiva, el razonamiento y los errores que comenten los individuos es parte del desarrollo de sus procesos cognitivos, donde los objetos y sus representaciones juegan un papel fundamental en la construcción del conocimiento. Por otro lado, Vygotsky (1979) asocia el desarrollo del pensamiento cognitivo con las relaciones sociales y culturales, contemplando las interacciones y aprehensiones sobre el uso de recursos o herramientas tecnológicas que incorpora en el desarrollo del conocimiento.

En el contexto de las matemáticas, se habla de procesos matemáticos que están ligados a procesos cognitivos presentes en la resolución de problemas, estos procesos matemáticos son evidenciados de acuerdo con el tipo de problema y el ambiente generado durante su resolución (Perdomo, Camacho y Santos-Trigo, 2012). Ante esta realidad, los programas curriculares del bachillerato mexicano (alumnos de 15 a 18 años), de la Secretaría de Educación Pública (SEP, 2017), han resaltado que los alumnos deben ser competentes para argumentar la solución de problemas a través de un razonamiento lógicamente estructurado, con el fin de desarrollar capacidades cognitivas. Asimismo, estos programas han puesto énfasis en la incorporación del uso de herramientas computacionales como un medio que apoye el razonamiento y los diversos procesos matemáticos emergentes en el desarrollo de la resolución de problemas. Este giro dentro de los programas curriculares ha llevado a dar importancia al estudio de los procesos matemáticos, esto es respaldado por la National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) donde se propone que la enseñanza debe estar centrada en el contenido matemático y los procesos implicados, como el de prueba, razonamiento, visualización, comunicación, particularización, generalización, representación, entre otros. Según Rubio y Font (2017) la diversidad de procesos matemáticos presentes en la actividad matemática permite tener claridad sobre los significados y aprendizajes alcanzados por el alumno, esto por el hecho de que se pueden analizar desde el desarrollo de otros procesos concatenados en un tiempo establecido. Por tanto, es relevante examinar y evaluar los significados a través de procesos matemáticos manifestados en la práctica matemática de los alumnos, más aún si se involucra el uso de tecnologías digitales.

Lo anterior se aborda en el estudio de Fajardo y Larios (2019), donde se identifican algunos procesos matemáticos en la práctica argumentativa de alumnos de secundaria, en un ambiente de geometría dinámica. En particular el software GeoGebra, el cual a partir del uso los alumnos son capaces de abstraer reglas generales que les permite transitar del proceso de particularización al de generalización, y viceversa. En este sentido, diversos estudios (Radford, 2006; Bussi y Mariotti, 2008; Karadag y McDougall, 2011; Mejía y Molina, 2013; Larios, Pino-Fan y González, 2017; Morales, Larios y Rubio, 2021) han indagado sobre el uso de las tecnologías digitales, cuyo énfasis se hace en el uso de la geometría dinámica como un medio que permite a los alumnos explorar, realizar conjeturas en un proceso de formulación, prueba y reformulación de ideas matemáticas, por tanto, evaluar procesos matemáticos a partir de una situación problema permite tener referencia de los significados y conocimientos desarrollados por los alumnos.

Siguiendo esta línea de investigación, el presente trabajo propone como objetivo describir los procesos matemáticos que ponen en juego los alumnos de bachillerato cuando realizan justificaciones sobre el proceso de construcción de teselados regulares y semirregulares, en un ambiente de geometría dinámica. Cabe resaltar que los procesos matemáticos en los que ponemos nuestra atención son los propuestos en la teoría del Enfoque Ontosemiótico, misma que da fundamento a este trabajo de investigación.

Marco teórico

Este estudio se fundamenta en el marco de herramientas teóricas metodológicas del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS) propuesto por Godino, Batanero y Font (2007). En particular se enfatiza en el proceso matemático desde el punto de vista de proceso-producto, la configuración ontosemiótica como parte del análisis de los objetos movilizados y la geometría dinámica como un medio que favorece los procesos matemáticos involucrados en el aprendizaje de los alumnos.

Desde esta perspectiva, las *prácticas matemáticas* son aquellas acciones (operativas) realizadas por un individuo durante la resolución de un problema matemático y las comunicaciones (discursivas) que se hace de la solución, con el fin de validar y generalizar en otros contextos y problemas (Godino y Batanero, 1994). Tomando en cuenta lo anterior, se asume que la *práctica argumentativa* se realiza cuando el alumno desarrolla una práctica matemática (operativa o discursiva) referente a una situación problema, la cual requiere de una justificación, validación, descripción, explicación, argumentación o demostración en el proceso de solución del problema, en el que puede o no manifestar un razonamiento lógico-deductivo (Morales, Rubio y Larios, en prensa). En el desarrollo de estas prácticas argumentativas intervienen y emergen una red deobjetos y procesos matemáticos, lo que se conoce en el EOS por *configuración ontosemiótica* (Font y Godino, 2006).

De esta manera el *proceso matemático* se asume como la secuencia de acciones que es activada o desarrollada, durante un cierto tiempo, para conseguir un objetivo, generalmente una respuesta (salida) ante la propuesta de una tarea (entrada), las cuales están sometidas a reglas matemáticas o metamatemáticas (Rubio, 2012). Así el proceso matemático permite explorar el funcionamiento dinámico de la configuración ontosemiótica de objetos y procesos matemáticos activados en las prácticas matemáticas. El EOS considera una lista de dieciséis procesos matemáticos, seis de ellos (comunicación (C), argumentación (A), algoritmización (Al), enunciación (E), definición (De) y problematización (P)) podríamos asociarlos con los objetos matemáticos primarios (lenguaje, argumento, procedimientos, definiciones, proposiciones y situaciones problema) que dan estructuran a la configuración ontosemiótica. Mientras que el resto de los procesos matemáticos se agrupan en facetas duales (institucionalización (In)-personalización (Pe), idealización (I)-materialización (M), descomposición (D)-reificación (Re), significación (S)-representación (R), particularización (Pa)-generalización (G)), las cuales se caracterizan como una forma de "estar participando" en el desarrollo de la práctica matemática (Rubio y Font, 2017). En este estudio se intenta identificar y describir algunos de estos procesos matemáticos a través del análisis de los objetos matemáticos intervinientes y emergentes que ponen en juego los alumnos de bachillerato cuando desarrollan prácticas argumentativas mediante el uso del software GeoGebra.

Metodología

Se trata de un estudio de caso que contempla una metodología cualitativa de corte descriptiva Cohen, Manion y Morrison (2018), la cual conformó cuatro fases de acuerdo con la ingeniería didáctica propuesta por Godino, Rivas, Arteaga, Lasa y Wilhelmi (2014). Dichas fases consistieron en un 1) estudio preliminar, 2) diseño de experimento, 3) implementación y 4) evaluación o análisis retrospectivo, las cuales tomaron en cuenta un diseño de actividades cuya tarea principal fue la construcción de teselados regulares y semirregulares, por cuestiones de espacio se muestra un ejemplo de cada una de las construcciones realizados en el GeoGebra. Dichas actividades se trabajaron con un grupo de veinte alumnos que cursaban la asignatura de Geometría Analítica, correspondiente al de tercer semestre de bachillerato. Además, el desarrollo de las actividades fue trabajada en parejas, ya que las computadoras fueron limitadas, las cuales se eligieron por conveniencia pues era necesario que los alumnos usaran el software GeoGebra y se encontraran cursando dicha asignatura. La implementación se desarrolló en 8 sesiones de 50 minutos en el laboratorio de matemáticas y en un horario normal de clases de una Escuela de Bachilleres de la Universidad Autónoma de Querétaro.

A continuación, se describen las fases que contribuyeron al desarrollo de este trabajo.

- Estudio preliminar: consistió en un análisis de contenido usando la configuración epistémica del EOS y un análisis a priori de los procesos matemáticos.
- Diseño de experimento: radicó en la selección y secuenciación de las situaciones (preguntas abiertas) propuestas.
- Implementación: se observó la interacción entre los alumnos y el software de geometría dinámica.
- Evaluación o análisis retrospectivo: consistió en el análisis a posteriori de los procesos matemáticos del EOS, identificados en las respuestas manifestadas por las parejas de alumnos de este estudio.

Los datos recabados en este estudio fueron a través de las hojas de trabajo (actividades), los archivos dinámicos sobre los protocolos de construcción de los teselados generados a través del software GeoGebra, la observación participante y las notas de campo. Además, la intervención del investigador a cargo se centró en responder dudas respecto a las situaciones y el uso del GeoGebra, con el fin de no influir en las respuestas de los alumnos.

Descripción de las actividades

Es importante señalar que se abordaron situaciones que incluían preguntas relacionadas con los conocimientos previos, para asegurarnos que los alumnos tuvieran las nociones que involucraban la construcción del teselado, haciendo énfasis en las transformaciones isométricas. Además, se hicieron sugerencias respecto el uso y aplicación de las herramientas del GeoGebra.

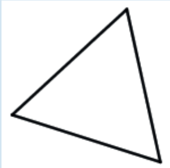
Actividad sobre la construcción de teselados regulares: se explicitó la noción de teselado regular y se pidió a los alumnos construir y justificar el proceso de construcción, mediante la aplicación de las isometrías del GeoGebra.

Actividad sobre la construcción de teselados semirregulares: se explicitó la noción de teselado semirregular y se pidió a los alumnos construir y justificar el proceso de construcción, mediante la aplicación de las isometrías del GeoGebra.

A manera de ejemplo y por cuestiones de espacio solo se muestra en la Tabla 1 algunas situaciones referentes a la construcción del teselado regular, la solución experta de acuerdo con el uso de las herramientas del GeoGebra y el proceso matemático asociado a cada situación.

Tabla 1. ***Actividad didáctica sobre la construcción de un teselado regular y los procesos matemáticos asociados.***

<table>
<tr><th colspan="2">Situación problema</th><th colspan="2">Solución experta</th><th>Proceso matemático</th></tr>
<tr><td colspan="2">1. Si quisieras teselar o cubrir un plano con algún polígono regular ¿Qué polígonos regulares utilizarías? Justifica tu respuesta.</td><td colspan="2">El alumno propone polígonos regulares que sirvan para formar un teselando, cumpliendo con las características puestas en el concepto de teselado regular.</td><td>Particularización</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Dibuja un teselado con algún polígono regular que hayas propuesto en la pregunta anterior.</td><td colspan="2">A partir de los polígonos regulares propuestos por el alumno, se pretende que el alumno dibuje a papel y lápiz el teselado que considera puede formar dichos polígonos.</td><td>Representación y significación
Particularización</td></tr>
<tr><td>Polígono regular</td><td>Marca con una X cuál de estos polígonos pueden teselar un plano</td><td colspan="2">¿Por qué?</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td colspan="2">Para formar un teselado sin dejar huecos y sin que las figuras se sobrepongan deben formar un</td><td>Generalización</td></tr>
</table>

 Triángulo equilátero	X	ángulo de 360° en cada uno de sus vértices, esto se puede verificar dividiendo 360° entre el ángulo interno del polígono y se verifica que la división sea un número exacto o entero. En el caso del triángulo equilátero la división es exacta de 360° entre 60° es 6, por tanto, se puede formar un teselado con triángulos equiláteros.	Significación Personalización Algoritmización
3. ¿Cuánto mide la suma de ángulos que rodea el punto D en el teselado triangular? Justifica tu respuesta.	El ángulo en cualquier vértice del teselado debe ser 360°, pues la medida del ángulo interior de un triángulo es de 60°, por lo que la medida de la suma de ángulos que concurren en el vértice D es de 360°.		Definición y significación Materialización y Algoritmización
4. Utiliza las trasformaciones isométricas (traslación, rotación y reflexión) para construir un teselado en el GeoGebra con hexágonos regulares. Posteriormente guarda el archivo de la siguiente manera: **T6_APELLIDO**	La solución experta sobre la construcción del teselado utilizando hexágonos regulares puede caer en los siguientes casos. • Utilizando traslación • Utilizando rotación • Utilizando reflexión-traslación • Utilizando reflexión-rotación • Utilizando rotación-traslación • Utilizando rotación-reflexión-traslación • Unión de hexágonos regulares		Algoritmización y Materialización Personalización Significación y Representación
5. Si mueves algún punto del hexágono original con la herramienta  ¿Sigue siendo un teselado? Justifica tu respuesta.	En cualquier construcción de teselado bajo el uso de las transformaciones isométricas las propiedades del teselado deberían conservarse bajo la aplicación de la prueba de arrastre del software GeoGebra.		Algoritmización y Materialización Significación
6. Si alguien quisiera construir esta misma teselación, ¿Cómo se lo explicarías? Escribe detalladamente la secuencia de pasos que realizaste en GeoGebra para la construcción del teselado.	Para esta consigna se retoman las posibilidades anteriores de la consigna 4, analizando el procedimiento donde intervienen y emergen objetos matemáticos, explicitando a detalle los pasos que sirvieron para generar el teselado regular, así como el uso de las herramientas del software en el desarrollo del proceso de construcción.		Algoritmización y Argumentación Materialización Descomposición y reificación

Elaboración propia.

Análisis y resultados

Al ser una investigación en curso, se presentan los primeros resultados preliminares de un grupo de 20 alumnos, cuyo análisis se centró en la identificación de procesos matemáticos, propuestos por el marco del EOS, asociados a las respuestas de las actividades manifestados por los alumnos, referente a la construcción de teselados regulares y semirregulares. En esta sección se muestran los procesos matemáticos identificados en las 10 parejas de alumnos, los cuales fueron: significación (S), descomposición (D), Enunciación (E), particularización (Pa), personalización (Pe), representación (R), materialización (M), visualización (V), definición (De) e idealización (I). Por cuestión de espacio, se muestra los procesos matemáticos correspondientes a la actividad que se centró en la construcción de teselados regulares y semirregulares. Además, se usó el símbolo de guion (-) para representar que en esa situación no se identificó algún proceso matemático.

En la Tabla 1 se muestran los procesos matemáticos mayormente identificados fue el de visualización, materialización y significación. En un primero momento, los alumnos recurrieron a materializar su pensamiento a través de la propuesta de figuras poligonales regulares, que utilizarían en la construcción de un teselado regular, por lo que el proceso de idealización está relacionado con el de materialización al proponer de manera escrita y posteriormente mediante un dibujo los polígonos que utilizarían para la construcción. Según el EOS, para transitar del objeto ostensivo al objeto no ostensivo en las prácticas matemáticas, generalmente no perceptibles, se requiere de sus ostensivos asociados, por ejemplo, símbolos, gráficos, figuras, notaciones, entre otros (Font y Contreras, 2008). Las situaciones que involucraron la explicación sobre el proceso de construcción condujeron a los alumnos a movilizar el proceso de significación y visualización, ya que, a partir de la aplicación de herramientas del GeoGebra, como el de traslación, simetría axial, vectores, ángulos de rotación, entre otros. Además, los alumnos hicieron explícito la secuencia de pasos en términos de lo que realizaron en la construcción de los teselados regulares. Esto permitió que el significado fuera desarrollado en términos de la usabilidad de las herramientas del GeoGebra, y no tanto de los conceptos involucrados en la construcción del teselado regular. A continuación, se presentan la identificación de los procesos matemáticos asociados a las parejas que desarrollaron las actividades sobre la construcción del teselado regular y semirregular.

Tabla 2. *Procesos matemáticos identificados en las parejas de alumnos sobre la construcción de los teselados regulares*

	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10
Actividad	**Procesos matemáticos**									
S1	Pa, S	S	S	I, S	I	V	I	-	I, Pe	I
S2	Pa, S	M	M	M	M	M	M	M	M	M
S3	R, S, D	De	-	-	S	-	V	-	-	De, V
S4	V	V	-	V	V	V	V	V	V	V
S5	-	V	-	-	S	V	-	-	S, V	S, V
S6	Pa, S	V	De, S	-	-	V	S, V	V	S	V
S7	M	M	M	M	-	M	M	M	M	M
S8	S, V	V	De, S	S, V	-	-	V	De, V	V	S
S9	S	S	S	-	-	R, S	S	-	S, V	S

Elaboración propia

La **Tabla 2 muestra que el proceso matemático recurrente fue el de materialización, aquí los alumnos realizan un proceso de construcción donde a través del software mediatizan y materializan el pensamiento, es decir, el proceso de materialización sitúa el** conocimiento matemático en el campo del artefacto (Radford, 2006). En el desarrollo de esta actividad se resalta el proceso de materialización, el cual fue identificado cuando los alumnos propusieron, a lápiz y papel, la combinación de polígonos regulares que utilizarían en la construcción de teselados semirregulares. Por otro lado, en la explicación pocos alumnos explicaron correctamente su procedimiento y se hizo evidente el uso de la percepción visual a través de un lenguaje informal.

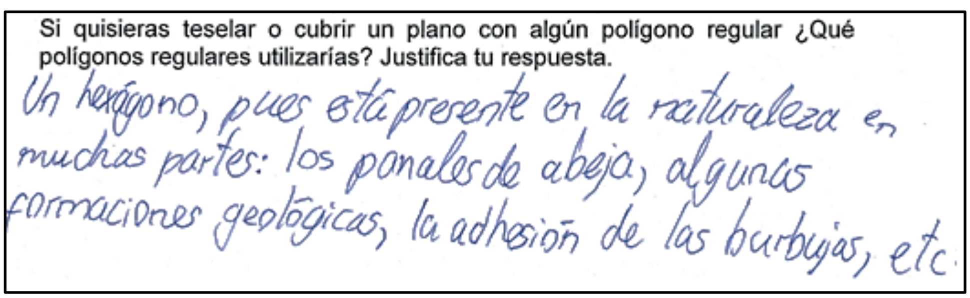
Tabla 3. *Procesos matemáticos identificados en las parejas de alumnos sobre la construcción de los teselados semirregulares*

	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10
Actividad	**Procesos matemáticos**									
S1	M	I, M	M	M	M	M	M	-	I	M
S2	S, V	V	-	De, M, Pa, S	-	V	M	-	M, S	S, V
S3	M	M	M	M, R	-	M	M	M	M	M
S4	S, M	M	M	-	-	M	M	M, V	M	M
S5	S	S	S	-	-	R, S	M, R	V	S	S
S6	M	M	M	-	-	M	M	M	M	M
S7	S	S	S	M	-	S	V	S	S	S
S8	M	M	M	-	-	M	-	M	M	M
S9	S	S	S	M	M	S	I	-	S	S

Elaboración propia.

A continuación, se muestran algunos ejemplos de los procesos matemáticos identificados en las respuestas de los alumnos (pareja 9) , la cual fue elegida por mostrar variedad de procesos y respuestas detalladas sobre la justificación del proceso de construcción de los teselados. La Figura 2 muestra un proceso de personalización, donde se ponen en juego los conocimientos previos del alumno, así asocia el hexágono regular en contextos familiares de la vida real. De esta manera, evoca ejemplos en donde es común visualizar un teselado.

Figura 1. *Identificación del proceso de personalización de la pareja 9 de alumnos.*

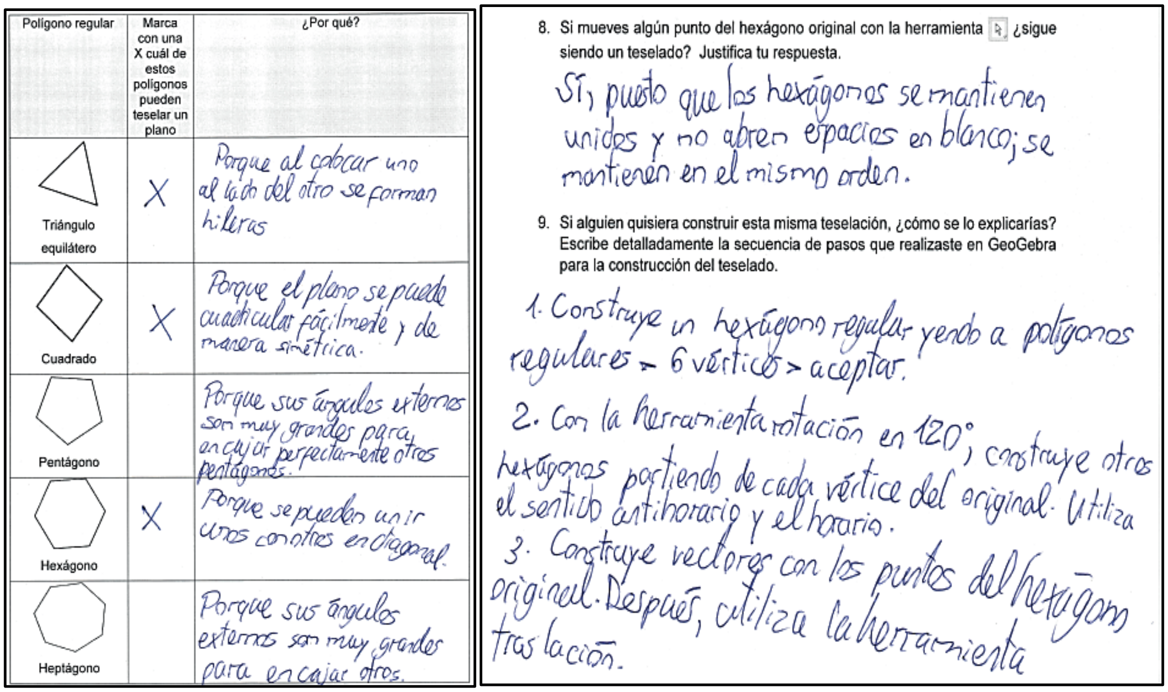

Si quisieras teselar o cubrir un plano con algún polígono regular ¿Qué polígonos regulares utilizarías? Justifica tu respuesta.

Un hexágono, pues está presente en la naturaleza en muchas partes: los panales de abeja, algunas formaciones geológicas, la adhesión de las burbujas, etc.

Elaboración propia.

La Figura 3 muestra el proceso de visualización y significación, ya que el alumno en un primer momento recurre a su percepción visual para identificar con qué polígonos regulares podría formar un teselado regular, así recurre a decir que: sus ángulos son más grandes o que el plano se puede cuadricular fácilmente. Sin embargo, esto es expresado en un lenguaje informal y poco estructurado. También pone en juego elementos de justificación, que pone de manifiesto el proceso de significación, por ejemplo, cuando el alumno fue capaz de relacionar los vectores correctamente para generar la construcción del teselado regular, así también cuando identificó una medida de ángulo (120°) para rotar el polígono y que también le permitió generar el teselado correctamente. Por lo que, de acuerdo con el protocolo de construcción, el teselado forma parte del proceso de materialización que el alumno materializa a través de las herramientas del software GeoGebra.

Figura 2. *Identificación del proceso de visualización, significación y materialización de la pareja 9 de alumnos.*



Polígono regular	Marca con una X cuál de estos polígonos pueden teselar un plano	¿Por qué?
Triángulo equilátero	X	Porque al colocar uno al lado del otro se forman hileras
Cuadrado	X	Porque el plano se puede cuadricular fácilmente y de manera simétrica.
Pentágono		Porque sus ángulos externos son muy grandes para encajar perfectamente otros pentágonos.
Hexágono	X	Porque se pueden unir unos con otros en diagonal.
Heptágono		Porque sus ángulos externos son muy grandes para encajar otros.

8. Si mueves algún punto del hexágono original con la herramienta ¿sigue siendo un teselado? Justifica tu respuesta.

Sí, puesto que los hexágonos se mantienen unidos y no abren espacios en blanco; se mantienen en el mismo orden.

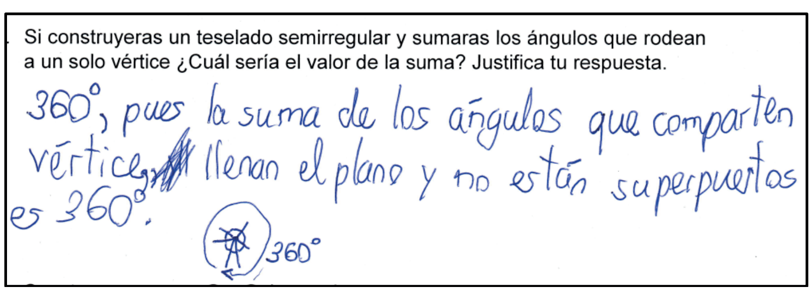
9. Si alguien quisiera construir esta misma teselación, ¿cómo se lo explicarías? Escribe detalladamente la secuencia de pasos que realizaste en GeoGebra para la construcción del teselado.

1. Construye un hexágono regular yendo a polígonos regulares → 6 vértices → aceptar.
2. Con la herramienta rotación en 120°, construye otros hexágonos partiendo de cada vértice del original. Utiliza el sentido antihorario y el horario.
3. Construye vectores con los puntos del hexágono original. Después, utiliza la herramienta traslación.

Elaboración propia.

En la Figura 4 se identifica un proceso de significación a través del proceso de la visualización, ya que el alumno evoca una representación del teselado que le permite identificar una propiedad de los teselados, el cual es que la suma de ángulos en cualquier vértice del polígono que conforma el teselado es de 360°, así el alumno recurre a dibujar la representación del ángulo mencionado, para dar significado a la suma de los ángulos formados en cada vértice del teselado. De esta manera, los alumnos son capaces de concatenar procesos matemáticos, por ejemplo, partiendo de un proceso de visualización, pasar por un proceso de representación y finalmente llegar a un proceso de significación, de esta manera los alumnos amplían y refuerzan sus conocimientos, aunque este sea impreciso.

Figura 3. *Identificación del proceso de visualización y significación de la pareja 9 de alumnos.*



Si construyeras un teselado semirregular y sumaras los ángulos que rodean a un solo vértice ¿Cuál sería el valor de la suma? Justifica tu respuesta.

360°, pues la suma de los ángulos que comparten vértice llenan el plano y no están superpuestos es 360°.

360°

Elaboración propia.

La Figura 5 muestra el proceso de visualización y materialización como parte de la construcción del teselado semirregular, donde la percepción visual ayudó para decidir qué combinación es posible y permite generar un teselado semirregular, por lo que los alumnos debieron tener en cuenta la media de los ángulos interiores de los polígonos regulares utilizados (hexágono, cuadrado, dodecágono). Así el proceso de significación es recurrente, para relacionar medidas que permiten rotar el polígono para construir correctamente el teselado semirregular. Por tanto, al visualizar el comportamiento de los objetos matemáticos en el software GeoGebra, como las transformaciones isométricas, los alumnos abstraen conocimientos que los lleva a tomar decisiones en su proceso de construcciones geométrica, esto se ve implicado en su proceso de comunicación y argumentación.

Figura 4. *Identificación del proceso de visualización, materialización y significación de la pareja 9 de alumnos.*

5. Explica a detalle cada uno de los pasos que seguiste para construir los dos teselados semirregulares anteriores.

En T1 utilizamos hexágonos, cuadrados y un dodecágono. Colocamos un dodecágono en el centro, cruzamos dos diagonales para encontrar su centro y rotamos hexágonos y cuadrados alternados alrededor: a 60°, 120°, 180°, 240°, 300°.
En T2 colocamos un cuadrado primero. Alternamos triángulos y cuadrados utilizando rotación, sobre todo a 150°

Elaboración propia.

La configuración de objetos y procesos matemáticos permitió analizar y detallar la anatomía de la red de objetos movilizados por los alumnos, en particular, la Figura 5 presenta la movilización de objetos y procesos de una pareja de alumnos, el cual fue representativo para la justificación del proceso de construcción del teselado regular y semirregular, donde se resalta el uso de las isometrías en el plano. Por lo que, a continuación, se muestra la relación de los objetos matemáticos primarios, propuestos por el EOS, mediante la configuración cognitiva asociada a la pareja 9 de alumnos.

Figura 5. *Configuración cognitiva sobre las isometrías en el plano en la construcción de teselados de una pareja de alumnos.*

Elementos lingüísticos:

Verbal: lenguaje común (formal o informal)

Gráfico - software: el uso de herramientas del software para generar dinamicidad en el applet.

Expresa y soporta

Regulan el uso

Situaciones:
- - Construcciones de teselados regulares y semirregulares aplicando herramientas del GeoGebra y justificar el proceso de construcción.

Motivan

Resuelven

Definiciones/conceptos:
Previas:
Polígono regular
Teselado semirregular y regular
Ángulo interior de un polígono

Emergentes:
Transformaciones isométricas: traslación, rotación y reflexión o simetría axial

Propiedades/proposiciones:
La suma de los ángulos en cada vértice del teselado es un ángulo de 360°.
El ángulo interior del polígono regular debe ser divisor de 360° para que forme un teselado regular.

Procedimientos:
Previos (matemáticos):
Representación gráfica de polígonos regulares.
Representación gráfica de un teselado semirregular.
Emergentes (matemáticos):

	Dibujar la combinación de polígonos regulares que conllevan la representación de un teselado semirregular. Cálculo de la medida del ángulo formado en cualquier vértice de un teselado semirregular. <u>Previos (software):</u> Aplicación de herramientas que permiten la construcción del teselado semirregular formado por triángulos equiláteros y cuadrados <u>Emergentes (software):</u> Construcción de un teselado regular usando hexágonos regulares Construcción de un teselado semirregular utilizando triángulos equiláteros y cuadrados aplicando transformaciones isométricas, traslación , rotación o simetría axial . Validación de la construcción del teselado semirregular a través de la herramienta de "arrastre" .
	Justifican
	Argumentos: Mediante la manipulación y exploración de un teselado triangular, se argumenta que la medida del ángulo en cada vértice del teselado es de 360°. Se justifica la construcción del teselado a través de la aplicación de las transformaciones isométricas (traslación, rotación y simetría axial) y se valida cuando se la herramienta de arrastre en cualquiera de los polígonos originales.

Elaboración propia.

Conclusiones

A través del análisis realizado respecto a la clasificación de los procesos matemáticos, del EOS, sobre las respuestas de los alumnos y la configuración cognitiva, se ha podido vislumbrar la concatenación de procesos matemáticos que movilizan los alumnos de este estudio en sus prácticas matemáticas, al realizar construcciones de teselados mediante el uso de las herramientas de transformaciones isométricas del software de geometría dinámica GeoGebra. Esta herramienta digital puede favorecer procesos matemáticos, como el de visualización, representación, materialización y argumentación, sin embargo estos procesos no son necesariamente lineales (avances y retrocesos), lo que les permite a los alumnos a desarrollar habilidades de razonamiento y de observación al permitir diferenciar progresivamente entre dibujo (representación) y figura (relación conceptual entre dibujo y objeto geométrico) (Larios, Pino-Fan y González, 2017). Así a través de la resolución de problemas que involucran el uso de la geometría dinámica, los alumnos se ven inmersos en una nueva geometría que les ofrece la oportunidad de transitar sobre procesos de conjeturación, exploración, visualización, comunicación, prueba y validación.

Aunque los procesos fueron identificados superficialmente, esto da luz para replantear el diseño de las actividades que permita evidenciar otros procesos matemáticos en el desarrollo de las prácticas argumentativas respecto al proceso de construcción de los teselados regulares y semirregulares. Por lo que es conveniente considerar, en este estudio, un rediseño de las situaciones que guíen al alumno a movilizar diferentes nociones matemáticas cuando se utiliza la geometría dinámica en la construcción de teselados, *por ejemplo, al aplicar la traslación en la construcción de un teselado es conveniente considerar las diferentes representaciones de los vectores que se deben utilizar para la construcción del teselado, así como la ubicación adecuada de los vectores para la correcta traslación del polígono*, esto con la intención de evidenciar múltiples procesos matemáticos en el desarrollo de las prácticas matemáticas de los alumnos. La evidencia de tales procesos matemáticos permitirá a los profesionales de la Educación Matemática tener amplia referencia sobre los significados personales de sus alumnos, lo que podría ser un medio por el cual conlleve a la evaluación de los conocimientos matemáticos.

Además, el uso del software GeoGebra evidenció un proceso operativo, a través del protocolo de construcción del GeoGebra, mismo que apoyó la práctica argumentativa aunque este haya sido a través de un lenguaje informal o coloquial, es decir, sin recurrir a los términos adecuados en el contexto de la matemática. Además, consideramos que el análisis de estos procesos es un trabajo complejo que requiere de mayor indagación sobre el conocimiento de los alumnos, así que para profundizar en este estudió se dará un seguimiento de manera más personal, en vez de analizar las prácticas en parejas.

Agradecimientos

Trabajo desarrollado con apoyo del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) con número de beca 330779 y del proyecto de investigación en formación de profesorado: PGC2018-098603-B-I00 (MCIU/AEI/FEDER, UE).

Referencias bibliográficas

Bussi, B., & Mariotti, A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. *Handbook of international research in mathematics education,* New York.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2018). Research Methods in Education. Routledge.

Fajardo, M. & Larios, V. (2019). Descripción de procesos matemáticos en prácticas argumentativas. *Educación matemática*, *31*(3), 61-84.

Font, V. & Contreras, A. (2008). The problem of the particular and its relation to the general in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics,* 69, 33-52.

Font, V. y Godino, J. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educaçao Matemática Pesquisa*, 8(1).

Font, V. & Rubio, N. V. (2017). Procesos matemáticos en el enfoque ontosemiótico. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*.

Godino, J., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en didactique des Mathématiques*, *14*(3), 325-355.

Godino, J., Batanero, C. & Font, V. (2007). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática**.** ZDM. *The International Journal on Mathematics Education*. 39 (1-2). pp. 127-135.

Godino, J., Rivas, H., Arteaga, P., Lasa, A., & Wilhelmi, M. (2014). Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico semiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 34, 167–200.

Karadag, Z. & McDougall, D. (2011). GeoGebra as a cognitive tool. In *Model-Centered Learning* (pp. 169-181). Sense Publisher.

Larios, V., Pino-Fan, L. y González, N. (2017). Esquemas argumentativos de estudiantes de secundaria en ambientes de geometría dinámica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 12, 39-57.

Mejía, C., & Molina, O. (2014). Mediación y Geometría Dinámica: una alternativa para involucrar a los estudiantes en la actividad demostrativa en geometría. *Revista Científica*. 660-664.

Morales, G., Rubio, N., & Larios, V. (en prensa). Tipificación de argumentos producidos por las prácticas matemáticas de alumnos del nivel medio en ambientes de geometría dinámica. *Bolema: Boletim de Educação Matemática.* 70(2), pp. 664-689.

National of Council Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). Principles standards for school mathematics, NCTM. *Reston, VA*.

Perdomo-Díaz, J., Camacho, M. & Santos-Trigo, M. (2012). Procesos cognitivos involucrados en la resolución de problemas. En M. Marín-Rodríguez; N. Climent-Rodríguez (eds.), *Investigación en Educación Matemática*. Comunicaciones de los grupos de investigación. XV Simposio de la SEIEM (pp. 65-76). Ciudad Real: SEIEM.

Piaget, J. (1961). La formación del símbolo en el niño: imitación, juego y sueño. Editorial. Fondo de cultura Económica. México.

Radford. L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Número especial sobre Semiótica, Cultura y Pensamiento Matemático, 103-129.

Rubio, N. (2012). Competencia del profesorado en el análisis didáctico de prácticas, objetos y procesos matemáticos. (Tesis doctoral). Universitat de Barcelona. España.

SEP. (2017). El modelo educativo 2016; el planteamiento pedagógico de la Reforma Educativa, Ciudad de México: MAG Edición en Impresos y Digitales, S.C.

Vygotsky, L. (1979) El desarrollo de los procesos psicológicos superiores. Barcelona: Grijalbo.

ANÁLISIS DIDÁCTICO DE VÍDEOS DISPONIBLES EN INTERNET PARA EL ESTUDIO DE LAS MEDIDASDE POSICIÓN

DIDACTIC ANALYSIS OF INTERNET AVAILABLE VIDEOS FOR THE STUDY OF POSITION MEASURES

Silvia M. Valenzuela-Ruiz, J. Antonio Garzón, Rocío Álvarez-Arroyo
Universidad de Granada (España)
svalenzuela@ugr.es, jgarzon@ugr.es, rocioaarroyo@ugr.es

Resumen
La mediana y los percentiles son medidas de posición estudiadas en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, y sobre las que se han descrito errores de comprensión en la investigación didáctica. En este trabajo se realiza el análisis didáctico de uno de los muchos vídeos que encontramos disponibles en Internet para el estudio del tema. Basándonos en algunas ideas del enfoque ontosemiótico (Godino, Batanero y Font, 2019), se lleva a cabo un análisis semiótico de estos objetos matemáticos y las posibles dificultades de los estudiantes para su comprensión, así como de su idoneidad didáctica. Se completa el estudio con una selección de otros vídeos relacionados con el tema, disponibles en Internet, con el propósito de proporcionar un método de análisis que pueda servir de guía al profesor a la hora de seleccionar el tipo de recurso y el momento más adecuado para su utilización.

Palabras clave: mediana, percentiles, vídeos, Internet, análisis didáctico

Abstract
The median and percentiles are position statistics studied in Compulsory Secondary Education and High School, for which many misunderstandings have been described in didactic research. In this work, the didactic analysis of one of the many Internet available videos for the study of this topic is carried out. Based on some ideas from the onto-semiotic approach (Godino, Batanero and Font, 2019), a semiotic analysis of mathematical objects and the students' possible difficulties in their understanding, as well as of their didactic suitability, is carried out. The study is completed with a selection of other videos related to the topic, available on the Internet, with the purpose of providing an analysis method that can serve as a guide to the teacher when selecting the type of resource and the most appropriate moment for its use.

Key words: median, percentiles, videos, Internet, didactic analysis

Introducción

La enseñanza de la estadística cobra en la actualidad gran interés debido a la necesidad de dotar al estudiante de sentido estadístico, que le permita interpretar la información que se presentan en los medios de comunicación (Batanero, 2019; Gea, Batanero, y Roa, 2014). Incluso se ha propuesto la idea de 'estadística cívica' como conjunto de conocimientos estadísticos y sociales y de actitudes hacia la estadística que favorecen la participación democrática de los ciudadanos en la sociedad (Engel, 2019). De acuerdo a Rodríguez-Muñiz, Muñiz-Rodríguez, Vásquez y Alsina (2020) estos conocimientos son cada vez más necesarios debido a la cantidad de información que difunden las autoridades sanitarias y políticas sobre la pandemia de la COVID-1.

En este trabajo nos centramos en el estudio de las medidas de posición (mediana, cuartiles, deciles y percentiles), también llamadas estadísticos de orden, por el gran interés que tienen dentro del análisis exploratorio de datos y por las interesantes propiedades que presentan, entre las que destaca que su valor apenas cambia en presencia de datos atípicos (Hoaglin, Mosteller y Tukey, 1983). Se trata de valores que resumen una distribución estadística, indicando la posición que un cierto valor ocupa dentro de un conjunto de datos ordenados o, dicho de otro modo, indican el porcentaje de valores de una variable con un valor menor o igual al estadístico. Un caso particular de estas medidas es la mediana, que tiene un gran uso en la inferencia no paramétrica, de gran utilidad en el análisis de datos reales por requerir condiciones menos restrictivas que la paramétrica para su aplicación. Finalmente resaltamos que, los estadísticos de orden se emplean en numerosos contextos, por ejemplo, en el análisis de datos económicos o el estudio del crecimiento de un individuo o de su inteligencia, propiedades y aplicaciones de los mismos se analizan en Batanero, Valenzuela y Gea (2020), donde se muestra la complejidad semiótica de estos estadísticos.

En el decreto de enseñanzas mínimas de matemáticas tanto para el ciclo de la Educación Secundaria Obligatoria (ESO) como para el Bachillerato (MECD, 2015) están las directrices curriculares, estas incluyen el concepto de mediana y de las otras medidas de posición. El primer contacto de los estudiantes con las medidas de posición es a través del concepto de mediana, estudiada en el primer y segundo curso de ESO como medida de valor central. En el tercer curso, tanto en Matemáticas orientadas tanto a las Enseñanzas Académicas como a las Enseñanzas Aplicadas, aparece explícitamente el estudio del cálculo e interpretación de los cuartiles, además del de la mediana, que empieza a estudiarse ya dentro de la familia de los estadísticos de orden. También se establece como contenido explícito el estudio del diagrama de caja y bigotes, para el cuál son necesarios estos estadísticos además del rango intercuartílico.

En el último curso de la ESO y en el Bachillerato (Ciencias y Ciencias Sociales), los estadísticos de orden no aparecen explícitamente citados en los contenidos. No obstante, tanto en los criterios de evaluación como en los estándares de aprendizaje, se hace referencia implícita a los mismos cuando se indica que el alumno debe saber calcular e interpretar los parámetros estadísticos más habituales, entre los que encontramos los estadísticos de orden. Además, éstos también se encuentran de manera implícita en el estudio de la distribución normal (segundo curso de Bachillerato), donde intervienen en la lectura de la tabla de dicha distribución, necesaria tanto para la resolución de problemas de cálculo de probabilidades como en contrastes de hipótesis. Por otro lado, también es usual encontrar su estudio en los cursos universitarios de estadística, tanto de pregrado como de grado.

En cuanto a la comprensión de estos conceptos, algunas investigaciones sugieren la existencia de dificultades frecuentes en estudiantes de Educación Secundaria Obligatoria (Cobo, 2003), Bachillerato (Mayén, 2009; Mayén, Cobo, Batanero y Balderas, 2007) y futuros profesores (Gea, Batanero, Fernandes y Arteaga, 2016), lo que lleva a la necesidad de buscar nuevos útiles para mejorar su comprensión.

El uso de vídeos didácticos en la enseñanza de las matemáticas no es nuevo, pero sí su amplia disponibilidad en Internet, lo que hace que la comunidad educativa los considere como un recurso didáctico importante, especialmente en el caso de la enseñanza a distancia (Méndez-García, 2015). Ello se debe a que muchos estudiantes suelen visualizar un vídeo, incluso cuando no ha sido recomendado por el profesor y, por ello, adelantarse a la enseñanza del tema o incluso, si el vídeo contiene errores conceptuales, adquirir dichos errores (Beltrán-Pellicer, Giacomone, y Burgos, 2018). La experiencia de confinamiento con la pandemia de la Covid-19 hizo que la enseñanza a distancia se haya generalizado en muchos niveles educativos, lo que otorga más importancia al vídeo como material educativo. Es por ello que resulta necesario dotar al profesorado con recursos para la enseñanza del tema y ayudarle a seleccionar los más adecuados.

Con este fin, el objetivo del presente trabajo es realizar el análisis didáctico de uno de los vídeos que se encuentran disponibles en Internet, y que pueden facilitar el estudio de los estadísticos de orden. En lo que sigue, se comienza describiendo el marco teórico utilizado y algunos antecedentes de la investigación. Seguidamente, se detalla la metodología empleada en el estudio y se presentan los principales resultados. Se finaliza con algunas conclusiones e implicaciones didácticas.

Marco referencial

Nuestra investigación considera el enfoque ontosemiótico (EOS) (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007; 2019), donde se asume que el significado de los objetos matemáticos surge de las prácticas realizadas para resolver situaciones-problemas planteadas relacionadas con dichos objetos. Además, se considera preciso diferenciar entre una dimensión personal (subjetiva, mental) e institucional (objetiva) para este significado, entendiendo por institución a un conjunto de personas que comparten problemas e instrumentos para la resolución de los mismos (por ejemplo, los profesores de matemáticas de un cierto nivel educativo).

En este marco teórico se describe una clasificación de objetos matemáticos que intervienen en la actividad matemática y que se consideran como los elementos de significado (Godino, Batanero y Font, 2007). Concretamente, se proponen objetos matemáticos primarios que, a su vez, se organizan en entidades más complejas (sistemas conceptuales o teorías). Por ejemplo, la mediana y percentiles pertenece al sistema de estadísticos de orden y éste al de resúmenes estadísticos de una distribución. Los objetos elementales pueden ser de varios tipos y se agrupan formando configuraciones (epistémicas si se refieren al significado institucional y cognitivas si describen el significado personal):

- Campos de problemas: son las situaciones o aplicaciones cuya resolución requiere realizar alguna actividad matemática que da sentido al objeto y pueden provenir de la matemática o ser extra matemáticas. En este trabajo el interés es la clase de problemas asociados a las medidas de posición.
- Algoritmos y procedimientos: acciones y operaciones que se emplean para resolver las situaciones o tareas. En el caso de los estadísticos de orden, algunos procedimientos típicos son el ordenar el conjunto de datos y determinar el valor de la variable que deja por debajo de él un porcentaje dado de la población o de la muestra.
- Lenguaje: por el carácter abstracto de los objetos, para trabajar con ellos se necesitan diferentes tipos de lenguaje, tales como palabras, símbolos, gráficos o tablas. Por ejemplo, para trabajar con la mediana usamos el término "mediana" o las notaciones Me, P_{50}, D_5 y Q_2. También gráficos como la curva acumulada de distribución o el gráfico de la caja.
- Definiciones y propiedades: corresponde a ideas matemáticas y sus relaciones (conceptos, proposiciones). Respecto a las medidas de posición se consideran sus definiciones y sus propiedades aritméticas, algebraicas o estadísticas.
- Argumentos: todas las acciones descritas anteriormente, así como los objetos se ligan entre sí mediante argumentos o razonamientos, que se usan para comprobar las soluciones de los problemas o explicar a otro la solución, y que pueden ser deductivas, inductivas, analógicas o de otro tipo.

Además, dentro de este marco global se recoge también la herramienta de idoneidad didáctica (Godino, 2013) que se define como el grado en que un proceso de instrucción es adecuado para acercar los significados personales logrados por los estudiantes a los institucionales, y en la que nos basaremos para analizar la idoneidad didáctica del recurso en cuestión. En esta herramienta se tienen en cuenta varios componentes: *idoneidad epistémica* (valora la representatividad de los significados implementados en un proceso o un recurso con respecto al significado institucional del objeto), *idoneidad cognitiva* (analiza la adecuación del proceso de estudio o recurso a los conocimientos previos de los estudiantes), *idoneidad afectiva* (grado de interés o motivación que el proceso de estudio o recurso analizado tiene para los estudiantes a los que se dirige), *idoneidad interaccional* (si el proceso o el uso del recurso permite organizar el trabajo con los alumnos de forma que se resuelvan posibles conflictos y dificultades de los mismos), *idoneidad mediacional* (si las herramientas necesarias para el aprendizaje están fácilmente disponibles dentro del proceso de estudio) e *idoneidad ecológica* (grado en que el proceso de estudio o el recurso se ajusta a la sociedad, el entorno del estudiante y otros factores que intervienen en el proceso de estudio).

El trabajo se apoya en diferentes investigaciones que han analizado la comprensión de la mediana, cuyos resultados se pueden extrapolar a los estadísticos de orden en general. Algunos de estos trabajos indican que los estudiantes confunden la mediana con la media o la moda (Carvalho, 2001); Mayén, Díaz y Batanero (2009) encontraron estudiantes que conciben la mediana como centro del conjunto de datos desordenado o como centro geométrico de la distribución; Mayén et al. (2007) detectan que algunos estudiantes no reconocen la utilidad de la mediana como mejor promedio para datos ordinales y le atribuyen propiedades incorrectas.

Nos basamos, adicionalmente, en análisis de recursos tecnológicos para la enseñanza, destacando las síntesis sobre estas investigaciones realizadas por Pratt, Davies y Connor (2011). Oviedo (2016), analiza recursos que se encuentran en Internet sobre las medidas de posición central, una de las cuales es la mediana, y Valenzuela (2020), se centra en recursos en Internet sobre los estadísticos de orden. Betrán-Pellicer y Giacomone (2021) analizan la longitud y el tipo de datos utilizados en algunos vídeos relacionados con la mediana, determinando que existe una visión muy procedimental de la misma, pero no incluyen el estudio de las configuraciones epistémicas asociadas ni las posibles dificultades de los estudiantes en el estudio de los recursos; tampoco consideran los percentiles, que nosotros incluimos en este trabajo.

Metodología

La metodología utilizada en este estudio es de carácter cualitativo, puesto que tanto los datos (vídeos didácticos encontrados en Internet) como su análisis, son de esta naturaleza (Kornblit y Beltramino, 2004). Se presenta el análisis detallado de uno de los vídeos seleccionados para mostrar su riqueza y complejidad semiótica, y valorar también su idoneidad didáctica para incorporarse al proceso de enseñanza y aprendizaje de los contenidos considerados en ESO y Bachillerato. Se trata de un estudio exploratorio (Hernández, Fernández y Baptista, 2010), ya que el tema ha sido escasamente estudiado. El presente trabajo no tiene la finalidad de generalizar las conclusiones a otros recursos no incluidos en el análisis.

Los vídeos de la muestra se han seleccionado dentro de un conjunto más amplio y han sido localizados siguiendo el mismo método de los trabajos realizados por Oviedo (2016) y Valenzuela (2020).

Para una primera toma de contacto, se ha optado por seleccionar un número pequeño de recursos en base a su variedad y su utilidad potencial para la enseñanza del tema, es decir, usando un muestreo intencional. La búsqueda se ha realizado a través de la red social YouTube, usando palabras clave como “estadísticos de orden”, “mediana”, “percentiles” y similares, así como su traducción al inglés.

De cada recurso seleccionado, mediante análisis de contenido, se han identificado los objetos matemáticos y dificultades involucradas en su comprensión, y se analiza su idoneidad didáctica. El procedimiento que se ha seguido para el análisis del vídeo es el siguiente:

- Una vez visualizado varias veces el vídeo, se realiza una descripción de su contenido, poniendo especial atención en los objetos matemáticos que se contemplan, así como en la utilidad que pueda tener el vídeo para el trabajo en el aula o como complemento en el estudio del tema.

- Seguidamente, se lleva a cabo un análisis semiótico para identificar los objetos matemáticos que intervienen en el vídeo.
- A continuación, se determinan las posibles dificultades de los estudiantes para la comprensión de lo expuesto en el vídeo, utilizando para ello las identificadas en los antecedentes.
- Finalmente, se analiza la idoneidad didáctica del vídeo en base a las componentes establecidas en el marco teórico del EOS (Godino, 2013; Godino, Batanero y Font, 2007).

Resultados

En esta sección se presenta el análisis detallado de un vídeo didáctico elegido entre los disponibles gratuitamente en la red social YouTube, que puede ser utilizado en los niveles de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato para estudiar el procedimiento de cálculo de las medidas de posición para datos agrupados puntualmente en una tabla de frecuencias. Además, se proporciona una lista de otros vídeos similares que sirven para explorar otros procedimientos de cálculo y propiedades de estas medidas.

Descripción del ejemplo

En el vídeo seleccionado se describe de forma detallada el procedimiento de cálculo de las medidas de posición (cuartiles, deciles y percentiles) para variables aleatorias discretas presentadas en una tabla de frecuencias y podemos encontrarlo en el siguiente enlace: https://www.youtube.com/watch?v=sCeuhr0nF1w.

Figura 1. *Portada del recurso videotutorial.*

Elaboración propia.

El vídeo que tiene una duración de 6:17 minutos, comienza presentando una tabla de frecuencias que recoge información sobre la edad de 60 estudiantes, a partir de la cual, calculará posteriormente las medidas de posición; y haciendo un breve repaso del significado de las frecuencias absolutas y del cálculo de las frecuencias absolutas acumuladas.
A continuación, el profesor explica cómo se calcula la posición en la que se encuentran de los distintos estadísticos de orden, pero antes recuerda que el número total de datos, necesario para obtener dicha posición, ha de coincidir con la suma de todas las frecuencias absolutas (tamaño de la muestra). La notación utilizada es la usual; es decir, Q_k para los cuartiles, D_k para los deciles y P_k para los percentiles.

El cálculo de las posiciones lo realiza en el siguiente orden: cuartiles, deciles y percentiles.
Durante la explicación se indica que:

- Hay 3 cuartiles y su posición se calcula como $\frac{kn}{4}$ variando k=1, 2, 3, según el cuartil que se quiera calcular.
- Existen 9 deciles y su posición es $\frac{kn}{10}$, variando k=1, 2, 3,…,9, respectivamente.
- La posición de los 99 percentiles es $\frac{kn}{100}$, dónde la k varía del 1 al 99.

Una vez que ha obtenido el valor posicional, explica que se debe buscar dicho valor o el inmediatamente superior en la columna correspondiente a las frecuencias absolutas acumuladas, y que el valor del estadístico buscado es el dato que corresponde a la posición calculada. En la explicación, el profesor hace énfasis en que las posiciones calculadas no son los valores de los estadísticos buscados, sino la posición que estos ocupan dentro del conjunto ordenado de datos. La literatura científica (Carvalho, 2001) muestra que el error de asignar como valor del estadístico el valor de la posición que éste ocupa es un error frecuente.

Para finalizar, el profesor plantea un ejercicio para que los usuarios puedan practicar, pausando el vídeo y mostrando su resolución posteriormente.

Como se puede comprobar, en el vídeo se muestran, paso a paso, los cálculos y el orden en que han de realizarse para obtener el valor de los distintos estadísticos de orden. En consecuencia, pensamos que el vídeo seleccionado permite reforzar el estudio de este contenido.

En la Tabla 1 se presenta un análisis de los objetos matemáticos que aparecen implícitos en este recurso y sus significados.

Tabla 1. *Objetos matemáticos implicados en el recurso.*

Tipos	Objetos matemáticos	Significados en la situación
Campos de problemas	Identificar el valor al que corresponde un porcentaje de casos menor o igual en una distribución.	Determinar los cuartiles, deciles y percentiles de la distribución.
Lenguajes	Icónico	Botones de reproducción y ajustes.
	Numérico	Enteros (valores de la variable, frecuencias absolutas y absolutas acumuladas, cuartiles, deciles y percentiles, orden *k* de los estadísticos). Decimales (algunos valores posicionales).
	Verbal	Explicaciones del profesor y todos los términos matemáticos usados para referirse a conceptos.
	Simbólico	$x, f, F, n, Q_k, Q_1, Q_3, D_k, D_6, D_7, P_k, P_5, P_{52} =, \cdot, /$.
	Tabular	Tabla de frecuencias.
Conceptos-definiciones	Variable aleatoria y valor, mínimo, máximo, rango	Variable (edad)que resulta de un experimento aleatorio; valores de la variable.
	Tamaño de la población o muestra	Número total de datos.
	Frecuencia absoluta	Número de individuos que toman un valor de la variable ovalor comprendido en un intervalo.
	Frecuencia absoluta acumulada	Número de individuos que toman un valor menor o igual a uno dado de la variable o al extremo superior de un intervalo.
	Valor posicional	Número que indica la posición de los estadísticos de orden dentro de un conjunto ordenado de datos.

	Percentil	Estadístico que indica el valor de la variable que deja por debajo de él un tanto por ciento (orden del percentil) de la población, en el conjunto de datos ordenado.
	Cuartiles	Percentil del 25%, 50% y 75%.
	Deciles	Percentil del 10%, 20%, 30%, 40%, 50%, 60%, 70%, 80% y 90%.
Procedimientos	Cálculo de los estadísticos de orden	Determinar el valor de la variable que deja por debajo de él un tanto por ciento de la población.
	Lectura e interpretación	Obtener información de los cálculos realizados e interpretarlos de forma adecuada para poder llegar a conclusiones correctas.
Proposiciones-propiedades	Relación entre frecuencia absoluta y absoluta acumulada	La frecuencia absoluta acumulada del valor x_i o del intervalo I_i se calcula como suma de su frecuencia absoluta y las correspondientes a los valores o intervalos anteriores.
	Relación entre frecuencia absoluta acumulada y tamaño de la muestra o población	La última de las frecuencias absolutas acumuladas siempre corresponde al número total de datos con los que se está trabajando.
	Conjunto ordenado de datos.	Para el cálculo de los estadísticos de orden los datos deben estar ordenados.
	Situación del percentil	El valor de cualquiera de los percentiles debe encontrarse dentro del rango de valores de la variable estudiada.
	Función creciente del percentil en función de su orden	Cuanto mayor sea el porcentaje (orden) para el que se desea calcular el percentil, más alto será el valor de dicho percentil.
Argumentos	Interpretación	Obtener conclusiones a partir de la información proporcionada por los valores obtenidos.

Elaboración propia.

Posibles dificultades de los estudiantes

En el trabajo con este recurso pueden aparecer algunas dificultades que comentamos a continuación. En primer lugar, el profesor en ningún momento hace referencia al significado de las frecuencias absolutas acumuladas, que son el número de individuos que toman un valor menor o igual a uno dado de la variable, simplemente comenta su procedimiento de cálculo. Por tanto, el docente que introduzca este vídeo en su trabajo en el aula debe reforzar este contenido, ya que es imprescindible para situar de forma exacta la posición de los estadísticos de orden; de otro modo, los estudiantes podrían confundir estas frecuencias con las ordinarias. Otra dificultad que podrían tener los estudiantes es sobre la comprensión del valor posicional, que indica la posición exacta donde podemos encontrar las distintas medidas de posición dentro del listado de datos ordenados o la tabla de frecuencias. El trabajo de Carvalho (2001) da cuenta que muchos estudiantes creen que el valor posicional es el valor de la medida de posición y no comprenden que el verdadero valor de dicha medida es el valor de la variable situado en dicho lugar. A este respecto, en el vídeo el profesor hace reiteradas aclaraciones que pueden evitar que el alumnado cometa dicho error. Por otro lado, hay estudiantes que, aun entendiendo el significado del valor posicional, no ordenan el conjunto de datos para obtener el valor del percentil (Mayén, Díaz y Batanero, 2009). Hay que hacer notar que, en el ejemplo del vídeo, al estar trabajando con una tabla de frecuencias los datos ya vienen ordenados, pero esto no es lo que ocurre usualmente.

Recursos complementarios

En la Tabla 2 se presentan algunos de los videotutoriales que podemos encontrar en Internet para el estudio de los estadísticos de orden, elegidos por su sencillez para el estudiante.

Algunos de estos videos, al igual que ocurre en el analizado, se limitan a la enseñanza del concepto y cálculo de los estadísticos de orden en general, o bien algunos de ellos como cuartiles o percentiles. Otros se centran en el gráfico de la caja, cuya construcción requiere del cálculo e interpretación de la mediana, los cuartiles y el recorrido intercuartílico.

Otros de ellos, introducen gráficos menos conocidos, como el gráfico cuantil-cuantil, pero igualmente útiles en el análisis exploratorio de datos. Y, por último, destacamos aquellos centrados en reforzar la comprensión de las frecuencias acumuladas y su gráfica, que, como se ha señalado es un punto donde los estudiantes pueden tener dificultades.

Tabla 2. *Otros videotutoriales*

Título	Dirección Web (URL)
Comparar diagrama de caja y bigotes	https://www.youtube.com/watch?v=y5G88YmrZpA
Construir e interpretar un diagrama de caja y bigotes	https://www.youtube.com/watch?v=GBNpyyApgdA
Cuantiles	https://www.youtube.com/watch?v=Zn_sVvL9m-4
Cuartiles para datos agrupados y no agrupados	https://www.youtube.com/watch?v=V-hEZLu164c
Cuartiles: qué son y cómo encontrarlos en datos sin agrupar	https://www.youtube.com/watch?v=suSz9RXFNTs
Diagramas de caja y bigotes y valores atípicos	https://www.youtube.com/watch?v=Kj9g-BC2YSg
Finding cumulative frequency	https://www.youtube.com/watch?v=4GG46_zp-Z8
Gráfico Q-Q	https://www.youtube.com/watch?v=KOlYPpYNUuA
How to make a cumulative frequency chart	https://www.youtube.com/watch?v=-dbvv_4IzgQ
Introducción a las medidas de posición	https://www.youtube.com/watch?v=IlM2C_5_JlI
Polígono de frecuencias acumuladas	https://www.youtube.com/watch?v=gOCSrjCSlkU
Polígono de frecuencias y ojiva	https://www.youtube.com/watch?v=QomQP9_UZsA
Q-Q Plot	https://www.youtube.com/watch?v=kx_o9rnI4DE
Qué son las medidas de posición y tipos	https://www.youtube.com/watch?v=QggfcNEJYb8
¿Qué son los cuantiles?	https://www.youtube.com/watch?v=x9fznavEozk
Calcular el rango entre percentiles	https://www.youtube.com/watch?v=9C314fTD9Xo

Elaboración propia.

Análisis de la idoneidad didáctica

El análisis semiótico realizado de los recursos seleccionados, pone de manifiesto la variedad y cantidad de objetos matemáticos que el estudiante debe comprender y coordinar en su trabajo con los vídeos. A continuación, se proporcionan algunas indicaciones sobre las diferentes componentes de la idoneidad didáctica (Godino, 2013; Godino, Batanero y Font, 2007) de los recursos analizados para su posible uso en ESO y Bachillerato.

Idoneidad epistémica

La configuración epistémica identificada (conjunto de objetos matemáticos listados en la Tabla 1) indica una buena representatividad del significado transmitido en estos vídeos respecto al significado institucional pretendido para estos estadísticos en los niveles curriculares citados (MECD, 2015). Es decir, se incluyen distintos contenidos específicos sobre los estadísticos de orden (percentiles, sus rangos, distribución y gráficas), se usan diferentes modos de expresión matemática (numérica, verbal, icónica, gráfica, tabular y simbólica) y se analizan diferentes propiedades. Un punto débil es que no se fomenta la argumentación en los vídeos y, por otro lado, no todos plantean cuestionescontextualizadas en situaciones reales. En consecuencia, la idoneidad epistémica del conjunto de recursos puede ser media-alta, dependiendo del vídeo en particular.

Idoneidad cognitiva

Los vídeos seleccionados presentan buena idoneidad cognitiva tanto para ESO como para Bachillerato debido a que los alumnos ponen en práctica los conocimientos previos necesarios para su uso. Además, permiten adquirir conocimientos nuevos y ayudan a la evaluación del estudiante por parte del profesor. En consecuencia, la idoneidad cognitiva es alta, siempre que el profesor se asegure que el estudiante comprende las ideas previas de distribución y distribución acumulada.

Idoneidad afectiva

En todos los recursos se promueve el interés por el tema. Algunos se centran más en la interpretación y propiedades de los estadísticos de orden que en los procedimientos de cálculo, a veces tediosos; otros utilizan contextos reales en los que el estudiante puede ver la utilidad de estas medidas en la vida cotidiana. Además, al estar disponibles de forma libre en Internet, los estudiantes pueden utilizarlos para reforzar lo estudiado en clase de forma autónoma. Por tanto, esta idoneidad es también alta.

Idoneidad mediacional

Esta idoneidad resulta ser alta porque se trata de recursos que facilitan al estudiante la visualización y el estudio del tema y están disponibles sin costo en Internet. El tiempo de uso se puede adaptar para cada estudiante, suponiéndole una mayor flexibilidad en su ritmo de aprendizaje.

Idoneidad interaccional

Los vídeos pueden utilizarse de forma individual, en trabajo grupal o bien proyectándolos en clase desde un único ordenador. Esta idoneidad puede ser alta en función del uso de estos recursos que haga el profesor, quien será el responsable de organizar adecuadamente la interacción de los estudiantes con cada vídeo y con sus compañeros en cada momento.

Idoneidad ecológica

Los recursos permiten trabajar contenidos incluidos en el currículo de ESO y Bachillerato en torno al tema (MECD, 2015) y son innovadores, pues ofrecen distintas herramientas para abordar el estudio de estas medidas. Se relacionan con la sociedad actual mediante el uso de la tecnología o planteando situaciones reales en las cuales el uso de los estadísticos de orden es habitual. Consideramos que esta idoneidad es suficiente.

Conclusiones

Las medidas de posición son unas de las medidas estadísticas más significativas, ya que se usan ampliamente en el análisis de datos exploratorios y en estadísticas no paramétricas. Sin embargo, como se indica en el documento, existen muchas dificultades para comprenderlas. Por ello, el objetivo de este trabajo fue presentar y analizar algún recurso que facilite el aprendizaje de las mismas, proporcionando además algunas indicaciones sobre las diferentes componentes de la idoneidad didáctica.

Atendiendo al estudio realizado se observa la existencia de una gran variedad de vídeotutoriales disponibles de forma gratuita en Internet. Los contenidos trabajados de forma más recurrente son la mediana, los cuartiles y el diagrama de cajas y bigotes. Por otro lado, hemos detectado que el contenido menos trabajado son los valores atípicos, siendo de los más importantes en relación con los estadísticos de orden por la propiedad de robustez que éstos presentan y que los hace invariantes frente a este tipo de valores extremos.

A través del análisis realizado hemos podido identificar tanto la potencialidad de cada uno de los vídeos como las posibles dificultades a las que pueden enfrentarse los estudiantes en su trabajo con ellos. Concretamente, el videotutorial presentado como ejemplo permite reforzar el cálculo de los estadísticos de orden a partir de la tabla de frecuencias de una variable aleatoria discreta, haciendo especial hincapié en el significado del valor posicional que interviene en el cálculo de estas medidas. Por otro lado, hemos detectado algunas carencias como no trabajar el significado de las frecuencias absolutas acumuladas o no destacar la importancia de que los datos se encuentren ordenados. Tras el análisis de las distintas componentes de la idoneidad didáctica hemos podido determinar que el nivel de ésta es medio-alto en el conjunto de videotutoriales seleccionados.

En consecuencia, consideramos que este tipo de análisis puede servir de guía al profesor a la hora de seleccionar el tipo de recurso y el momento más adecuado para su utilización.

Referencias bibliográficas

Batanero, C. (2019). Statisticalsense in theinformationsociety. En K. O. Villalba-Condori, A. Adúriz-Bravo, F. J. García-Peñalvo y J. Lavonen (Eds.), Proceedings of the Congreso Internacional Sobre Educación y Tecnología en Ciencias – CISETC (pp. 28-38). Aachen, Germany: CEUR-WS.org.

Batanero, C., Valenzuela-Ruiz, S.M., y Gea, M.M. (2020). Significados institucionales y personales de los estadísticos de orden en la Educación Secundaria*. Matemáticas, Educación y Sociedad, 3*(2), 21-39.

Beltrán-Pellicer, P, y Giacomone, B. (2021). Una primera aproximación al análisis de vídeos educativos de estadística: el caso de la mediana, *Números, 106,* 53-61.

Beltrán-Pellicer, P., Giacomone, B., y Burgos, M. (2018). Online educational videos according to specific didactics: the case of mathematics. *Cultura y Educación, 30*(4), 633-662. https://doi.org/10.1080/11356405.2018.1524651

Carvalho, C. (2001). *Interaçao entre pares. Contributos para a promoçao do desenvolvimiento lógico e do desempenho estatístico no 7º ano de escolaridade.*Tesis Doctoral. Universidad de Lisboa.

Cobo, B. (2003). *Significados de las medidas de posición central para los estudiantes de secundaria.* Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Gea, M., Batanero, C., y Roa, R. (2014). El sentido de la correlación y regresión. *Números, 87,* 25-35.

Gea, M.M., Batanero, C., Fernándes, J.A., y Arteaga, P. (2016). Interpretación de resúmenes estadísticos por futuros profesores de educación secundaria. *REDIMAT*, *5*(2), 135-157. http://dx.doi.org/10.17583/redimat.2016.1902

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathematiques, 22*(2-3), 237-284.

Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 111-132.

Godino, J. D. Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39*(1-2), 127-135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2019). The onto-semiotic approach: implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics, 39*(1), 38-43.

Engel, J. (2019). Cultura estadística y sociedad. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*. www.ugr.es/local/fqm126/civeest.html

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación*. México: McGraw Hill.

Hoaglin, D. C., Mosteller, F., y Tukey, J. W. (1983). *Understanding robust and exploratory data analysis.* New York: Wiley.

Kornblit, A. L., y Beltramino, F. G. (2004). *Metodologías cualitativas en ciencias sociales: modelos y procedimientos de análisis*. Editorial Biblos.

Mayén, S. (2009). *Comprensión de las medidas de tendencia central en estudiantes mexicanos de educación secundaria y bachillerato*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Mayén, S., Cobo, B., Batanero, C., y Balderas, P. (2007). Comprensión de las medidas de posición central en estudiantes mexicanos de bachillerato. *Unión, 9*(1), 187-201.

Mayén, S., Díaz, C., y Batanero, C. (2009). Conflictos semióticos de estudiantes con el concepto de mediana. *Statistics Education Research Journal, 8*(2).

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, MECD (2015). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.* Madrid: Autor.

Méndez-García, C. (2015). Diseño e implementación de cursos abiertos masivos en línea (MOOC): expectativas y consideraciones prácticas. *Revista de Educación a Distancia, 39.* Recuperado de https://revistas.um.es/red/article/view/234251

Oviedo, K. (2016). *Análisis de recursos de Internet para la educación secundaria en el tema de medidas de tendencia central.* Tesis de Máster. Universidad de Granada.

Pratt, D., Davies, N., y Connor, D. (2011). The role of technology in teaching and learning statistics. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics-challenges for teaching and teacher education* (pp. 97-107). Springer:Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-007-1131-0_13

Rodríguez-Muñiz, L. J., Muñiz-Rodríguez, L., Vásquez, C. A., y Alsina, Á. (2020). ¿Cómo promover la alfabetización estadística y de datos en contexto? Estrategias y recursos a partir de la COVID-19 para Educación Secundaria. *Números: revista de didáctica de las matemáticas, 2020, vol. 104, p. 217-238*.

Valenzuela, S. (2020). *Estadísticos de orden: significado institucional en educación secundaria y bachillerato y análisis de recursos didácticos en internet.* Tesis de Máster. Universidad de Granada.

VOL 34, NÚMERO 2, AÑO 2021

PROBLEMAS E ROBÔS: UMA ABORDAGEM SOCIOINTERACIONISTA NO ENSINO DA MATEMÁTICA

PROBLEMS AND ROBOTS: A SOCIO-INTERACTIONIST APPROACH TO MATHEMATICS TEACHING

José Fernandes Silva, Douglas Miguel Souto Queiroz
Instituto Federal de Minas Gerais, (Brasil), SESI Cat Abílio Rodrigues Patto. (Brasil)
jose.fernandes@ifmg.edu.br, douglasmsq@gmail.com

Resumo
O objetivo foi analisar as implicações da Robótica Educacional através da Resolução de Problemas para a construção de conhecimentos matemáticGos numa perspectiva sociointeracionista. Trata-se de uma pesquisa qualitativa da qual participaram oito estudantes do Ensino Médio. Foram realizados oito encontros. A coleta de dados se deu através de observações, videogravação e protocolos escritos. As análises foram realizadas levando em consideração as categorias: encontro com a Robótica Educacional (fase de planejamento), desenvolvimento criativo (exploração livre) e utilização de construtos robóticos para construção de conhecimento (exploração mediada). O aporte teórico foi baseado na Robótica Educacional, Resolução de Problemas e Teoria Socio-histórico-cultural. A Robótica Educacional permitiu-nos perceber que muitas são as formas de aprender Matemática em seu contexto, em especial, pelas relações de diálogo e colaboração.

Palavras-chave: robótica educacional, resolução de problemas, Ensino de Matemática, tecnologia educacional

Abstract
This paper aimed to assess the implications of Educational Robotics through Problem Solving for the construction of mathematical knowledge out of a socio-inter-actionist perspective. It is qualitative research in which eight high school students were involved. Eight meetings were held. Data collection was carried out via observations, video-recording and written protocols. The assessment was performed taking into account the following categories: encounter with Educational Robotics (planning phase), creative development (free exploration) and use of robotic constructs for knowledge construction (mediated exploration). The theoretical contribution was based on Educational Robotics, Problem Solving and Socio-historical-cultural Theory. Educational Robotics allowed us to realize that there are many ways to learn Mathematics in its context, especially through both dialogue and collaboration relations.

Key words: educational robotics, problem solving, Mathematics teaching, educational technology

Introdução

É sabido pela comunidade acadêmica e pela sociedade que a tecnologia tem desenvolvido um papel importante no âmbito da educação. No entanto, o ambiente da escola, especialmente a aula de Matemática, tem estado divorciada das potencialidades da tecnologia.

Quando falamos em computadores, é comum que apareça a abordagem relacionada à robótica. Este recurso habita o imaginário coletivo como o ápice do desenvolvimento da tecnologia. Contudo, nossa abordagem está centrada nas potencialidades pedagógicas deste recurso no âmbito do ensino da Matemática Stroeymeyte (2015), Papert (1980) e Zoom (2013). Ainda faz-se necessário situar a abordagem da tecnologia, especialmente a Robótica Educacional, nas diferentes correntes das teorias da aprendizagem, em especial a teoria Sócio-histórico-cultural de Vygotsky. Outro importante e necessário foco deste trabalho é a Resolução de Problemas cujas contribuições fazem-se relevantes em Onuchic e Allevato (2011) e Allevato e Vieira (2016).

O exposto nos leva à seguinte indagação: qual o papel da Robótica Educacional através da Resolução de Problemas para a aprendizagem de conhecimentos matemáticos numa perspectiva Socio-histórico-cultural?

Marco teórico

Robótica Educacional

Conceitualmente, "o ambiente de aprendizagem em que o professor ensina ao aluno a montagem, automação e controle de dispositivos mecânicos que podem ser controlados pelo computador é denominado "Robótica Educacional" (Diniz, 2014, p.24).

Ainda quanto à Robótica Educacional, Santos (2016, p. 2) diz que:

Essa estratégia de intervenção didática se vale do uso de máquinas computacionais, que podem ser computadores, dispositivos móveis com tela sensível ao toque (tablets e telefones inteligentes ou smartphones), além dos dispositivos programáveis, em especial os relacionados à automação e à robótica.

A compreensão sobre Robótica Educacional expande-se neste autor, visto que este engloba dispositivos do nosso cotidiano, como aparelhos celulares e *tablets,* trazendo uma série de novas ferramentas para a utilização em sala de aula através desta metodologia. Ainda percebemos na Robótica Educacional a possibilidade de inserção dos estudantes às novas tecnologias digitais, principalmente como ferramenta de ensino, que surgem e passam a compor seus cotidianos, conforme Gomes (2014, p. 17) se manifesta ao explicitar que:

Como forma de se introduzir os recursos tecnológicos nas aulas de matemática consideramos a robótica educacional como uma alternativa que atende a demandas no ensino de matemática, visto que seu caráter lúdico e criativo pode contribuir para uma nova concepção de como ensinar.

Desta forma, a Robótica Educacional possibilita, conforme Pereira (2016, p. 68) "reflexão sobre a resolução de problemas que vão surgindo durante a construção. Mais ainda, é uma atividade lúdica pela manipulação de peças para a construção do objeto que simula o real, embora pareça brinquedo".

Abordagem da aprendizagem em Vygotsky

Em relação a abordagem de Vygotsky, Ivic (2010, p. 15) destaca:

Se houvesse que definir a especificidade da teoria de Vygotsky por uma série de palavras e de fórmulas chave, seria necessário mencionar, pelo menos, as seguintes: sociabilidade do homem, interação social, signo e instrumento, cultura, história, funções mentais superiores. E se houvesse que reunir essas palavras e essas fórmulas em uma única expressão, poder-se-ia dizer que a teoria de Vygotsky é uma "teoria socio-histórico-cultural do desenvolvimento das funções mentais superiores", ainda que ela seja chamada mais frequentemente de "teoria histórico-cultural".

A contribuição de Vygotsky para a educação é extensa, contudo, a este trabalho nos interessa o conceito de Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP).

Esta zona é definida como a diferença (expressa em unidades de tempo) entre os desempenhos da criança por si própria e os desempenhos da mesma criança trabalhando em colaboração e com a assistência de um adulto. Por exemplo, duas crianças têm sucesso nos testes de uma escala psicométrica correspondente à idade de 8 anos; mas, com uma ajuda estandartizada, a primeira não alcança senão o nível de 9 anos, enquanto a segunda atinge o nível de 12; enquanto a zona proximal da primeira é de um ano a da outra é de quatro anos. (Ivic, 2010, p. 32).

Em síntese, a ZDP pode ser definida como:

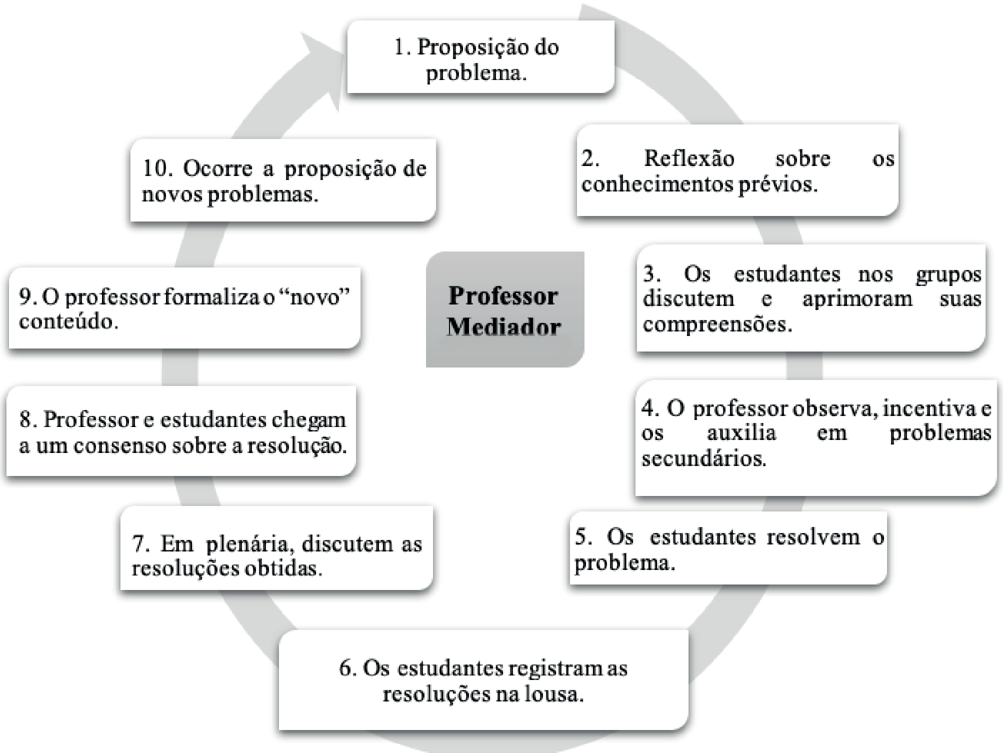
[...] a distância entre o nível de desenvolvimento real, que se costuma determinar através da solução independente de problemas, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado através da solução de problemas sob a orientação de um adulto ou em colaboração com companheiros mais capazes. (Vygotsky, 1991, p. 58).

Assim, entendemos que as abordagens de Vygotsky são fundamentais ao desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem, pois este é, eminentemente, social e algo amplo que compreende a aprendizagem como sendo correlacionada às relações sociais e que o contato com outras pessoas é essencial visto a necessidade sociocultural da sociedade.

Resolução de Problemas

Para este trabalho, tomou-se a perspectiva de Resolução de Problemas abordada por Onuchic e Allevato (2011) e Allevato e Vieira (2016) que destacam ser o problema, elemento importante para a construção dos conceitos matemáticos. Trata-se de uma reflexão que considera o ativismo dos estudantes no processo de aprendizagem e os professores como mediadores e apoiadores da prática educativa. Diferentes roteiros e sugestões têm sido elaborados visando subsidiar os educadores a desenvolverem práticas de Resolução de Problemas, porém destaca-se na figura 1 o de Allevato e Vieira (2016):

Figura 1. *Roteiro para resolução de problemas.*



Allevato e Vieira (2016) - adaptado pelos autores.

Como pode ser observado neste roteiro, o trabalho com Resolução de Problemas conclama a uma nova ordem, ou seja, "alunos autônomos, tendo um problema em mãos como ponto de partida para fazer Matemática, e um professor gerenciando o processo recursivo de ensinar, aprender, avaliar, reensinar, reaprender..." (Bicalho, Allevato, Silva, 2020, p. 23).

Metodologia

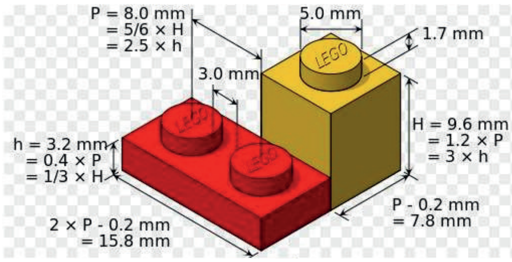
Esta pesquisa é de cunho qualitativo, da qual participaram onze estudantes matriculados no Ensino Médio de uma Escola Pública Federal localizada no Estado de Minas Gerais - Brasil. Foram realizadas oito oficinas de uma hora e quarenta minutos cada, nas quais os pesquisadores atuaram como mediadores baseando-se nas abordagens de Vygostky (1991), em especial, a Zona de Desenvolvimento Proximal. Desta forma, as tarefas propostas visaram um processo de desenvolvimento da aprendizagem partindo dos conhecimentos prévios (reais) até a consolidação de outros (potenciais). Os pesquisadores atuaram como mediadores ao longo do processo, fomentando indagações, processos de trocas e investigações. Nos diálogos com os participantes, estes demonstraram interesse em discutir problemas do campo da Geometria Espacial e Trigonometria e, além disso, possibilidades de interface estes e a Física com destaque para as temáticas de Energia e Forças. Os dados foram coletados através de protocolos escritos, observação e gravação de áudio e vídeo. As análises foram realizadas levando em consideração as categorias: encontro com a Robótica Educacional (fase de planejamento), desenvolvimento criativo (exploração livre) e utilização de construtos robóticos para a aprendizagem matemática (exploração mediada).

Resultados

Encontro com a Robótica Educacional

Através do contrato pedagógico com os participantes foi discutido, conjuntamente, as propostas das oficinas. Depois deste momento, foi abordado o conceito de Robótica Educacional e suas possibilidades. Essa discussão teve início com as perguntas: *O que é robótica? O que é Robô?* Definiu-se Robótica e introduziu-se a ferramenta Lego dos *Kits Lego Mindstorm* que seria utilizada nas oficinas, definindo o nome de cada peça para facilitar o trabalho e apresentando as ferramentas de suporte nas montagens. Neste momento foi discutido sobre a unidade de medida Lego, de acordo com figura 2, que usa os pinos presentes em cima das peças como marcadores de unidade.

Figura 2. *Medidas Lego.*



Adaptada de (Quora, 1998).

Após o Contrato pedagógico firmado, foi indagado aos educandos o que eles gostariam de criar, pois para Ferro e Paixão (2017) o desenvolvimento da aprendizagem demanda processos de significado pessoal. Em primeiro momento, surgiram duas propostas:
Construção de um modelo de carro;
Construção de um modelo de Robô humanoide;
Ficou evidenciado que os participantes optaram por construir coletivamente (figura 3), fato que corroborou com os princípios da Robótica Educacional elencados por Stroeymeyte (2015).

Figura 3. *Primeiras Construções*

Fonte: Dado dos pesquisadores.

Neste momento observou-se a influência do contexto social na aprendizagem (Vygotsky, 2001), pois os participantes sentiram a necessidade da coletividade para realizar o trabalho e, além disso, vincular as construções às situações do cotidiano. Neste momento, os pesquisadores atuaram de modo a mediar e orientar, pois partiu-se do entendimento que os participantes possuíam capacidade latente para o enfrentamento dos problemas matemáticos envolvidos nas tarefas.

O primeiro contato dos participantes com as peças Lego foi marcado pela exploração e comprometimento com o trabalho acompanhado de indagações e reflexões sobre as construções. O uso do celular foi permitido por configurar importante ferramenta de pesquisa.

Desenvolvimento criativo

Os momentos dos encontros iniciais com os participantes foram espaços de planejamento de cada um dos grupos. De maneira geral, foram discutidos, principalmente, conceitos matemáticos acerca de geometria espacial e manipulação algébrica, unidades de medidas e conversão dessas unidades. Sobre a Física, os participantes pesquisaram sobre pressão, força de atrito e engrenagens. Tal fato se configura importante etapa da resolução de um problema, pois é o momento de refletir sobre conhecimento prévios e estruturar as estratégias para enfretamento das situações propostas (Allevato; Vieira, 2016). A figura 4 representa momentos de reflexões e investigações empreendidas pelos grupos:

Figura 4. *Participantes em reflexões e planejamento*

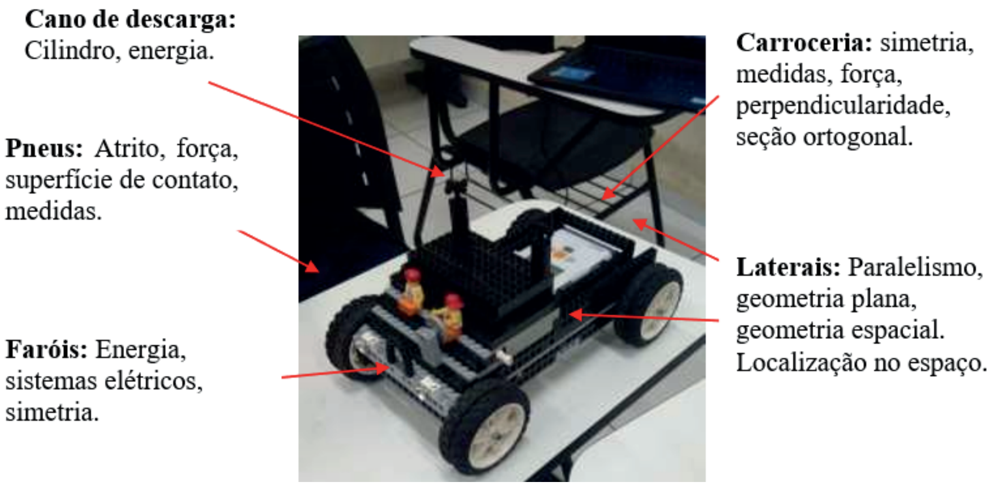
Fonte: Imagem do pesquisador.

Os participantes pesquisaram, refletiram e fizeram colaborações mútuas. Ao término da oficina, todos os conteúdos envolvidos foram revisitados com a mediação dos pesquisadores, pois a formalização dos conceitos matemáticos se constituiu numa fase de desafios para os educandos. Destaca-se a importância do apoio dos pesquisadores para que os participantes pudessem desenvolver a capacidade de realizar definições, demonstrações e generalizações. Embora as construções foram apenas conjecturadas a discussão conceitual constituiu pilares importantes para os encontros subsequentes.

Utilização de construtos robóticos para a aprendizagem matemática

Ao longo das construções os participantes tentaram fazê-las as mais resistentes possíveis, demonstrando compreensão acerca da utilização de peças adequadas para futuros encaixes de outras peças. Percebemos que a agilidade na montagem estava diretamente ligada ao conhecimento geométrico acerca do dimensionamento espacial de cada peça na construção do carro por um dos grupos, conforme mostra a figura 5:

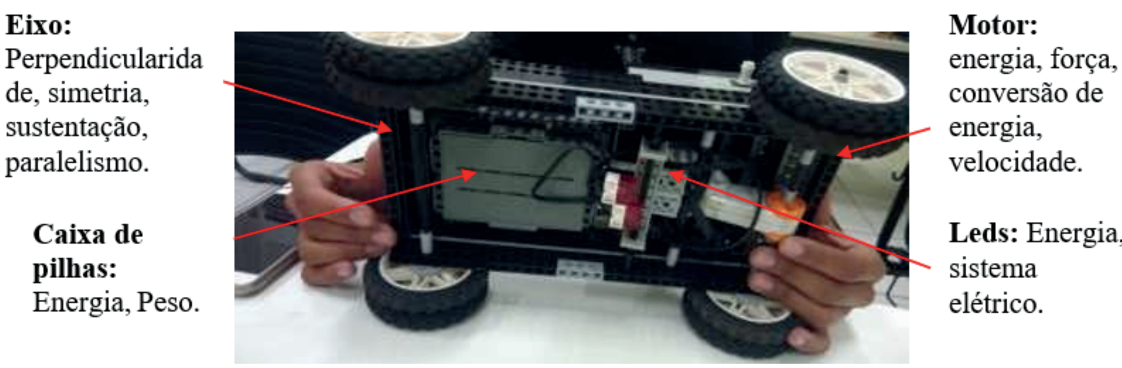
Figura 5. *Vista superior construção do carro*



Fonte: Dados dos pesquisadores

Verificamos que os participantes empregaram correntemente os conceitos de seção e ortogonalidade na sua construção, quando analisamos as dimensões do modelo. Notamos, ainda, a presença de cilindros como alegoria. Na figura 6 é possível observar por outro ângulo:

Figura 6. *Vista inferior do carro*



Fonte: Dados dos pesquisadores

Destacamos, ainda, a preocupação dos participantes em deixar a tampa da caixa de pilhas à mostra para possíveis reposições e os *leds (Light Emitting Diode)* para dar o efeito de neon ao projeto.

Conforme exposto, as construções suscitaram a utilização de temas importantes para o avanço lógico no campo da geometria. Tal fato nos revela que a manipulação de elementos carregados de significados possibilita e/ou aprimora o descobrimento de novos conceitos (Papert,1986).

Compreendemos que os participantes, de forma coletiva, construíram um modelo que atende, não apenas ao proposto, mas o aperfeiçoaram ao longo de todo projeto, modificando solução e problema a cada nova descoberta. Eles recorriam constantemente a conceitos que, embora aprendidos previamente, não conseguiam fazer conexão com a vida cotidiana. A expressão "*Então é para isso que serve?",* foi recorrente. A esse respeito, Welfer e Bonete (2010, p. 4) compreendem que "a contextualização na Matemática é fundamental para promover um aprendizado significativo, pois relacionando as noções matemáticas à vivência do aluno este pode compreender a importância de estudar determinados conteúdos, além de generalizar a aplicação para outros campos.

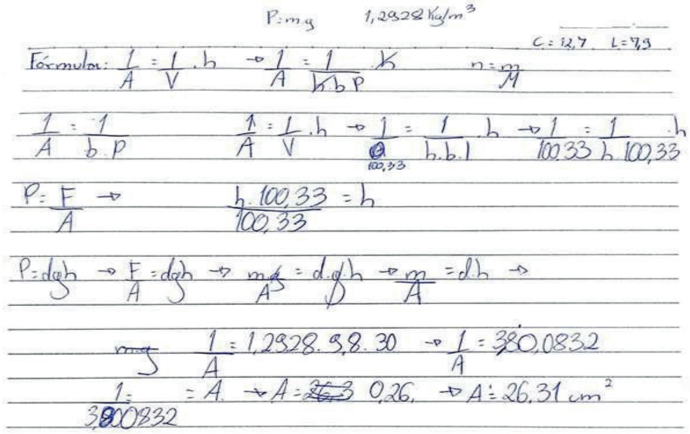
Outro ponto de destaque foi a construção de um robô, cuja discussão foi norteada pela indagação dos participantes em como fazer o robô andar.

G: Mas como é que vou fazer andar?
Professor: Na verdade, é por uma espécie de arraste, nós não temos a força de atrito?
G: Sim!
Pesquisador: Temos um robozinho aqui. Estas são as pernas do robô e ele está em uma superfície, quando o robô levanta a perna.
G: Aham!
Professor: Nós andamos como? Na hora que eu levanto esta perna (Referindo-se à própria perna), a outra perna me empurra.
G: A outra perna?
Professor: isso.
E: A de trás que te tomba.
Professor: Esta que me tomba (Referindo-se à perna em contato com o chão), eu não consigo me tombar com esta outra (Referindo-se à perna suspensa no momento de andar). Quando eu faço força para trás... Já viram essa reação?
G e E: Já.
Professor: A reação me joga para frente.
Neste momento, demonstrou-se uma tentativa de compreensão acerca do movimento das pernas. Os participantes já tinham o conhecimento prévio de força de atrito, mas quando levado para a prática não conseguiam entender qual pé fazia a força. Alguns minutos depois, as discussões foram retomadas.
G: Este Robô vai ser muito difícil para nós. Como é? Enquanto uma perna vai para a frente a outra vai para trás?
Professor: Observe as engrenagens em sua mão... (Pausa para interação do participante) Uma vai para cima e a outra para baixo, não é? Quando uma perna vai para cima a outra impulsiona o solo. Aí faz força e depois a outra faz força e por aí vai. (Indicando a alternância das pernas no ato de andar e a força que estas fazem no solo). Igual o nosso corpo.
G: Entendi. (Depois de uma pausa) Pensei que fosse de forma independente sabe? Primeiro levantava e a outra ficava estática sabe? Sem fazer nada.
Professor: Até tem como fazer as pernas independentes, mas você não anda de maneira independente. Se eu fizer uma perna independente da outra, a Inteligência Artificial utilizada vai fazer o mesmo processo das pernas dependentes. O nosso corpo faz esse processo. Você só anda por isso, se não, você não anda. É um processo dependente.
G: Vai precisar desta articulação? (Articulação do pé).
Professor: Esta articulação está no controle de equilíbrio

Os participantes, ainda não demonstrando avanço na construção do robô, foram orientados a começarem pelo pé, surgindo outra situação-problema: Qual o tamanho do pé para sustentar o robô? Neste momento as orientações foram no sentido de que deveriam pesquisar. Assim surgiu o assunto de pressão. Os participantes iniciaram uma discussão de revisão acerca de todo o conteúdo de pressão na esperança de encontrarem alguma informação que possibilitasse manipulação matemática para criarem a fórmula necessária.

Destacamos as formas diversificadas que cada participante buscou para resolver o problema de dimensionamento do pé. O participante F buscou por identificar um valor para chamar de altura; já a participante E tentou criar um modelo de pé por achismo, para ter uma visão acerca do problema; o participante G buscava por analisar a Internet e as obras de seus colegas; e a participante A, calada por boa parte da oficina, pegou o caderno e começou a rascunhar uma tentativa de manipulação algébrica, mostrada na figura 7. Compreendemos que as experiências práticas dos estudantes devem ser levadas em conta, como aponta Vygotsky (1991), que diz que o aprendizado é construído nas relações sociais. Portanto, analisamos positivamente as construções dos participantes que, quando caminhassem para a fase da plenária, adaptada de Onuchic e Allevato (2011), trariam riqueza a discussão através de argumentos e maneiras de pensar.

Figura 7. *Cálculo realizado por A*



Fonte: Dados dos pesquisadores

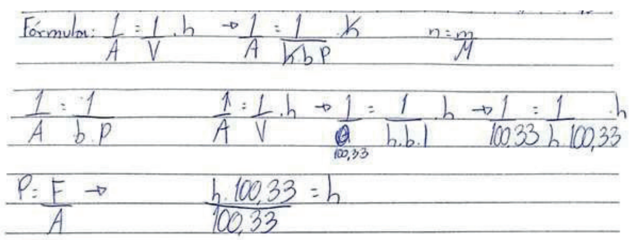
Essa resolução desencadeou reflexões sobre diferentes formas de encontrar a área do pé do robô. Para tal, o diálogo entre pesquisadores e participantes perpassou pelos seguintes temas:
Teorema de Stevin: Sendo um líquido qualquer em um recipiente qualquer, a diferença da pressão de dois pontos é dada por $\Delta p = dg\Delta h$, onde: “d” significa densidade, “g” significa aceleração da gravidade, “h” significa altura, “p” significa pressão e Δ significa variação. Assim, compreendemos verbalmente esta fórmula como sendo: Variação de Pressão é igual à densidade, vezes a gravidade, vezes a variação de altura. Esta fórmula pode ser, genericamente, escrita como sendo: $p = dgh$ quando não ocorrer uma variação.

2ª Lei de Newton relacionada à força Peso: $P = mg$, Onde: “P” significa força peso, “m” significa massa e “g” significa aceleração gravidade. Esta fórmula é uma utilização da 2ª lei de Newton: $F = ma$, onde “a” significa aceleração e “F” significa força. Para encontrar a força Peso “P”, é utilizada a aceleração da gravidade “g”.
Fórmula para calcular Pressão: $p = \frac{F}{S}$, onde: “p” significa pressão, “F” significa força e “S” significa superfície de contato.
Fórmula para calcular Densidade: $d = \frac{m}{V}$, onde: “d” significa densidade, “m” significa massa e “V” significa volume.
Fórmula de Volume do Paralelepípedo: Sendo um Paralelepípedo de comprimento “a”; largura ”b” e altura “c”. Utilizando “V” para representarmos volume: $V = abc$.
Os pesquisadores, na tentativa de mediar as resoluções e impulsionar a ZDP, incitaram às seguintes reflexões:
Professor: Se acharem um sólido que se assemelha ao formato do robô conseguem uma estimativa para seu volume.
G: Seria um retângulo?
Professor: Um retângulo não, porque agora estamos no espaço e ele é uma figura plana.
A: um cilindro?
Professor: Um cilindro, por exemplo... Quais mais poderiam ser utilizados?
E: Um paralelepípedo.
Professor: Um paralelepípedo também.
G: Eu dizia com relação ao pé. (Justificou-se sobre a escolha do retângulo).
Para a participante A, caso conseguisse achar o volume de um paralelepípedo que comportasse o robô resolveria o problema, pois este paralelepípedo possuiria área da base maior do que o robô dentro dele. Esta área serviria, portanto, de aproximação para o pé baseada na informação dada pelo professor de que o pé poderia ser maior do

que o valor exato para resolver o problema, visto que qualquer área maior do que o necessário manteria o robô em pé. Assim estimou o volume de uma caixa onde, supostamente, caberia seu robô. Utilizou os valores que se encontram no canto superior direito de sua resolução. Adotando *100,33 cm²* como área da base, ao escolher os valores de lado "*C = 12,7*" e "*L= 7,9*", estas letras foram chamadas assim para expressar comprimento x largura. Referem- se a "a" e "b" na exposição acima da fórmula de volume do paralelepípedo.

Percebemos um equívoco da participante com estas estimativas, pois se o problema era justamente encontrar os valores para as dimensões do pé do robô (base do paralelepípedo) não poderia partir destas informações para resolução do problema através de manipulação. Este tipo de atitude demonstra que a participante compreendia as técnicas necessárias para resolver o problema, contudo, estava com dificuldades na sua interpretação. Sua resolução, apresentada na figura 8, inicia-se com uma manipulação da fórmula de volume do paralelepípedo onde ela transforma: $V = clh \implies \frac{1}{cl} = \frac{h}{V}$, na qual "V" significa volume, "c" comprimento, "l" largura e "h" altura, conforme resolução:

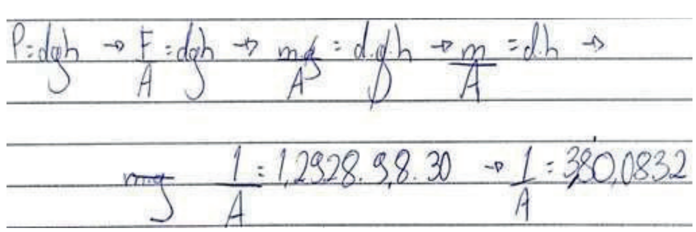
Figura 8. *Resolução participante A*



Fonte: Dados dos pesquisadores

Ao encontrar um valor sem precedentes lógicos, já na linha de baixo, retorna ao início e tenta mais uma vez fazer a manipulação necessária. Novamente a Participante A comete o erro de substituição presente na primeira linha, encontrando h=h. Notadamente, a aluna não percebeu que, quando estipula valores para as dimensões do pé, ela já estipulou a resposta para o problema que procura. Assim, mesmo que perceba a existência do erro, não compreende que não pode partir destas informações. Ao perceber seu erro, a participante, já na quarta linha, inicia, desta vez, estipulando uma massa limite de 1 kg e partindo do Teorema de Stevin (figura 9), apesar de esta fórmula ser utilizada para fluidos.

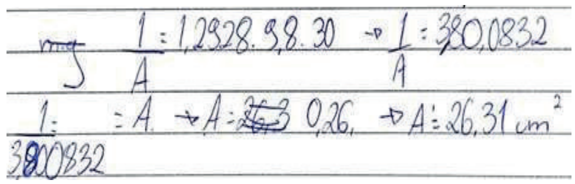
Figura 9. *Segunda parte da resolução proposta por A*



Fonte: Dados dos pesquisadores

Ao ser questionada pelo participante F, A disse que queria ver se encontrava um valor lógico que, pelo menos, aproximava-se do problema. Para ela, a fórmula utilizada para os casos de objetos no solo deveria ser parecida com a fórmula para fluidos e encontraria um valor aproximado. Na primeira linha de raciocínio, mostrada na figura 10, a participante utilizou o valor "30" para h, ao considerar o trabalho do participante F, que acreditava que 30 cm seria o ideal para o tamanho do robô. Contudo, a aluna volta a utilizar a gravidade em suas contas, evidenciada por "9,8", aproximação para a aceleração da gravidade. Além disso, encontrou o valor de 1,2928 kg/m³ para a densidade por formas que não foram esclarecidas na resolução:

Figura 10. *Terceira parte da resolução proposta por A*



Fonte: Dados dos pesquisadores

Deduzimos que ela voltou a utilizar os valores da primeira tentativa diretamente na fórmula de densidade. Ao término de sua resolução, temos que seu robô deveria ter a área dos pés no valor de *26,31 cm²*.

Compreendemos que a participante possuía dificuldades em analisar os próprios registros e, através disso, não conseguiu estruturar o pensamento logicamente. Entretanto, percebemos que sua intenção ao resolver o problema demonstra qualidade quando levantou possibilidades diferentes dos demais, mas teve dificuldades em executar as ferramentas necessárias para a obtenção da solução.

No momento de plenária, os cálculos da participante A foram debatidos e, apesar de possíveis erros, os membros de seu grupo aceitaram a utilização dos valores encontrados por ela para delimitar o tamanho do pé por acharem, através de suas observações concretas, que era uma estimativa razoável. É importante destacar que em todos os momentos do cálculo os participantes sabiam dos riscos provenientes de se utilizar uma fórmula que foi projetada para outros fins, no caso, o teorema de Stevin, mas, conjuntamente (figura 11), assumiram a responsabilidade de adotar essa linha de raciocínio e empreender a construção do robô:

Figura 11. *Participantes atuando na construção do robô*

Dados dos pesquisadores

De posse das reflexões o robô foi construído articulando diferentes temáticas de forma interdisciplinar. Os diálogos, as trocas de experiências e colaboração e a mediação dos pesquisadores, se fizeram presentes no processo, corroborando para a efetivação de importantes aprendizagens

Conclusões

Este trabalho objetivou analisar as implicações da Robótica Educacional por meio da Resolução de Problemas para o desenvolvimento da aprendizagem matemática numa perspectiva socio-histórico-cultural.

Os dados revelaram que a Robótica no contexto da sala de aula de Matemática se constitui recurso fundamental para mobilização dos estudantes, porém é necessário que as tarefas sejam planejadas e que tenham objetivos claros. No tocante ao desenvolvimento criativo, os dados apontam a importância de o professor possibilitar espaços para os estudantes desenvolverem estratégias e refletirem sobre as possibilidades da Robótica para fomentar conhecimentos matemáticos.

Ao focar na utilização de construtos robóticos para a aprendizagem matemática foi possível identificar que os participantes mobilizaram conhecimentos prévios e avançaram para a compreensão de outros necessários à resolução dos problemas que apareceram ao longo das construções planejadas.

Na questão da comunhão entre a Robótica Educacional e a Resolução de Problemas, pode-se inferir diferentes aspectos, entre eles, processos de leitura, interpretação, colaboração, formalização dos conceitos e socialização. Neste processo considera-se que as aprendizagens são efetivadas pela atuação na ZDP, pois para Vygotsky (1991) o desenvolvimento é concretizado não somente pelo nível de desenvolvimento real, caracterizado pela independência na realização de atividades, mas também pela capacidade de concretizar tarefas – desenvolvimento potencial - através do apoio e da mediação de outros.

Analisando o exposto acima, conclui-se que a utilização da Robótica Educacional por meio da Resolução de Problemas, em uma abordagem Socio-histórico-cultural, traz enriquecimento para as práticas matemáticas, pois o papel do professor passa a ser de mediador e orientador.

Para o futuro, muitas são as discussões possíveis acerca desta problemática, entre elas destacamos: Como empreender processos avaliativos em contextos de Robótica Educacional? Que conhecimentos devem ser priorizados no processo? Quais são os desafios e possibilidades desta abordagem diante dos currículos prescritos?

Referências bibliográficas

Bessa, V. da H. (2008). *Teorias de Aprendizagem*. Curitiba. IESDE Brasil S. A., 2008.

Ferro, M. Da G. D.; Paixão, M. Do S. S. L. (2017). *Psicologia da Aprendizagem Fundamentos Teórico-metodologicos dos Processos de Construção do Conhecimento*. Ed. Edulpi, 1ª Ed. Universidade Federal do Piauí, Teresina.

Gomes, P. N. N. (2014). *A robótica educacional como meio para aÀ aprendizagem da Mmatemática no ensino fundamental*. Dissertação (mestrado) – Universidade Federalde Lavras, Formação de Professores, 2014.

Ivic, I. (2010). *Lev Semionovich Vygotsky.* Editora Massangana, 1ª edição, Coleção do MEC,Recife.

Lego Brasil. *Grupo Lego*. 2018. Disponível em:https://www.legobrasil.com.br/grupo-lego., Acesso em: 22 out. 2018.

Onuchic, L. R., Allevato, N. S. G. (2011). Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. *Boletim de Educação Matemática*, vol. 25, núm. 41, dezembro , p.73-98.

Papert, S. (1986). *Logo: Computadores e Educação*. São Paulo: Brasiliense.

Pereira, W. R. F. (2016). *Altas Habilidades/Superdotação e Robótica: relato de uma experiência de aprendizagem a partir de Vygotsky*. Dissertação (Mestrado em Educação Tecnológica) – Centro Universitário Internacional Uninter, Educação e Novas Tecnologias, Curitiba.

Quora. *Dimensions of Lego*. (1998). Disponível em: https://www.quora.com/Are-the-dimensions-of-LEGO-bricks-functional-for-recreating-a-Minecraft-environment. Acesso em: 13 out. 2018

Santos, C. F. R. (2016). A robótica educacional e seu potencial como ferramenta de explicitação de invariantes operatórios relacionados a conceitos matemáticos. Anais do *Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática.* Curituba – PR.

Stroeymeyte, T. S. da L. (2015). *Currículo, Tecnologias e Alfabetização Científica: umaanálise da contribuição da robótica na formação de professores*. Dissertação (mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC), Educação: Currículo,São Paulo.

Vygotski, L. S. (1991). *A Formação Social da Mente*. São Paulo, Martins Fontes.

Welfer, C.; Bonete, I. P. (2010*). O uso da Resolução de Problemas no Ensino do Teorema de Tales e do Teorema de Pitágoras*. v. 1. Secretaria de Educação do Paraná:O Professor PDE e Os Desafios da Escola Pública Paranaense. Laranjeiras do Sul.

Zoom. (2013). *Lego Education: Manual Didático-Pedagógico*. 1. Curitiba: Ed. Editora ZoomEducacional.

Zorzan, A. S. . L. (2007). Ensino-aprendizagem: algumas tendências na Educação Matemática.Erechim – RS, *Revista Ciências Humanas Frederico Westphalen*, v. 8, nº. 10. p. 77-93.

VOL 34, NÚMERO 2, AÑO 2021

CONOCIMIENTOS PREVIOS DE ALUMNOS DE LA EDUCACIÓN DE JÓVENES Y ADULTOS ACERCA DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA Y DEL USO DE GEOGEBRA EN EL SMARTPHONE

YOUNG AND ADULT EDUCATION STUDENTS' PREVIOUS KNOWLEDGE ON QUADRATIC FUNCTION AND THE USE OF GEOGEBRA ON THE SMARTPHONE

Alice Bohrer, Douglas da Silva Tinti
Universidad Federal de Ouro Preto. (Brasil)
alicebohrer@yahoo.com.br, tinti@ufop.edu.br

Resumen
El presente trabajo es parte de un estudio que investigó el uso de GeoGebra y del smartphone en la enseñanza de función cuadrática en la Educación de Jóvenes y Adultos. Tiene por objetivo analizar los conocimientos previos acerca de ese tipo de función, así como de los recursos de GeoGebra. Para ello, asumiendo una perspectiva descriptiva, se analizaron las respuestas de trece alumnos de la EJA (Educación de Jóvenes y Adultos) en que fue posible identificar, por ejemplo, que la mayoría de ellos no conocía la parábola y que solamente un estudiante ya había utilizado GeoGebra. De este modo, el trabajo presenta reflexiones sobre ese abordaje en la EJA.

Palabras clave: función cuadrática, GeoGebra, Smartphone, educación de jóvenes y adultos.

Abstract
The present work is an excerpt from a research work on the use of GeoGebra and the Smartphone for teaching quadratic function in Youth and Adult Education. It aims to analyze previous knowledge about this type of function, as well as GeoGebra resources. So, we assumed a descriptive perspective and we analyzed the responses from thirteen Youth and Adult Education students, in which it was possible to identify, for example, that most of them did not know the parable and that only one student had already used GeoGebra. Thus, the work presents reflections on this approach in Youth and Adult Education.

Key words: quadratic function, GeoGebra, Smartphone, youth and adult education.

Introducción

Históricamente, la noción de Función comenzó a desarrollarse a lo largo de varios siglos y es uno de los conceptos más importantes para el estudio de la Matemática. De acuerdo con Sastre Vázquez, Rey y Boubée (2008), ese contenido se originó del concepto de números, con una correspondencia entre el conteo de números y un conjunto de objetos, a partir de registros dejados por los hombres de las cavernas.

Además de ello, fueron encontradas tablas, hechas por los babilonios, con fórmulas como la suma de los términos de una Progresión Geométrica, así como aquellas que muestran los números de Pitágoras o el uso de reglas de tres simples y compuesta. Vale resaltar que los babilonios tenían la noción del concepto de Función de forma implícita, representada en las tablas astronómicas, que mostraban las "observaciones directas de fenómenos ligados por una relación aritmética, como períodos de visibilidad de un planeta y una distancia angular de ese planeta al sol" (Sastre Vázquez, Rey y Boubée, 2008, p. 143).

Según Santos (2018), algunos matemáticos indios contribuyeron de forma significativa para el estudio de las Funciones Cuadráticas. Entre ellos se destaca Bháskara, que afirmó que:

El cuadrado de una grandeza positiva o de una grandeza negativa es positivo: y la raíz [cuadrada] de una grandeza positiva es doble, positiva y negativa. No hay raíz [cuadrada] de una grandeza negativa, pues ella no es una grandeza. (Pitombeira, 2004, p. 21)

Además, según Santos (2018), ya existía la consciencia de que números negativos no eran cuadrados. De esa forma, al depararse con ecuaciones cuadráticas, se utilizaba un método de resolución denominado regla hindú que, inicialmente, fue enunciada por S'ridhara y descrita por Bháskara, en 1925, como "es por unidades iguales a cuatro veces el número de cuadrados que es necesario multiplicar los dos miembros; y es la cantidad igual al cuadrado del número primitivo de cantidades desconocidas simples que es necesario adicionar" (Roque, 2012, p. 240).

Utilizando ese lenguaje descrito por Bháskara (donde la raíz negativa aún no era considerada), y trayéndola al lenguaje matemática actual (donde la Función Cuadrática es dada por la sentencia $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $\mathrm{a, b\ y\ c} \in \mathrm{R, y\ a} \neq 0$, se llegaría al algoritmo utilizado para determinar la solución de una ecuación cuadrática (Santos, 2018).

Siendo así, concordamos con Cruz (2018) que el concepto de función importa múltiples representaciones y necesita técnicas diferenciadas para su desarrollo en el aula. Concordamos, además, con Ponte (1990) apud Cruz (2018), en que las funciones son instrumentos matemáticos indispensables para el estudio cualitativo de fenómenos naturales. Asimismo, en las prácticas escolares, podemos observar que hay diferentes abordajes para la enseñanza de funciones y, de modo particular, la función cuadrática. Entre tales abordajes, destacamos el uso del software GeoGebra que, de acuerdo con Pelli (2014), es un software de Matemática libre y dinámico que presenta la interacción de las representaciones geométricas y algébricas, ya que posee todas las herramientas tradicionales de un software de geometría dinámica, como los puntos, las rectas, y las secciones cónicas, además de la parte algébrica, que permite la exploración de los diferentes tipos de funciones matemáticas.

Considerando lo expuesto, el presente artículo se propone analizar los conocimientos previos acerca de la función cuadrática, así como de los recursos de GeoGebra, de una clase de alumnos de la Educación de Jóvenes y Adultos.

Discusión teórica

Por mucho tiempo el único método de enseñanza era el tradicional, en que el profesor explicaba la materia y los alumnos, meros receptores de informaciones, copiaban. En general, esa propuesta de enseñanza no tiene en cuenta que en un aula hay diferentes alumnos, con diferentes niveles de conocimiento, y que cada persona tiene su tiempo y su forma de aprender.

De acuerdo con Saviani (2003), el método tradicional de enseñanza define al profesor como una figura autoritaria, cuyo tipo de postura avergüenza al alumno, imposibilitándole de expresar sus ideas y pensamientos.

Actualmente se defiende que el alumno sea protagonista de su aprendizaje, constructor de sus conocimientos, y el profesor sea el mediador del proceso, auxiliando al alumno en su desarrollo (Luckesi, 2013).

En ese contexto, el alumno precisa comprender la necesidad de aprender los contenidos matemáticos, percibir que la Matemática forma parte de su vida, de su día a día, que ella va mucho más allá del ambiente escolar, que la Matemática no es algo que se refiere solo a números, sino a ideas, a la propia vida.

Según Pellegrini (2003), el alumno de hoy posee acceso a varios tipos de informaciones y tecnologías, como internet, televisión, radio, videojuegos y celulares, entre otros, usando como vía de transmisión los recursos tecnológicos, lo que posibilita que opinen y discutan sobre diversos asuntos. El abordaje usado antiguamente no tiene el mismo efecto en los días de hoy. Los profesores deben buscar nuevos y diferentes métodos de enseñanza, con vistas a mejorar el desempeño de su alumno. Una de las alternativas que se presenta es el uso de tecnologías, incluyendo los dispositivos móviles.

Coutinho (2014) corrobora esa idea, al mencionar que los celulares pasaron por un avance tecnológico considerable, y hoy funcionan como verdaderos computadores de bolsillo con capacidad de procesamiento semejante o superior a la de los computadores del inicio de la década, con funciones y aplicaciones en prácticamente todas las áreas del conocimiento humano.

De acuerdo con los estudios de Ladeira (2015) y Cruz (2018), la integración del smartphone con GeoGebra contribuyó para el desarrollo del estudio de la Función Afín y de las Funciones Exponenciales. La investigación de xxx (2020), por su parte, evidenció los aportes y desafíos de la integración del smartphone, WhatsApp y GeoGebra, en el contexto educativo, para el estudio de Función Cuadrática en la Educación de Jóvenes y Adultos.

Metodología

El presente trabajo es un recorte de un estudio de Master en Educación Matemática (xxx, 2020) que investigó el uso de GeoGebra y del smartphone en la enseñanza de función cuadrática en la Educación de Jóvenes y Adultos (EJA). En el referido estudio, después de un ejercicio de mapeo de investigaciones a disposición en el Banco de Disertaciones y Tesis de la CAPES, considerando aquellas defendidas en el período de 2013 a 2019 y el descriptor "Función Cuadrática", en el cual se identificaron 88 estudios, se constató que solo 3 fueron desarrollados con alumnos de la EJA.

Además de eso, el mapeo permitió identificar que, en esas 3 investigaciones, función cuadrática fue abordada utilizando GeoGebra, aunque ninguna de ellas tuvo como base el Aprendizaje Móvil. Tal constatación motivó a los investigadores a desarrollar un estudio en la EJA integrando función cuadrática, GeoGebra y smartphone.

El punto de partida fue la proposición de un cuestionario a los participantes del estudio, con vistas a identificar sus conocimientos previos acerca de ese tipo de función, así como de los recursos de GeoGebra. Ese cuestionario será considerado como instrumento de producción de datos en el presente artículo.

De ese modo, el presente trabajo se propone analizar tales conocimientos. Se trata, por lo tanto, de un estudio cualitativo, que asume la perspectiva descriptiva. Los datos analizados se refieren a las respuestas de trece alumnos de la EJA, que fueron denominados A1 ... A13. Los datos fueron agrupados en cuatro ejes analíticos: a) perfil de los participantes; b) conocimientos previos sobre función cuadrática; c) uso del smartphone; d) conocimientos previos sobre GeoGebra.

Es importante resaltar que en ese estudio se asume la noción de conocimiento previo en una perspectiva constructivista, o sea, comprendiendo que se trata de conocimientos que la persona construye, a lo largo de su trayectoria, que pueden ser asociados a una especie de andamio sobre el cual se edifican o construyen nuevos conocimientos (Almeida, 1993).

Análisis

El Cuestionario Inicial fue aplicado en el primer encuentro con la clase, ocurrido el día 12 de junio de 2019. Ese día, la investigadora se presentó a la escuela y a la clase, revelando el objetivo de la investigación y solicitó permiso para la realización del trabajo.

Con el aval del equipo gestor y del profesor de la clase del 1º año de Enseñanza Medio de la EJA, se inició el trabajo. En esa clase estaban matriculados 39 alumnos, sin embargo, el profesor relató que cerca de 25 tenían asistencia regular. En ese primer contacto, fue entregado el TCLE (Apéndice 1) para que los alumnos participantes firmaran. Solo 15 estaban presentes y firmaron el término.

Aunque 15 alumnos hayan firmado el TCLE, a lo largo de las actividades propuestas, solo 13 participaron efectivamente. En función de eso, fueron analizados solo los registros de esos 13 estudiantes.

Luego de la firma del TCLE, fue propuesto a los alumnos el Cuestionario Inicial (Apéndice 2), con la intención de conocer un poco sobre el día a día de ellos, sus vivencias y conocimientos en relación al contenido de Funciones. Ese cuestionario era compuesto por cinco preguntas.

La primera pregunta se destinaba a identificar el grupo etario y el género de los participantes. De acuerdo con las respuestas dadas, seis participantes (A1, A2, A5, A6, A8 y A9) eran del género femenino y siete participantes (A3, A4, A7, A10, A11, A12 y A13) eran del género masculino. Con relación al grupo etario, cinco alumnos (A1, A2, A3, A8 y A12) tenían entre 18 y 28 años, dos alumnos (A4 y A9) tenían de 29 a 38 años, cuatro alumnos (A5, A10, A11 y A13) tenían de 39 a 48 años y dos alumnos (A6, A7) tenían el grupo etario entre 49 y 58 años.

En el segundo eje, se analizaron nueve situaciones (representadas por los números romanos de I a IX) que abordaban contenidos matemáticos, y la comanda central solicitaba que los participantes presentasen sus percepciones sobre esas situaciones. Es importante señalar que el participante A12 posee baja visión y, como el cuestionario no estaba en las especificaciones de fuente que le permitiese leer, él pidió que el profesor de Matemática de la clase leyese y anotase sus respuestas en el cuestionario.

En relación a las situaciones que comprenden contenidos matemáticos, cabe resaltar que los puntos I, II, III y IV representaban diferentes tipos de gráficos mientras los puntos V, VI, VII y VIII representaban las funciones referentes a ese gráfico. El propósito era que los alumnos consiguiesen hacer esas asociaciones entre las funciones y los gráficos.

Durante la aplicación del Cuestionario Inicial, la investigadora observó cierta incomodidad por parte de algunos alumnos, que decían que estaban con dificultades para responder algunas de las preguntas que se referían a conocimientos matemáticos. Por ejemplo, de acuerdo con el análisis de la transcripción de audio de ese encuentro y del diario de campo de la investigadora, se produjo el siguiente relato:

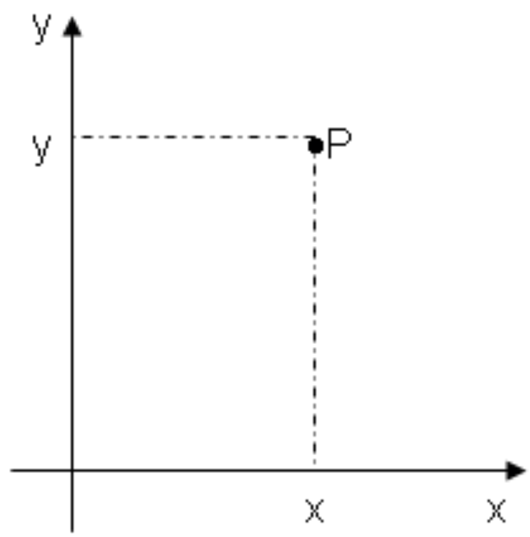
A5: No recuerdo casi nada de lo que está aquí. (Relato del alumno A5, 2019)

Pero, después de la aclaración de que no necesitaban saber responder todas las preguntas, se sintieron un poco más cómodos. En ese momento, el participante A7 preguntó:

A7: ¿Así que no hay problema si erramos en la respuesta? (Pregunta del alumno A7, 2019)
Ante la pregunta del participante A7, la investigadora respondió que, si ellos errasen, no habría problema, ya que el propósito del Cuestionario era analizar lo que ellos recordaban sobre las Funciones, para que ella pudiese elaborar las actividades de la investigación, respetando sus conocimientos previos.

Al focalizar la primera situación, punto I, se puede observar que en ella estaba representado un plano cartesiano y, en él, estaba el punto P. Se esperaba que el alumno percibiese que se trataba de la representación de un punto (denominado P), de coordinadas x e y. La Figura 1, a continuación, representa el punto I, de la segunda pregunta.

Figura 1. *punto I – 2ª pregunta*



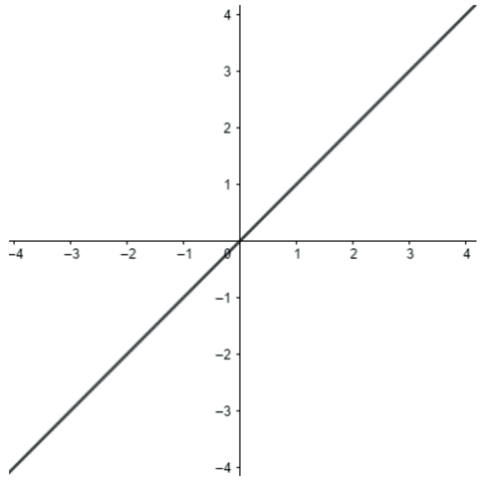
(Archivos de los investigadores, 2019)

Sobre las percepciones con relación a ese punto, de acuerdo con el análisis de los registros hechos por los alumnos, las respuestas dadas por los participantes fueron:

A12: lugar de x e y antes de trazar la recta.
A1: punto de referencia.
A2, A4 y A7: punto.
A3, A6, A9 y A13: punto P.
A11: gráfico.
A8: valor de x e y. (Respuestas dadas por los alumnos al punto I, de la 2ª pregunta, 2019)

Los participantes A5 y A10 no hicieron ninguna anotación en ese punto. De acuerdo con las respuestas dadas, se puede afirmar que la mayoría de los participantes (8 alumnos) percibieron que ese gráfico representaba un punto. En el punto II, representado en la Figura 2, se esperaba que los participantes percibiesen que se trataba de una recta creciente que pasaba por el origen del plano cartesiano.

Figura 2. *punto II – 2ª pregunta*



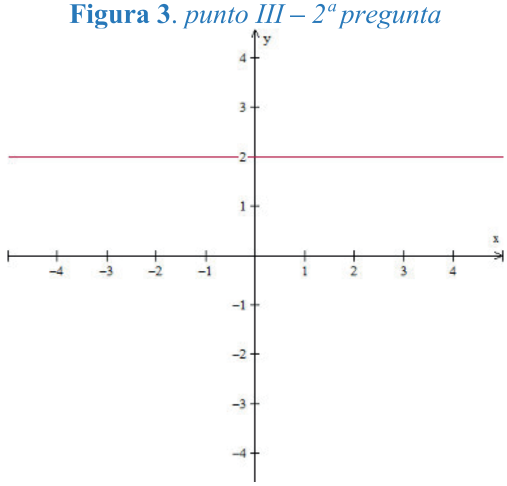
(Archivos de los investigadores, 2019).

Al anotar lo que podrían decir sobre ese punto, de acuerdo con los registros hechos por los alumnos, los participantes escribieron:

A3 y A4: función afín.
A12: recta creciente.
A1, A2, A5, A6, A7, A8, A9, A11 y A13: una recta. (Respuestas dadas por los alumnos al punto II, de la 2ª pregunta, 2019)

El alumno A10 no hizo ninguna anotación en ese punto. De acuerdo con las respuestas dadas, se puede afirmar que la mayoría de ellos (12 alumnos), percibió que el gráfico representaba una recta. En el punto III, representado en la Figura 3, se esperaba que los alumnos percibiesen que el gráfico representaba una función constante, $y = 2$.

Figura 3. *punto III – 2ª pregunta*



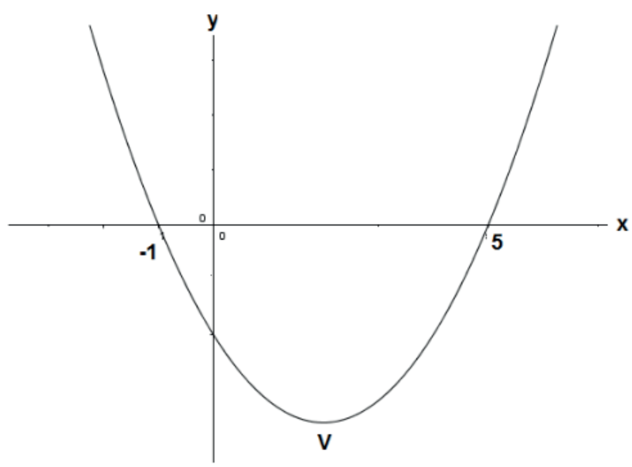
(Archivos de la investigadora, 2019).

Según el análisis de la investigadora y de acuerdo con los registros hechos por los alumnos, las respuestas dadas fueron:

A3: línea recta
A12: recta constante
A7: recta que pasa en el número 2
A1, A2, A4, A5, A6, A8, A9, A10, A11 y A13: una recta. (Respuestas dadas por los alumnos al punto III, de la 2ª pregunta, 2019)

Aunque todos los participantes hubiesen notado que se trataba de una recta, solo el participante A12 escribió que se trataba de una recta.
En el cuarto punto de la segunda pregunta, se esperaba que los alumnos percibiesen que el gráfico representaba una parábola con raíces iguales a -1 y 5 y vértice "V", según la Figura 4.

Figura 4. *punto V – 2ª pregunta*



(Archivos de los investigadores, 2019).

Los participantes realizaron las siguientes anotaciones, de acuerdo con el análisis hecho por la investigadora en los registros de los alumnos:

A1, A5 y A7: una curva.
A3 y A13: una parábola. (Respuestas dadas por los alumnos al punto IV, de la 2ª pregunta, 2019)
Los demás participantes no escribieron nada en ese punto. Al analizar las respuestas dadas por los alumnos, la investigadora concluyó que la mayoría de ellos no conocía la parábola, ya que solo dos participantes (A3 y A13) respondieron que el gráfico representaba una parábola. Además, ningún alumno relató sus percepciones acerca de las raíces o del vértice de la función.

El punto V representaba la ecuación del primer grado $x + 5 = 12$. Algunos participantes, según el análisis de los registros documentales hechos por los alumnos, escribieron:

A1, A2, A3, A4, A6, A9, A11, A12 y A13: "$x = 7$". (Respuesta dada por los alumnos al punto V, de la 2ª pregunta, 2019)

Los participantes A5 y A7 intentaron resolver, pero encontraron otro valor para x y los demás participantes no respondieron a ese punto.

El punto VI representaba la ecuación $(x+1)(x-5)=0$. Ningún participante consiguió encontrar la solución de esa ecuación. Los participantes A3, A4, A5, A6, A12 y A13 la resolvieron de forma incorrecta y los demás participantes dejaron esa pregunta en blanco.

En el punto VII, estaba la ecuación $x^2-4x-5=0$ Los participantes A3, A4, A12 y A13 resolvieron incorrectamente ese punto y los demás participantes no respondieron nada, dejaron la pregunta en blanco.

En el punto VIII, fue representada la ecuación $y=2$. Todos los participantes dejaron esa pregunta en blanco.

El propósito de relacionar los gráficos con las funciones dadas no fue alcanzado, dado que de acuerdo con los datos de la investigadora (audio, diario de campo y registros de los alumnos), fue posible verificar que ningún participante hizo esa asociación.

En el último punto de la segunda pregunta, el punto nueve, estaba representada una tabla con dos columnas (en la primera columna estaba escrito x y en la segunda, $f(x)=2x$). El alumno debería completar la columna de acuerdo con la segunda, tercera y cuarta líneas. De acuerdo con el análisis hecho por la investigadora en los registros de los alumnos, el participante A12, escribió la siguiente frase:

A12: es una tabla que representa una función. (Respuesta dada por los alumnos al punto IX, de la 2ª pregunta, 2019)

Los participantes A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9, A11 y A13 completaron correctamente la tabla y el alumno A10 no completó la tabla. En la Figura 5, se muestra la tabla completada por el alumno A7:

Figura 5. *Tabla completada por el participante A7 para el punto IX de la 2ª pregunta*

X	f(x) = 2x
0	0
1	2
3	6
4	8
5	10
6	12
7	14

(Archivos de los investigadores, 2019).

Se observó, de acuerdo con la Figura 5, que el participante A7 completó correctamente las columnas de la tabla dada en el punto 9 de la segunda pregunta del Cuestionario Inicial.

La tercera pregunta del cuestionario tenía como objetivo saber si el participante poseía smartphone y, en el caso que la respuesta fuese afirmativa, marcar la alternativa que representase cómo (o en cuáles situaciones) solía usarlo. El participante A7 marcó la opción que no poseía smartphone, y los demás participantes marcaran que tenían el aparato móvil. El participante A8 no respondió cómo solía usar el smartphone. Las respuestas dadas están representadas en el Figura 6.

Figura 6. *Respuestas dadas por los participantes a la tercera pregunta del Cuestionario Inicial*

Utilización	Total	Participantes correspondientes
“tomar fotos”	11	(A1, A2, A3, A4, A5, A6, A9, A10, A11, A12 y A13)
“usar la calculadora”	10	(A1, A2, A3, A4, A5, A6, A9, A10, A11 y A13)
“e-mail”	05	(A2, A3, A4, A6 y A11)
“WhatsApp”	10	(A1, A2, A3, A4, A5, A6, A9, A11, A12 y A13)
“Facebook”	09	(A1, A2, A3, A4, A5, A6, A9, A11 y A12)
“descargar aplicaciones”	06	(A2, A3, A4, A9, A11, A12)
“Instagram”	06	(A2, A3, A9, A11 y A12)
“YouTube”	10	(A2, A3, A4, A5, A6, A9, A10, A11, A12)

(Archivos de los Investigadores, 2019)

Además de la tabulación presentada arriba, se observó que, entre los que marcaron que poseían smartphone, todos indicaron que lo utilizaban para “atender y hacer llamadas”, “mirar la hora”, y “despertador”. Asimismo, los participantes A1, A2, A3, A6, A9 y A12 marcaron la opción “otros”. De los que respondieron otros, los participantes A1 y A12 escribieron “escuchar música”, los participantes A3, A6 y A9 no especificaron en que otra situación utilizan el smartphone y el participante A2 escribió:

A2: ver películas.
(Respuesta dada por el alumno A2 al punto V, de la 2ª pregunta, 2019)

De acuerdo con las respuestas dadas a esa tercera pregunta, se notó que los participantes de la investigación solían utilizar el smartphone para diferentes actividades del día a día.

La cuarta pregunta tenía como objetivo saber si el participante ya había utilizado (y cómo utilizaba) el smartphone en el aprendizaje de contenidos matemáticos. Los participantes A1, A6 y A8 marcaron que no, y los participantes A2, A3, A4, A5, A7, A9, A10, A11, A12 y A13 dijeron que sí. De los que respondieron “sí”, los participantes A7 y A11 no respondieron cómo lo utilizaban, los participantes A3, A5, A10, y A13 escribieron que usaban la calculadora, los participantes A4 y A12 escribieron que ya usaron videoclases, y los participantes A2 y A9 escribieron que ya utilizaron aplicaciones para aprender Matemática.

Se observó, de acuerdo con las respuestas dadas a la cuarta pregunta, que la mayoría de los participantes del estudio (10 alumnos) ya había utilizado el smartphone como método auxiliar en el aprendizaje de Matemática por medio de la calculadora, videoclases y aplicaciones.

La quinta y última pregunta del cuestionario tenía como objetivo saber si el participante conocía y si ya había utilizado GeoGebra. Solamente el alumno A12 afirmó que ya conocía GeoGebra y que ya lo había utilizado para hacer gráficos. Los demás participantes marcaron que no conocían GeoGebra.

Cuando los participantes entregaron el Cuestionario Inicial respondido, ya al final de la clase, la investigadora, considerando las actividades que pretendía proponer en su estudio, solicitó que los alumnos descargaran GeoGebra en sus smartphones, dado que en el próximo encuentro lo presentarían para que ellos comenzaran a aprovecharlo.

Para el alumno que no tenía smartphone, la investigadora dejó claro que él no sería perjudicado durante las actividades propuestas en el estudio, dado que podría realizarlas en grupos, posibilitando así que él pudiese usar GeoGebra en el smartphone del compañero.

Consideraciones finales

Al reflexionar sobre los conocimientos previos de los participantes de la investigación, pudimos comprobar algunas dificultades y errores conceptuales en las respuestas presentadas por ellos. Fue posible evidenciar, por ejemplo, que la mayoría de los participantes no reconoció la representación de una parábola.

En reacción al uso del smartphone, fue observado, por ejemplo, que la mayoría de los participantes del estudio (10 alumnos) ya había utilizado el smartphone como método auxiliar en el aprendizaje de la Matemática por medio de la calculadora, videoclases y aplicaciones. Sin embargo, a lo largo del estudio fue posible observar que algunos smartphones tenían la pantalla menor que la de otros. Constatamos que esto dificultó la visualización de los gráficos trazados y de los elementos de la parábola, de acuerdo con lo que era pedido en cada actividad. De ese modo, algunos alumnos necesitaron mirar el smartphone de sus compañeros de grupo, que, generalmente, tenían la pantalla mayor, posibilitando solucionar las actividades. Esto nos posibilitó inferir que el tamaño de la pantalla del smartphone puede influenciar el aprendizaje, visto que los aparatos que poseen una pantalla pequeña pueden dificultar la visualización del gráfico e imposibilitar que los alumnos lleguen a la solución de un ejercicio propuesto.

En lo que atañe a los conocimientos previos sobre GeoGebra, los datos revelaron que solamente el alumno A12 ya conocía y ya había utilizado el mismo para hacer gráficos. Los demás participantes marcaron que no conocían GeoGebra.

Es importante destacar, también, que los participantes de esta investigación tuvieron que enfrentar la dificultad de utilizar GeoGebra en el smartphone, cuando esa aplicación les fue presentada, en el segundo encuentro con la clase. Ese día fue propuesta una actividad de ambientación con GeoGebra en el smartphone, con la finalidad de hacer que los alumnos se familiarizaran con la aplicación.

Ante lo expuesto, defendemos que una práctica de ambientación con GeoGebra, por medio de una presentación previa y de la aplicación de actividades que favorecen la familiarización con la aplicación, es un cuidado que el profesor debe tener al implementar GeoGebra en sus clases de Matemática, además de la aplicación de actividades más profundizadas, que necesitan del uso de la aplicación.

Sin embargo, creemos que solamente utilizar esos recursos tecnológicos no es garantía de aprendizaje. Es necesario que el profesor desarrolle una metodología diferenciada y tenga conocimiento y dominio de esos recursos, para auxiliar a sus alumnos en la construcción y exploración de conceptos matemáticos.

Referencias Bibliográficas

Almeida, L. (1993). Rentabilizar o ensino-aprendizagem escolar para o sucesso e o treino cognitivo dos alunos. In L. S. Almeida (Ed.), *Capacitar a escola para o sucesso: Orientações para a prática educativa* (pp. 59-110). Vila Nova de Gaia: Edipsico.

Coutinho, G. L. A. (2014). *Era dos Smartphones: Um estudo Exploratório sobre o uso dos Smartphones no Brasil.* 60 f. Monografia (Bacharelado em Comunicação Social) - Universidade de Brasília, Brasília.

Cruz, A. (2018). *Potencialidades da utilização do software GeoGebra para o desenvolvimento do conteúdo de funções exponenciais através do smartphone*. 187 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática. Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, Minas Gerais.

Ladeira, V. P. (2015). *O Ensino do Conceito de Funções em um Ambiente Tecnológico: Uma Investigação Qualitativa Baseada na Teoria Fundamentada Sobre A Utilização de Dispositivos Móveis em Sala de Aula Como Instrumentos Mediáticos da Aprendizagem*. 256 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Ciências Exatas e Biológicas, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto.

Luckesi, C. C. (2013). *Filosofia da educação*: coleção magistério 2ºgrau. Série formação do professor. 3º Edição. São Paulo: Cortez.

Pellegrini, T. (2003). *Literatura, cinema e televisão*. São Paulo: Editora Senac São Paulo: Instituto Itaú Cultural.

Pitombeira, J. B. (2004). *Revisitando uma velha conhecida*. Departamento de Matemática, PUC-Rio, p. 1- 41. Disponible en https://silo.tips/download/revisitando-uma-velha-conhecida

PONTE, J. P. (1990). O conceito de função no currículo de Matemática. *Revista Educação e Matemática*, 15, 3-9.

Roque, T. (2012). *História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas.* Rio de Janeiro. Zahar.

Santos, V. A. (2018). *Equações e Funções Quadráticas: do surgimento aos dias atuais.* Monografia (Licenciatura Plena em Matemática). Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Caicó.

Sastre Vázquez, P.; Rey, G.; Boubée, C. (2008). El concepto de función a través de la Historia. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *16*, 141 – 155.

Saviani, D. (2003). *Escola e Democracia*. 36. ed. Campinas: Autores Associados.

VOL 34, NÚMERO 2, AÑO 2021

POSSIBILIDADES DE INOVAÇÃO PEDAGÓGICA COM JOGOS DIGITAIS: O QUE PENSAM PROFESSORES DE MATEMÁTICA EM FORMAÇÃO CONTINUADA

POSSIBILITIES OF PEDAGOGICAL INNOVATION WITH DIGITAL GAMES: WHAT MATHEMATICS TEACHERS IN CONTINUING EDUCATION THINK ABOUT

Nielce Meneguelo Lobo da Costa, Hugo Araujo Miranda, Janaína Barboza Ramos
Universidade Anhanguera de São Paulo. (Brasil)
nielce.lobo@anhanguera.com; hamhugo@yahoo.com.br; janaina.ramos@anhanguera.com

Resumen
Este artigo relata pesquisa cujo objetivo é compreender como professores-participantes de uma formação continuada percebem o uso de jogos digitais no ensino de Matemática. Huizinga, Rosado, Macedo e Imbernón fornecem aporte teórico. A metodologia qualitativa é o *Design-Based Research*, com coleta feita por questionários, gravações, materiais produzidos; entrevista semiestruturada e observação. A análise é interpretativa, com categorias definidas a posteriori. No texto discute-se resultados relativos às plataformas consideradas pelos professores-participantes como as mais adequadas, os jogos digitais experimentados e os aspectos apontados pelos professores como profícuos para a inovação da aula de Matemática. Em conclusão, os professores-participantes consideraram jogos digitais como uteis para inovar a prática docente, entretanto dependem da mediação do professor. Para eles, jogos digitais se prestam a aplicação de conteúdos matemáticos já conhecidos e não para a introdução de novos.

Palavras-chave: formação de professores, tecnologia educativa, jogos digitais, gamificação.

Abstract
This article reports a research work which is aimed at understanding how teachers-participants of a continuing education perceive the use of digital games in Mathematics teaching. Huizinga, Rosado, Macedo and Imbernón provide theoretical contribution. The qualitative methodology is Design-Based Research, and data collection is carried out through questionnaires, recordings, designed materials, semi-structured interview and observation. The analysis is interpretative, with subsequent defined categories. The text tackles results related to the platforms considered by the participating teachers as the most appropriate; the experimented digital games; and the aspects pointed out by the teachers as fruitful for the innovation of the Mathematics class. In conclusion, the participating teachers considered digital games as useful to revise teaching practice; however, they depend on the mediation of the teacher. For them, digital games are appropriate for the application of mathematical contents already known and not for the introduction of new ones.

Key words: a teacher training, educational technology, digital games, gamification.

Introdução

O professor do século XXI deve estar consciente de que a realidade e os conhecimentos humanos estão em constante mudança e se transformam velozmente. Assim sendo, todos, alunos e professores, devem continuar a aprender ao longo da vida, como enfatiza Marcelo García (2009).

A necessidade de aprender sempre e de se adaptar aos desafios de viver, conviver e sobreviver em sociedade tem sido cada vez mais evidenciada, especialmente a partir do momento em que surgiu a pandemia do COVID 19, colocando em xeque as certezas, transformando os objetivos, mudando diversos dos procedimentos usuais para o trabalho e o lazer, impactando a mobilidade, o modo de ser e estar no mundo e, consequentemente, os processos educacionais. Novas formas de se comunicar e de promover a Educação têm sido desenvolvidos e já se percebe um movimento no sentido de modificar as relações e os modos de fazer, contemplando novas necessidades e exigindo mais autonomia dos alunos e professores.

A necessidade da inovação e de se utilizar na prática docente jogos e tecnologias digitais foi constatada por professores e educadores quando, com a pandemia, foi decretado o isolamento social, fechadas as escolas e interrompidas as aulas presenciais. Ficou evidente a emergência de se comunicar a distância de forma síncrona e assíncrona, de inovar o ensino e não estagnar para não interromper a aprendizagem.

Como estabelece o documento diretrizes de políticas para a aprendizagem móvel: “A aprendizagem móvel pode ocorrer de várias formas: as pessoas podem usar aparelhos móveis para acessar recursos educacionais, conectar-se a outras pessoas ou criar conteúdo dentro ou fora de sala de aula” (...) “As tecnologias móveis estão em constante evolução: a diversidade de aparelhos atualmente no mercado é imensa, e inclui, em linhas gerais, telefones celulares, tablets, leitores de livros digitais (e-readers), aparelhos portáteis de áudio e consoles manuais de videogames” (UNESCO, 2014, p. 8).

Neste cenário, o docente deve conhecer várias metodologias de ensino a fim de que possa escolher a que melhor se adequa ao seu contexto e deve saber usar as tecnologias de tal forma a auxiliar os alunos a pensar com elas e a construir conhecimentos.

Os processos de inovação pedagógica estão intimamente conectados às possibilidades de os professores resolverem sair de sua “zona de conforto” e ousarem implementar mudanças e transformações na prática de ensinar, particularmente, modificando metodologias. Questões fundamentais nesse tema se ligam aos conhecimentos dos professores sobre possibilidades para inovações pedagógicas e sobre como desenvolver a prática de ensinar com novas metodologias e, em particular, as que usam jogos digitais.

A tecnologia possibilita que recursos diferentes de papel, caneta e quadro possam estar presente nas salas de aulas, dentre esses recursos estão os jogos digitais que podem contribuir para o aperfeiçoamento do ensino e da aprendizagem dos conteúdos de Matemática.

Este artigo relata parte de uma pesquisa maior, em andamento, quanto ao objetivo de compreender como os professores-participantes de um processo de formação continuada percebem e refletem sobre o uso de jogos digitais no ensino de Matemática e seu potencial como estratégia para a inovação pedagógica.

Fundamentação Teórica

A fundamentação teórica da pesquisa é formada pelos conceitos: 1) jogos como metodologia ativa de aprendizagem, especialmente apoiada nos estudos de Huizinga (2005), Rosado (2006) e Macedo (2009); 2) formação contínua dos docentes e aprendizagem ao longo da vida, com suporte dos estudos de Imbernóm (2006 e 3) inovações pedagógicas, por meio dos escritos de Tofler(1991)e Guedes (2014).

Na aplicação de jogos na educação, uma importante reflexão vem de Huizinga, enfatizando que o "jogo é uma atividade ou ocupação voluntária, exercida dentro de certos e determinados limites de tempo e espaço, segundo regras livremente consentidas, mas absolutamente obrigatórias, dotado de um fim em si mesmo, acompanhado de um sentimento de tensão e alegria e de uma consciência de ser diferente da vida cotidiana (Huizinga, 2005, p.33)".

Nesse sentido, o uso pedagógico de jogos na sala de aula envolve atividades livres e aplicadas sem a seriedade e rigor da aula tradicional, uma vez que incentiva e atrai os estudantes a se envolverem como jogadores. Assim, Huizinga (2005) enfatiza ser relevante que os alunos tenham interesse na parte lúdica e que a atividade seja desenvolvida dentro de espaço físico e de tempo apropriados, promovendo a formação dos grupos sociais.

Corroborando com essas ideias, Macedo (2000, 2007) evidência ser importante o uso dos jogos em situações pedagógicas e psicopedagógicas, entendidos como espaço de observação, mas também promotores de intervenção junto aos alunos. Isto se deve à flexibilidade das significações diante de uma situação lúdica com jogos, pois mesmo que o sujeito não goste de errar, a motivação pela ação do jogador é intensa, podendo levá-lo a ressignificar suas ações enquanto joga.

Rosado (2006) destaca que os jogos educacionais vêm sendo ressignificados pela tecnologia, e que as crianças e adolescentes estão sendo atraídos pelos recursos tecnológicos, fazendo com que produzam a cada dia novas formas de entretenimento.

Quanto à formação contínua dos docentes nos baseamos nas ideias de Imbernón (2000) relativas à renovação da instituição educativa, devido às mudanças e aprimoramentos necessários pela evolução dos tempos, sugerindo que, em outras palavras, a nova era requer um profissional da educação diferenciado. O motivo de ser dita formação continuada é por ser um espaço para ampliar as formas de ensinar e compartilhar o conhecimento, a modernização, e os novos sistemas, o que era o antigo, em um novo atual. A educação diferenciada, aplicada ao moderno. Criar espaços, abrir novas expectativas e conhecimentos.

Imbernón (2000) também destaca cinco grandes linhas ou eixos de atuação, que se referem à formação permanente do professor, são elas: a reflexão prático-teórica sobre a própria pratica; a troca de experiências; a união da formação a um projeto de trabalho; a formação com estímulo crítico; e a importância de sempre estar em desenvolvimento.

Com esses eixos da formação permanente do professor, o foco no desenvolvimento e análise para os complementos no ensino, como a adaptação junto a modernidade, ressaltamos a importância da inclusão de Jogos e tecnologias no ensino aplicado, sabendo ser como rotina na vida das pessoas hoje, a distração, e no ensino, juntando a mesma a aprendizagem.

Quanto às inovações pedagógicas, elas podem ser definidas como a busca de criação ou transformação de melhoras no processo de aprendizagem, que define novos valores para os discentes e docentes. Segundo Guedes (2014, p, 39) inovação pedagógica representa a possibilidade de desafiar o *status quo* que rege a compreensão de educação, imprimindo novos papéis para o professor e para o aluno. O desafio visa a atuação por uma prática pedagógica que permita a participação ativa e reflexiva do aluno, além de permitir o movimento dialético concernente ao processo de aprendizagem. Nessa perspectiva, o professor é concebido como um sujeito que atua como mediador do processo de construção do conhecimento pelo aluno.

De acordo com Toffler (1991), inovar, na prática pedagógica, significa criar métodos ou técnicas de ensino que favoreçam a integração dos alunos no contexto social onde estão inseridos, bem como estimular a participação e autonomia dos estudantes nas atividades propostas pelo professor.

Método

A metodologia é a qualitativa, segundo Bogdan e Biklen (1994, p.16), na qual “os dados recolhidos são designados por qualitativos, o que significa ricos em pormenores descritivos relativamente a pessoas, locais e conversas, e de complexo tratamento estatístico”. A pesquisa qualitativa é do tipo *Design-Based Research* (DBR), como definida por Barab e Squire, (2004). Os autores explicitam que o DBR é de natureza intervencionista, beneficia o planejamento flexível da pesquisa e objetiva investigar possibilidades de novas formas de aprendizagem visando mudanças educacionais. Ao longo do desenvolvimento deste tipo de metodologia são realizadas análises das intervenções didáticas realizadas e, a partir das necessidades percebidas, feitos ajustes (re-designs) para as próximas ações, ou seja, os resultados das intervenções didáticas empreendidas (feedbacks) são considerados para desenhar as novas ações, adequando-as ao contexto.

A pesquisa foi submetida à Plataforma Brasil e aprovada pelo Comitê de Ética da Universidade Anhanguera de São Paulo (UNIAN), com Parecer número 4.439.596.

A pesquisa se desenvolve em etapas, cada uma delas fornecendo dados acerca de eventos ou mudanças que ocorrem em determinado espaço de tempo, sendo elas: 1) Pesquisa bibliográfica e documental; 2) Planejamento do processo de formação continuada e elaboração dos instrumentos de coleta; 3) Pesquisa em campo, desenvolvimento da formação continuada em sessões e aplicação dos instrumentos de coleta de dados; 4) Avaliação da formação continuada desenvolvida e análise dos dados.

Os participantes do processo de formação continuada foram oito professores de Matemática em exercício na rede particular de Educação Básica de Guarulhos, Estado de São Paulo, Brasil.

O desenvolvimento do processo formativo foi em cinco sessões, de duas horas cada uma, contemplando os re-designs, nas quais houve:

1) Apresentação aos professores-participantes da proposta da pesquisa, do processo de formação continuada e do cronograma;
2) Exploração e prática de jogos digitais para ensino de Matemática e apresentação de jogos digitais para o segmento do Ensino Fundamental;
3) Apresentação e desenvolvimento de jogos para o segmento do Ensino Médio;
4) Apresentação e discussão de jogos que possuem erros conceituais;
5) Fechamento, com síntese e discussão de propostas dos professores para aplicação de jogos digitais em sala de aula.

A coleta de dados foi feita por questionário de entrada e saída, gravações em vídeo e áudio dos encontros de formação, recolha dos materiais didáticos e de arquivos digitais produzidos na formação contínua; entrevista semiestruturada e observação participante.

A análise dos dados coletados está em andamento, utilizando o método interpretativo, a partir de categorias definidas a posteriori.

O recorte nesse artigo refere-se à etapa da pesquisa em campo, com foco nas discussões sobre as plataformas e jogos digitais experimentados pelos professores-participantes ao longo do processo formativo, na sessão 2.

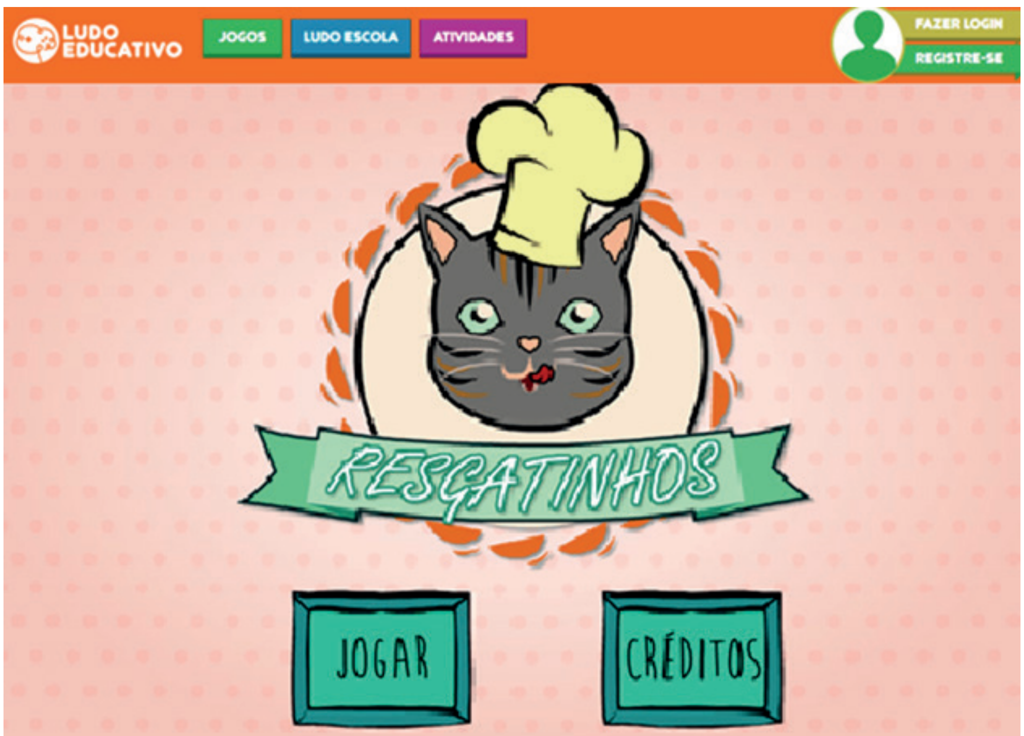
Vale salientar que a utilização de jogos digitais para inovação das aulas de matemática vai muito além da apresentação dos jogos aos alunos, é necessário planejamento, o que significa pesquisar plataformas que disponibilizam esses recursos, sejam elas gratuitas ou pagas, selecionar os jogos e construir as atividades a serem desenvolvidas com os alunos.

Para planejar o processo de formação continuada empreendida nesta pesquisa analisamos diversas plataformas nacionais e internacionais. Foram selecionadas as seguintes plataformas de recursos digitais: "Ludo Educativo, "Escola Games", "Cokitos", "Nova Escola".

A plataforma Ludo Educativo disponibiliza jogos matemáticos de forma gratuita, na internet. Os jogos nela disponibilizados contemplam unidades de medida, frações, números decimais e conversão de unidades de medida. Jogos como "Resgatinhos" (Figura 1), conseguem prender a atenção dos alunos das séries finais do Ensino Fundamental. O objetivo do jogo é preparar um bolo e, para isso, o aluno deve localizar ingredientes da receita. Ao longo da busca os alunos devem converter unidades de medida e desenvolver cálculos com números decimais e fracionários para abrir armários e eletrodomésticos. Assim, o jogo se destaca por trabalhar tanto interatividade quanto os conteúdos matemáticos.

A figura 1 destaca o cabeçalho da plataforma e o jogo "Resgatinhos" citado como destaque desta plataforma

Figura 1. *Plataforma Ludo Educativo*



Fonte: https://www.ludoeducativo.com.br/pt/

A plataforma "Escola Games" disponibiliza jogos matemáticos para as séries finais do Ensino Fundamental, encontram-se jogos com interatividade ao mesmo tempo abordando conceitos matemáticos. Na tela inicial (figura 2) há acesso para diversos jogos matemáticos de forma rápida e fácil. Pode-se escolher os jogos por conceitos matemáticos como sistema de numeração, ângulos, operações com números decimais, frações, etc. Está plataforma se aproxima de jogos encontrados nos vídeos games de consoles, a disposição dos conteúdos, o que motiva os alunos desde a escolha até o desenvolvimento dos jogos.

A figura 2 apresenta o cabeçalho da plataforma "Escola Games", com links direto para jogos, indicando o nível de dificuldade.

Figura 2. *Escola Games*

Fonte: http://www.escolagames.com.br/busca/?q=matem%C3%A1tica

A plataforma "Cokitos" disponibiliza jogos matemáticos para todas as faixas etárias de alunos na Educação Básica. Nessa plataforma encontram-se jogos de perguntas e respostas (quiz) com delimitação de tempo para responder e, também, adaptações de jogos famosos como o "Pacman". Uma característica positiva desta plataforma é a de disponibilizar os jogos de forma gratuita, podendo ser acessados de qualquer aparelho com acesso à internet. Entretanto, um ponto negativo é que para acessar muitos dos jogos se utiliza o complemento "flash", que está sendo desativado e, com isso, alguns jogos não poderão mais ser utilizados.

Na figura 3 está explicitada uma tela de entrada da plataforma "Cockitos" com jogos de Matemática, que envolvem cálculos aritméticos, sequências numéricas, coordenadas e quebra cabeças.

Figura 3. *Plataforma Cokitos*

Fonte: https://www.cokitos.pt/

A plataforma “Nova Escola”, por sua vez, disponibiliza jogos com características diferentes da plataforma Cokitos, pois o caminho para encontrar os jogos é mais longo e é necessário passar por etapas como cadastro etc. Contudo, superadas essas questões, têm-se um acervo de jogos matemáticos disponibilizados de forma gratuita. Um exemplo é o do jogo “Enigma das Frações”, (figura 4) cujo objetivo é o de salvar uma princesa presa por um vilão. O avatar que representa o jogador deve responder desafios sobre frações equivalentes, operações com frações, representação decimal de uma fração, passando por todos os desafios o aluno consegue atingir o objetivo de resgatar a princesa. Esse tipo de contextualização dos jogos consegue prender a atenção dos alunos pois se aproxima dos jogos de console que normalmente os alunos costumam jogar em casa.

Figura 4. *Plataforma Nova Escola*

Fonte:https://novaescola.org.br/conteudo/4990/7-jogos-virtuais-de-nova-escola-para-ensinar-matematica

A formação continuada, devido a pandemia da COVD-19, teve as sessões realizadas online de modo síncrono, utilizando a ferramenta *Google Meet*. Assim, os professores puderam participar de sua residência utilizando seu equipamento e recursos tecnológicos.

A primeira plataforma apresentada foi o “Ludo Educativo” e os professores tiveram 20 minutos para acessar e explorar os jogos. Solicitamos a eles que explorassem a plataforma e identificassem jogos que pudessem ser utilizados em suas aulas. O mesmo ocorreu para as demais plataformas, a saber: Escola Games, Cokitos e Nova Escola, sendo que ao mudar de uma para outra foram feitas discussões sobre a percepção dos participantes.

Após os professores explorarem todas as plataformas e conhecerem os jogos que cada uma disponibiliza, iniciamos a discussão global sobre a percepção dos professores quanto aos jogos e conteúdos encontrados. Os resultados estão apresentados na próxima sessão.

Para representar as discussões e apontamentos relevantes utilizaremos o código H para o formador – que também é um dos pesquisadores – e P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7 e P8 para os professores-participantes.

Resultados

A discussão global foi iniciada com a seguinte provocação do formador

H: *Vocês conseguiriam utilizar o material disponibilizado nas plataformas Ludo Educativo e Escola Games em suas aulas? O conteúdo encontrado está de acordo com o utilizado no colégio em que você trabalha? Pode utilizar algum jogo para trabalhar o conteúdo matemático?*
Surgiram respostas como as abaixo citadas:
P1: Eu só entrei em jogos fáceis, lidando com reforço também
P4: Nno que entrei não
P5: A Escola Games é mais atrativa ao aluno enquanto a Ludo Educativo é mais fácil para o professor. (...) tem cara de plataforma de jogo que eles estão mais habituados a jogar em casa, estou pensando no sexto ano”
P4: A primeira plataforma [Ludo Educativo] é mais direcionada ao conteúdo, verificando operações pertinentes, dentro de um contexto lúdico, por exemplo um aluno de sexto ano se envolveria mais coma parte do jogo eu por exemplo não passei da primeira fase o aluno iria estourar a boca do balão. Pela maturidade que ele o tem se envolveria mais na brincadeira e esqueceria a matéria.
H: *O comparativo entre a plataforma Cokitos e as plataformas Escola Games e Ludo o que vocês identificaram?*
P4: Não consegui encontrar [os jogos] de forma tão direta. Tive dificuldade em identificar conteúdos e os jogos específicos de séries
P8: Gostei! O aluno não terá apenas ludicidade, mas terá também conteúdo. É mais direcionado.
P8: Achei legal a plataforma, abri um [jogo] de corrida, ele pede resposta rápida você precisa responder rápido para avançar. Essa plataforma tem conteúdo e não tem apenas o lúdico.
P5: Agora que consegui acessar os jogos entendi precisamos desse meio termo
P3: Achei os temas mais direcionados
P5: Achei a navegação mais complicada, a linguagem computacional normalmente os ícones de confirmação ficam sempre do lado direito e nesse está do lado esquerdo. Por exemplo eu cliquei no ícone “comece agora”. Eu vi que possui compartilhamento pelo Facebook e pelo Google Sala de Aula.

A figura 5 explicita a separação dos conteúdos na plataforma “Cokitos”, que se destaca pela grande quantidade de jogos, disposição dos conteúdos matemáticos, além da opção de compartilhamento com o aplicativo Google Sala de Sala utilizado em muitas escolas públicas e privadas neste momento de pandemia da COVID-19.

Figura 5. *Plataforma Cokitos*

Fonte: https://www.cokitos.pt/tag/jogos-de-matematica/

H: *No comparativo entre as plataformas Nova Escola, plataforma Cokitos, Escola Games e Ludo o que vocês identificaram?*
As respostas foram as seguintes
P4: Achei essa plataforma abordando conteúdo de forma mais tradicional, Eu gostei porque ela traz um plano de aula pronto mostrando objetivo etc..., para usar em sala de aula é boa
P4: Olhei apenas o jogo de equação do primeiro grau, eu gostei, pode ser aplicado levando em consideração a necessidade da turma.
P4: Comparando com a plataforma cokitos, encontrei simetria, conteúdo que muitas vezes apresentamos dificuldade em mostrar para o aluno e trabalhar em sala. Essa plataforma nova escola, trabalhando virtual é muito interessante, podemos utilizar.
P4: Sou adepto a jogos, mas nunca tive a iniciativa principalmente por falta de tempo, precisa ser preparado não pode escolher levar pra sala e ver o que acontece, existe jogos que divergem do que propõe no site. Sem planejamento os alunos conseguiam jogar, mas foi de supetão, precisa ser bem estabelecida.
P5: Não podemos ir para a sala apenas com o jogo, precisa planejar, para não matar o tempo e o aluno entender que está brincando. Temos que planejar para que o aluno perceba que ele está aprendendo, relacionar com o que foi estudado e planejar para que seja produtivo.
P1: Apesar de serem apenas 7 jogos, achei ela um pouco mais especifica, os conceitos matemáticos são abordados de forma direta com perguntas especificas, onde o aluno deve desenvolver os cálculos para responder e avançar no jogo.
Os professores-participantes P3, P2 responderam: concordo também.

Destacamos, na figura 6, o jogo "Daqui pra lá, de lá pra cá" que contempla conceitos como ângulos, lateralidade, sentido e direção, retas paralelas, retas transversais. Apesar da grande quantidade de jogos matemáticos disponíveis nas plataformas, jogos que envolvem conceitos geométricos assim como interatividade ainda são difíceis de encontrar.

Figura 6. *Plataforma nova escola*

Fonte: https://novaescola.org.br/conteudo/4990/7-jogos-virtuais-de-nova-escola-para-ensinar-matematica

Conclusão

Esta pesquisa, se propôs a compreender como professores-participantes de uma formação continuada percebem o uso de jogos digitais no ensino de Matemática.

Os jogos digitais precisam ser associados à prática do ensino de Matemática, de maneira que possa oferecer ferramentas que possibilitem outras vertentes do seu contexto, colaborando no desenvolvimento de uma Educação Matemática crítica, trazendo ganhos expressivos à formação do aluno e do professor.

Dessa forma, o uso da tecnologia poderá contribuir ao estudante a possibilidade de construir o conhecimento matemático na perspectiva reflexiva e interativa. A aplicação de jogos digitais, educativos no ensino, pode possibilitar ao aluno uma nova visão e compreensão mais ampla do que busca o professor em sala de aula, sendo um recurso que atraia e o incentive para o aprendizado, sendo uma diversificação no ensino.

Em conclusão, quanto às plataformas os professores-participantes consideraram, em ordem as mais adequadas são: 1) Cokitos, 2) Nova Escola, 3) Escola Games e 4) Ludo Educativo. Os jogos digitais experimentados que foram considerados mais pertinentes para o ensino de Matemática foram os da plataforma Cokitos.

Os professores-participantes consideraram que os jogos digitais podem ser uteis para inovar a prática docente, entretanto dependem fundamentalmente da mediação do professor, que deve assumir o papel de mentor de seus alunos.

Na percepção dos professores-participantes os jogos digitais se prestam principalmente inovar a prática pedagógica sobretudo nas aplicações dos conhecimentos consolidados, ou seja, para que o aluno utilize a matemática já conhecida e não para a introdução de novos conteúdos.

Apoio e fomento

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001 e da Kroton Educacional.

Referências

Barab, S., & Squire, K. (2004). Design-based research: Putting a stake in the ground. *The journal of the learning sciences*, *13*(1), 1-14.
Cailolois, R. Os jogos e os homens: a máscara e a vertigem. Lisboa: Cotovia, 1999.
Gómez, A. I. P. *Educação na era digital:* a escola educativa. Porto Alegre: Penso, 2015.
Guedes. A. M. A. (2014) Inovação na Aprendizagem de Matemática Mediante o Uso de Jogos Cooperativos. Funchal, disponível em: <https://digituma.uma.pt/bitstream/10400.13/1023/1/MESTRADOALBERTINAHASSUIKE.pdf> acessado em 22 de abril de 2021.
Huizinga, J. (2005). *Homo ludens: o jogo como elemento da cultura* (Vol. 4). São Paulo, Perspectiva.
Imbernón, F. (2006). *Formação docente e profissional: formar-se para a mudança ea incerteza*. Cortez.
Macedo, L., Petty, A. L. S., & Passos, N. C. (2009). *Aprender com jogos e situações-problema*. Artmed Editora.
Macedo, L. de, Petty, A. L. S., & Passos, N. C. (2005). Os jogos e o lúdico na aprendizagem escolar. Porto Alegre: Artmed.
Marcelo García, C. (2009). Desenvolvimento profissional docente: passado e futuro. *Revista de ciências da educação, 8, 7-22*. Disponível em: http://sisifo.fpce.ul.pt/pdfs/revista%208%20PT%20COMPL.pdf

Rosado, J. D. R. (2006). História do jogo e o game na aprendizagem. Disponível em: http://www.comunidadesvirtuais.pro.br/seminario2/trabalhos/janaina.pdf Acesso em: 10 abr. 2018.

Suits, B. The Grasshopper. University of Toronto Press, Toronto, 1978.

Toffler, A. Os novos saberes, vida e cultura. Lisboa: Livros do Brasil, 1991.

Valente, J. A. (2002) A espiral da aprendizagem e as tecnologias da informação e comunicação: repensando conceitos. In: Joly, M.C.R.A. (Ed.). A tecnologia no ensino: implicações para a aprendizagem. São Paulo: Casa do Psicólogo Editora.

VOL 34, NÚMERO 2, AÑO 2021

A DERIVADA DE UMA FUNÇÃO: UM ESTUDO COM O SOFTWARE GEOGEBRA PARA O DESENVOLVIMENTO DA CONCEPÇÃO MELHOR APROXIMAÇÃO

THE DERIVATIVE OF A FUNCTION: A STUDY WITH GEOGEBRA SOFTWARE FOR THE DEVELOPMENT OF THE CONCEPTION OF THE BEST APPROXIMATION

Roberto Seidi Imafuku; Rosana Nogueira de Lima; William Vieira
IFSP/Campus Guarulhos, Centro Nacional de Educação-CENAED, IFSP/Campus Guarulhos. (Brasil)
robertoseidi@yahoo.com.br, rosananlima@gmail.com, wvieira@ifsp.edu.br

Resumo
Nesta investigação, analisa-se a contribuição de um software que possibilita o uso de múltiplas representações para o enriquecimento da imagem de conceito de derivada de um grupo de alunos de Licenciatura em Matemática que já haviam estudado tal conceito. Foi desenvolvido e aplicado um conjunto de cinco atividades, analisado à luz dos Três Mundos da Matemática, da imagem de conceito e das concepções de derivada. Verificou-se que as múltiplas representações, a dinamicidade, o sincronismo entre as janelas e o recurso do *zoom* possibilitaram a exploração, a investigação, a criação de conjecturas e o enriquecimento da imagem de conceito de derivada como melhor aproximação.

Palavras chave: derivadas, três mundos da Matemática, GeoGebra

Abstract
This research analyzes the contribution of GeoGebra software that enables the use of multiple representations to enrich the derivative concept image of a group of students, from the Mathematics degree course, who had already studied such concept. A set of five activities was developed and applied, analyzed in the light of the Three Worlds of Mathematics, the concept image and the derivative concepts. It was found that the multiple representations, the dynamics, the synchronism between the windows and the zoom feature, made possible the exploration, the investigation, the creation of conjectures and the enrichment of the derivative concept image as the best approximation.

Key words: derivative, Three Worlds of Mathematics, GeoGebra

Introdução

Conhecimentos abordados nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) têm papel de destaque no processo de formação de professores de Matemática. A Sociedade Brasileira de Educação Matemática, no boletim 21 de 2013, aponta que tais conhecimentos são necessários para a compreensão dos números reais, das funções, das aproximações, dos conceitos de infinito e das variações, dando condições ao futuro professor para enfrentar as possíveis dificuldades conceituais que poderão surgir durante sua atuação profissional. Destaca, também, a importância fundamental que o tratamento dado a problemas de cunho variacional nas disciplinas de CDI tem para o futuro professor, pois o leva a compreensão de como problemas dessa natureza devem ser abordados e discutidos desde o ensino básico.

A importância do estudo de problemas de cunho variacional por licenciandos em Matemática, também são evidenciados por pesquisas que utilizaram sequências didáticas (González & Dolores, 2016; Mação, 2014) e atividades envolvendo o uso de softwares (Loureiro, 2012; Richit, Benites, Escher & Miskulin, 2012) ao abordar o estudo das derivadas.

Ao avaliarem o conhecimento de estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática sobre o conceito de derivada, González e Dolores (2016) verificaram que grande parte dos participantes entendia a derivada de uma função apenas como uma fórmula, e apenas 15% dos quarenta e cinco participantes tinha uma ideia mais próxima da definição, pois a identificaram como a inclinação da reta tangente ao gráfico da função, um limite ou a taxa de variação de uma função, isto é, tinham as concepções simbólica, geométrica, lógica de derivada. Os autores apontam que, numa tentativa de minimizar as dificuldades dos estudantes, o trabalho docente vai além de conceber e disponibilizar ferramentas com as quais os alunos possam trabalhar para a construção do seu próprio conhecimento. É preciso envolver o estudante, seus pares e o professor, responsabilizando-os pelo próprio conhecimento.

Nesse sentido, Mação (2014) destaca a importância de se ter uma abordagem em que o estudante se interesse pelo problema, de maneira que ele sinta a necessidade de construir um novo conhecimento, e enfatiza que uma abordagem apenas com aulas expositivas pode não ser capaz de levar ao desenvolvimento de senso crítico levando os alunos a associar "o cálculo da derivada apenas a um processo mecânico de cálculo algébrico" (Mação, 2014, p. 166), perspectiva também verificada por González e Dolores (2016). Com relação às distintas maneiras de conceber a derivada de uma função, o autor afirma que é necessário que sejam realizadas abordagens que permitam o desenvolvimento de "[...] outras formas de entender a derivada, para possibilitar aos sujeitos mais interpretações possíveis, que podem tornar o ensino da derivada menos formal, mais intuitivo e mais voltado para o contexto em que vai ser aplicado" (Mação, 2014, p. 167).

Em uma abordagem com tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC) para o ensino e a aprendizagem de derivadas, Loureiro (2012) utilizou um applet para explorar a noção intuitiva de taxa média de variação, a aplicação da definição de taxa média de variação, a interpretação física da taxa média de variação, a interpretação geométrica da taxa média de variação e a derivada de uma função num ponto – Interpretação geométrica, buscando dar significado para a derivada. Ela conclui que o uso do applet, para abordar o conceito de derivada de uma função em um ponto parece ter permitido que os estudantes construíssem imagens mentais consistentes relacionadas ao conceito de derivada, o que a levou a crer que ocorreu a formação da definição de conceito da derivada de uma função em um ponto nos participantes de sua pesquisa.

Richit et al. (2012) realizaram um estudo com o software GeoGebra para investigar qual o alcance e as potencialidades deste software enquanto alternativa teórico-metodológica na introdução e visualização de conceitos matemáticos. Para tal, elaboraram e aplicaram um conjunto de atividades a fim de propiciar uma investigação visual, geométrica e algébrica dos conteúdos de Funções, Limites, Derivadas e Integrais. Os autores afirmam que o GeoGebra se mostrou adequado para a realização dessas investigações, pois possibilitou que os estudantes criassem hipóteses e conjecturas acerca de conceitos como o de Derivada e Integral. Além disso, apontam que o software facilitou a investigação, uma vez que permitiu que o número de repetições durante a verificação do comportamento das funções fosse reduzido por meio da ferramenta controle deslizante, utilizado para representar os parâmetros das funções.

Tendo em vista a importância do estudo das variações e as potencialidades propiciadas pelas TDIC, desenvolvemos uma pesquisa com o objetivo investigar a contribuição da utilização do software GeoGebra, que possibilita o uso de múltiplas representações, no enriquecimento da imagem de conceito de derivada de futuros professores de matemática.

Com esse objetivo, nos apoiamos nas ideias de Imagem de Conceito (Tall & Vinner, 1981), dos Três Mundos da Matemática (Tall, 2013) e nas concepções de derivada (Thurston, 1994) para a elaboração de conjunto de atividades e para a análise dos dados.

Marco teórico

A estrutura cognitiva individual total que está associada a determinado conceito é denominada por Tall e Vinner (1981) de *imagem de conceito*. Nela estão incluídas todas as imagens mentais (formas de conceber a derivada), propriedades (derivada da diferença, regra da cadeia) e processos associados (formas de representação, elementos da definição, entre outros) isto é, todos os atributos mentais devem constar em tal imagem.

Tall (2013) diz que o desenvolvimento de conhecimentos matemáticos de longo prazo é mais do que associar novas ideias às já existentes, mas sim uma reconstrução por meio de reorganizações de conexões mentais entre todos os atributos da imagem de conceito que um indivíduo possa ter sobre um determinado objeto matemático.

Tall (2013) discute o desenvolvimento dos conhecimentos matemáticos desde a infância, no contato das crianças com objetos físicos, até o conhecimento da matemática formal, com as definições da Teoria dos Conjuntos, e defende que tal desenvolvimento se dá por diferentes jornadas pelos três mundos matemáticos: o corporificado, o simbólico e o formal.

O primeiro mundo é o conceitual corporificado que se baseia nas percepções e ações humanas, que resulta em imagens mentais relacionadas aos diversos objetos matemáticos. Essas ações possibilitam verbalizações cada vez mais sofisticadas, uma vez que, ao interagir com tais objetos, um sujeito reconhece formas e propriedades, tornando-se capaz de descrevê-las. Por exemplo, dar zoom nas proximidades de um ponto do gráfico de uma função em que passa uma reta tangente ao gráfico faz com que a reta tangente aparentemente se sobreponha ao gráfico da função, o que pode levar o indivíduo a ideia de que a reta tangente é a reta que dá a melhor aproximação aos valores da função nas proximidades desse ponto.

O mundo operacional simbólico é desenvolvido a partir de representações simbólicas de ações corporificadas que permitem a manipulação e os procedimentos de cálculo. Por exemplo, o uso das técnicas algébricas para determinar a derivada de uma função.

O mundo axiomático formal tem características da matemática formal e se refere à construção do conhecimento formal com os axiomas, definições e teoremas, de forma que as propriedades de um objeto matemático são deduzidas a partir de demonstrações matemáticas. No caso das derivadas, um exemplo é a demonstração da propriedade da derivada da soma por meio da definição. Imafuku (2018, p. 44) diz que "o Mundo Formal em sua totalidade só é trabalhado no Ensino Superior, no qual a construção axiomática da Matemática é realizada e discutida", e que características desse mundo aparecem, e devem aparecer, desde os primeiros anos de escolaridade, como por exemplo os conjuntos numéricos, as relações, as funções e as taxas de variação, que são fundamentais para o estudo do Cálculo e da Análise (Imafuku, 2018).

Tall (2013) sugere que uma abordagem para os conceitos do Cálculo pode ser iniciada com a apresentação visual e dinâmica, como a mudança de inclinação em um gráfico e a área sob um gráfico, que podem ser aproximados por cálculos numéricos ou expressos precisamente por fórmulas simbólicas para diferenciação ou por técnicas relacionadas à integração. Afirma também que essas ideias podem ser abordadas formalmente, por meio de uma apresentação axiomática, em Análise Matemática.

Thurston (1994) diz que a derivada de uma função, pode ser concebida de ao menos sete maneiras distintas
(1) Infinitesimal: a razão da variação infinitesimal do valor da função para uma variação infinitesimal da variável.
(2) Simbólica: a derivada de x^n é $n.x^{n-1}$, a derivada de $sen(x)$ é $cos\ (x)$, a derivada de $f \circ g$ é $f' \circ g\,.g'$ etc.
(3) Lógica: $f'(x) = d$ se, e somente se, para cada ϵ existe um δ tal que quando $0 < |x| < \delta$, $\left|\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} - d\right| < \epsilon$.
(4) Geométrica: a derivada é o coeficiente angular da tangente ao gráfico da função, isto se o gráfico tem uma tangente.
(5) Taxa: a velocidade instantânea de $f(t)$ quando t é o tempo.
(6) Aproximação: A derivada de uma função é a melhor aproximação linear para a função próximo a um ponto.
(7) Microscópica: A derivada de uma função é o limite que se obtém olhando-a com microscópios cada vez mais poderosos. (Thurston, 1994, p. 3).

No que segue, apresentamos os procedimentos envolvidos em nossa investigação.

Metodología

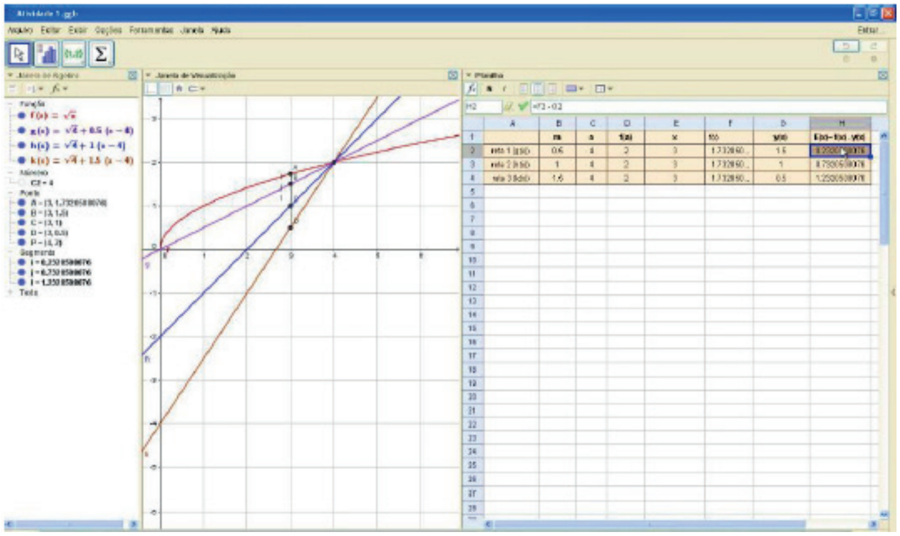
No desenvolvimento de nossa pesquisa, elaboramos um conjunto de cinco atividades com o uso do software GeoGebra, com o qual abordamos a concepção de derivada como Melhor Aproximação (Thurston, 1994), a fim de enriquecer a Imagem de conceito de derivada dos participantes como a reta que dá a melhor aproximação aos valores de uma função nas proximidades de um ponto.

Aplicamos as atividades para sete estudantes, organizados em um trio e duas duplas, que, por meio da exploração das janelas de visualização, da janela de álgebra e da tabela, puderam explorar as representações numérica, algébrica e gráfica de algumas retas, com características dos Mundos Corporificado e Simbólico, em busca daquela que dá a melhor aproximação. A função $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sqrt{x}$, para valores próximos ao ponto de abscissa $x = 4$, foi explorada pelos participantes para que, ao final das atividades, pudessem determinar a reta que dá a melhor aproximação, com características do Mundo Formal, por meio do limite dos erros de aproximação dos valores da função na proximidade de um ponto.

Resultados

Nas duas primeiras atividades, os grupos deveriam completar uma tabela, na qual foram disponibilizados os valores 0.5, 1.0 e 1.5 que deveriam ser utilizados como coeficientes angulares de três possíveis retas, representar as retas na janela de visualização e determinar os erros de aproximação para os valores da função no ponto de abscissa $x = 3$ e $x = 5$ (valores à esquerda e à direita do ponto dado). Os três grupos alcançaram o objetivo das atividades e, por meio da manipulação das representações gráficas, algébrica, numérica e tabular, apresentaram características corporificadas e simbólicas, determinando a reta que melhor aproxima, nas condições dadas, o valor da função dada nas proximidades de um ponto e entendendo a distância entre a reta e a função como o erro cometido ao realizar tal aproximação. O diálogo dos integrantes do Grupo 1 exemplifica essa situação.

Figura 1. *Tela da Atividade 1 com a resposta do Grupo 1.*



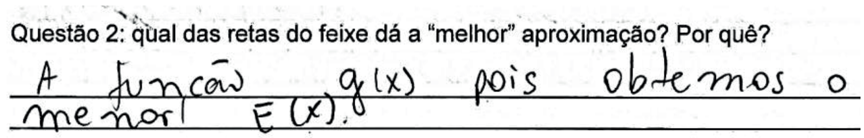
Fonte: Dados da pesquisa

Mário: A melhor aproximação pra mim é esse feixe aqui, oh! [apontando para a reta g (Figura 1), cujo coeficiente angular é $m = 0{,}5$]
Alemão: Como assim, melhor aproximação?
Mário: Então, por exemplo, oh... você tem essa curva aqui... [apontando para o gráfico da função f] qual reta você... qual dessas retas você acha que... se assemelha mais com... se você for observar, oh... essa aqui, oh... [apontando para a reta g] começa na... na...
Alemão: Ah é, no zero. [referindo-se à reta g]
Mário: Essa aqui começa no zero, entende?
Alemão: Verdade!
Mário: Então...
Alemão: Acho que ela é a melhor, a que se aproxima mais...
Mário: Acho que é a g.
Alemão: ... porque ela começa na origem também. A reta... é y, é? Ou g, né?
Mário: Agora tem que explicar o porquê
Alemão: Hum...
Mário: Ou porque a variação... a variação aqui, oh, do segmento é menor [apontando para os segmentos que indicam a distância entre cada uma das retas e o gráfico da função f].
Alemão: Isso, também!... é a menor, verdade!... A variação... do coeficiente angular, né?

Acreditamos que o Grupo 1 compreendeu o porquê de a reta g ser a que dá a melhor aproximação para a função nas proximidades do ponto de abscissa três, com valores à esquerda do ponto, por meio do uso de objetos dos Mundo Corporificado, os gráficos; e do Mundo Simbólico, registros numérico e algébrico.

Na segunda atividade, destacamos o diálogo e o protocolo (Figura 2) produzidos pelo Grupo 3.
Nelito: Acho que é essa aqui de novo (apontando a reta g (Figura 1)).
Léia: De novo a vermelha, né?
Nelito: É... quem é essa reta aí?
Léia: Eu acho que é a... acaba sendo a g de novo [selecionando a reta com o *mouse*].
Nelito: Hummm... Mas a que tá mais próximo é ela, né? ... a g.

Figura 2. *resposta do Grupo 3 para a Questão 2.*

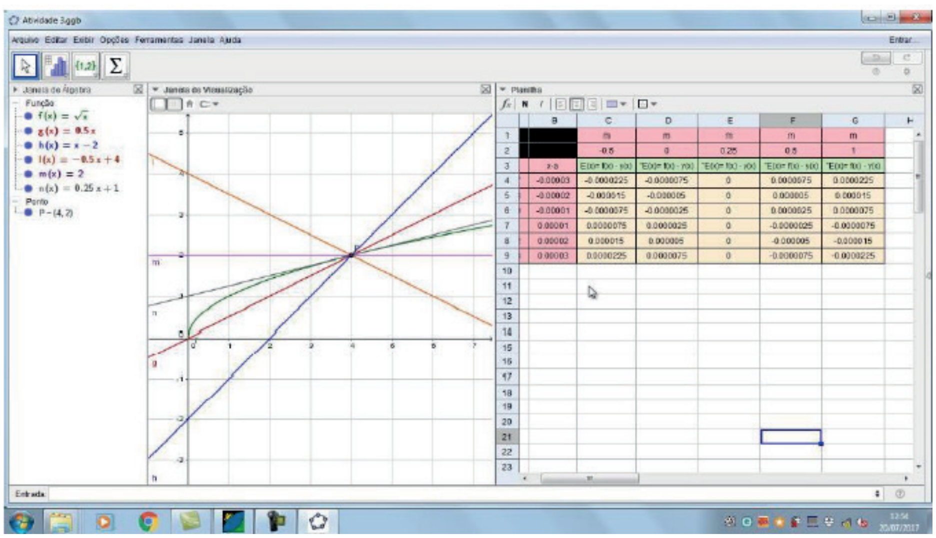

Questão 2: qual das retas do feixe dá a "melhor" aproximação? Por quê?
A funcão g(x) pois obtemos o menor E(x).

Fonte: Dados da pesquisa

O Grupo apresentou características do Mundo Corporificado ao analisar a proximidade entre as retas e a função, e características do Mundo Simbólico, pois ao associar o erro à proximidade das retas à função, associou a representação gráfica à representação numérica.

Na terceira atividade, similar as duas primeiras, foram disponibilizados cinco valores (-0.5; 0; 0.25; 0.5 e 1.0), que os participantes deveriam utilizar como coeficientes angulares de retas que contêm o ponto $(\mathbf{4}, \mathbf{2})$ para, em seguida, determinar os erros de aproximação à esquerda e à direita, com valores da abscissa próximos de $\boldsymbol{x} = \mathbf{4}$ na ordem dos centésimos de milésimos. Os três grupos chegaram ao objetivo da atividade, uma vez que conseguiram determinar a reta que dá a melhor aproximação aos valores da função nas proximidades desse ponto, analisando qual apresenta os menores erros de aproximação pela direita e pela esquerda, com erros de centésimos de milésimos. Apresentamos a discussão realizada pelos integrantes do Grupo 2, para a escolha da reta que dá a melhor aproximação na Atividade 3 (Figura 3).

Figura 3. Tela da Atividade 3 com a resposta do Grupo 2.



Fonte: Dados da pesquisa

Theodoro: Todas as funções no quatro vão estar iguais, vai dar quatro e dois... para valores de x maiores do que quatro... maiores do que quatro são esses três aqui... quatro zero um, quatro zero dois e quatro zero três [fazendo a leitura de uma forma rápida dos valores 4,00001; 4,00002 e 4,00003, respectivamente].
Iceman: Sim, sim...
Theodoro: Quais são as melhores? A melhor... é uma só que é a melhor... é a que o erro tá dando zero... o erro dela é zero... tem duas muito próximas com zero zero vinte e cinco.
Michael Corleone: Todos aí são erros?
Theodoro: É, isso daqui é erro. E de x não significa erro de x?
Michael Corleone: Tá!

Theodoro: Aí perguntou... pela tabela, qual a... qual... é uma reta!
Michael Corleone: Entendeu!
Theodoro: Mas pra todos os valores que a gente colocou, todos os valores próximos de quatro.
Michael Corleone: Eu acho que é essa daí.
Theodoro: Essa reta tá com erro zero.
Michael Corleone: Então é ela.
Theodoro: Qual é a letra dela [perguntando sobre o nome dado a reta].
Iceman: g!
Theodoro: O m é zero vinte e cinco ou menos zero vinte e cinco?
Iceman: zero vinte e cinco positivo. Ahhh... o outro é a mesma coisa, só que da esquerda... vai ser o mesmo cara, velho!
Michael Corleone: Ele é o mais próximo pela esquerda também?
Iceman: Sim!

No diálogo, entendemos que o grupo, por meio da análise dos registros numéricos dos erros na tabela, apresentou características simbólicas ao eleger a reta com coeficiente angular $m = 0{,}25$ como a que dá a melhor aproximação da função, tanto pelo lado direito quanto pelo lado esquerdo, por provocar um erro zero (valor que aparece na tabela da Figura 3). Entretanto, a ideia de ter um erro zero incomodou os integrantes do grupo, como podemos ver no seguinte diálogo.
Theodoro: É a n do mesmo jeito... é sempre igual.
Iceman: É a menor taxa de erro, né?... Não parece que tipo... tá errado a gente colocar erro zero?
Theodoro: Eu tô pensando nisso... tá muito certo pra... pra... pra ser matemática.
Iceman: Tá muito certo pra ser matemática... Theodoro [falando como se estivesse fazendo uma citação da fala de Theodoro].
Theodoro: Erro zero... pra dar erro zero... O GeoGebra está enganando a gente, porque o GeoGebra está com menos casas decimais. Tem erro aqui!
Iceman: Amigão... tem erro, mas está em uma casa decimal bem distante.
Theodoro: Então vamos escrever que os erros estão próximos de zero.

Figura 4. E registram a resposta apresentada na

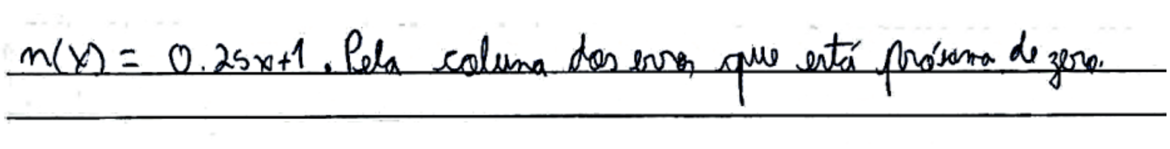

n(x) = 0.25x+1. Pela coluna dos erros que está próximo de zero.

Figura 4: protocolo apresentado pelo Grupo 2 como resposta para a Questão 3.
Fonte: Dados da pesquisa

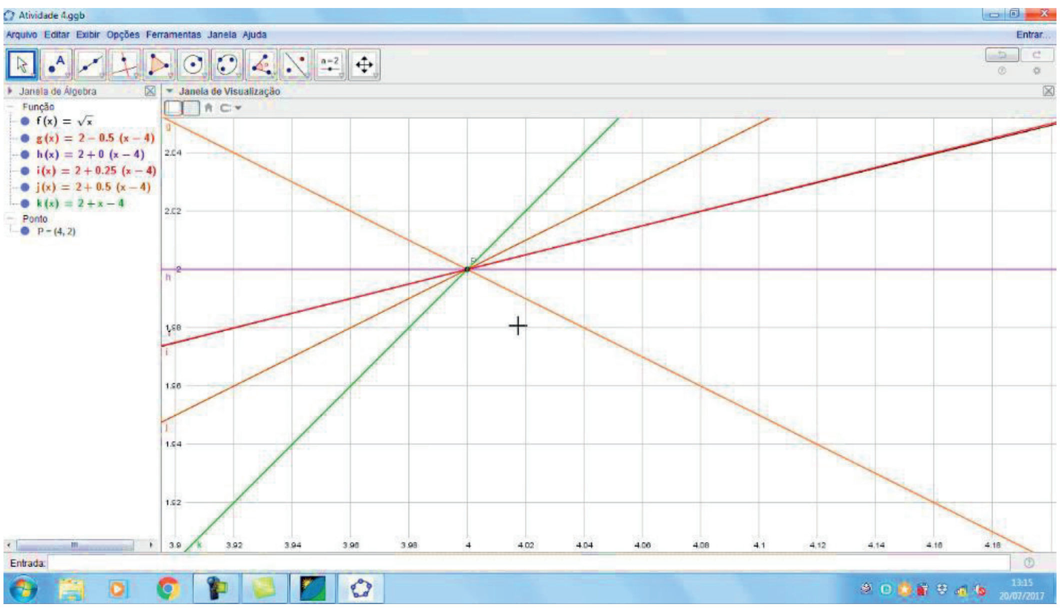
Entendemos que o grupo apresentou características simbólicas para a escolha da reta que dá a melhor aproximação dos valores da função nas proximidades do ponto $P(4, f(4))$, ao analisar os valores numéricos e concluir que a reta é a que tem coeficiente angular $m = 0{,}25$, e características formais da melhor aproximação, inclusive tecendo críticas ao erro de aproximação exibido na tela do GeoGebra.

Na atividade 4, disponibilizamos um arquivo com as representações algébricas e gráficas da função $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sqrt{x}$; e das retas de equação $g(x) = 2 - 0{,}5(x-4)$, $h(x) = 2 - 0(x-4)$, $i(x) = 2 + 0{,}25(x-4)$, $j(x) = 2 + 0{,}5(x-4)$ e $k(x) = 2 + 1(x-4)$ que interceptam a função f no ponto $P = (4, f(4))$, para que, por meio do recurso *zoom* do software GeoGebra os participantes pudessem verificar que a reta que dá uma boa aproximação para os valores da função próximos ao ponto de abscissa $x = 4$ aparenta sobrepor-se ao gráfico da função f, e que só existe uma nas condições dadas.

Nesta atividade, observamos que o Grupo 1 não conseguiu compreender que, nas proximidades de um ponto, os gráficos de uma função e o da reta que dá a melhor aproximação para valores da função praticamente se sobrepõem. Entendemos que isso pode ter ocorrido pela pouca exploração do zoom, isto é, da característica corporificada disponível no software, uma vez que, durante a análise do vídeo desta atividade, percebemos que os integrantes do grupo não aproximaram o gráfico de forma necessária para realizarem a análise.

Após Theodoro aproximar a função por meio do *zoom* (Figura 5), o Grupo 2 iniciou uma discussão do item 4.1, e percebem que a reta que dá a melhor aproximação para os valores da função próximos ao ponto de abscissa $x = 4$ é aquela que, devido ao zoom, se confunde com o gráfico da função (
Figura 6).

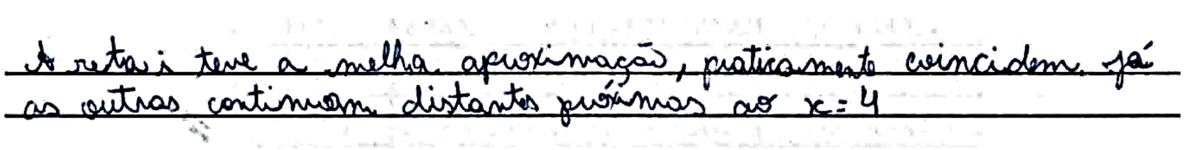
Figura 5. *Tela da Atividade 4 após o Grupo 2 dar o zoom.*



Fonte: Dados da pesquisa

Theodoro: A i e a f, elas estão quase... [referindo-se à reta i e à função f]
Michael Corleone: Quase uma em cima da outra.
Theodoro: A f quase desaparece, oh! [dando mais *zoom*] elas praticamente coincidem.
Michael Corleone: Elas coincidem... as outras continuam, parece, bem distantes.
Theodoro: A reta f e a reta i praticamente se coincidem. Teve a melhor aproximação.
Michael Corleone: E as outras parecem que continuam longe... parece não, continuam!

Figura 6. *Protocolo apresentado pelo Grupo 2 como resposta para a Questão 4.*



Fonte: Dados da pesquisa

O Grupo 2 apresentou características do Mundo Corporificado ao manipular, por meio do recurso zoom, os gráficos presentes na janela de visualização. Essa manipulação possibilitou ao grupo a percepção de que a reta que dá a melhor aproximação da função, nas proximidades do ponto P, se assemelha ao gráfico da função dada, propiciando assim a melhor aproximação linear, desenvolvendo, assim, características do Mundo Formal.

Na quinta atividade, optamos por não utilizar o software, pois tivemos por objetivo desenvolver a compreensão da derivada como o coeficiente angular da reta que dá a melhor aproximação dos valores da função nas proximidades de um ponto, ou seja, explorando características simbólico-formais que envolvem a equação da reta e o uso do limite de uma função. Após as análises, verificamos que o Grupo 1, que não teve êxito na atividade 4, apresentou dificuldades e não relacionou a ideia da reta que dá a melhor aproximação para valores de uma função nas proximidades de um ponto dado ao erro de aproximação presente nas equações envolvendo limites. Destacamos a seguir a discussão realizada pelo Grupo 2, por entender que foi o único que desenvolveu características simbólico-formais durante essa atividade.

Ao analisar o item 5.2 da Atividade 5 (Figura 7), o grupo relaciona a notação simbólico-formal do limite, com a ideia de que a reta que dá a melhor aproximação é a que proporciona o menor erro.

Figura 7. *Questão 5.2 da Atividade 5*

Para encontrar a reta que dá a "melhor" aproximação impomos, matematicamente, que $\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-y(x)}{x-4}=0$. **Analise essa "imposição"! Dê um argumento "intuitivo" que a justifica.**

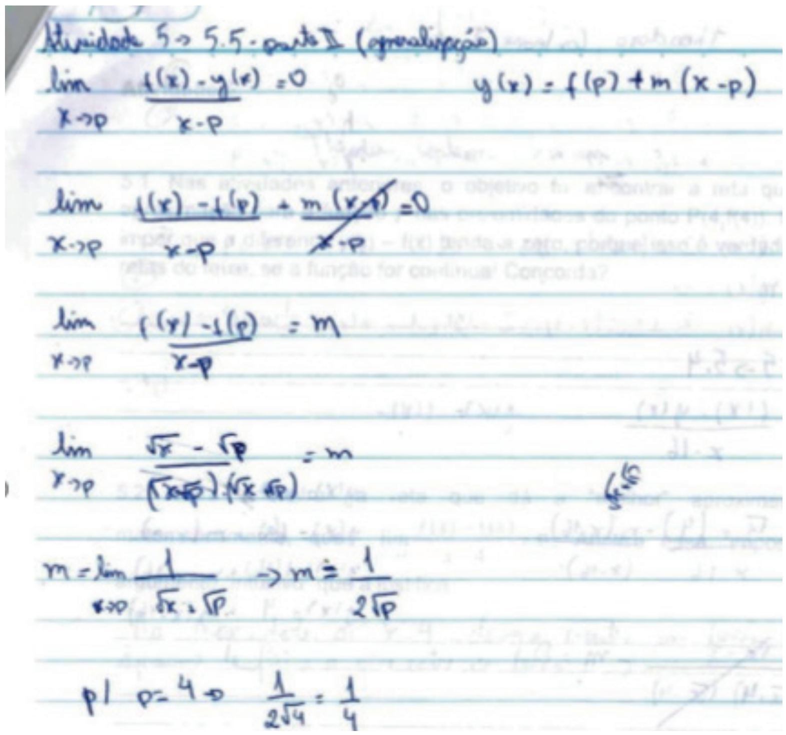
Fonte: Dados da pesquisa

Theodoro: Como que a gente vai fazer? A gente tem que dividir uma coisa pela outra e tem que dar zero. Quando essa coisa dá zero?
Michael Corleone: Isso aqui tem que ser diferente de zero e esse tem que ser igual a zero [referindo-se respectivamente ao denominador e ao numerador].
Theodoro: Tem que ser igual a zero. Quando que isso aqui vai ser igual a zero? Quando f de x…
Michael Corleone: for igual a y de x.
Theodoro: Mas é verdade para todas elas. Mas se a gente usar o argumento que f de x menos y de x tem que ser zero, então quer dizer que f de x é igual a y de x, o que é verdade para todas elas.
Michael Corleone: Sim!
Theodoro: Tem que ser verdade pra ela e pros pontos próximos também, porque não é verdade que o x é igual a quatro.
Michael Corleone: x tende a quatro.
Theodoro: tende a quatro. A gente tem que achar qual função f de x é igual ou tender a y e f de x vai tender a y de x. Então, tem que achar… é a mais próxima.
Michael Corleone: É a mais próxima! A função y de x que é mais próxima de f de x.
Theodoro: Isso é suficientemente intuitivo? [referindo-se ao enunciado que solicitava uma justificativa "intuitiva"]
Michael Corleone: É… a mais pró… y de x vai ser a mais próxima dessa e garantir que isso aqui seja diferente de zero.
Theodoro: Isso é voltar para o mesmo raciocínio que tem que achar a função que tem o menor erro.
Michael Corleone: porque a que tem o menor erro é a que está mais próxima.

Entendemos que as características simbólico-formais, presentes na notação de limite, foram bem compreendidas pelo grupo, que relacionou corretamente à ideia de que o erro de aproximação dos valores da função deve tender a zero nos pontos próximos do ponto de abscissa $x = 4$. Acreditamos que a compreensão demonstrada pelo grupo do significado da notação de limite solicitada no item 5.2 apresenta características simbólico-formais, do estágio da Matemática Teórica.

Na resolução do item 5.5 (
Figura 8), que pede para verificar se é possível calcular o coeficiente angular da reta que dá a melhor aproximação em um ponto qualquer pelo processo de limite, e os integrantes do grupo entendem o porquê o processo dá o coeficiente angular da reta melhor aproximação.

Figura 8. *Resposta do Grupo 2 para a o item 5.5*



Fonte: Dados da pesquisa

Entendemos que as características simbólicas-formais, do cálculo do coeficiente angular da reta que dá a melhor aproximação relacionada ao conceito de derivada, propiciaram a compreensão da Concepção Melhor Aproximação de derivada, uma vez que os integrantes do grupo compreenderam a derivada como o coeficiente angular da reta que dá a melhor aproximação dos valores da função nas proximidades de um ponto.

Conclusões

Os resultados obtidos apontam que o uso do software GeoGebra auxiliou no enriquecimento da imagem de conceito dos participantes, pois puderam compreender que a reta que dá a melhor aproximação dos valores da função na vizinhança de um ponto é aquela que gera o menor erro de aproximação. As ideias desenvolvidas com o software, inicialmente, com características corporificada-simbólicas, alavancaram a compreensão de características formais relacionadas à Concepção Melhor Aproximação, por meio de questões nas folhas de atividade, e permitiram aos participantes entender a derivada como o coeficiente angular da reta que dá a melhor aproximação para valores da função na vizinhança de um ponto.

A sincronicidade e a dinamicidade das representações proporcionadas pelo software GeoGebra, permitiram que parte dos participantes relacionassem o valor numérico do erro à distância entre a função e a reta, possibilitando a compreensão de que nas proximidades de um ponto a reta com melhor aproximação aparentemente se sobrepõe ao gráfico da função, fato que foi explorado por meio do recurso zoom do software.

Assim como apontam Gonçalvez (2012) e Richt et al. (2012), entendemos que o software GeoGebra, com as múltiplas representações, a dinamicidade, o sincronismo entre as janelas e o recurso do *zoom*, contribuiu para a criação de um ambiente em que foram possíveis a exploração e a investigação durante as atividades possibilitando a elaboração de conjecturas e o enriquecimento da imagem de conceito de derivada com a Concepção Melhor Aproximação.

Referências bibliográficas

García, M. D. S., & Dolores, C. (2016). Diseño de una situación de aprendizaje para la comprensión de la derivada. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *46*, 49-70.

Gonçalves, D. C. (2012). *Aplicações das derivadas no Cálculo I: atividades investigativas utilizando o GeoGebra*. Dissertação de Mestrado não publicada, Universidade Federal de Ouro Preto. Brasil.

Imafuku, R. I. (2018). *O uso dos softwares simcalc e geogebra para o enriquecimento da imagem de conceito de derivada.* Tese de doutorado não publicada, Universidade Anhanguera de São Paulo. Brasil.

Loureiro, V. I. D. L. (2012). *Função Derivada: uma abordagem didática no Ensino Secundário*. Dissertação de Mestrado não publicada, Universidade de Aveiro. Portugal.

Mação, D. P. (2014). *Uma proposta de ensino para o conceito de derivada*. Dissertação de Mestrado não publicada, Universidade Anhanguera de São Paulo. Brasil.

Richit, A., Benites, V. C., Escher, M. A. & Miskulin, R. G. S. (2012). Contribuições do software GeoGebra no estudo de cálculo diferencial e integral: uma experiência com alunos do curso de geologia. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo*, São Paulo, *1*(1), 90-99.

Sociedade Brasileira de Educação Matemática (2013). *A formação do professor de matemática no curso de licenciatura: reflexões produzidas pela comissão paritária sbm/sbem*, 21.

Tall, D. (2013). *How humans learn to think mathematically.* New York: Cambridge University Press.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *3*(12), 151-169.

Thurston, W. P. (1994). On the Proof and Progress in Mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society*, *30*(2),161-177.

VOL 34, NÚMERO 2, AÑO 2021

ANALISIS DEL COMPORTAMIENTO DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL DE SEGUNDO ORDEN EN UN ESCENARIO INMERSIVO

BEHAVIORAL ANALYSIS OF THE SECOND ORDER DIFFERENTIAL EQUATION IN AN IMMERSIVE ENVIRONMENT

Karla Liliana Puga Nathal, Salvador Vázquez Cárdenas, María Eugenia Puga Nathal
Tecnológico Nacional de México campus Cd. Guzmán. (México)
karlalpn4@gmail.com, chava_945@hotmail.com, kenapn@hotmail.com

Resumen
Se presentan los avances de una investigación en donde se desarrolla e implementa un escenario virtual inmersivo con el objetivo de manipular y analizar los elementos que constituyen la ecuación diferencial de segundo orden y su relación con el comportamiento con un sistema masa-resorte. La inmersión al mundo virtual es mediante una aplicación que se instala en dispositivos móviles y se enlaza a un visor RV y un sensor que identifica el movimiento de las manos. La investigación se fundamenta desde la de teoría de Representaciones Semióticas y se desarrolló bajo el enfoque de diseño centrado en el usuario, metodología que propone diversas fases de desarrollo, desde la comprensión inicial del contexto, el diseño de prototipo hasta su implementación y evaluación. El trabajo de campo que hasta el momento se reporta es un estudio sobre la usabilidad del prototipo.

Palabras clave: realidad virtual inmersiva, sistema masa-resorte, ecuación diferencial.

Abstract
The advances of an investigation are presented where an immersive virtual environment is developed and implemented to manipulate and analyze the elements that constitute the second-order differential equation and its relationship with the behavior with a mass-spring system. Immersion into the virtual world is through an application that is installed on mobile devices and is linked to a VR viewer and a sensor that identifies the movement of the hands. The research is based on the theory of Semiotic Representations and was developed under the user-centered design approach, a methodology that proposes various phases of development, from the initial understanding of the context, the prototype design, to its implementation and evaluation. The field work reported up to now is a study on the usability of the prototype.

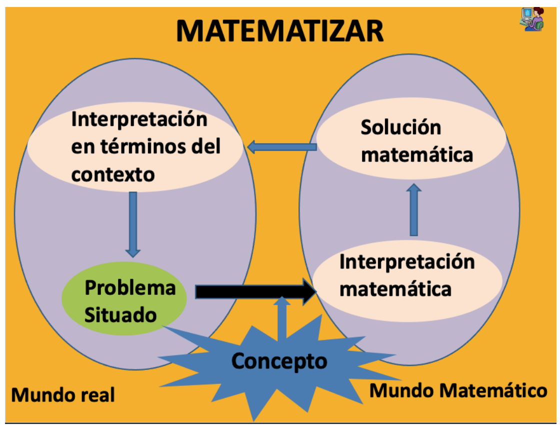
Key words: immersive virtual reality, mass-spring system, differential equation.

Introducción

En ingeniería, la construcción de conceptos matemáticos es una actividad que demanda el esfuerzo y la atención de los docentes y estudiantes, ya que no solo se trata de equipar este último con una serie de reglas y principios teóricos que se derivan en algoritmos de ejecución, sino que deben ser abordados con fines prácticos, deben trascender de las aulas hacia contextos donde se evidencie su aplicación (Camarena, 2013). Sin embargo, un problema que se presenta constantemente en el aula es que no se logra establecer, con resultados exitosos la relación entre los conceptos matemáticos y las situaciones del mundo real (Cordero y Suárez, 2005), no tiene lugar entonces la matematización de los conceptos tratados (Rico, 2009).

Matematizar, como se observa en la figura 1, en términos generales se refiere a la capacidad que tiene un sujeto de trasladar un problema del mundo real al de las matemáticas para que se analice, razone y una vez resuelto comunique las ideas matemáticas que darán respuestas desde la perspectiva del mundo real (Rico, 2009).

Figura 1. *Matematización de un concepto*



Elaboración propia.

En la última década, las tecnologías han tomado un papel preponderante en las diversos sectores sociales y científicos. El sistema educativo no pueden ser una excepción, el uso de tecnología ha propiciado nuevos métodos y estrategias de aprendizaje para que los estudiantes sean capaces de comprender y relacionar un modelo matemático con un conjunto de datos que caractericen el comportamiento de un fenómeno específico. La modelación matemática ha sido uno de los pilares para la contextualización de conceptos matemáticos. Diversos estudios (Rodríguez y Córdoba, 2016, Ruiz y Rivero, 2019) han demostrado que las nuevas tecnologías, incorporadas al aula han impactado positivamente en esta actividad, el uso de software y simulaciones que abordan fenómenos cotidianos e ingenieriles, han favorecido en la contextualización de conceptos matemáticos.

Un concepto medular que se incorpora en la formación de los estudiantes de ingeniería es la ecuación diferencial de segundo orden, que por su estructura es aplicada en la modelación de fenómenos dinámicos que se presentan en ciencias sociales y en ingeniería (Rodríguez y Quiroz, 2016). Cuando el concepto es abordado en el aula, se ha observado que los estudiantes presentan dificultades para matematizar la ecuación, una razón es el tipo de actividades que se desarrollan en el aula, donde la parte algorítmica para solucionarla tiene mayor valor que su vinculación en situaciones en contexto en donde sea necesaria para explicar el comportamiento de fenómenos (Córdoba, 2013).

Para profundizar y estudiar algunos aspectos relacionados con la modelación de la ecuación diferencial, en la investigación se realizó un estudio en el que participaron 51 estudiantes de diferentes carreras (ingeniería mecánica, electrónica, eléctrica y de posgrado que previamente acreditaron el curso de ecuaciones diferenciales). La intención principal de la entrevista fue conocer contextos en donde han aplicado la ecuación diferencial de segundo orden dentro de su ambiente escolar. El 24% de los encuestados respondieron que en el curso no aplicaron la ecuación, solo los métodos para solucionarla, el 39% no recordaba haber tratado ese tema y no conocían su aplicación. Además, se preguntó si conocen la función que tiene los coeficientes de la ecuación en su solución. La mayoría de los encuestados presentaron dificultades en relacionar los términos y coeficientes que aparecen en la ecuación ($mx'' + cx' + kx = 0$) con el comportamiento de su función solución. El resultado de este estudio generó la necesidad de proponer alternativas didácticas locales que fortalezcan los contenidos áulicos y que permitan al estudiante profundizar en el análisis de los modelos matemáticos y la vinculación en diversos contextos de los conceptos matemáticos tratados.

Los escenarios de realidad virtual inmersiva ofrecen a las escuelas de ingeniería la posibilidad de implementar laboratorios en donde los estudiantes pueden simular situaciones en contexto. Sin embargo, en matemáticas universitarias, aun son escasos los trabajos que reporten el impacto que estos escenarios tienen en la construcción de conceptos matemáticos. La realidad virtual es una poderosa herramienta que puede ser incorporada en el aula, ya que provee un ambiente en el cual se simulan fenómenos en contexto para que posteriormente el usuario pueda interactuar, analizar y generar conclusiones sobre el comportamiento de ese fenómeno, lo cual representa ventajas en su formación a diferencia de solo tratar la parte teoría en un escenario estático en el que la libreta y el pizarrón son las herramientas principales (Bowman and McMahan, 2007).

La reducción de costos es uno de los beneficios más destacables de la implementación de sistemas de realidad virtual ya que, al no destinar recursos reales para la interacción o análisis de fenómenos simulados, las empresas pueden ahorran dinero y tiempo (Al-Ahmari Abidi, Ahmad, and Darmoul, 2016; Caudell and Mizell, 1992; Bowman and McMahan, 2007). Además, las simulaciones en esta área, ofrece a sus usuarios la oportunidad de adquirir diversas habilidades, sin poner la vida en riesgo, un mecanismo o todo un sistema industrial o aeronáutico (Bowman and McMahan, 2007), “esta tecnología se emplea para el entrenamiento de habilidades complejas como endoscopia, laparoscopia o navegación endovascula…” (Mata, 2008, p30).

En la investigación se desarrolló e implementó un escenario virtual con el objetivo de analizar los elementos que constituyen la ecuación diferencial de segundo orden y su relación con el comportamiento con un sistema masa-resorte. La inmersión al mundo virtual es mediante una aplicación que se instala en dispositivos móviles se accede mediante un visor VR y un sensor que identifica el movimiento de las manos. El usuario interactúa con el sistema provocando una elongación al resorte y la masa comienza a oscilar, mostrando simultáneamente la gráfica de la respuesta del movimiento y el comportamiento de la ecuación diferencial, de sus coeficientes, promoviendo que el usuario encuentre una relación entre la estabilidad de la masa y los valores de los parámetros m, c, k del modelo $mx'' + cx' + kx = 0$. Además, en el escenario también se tiene la posibilidad de modificar los coeficientes del modelo matemático del sistema y estudiar su comportamiento físico.

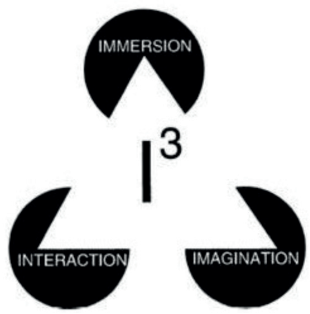
Marco teórico

La investigación epistemológicamente se fundamenta desde la de teoría de Representaciones Semióticas (Duval, 2006), que establece que los conceptos matemáticos, a diferencia de otros conceptos son tratados desde diversos registros de representación, ya que las diversas representaciones son las que permiten el acceso y la aplicación de los objetos matemáticos. En el caso de la propuesta, se incluyen dos registros de representación, el geométrico y el algebraico. El usuario transitará desde un registro a otro, lo cual permitirá observar la manera en que establece conexiones entre estas representaciones.

Por otro lado, dado que la propuesta consiste en la creación de un escenario de realidad virtual, fue necesario entender su significado entendido como la “simulación producida por los gráficos de una computadora” (Burdea and Coiffet, 2003, p2), con el propósito de generar un mundo en el cual sus creadores pueden decidir qué existe o que deja de existir dentro de él (Cardenas, 2018), dicho mundo responde al usuario que lo manipula instantáneamente a través del teclado, ratón, gestos, comandos verbales, entre otros (Burdea and Coiffet, 2003). Martínez (2011) menciona que "la realidad virtual comprende la interfaz hombre-máquina (human-machine), que permite al usuario sumergirse en una simulación gráfica R^3 generada por ordenador, y navegar e interactuar en ella en tiempo real, desde una perspectiva centrada en el usuario" (Martínez, 2011, p5).

Burdea and Coiffet (2003), también menciona que para crear realidad virtual es necesario cumplir con ciertas reglas las cuales son expresadas en un triángulo llamado "triángulo de realidad virtual", en este esquema se utilizan las tres i's de la realidad virtual (inmersión-interacción-imaginación), las cuales se tomaron en cuenta para todos aquellos productos futuros que hicieran alusión a la utilización de realidad virtual. A continuación, en la Figura 2 se muestra el triángulo de la realidad virtual propuesto por Burdea y Coiffet (2003).

Figura 2. *Triángulo de realidad virtual*



Elaboración propia.

La inmersión es el trabajo en conjunto de diferentes componentes de hardware como lo puede ser la proyección de imágenes en 3D, sonidos acordes a lo proyectado, sistemas de seguimiento 3D, visores con el propósito de remplazar la información sensorial del mundo real que el cuerpo humano recolecta para posteriormente ser procesada por el cerebro, obteniendo como resultado que el usuario se sienta dentro del mundo virtual (Bowman and McMahan, 2007). Existen tres niveles de inmersión: Sistemas completamente inmersivos, semi-inmersivos y no inmersivos. En la propuesta se incorporó el sistema totalmente inmersivo.

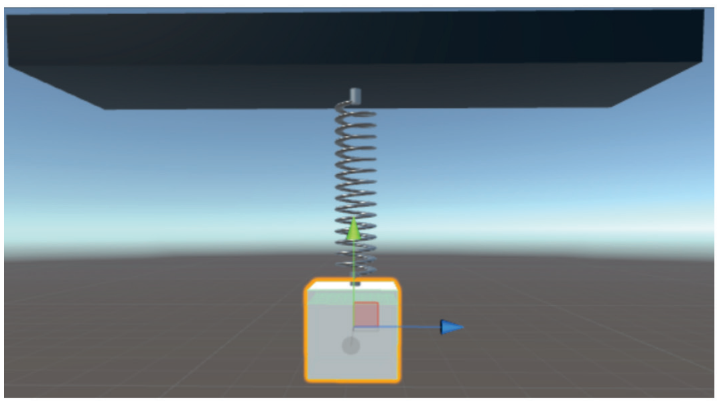
Para acceder al mundo virtual inmersivo es necesario incorporar dispositivos de reconocimiento gestual que se encargan de identificar movimientos específicos del ser humano a través de algoritmos matemáticos (Sancho, 2015). Además, no solo puede comunicarse por medio de la voz, también puede lograr una comunicación por medio de movimientos corporales. Las partes del cuerpo humano que producen dichos gestos son la cara y las manos, lo cual le "permite a los usuarios comunicarse con una máquina e interaccionar con naturalidad sin dispositivos mecánicos" (Sancho, 2015, p13). Existen distintos dispositivos de control gestual, los cuales permiten al usuario comunicarse con una computadora a través de gestos, los cuales dan la libertad de movimiento en lugar de un ratón para controlar un equipo de cómputo. En la investigación se incorporó el sensor Leap Motion, este dispositivo de control gestual hace posible el reconocimiento de las manos con ayuda de sus sensores infrarrojos y sus dos cámaras frontales.

Otro dispositivo necesario para la inmersión virtual fue un visor (HMD) que utiliza un Smartphone. El usuario acceda a una aplicación de realidad virtual y proyectar una imagen estereoscópica, al igual que utilizan los sensores ya incorporados en el Smartphone como el giroscopio para la orientación.

Metodología

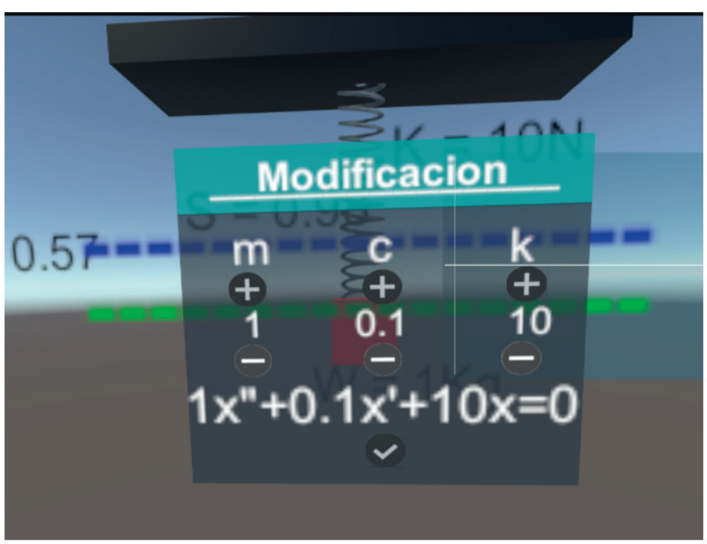
Como se mencionó en párrafos anteriores, propuesta que se implementó consiste en un escenario mediado por la realidad virtual inmersiva, en el que el estudiante, mediante un visor y un sensor gestual que identifica el movimiento de sus manos, se adentra a un mundo donde aparece un sistema masa resorte (figura 3) y la ecuación diferencial de segundo orden. Sus manos pueden generar movimiento en la masa colocada en el extremo de un resorte y puede subir o bajarlo. Además, puede modificar los valores de los coeficientes de la ecuación $mx'' + cx' + kx = 0$ (figura 4) y observar el comportamiento del sistema. También es posible estirar el resorte mediante la dinamización de la masa y observar los cambios que sufren los coeficientes. La idea principal es estudiar la estabilidad de la masa y establecer las condiciones de los coeficientes para caracterizar un sistema amortiguado. El usuario podrá caracterizar la estabilidad del sistema visualizando la gráfica de la función solución (figura 5) y lo deseable será que sea capaz de predecir el comportamiento del sistema con solo observar el valor de los coeficientes m, c, k y su relación con el modelo matemático que representa la solución de la ecuación diferencial.

Figura 3.- *Sistema masa-resorte*



Elaboración propia.

Figura 4.- *Controles*



Elaboración propia.

Figura 5. *Gráfica*

Elaboración propia.

La propuesta se desarrolló bajo el enfoque de diseño centrado en el usuario (Pal, 2019). Esta metodología propone diversas fases de desarrollo desde la comprensión inicial del contexto, el diseño de prototipo hasta su implementación y evaluación. Esta basado en las “necesidades, requerimientos y limitaciones del usuario final” (Mor, Domingo, Galofré, 2007, p2), dicha filosofía de diseño involucra al usuario final en cada una de sus etapas, con la finalidad de que pueda evaluar y dar propuestas del diseño y así lograr un producto de calidad y a la medida del usuario (Trujillo, Aguilar y Neira, 2016) y consiguiendo una mejor experiencia de uso ya que el usuario, al estar involucrado en cada etapa de desarrollo, solo necesitara un esfuerzo mínimo para poder utilizarlo.

Las etapas de esta metodología son las siguientes:

Entender y especificar el contexto de uso: Como primer momento en la investigación se identifico el tipo de población al que se dirige la propuesta. Fue necesario estudiar y caracterizar el contexto para identificar las necesidades de los usuarios (estudiantes de ingeniería) y sobre todo, la aplicación de la ecuación diferencial de segundo orden, la utilidad que esta tiene para explicar el comportamiento de fenómenos en asignaturas propias de diversos campos del conocimiento, esto de acuerdo con los planes y programas de estudio de las carreras de ingeniería mecánica, electrónica, industrial, gestión empresarial e ingeniería en sistemas computacionales.

Especificar requisitos: Se realizaron una serie de encuestas a estudiantes y para identificar las características que el escenario debe cumplir. Esto consistió en indagar, por un lado, el nivel de dominio que tienen los estudiantes de esta ecuación, dónde y para qué la aplican. Por otro lado, para conocer el contexto académico de la ecuación, se entrevistaron seis profesores del área de matemáticas que imparten esta asignatura con la finalidad de conocer la situación didáctica de la ecuación diferencial, cuáles dificultades identifican para su análisis, solución y aplicación.

Se encontró que tres factores comunes en sus respuestas fueron: la falta de tiempo, la carencia de conocimientos previos de los alumnos que faciliten su solución y que los estudiantes no están motivados en el estudio de las matemáticas. La relevancia de esta información fue el pensar en una propuesta novedosa que motive a los estudiantes a dedicar tiempo extra, fuera del aula, al análisis del comportamiento de la ecuación diferencia, se decidió por la implementación de un escenario virtual inmersivo y se seleccionó el sistema masa-resorte porque la población que participa en el estudio son estudiantes de ingeniería mecánica.

Producir soluciones de diseño: Una vez entendido y caracterizado el contexto, se crea la propuesta. En esta fase se integró un equipo multidisciplinario cuyos miembros fueron profesores de matemáticas y programadores del área de sistemas computacionales. El área de matemáticas fue responsable de diseñar y justificar la epistemología y formalidad conla que fue abordado el concepto. El área de programación responsable del desarrollo e implementación del escenario. Las diversas etapas de esta fase fueron: diseño conceptual, definir estilo, diseño visual, diseño de contenido, entre otras.

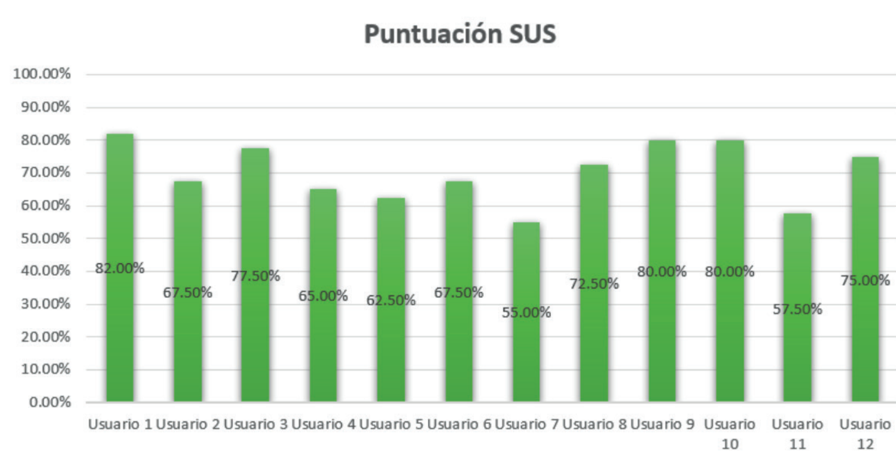
Evaluación: Esta fase fue permanente y por lo tanto, indispensable en el desarrollo de la propuesta. Cada etapa de diseño se llevó a campo para su evaluación. En estas participaban estudiantes, considerados como los usuarios finales, profesores de matemáticas externos al diseño de la propuesta, quienes se encargaban de evaluar su parte didáctica y los programadores, quienes valoraban y aseguraban el cumplimiento de los requisitos del diseño, así como la identificación de errores que se cometieron en la fase de diseño. No fue posible transitar a las siguientes etapas de desarrollo si la actual no era aprobada por los evaluadores. Esto fluyó de manera cíclica hasta que se logró una versión beta del software diseñado para el ambiente virtual.

Resultados

Hasta el momento se ha evaluado la usabilidad de la aplicación, entendida esta como como una técnica cualitativa que establece qué tan fácil es utilizar un producto realizado siempre y cuando sea utilizado para lo que fue diseñado. (Trujillo et al., 2016). Para evaluar la usabilidad se aplicó la técnica think-alound y la prueba SUS (system usability scale) la cual permite que se registren ciertas conductas del usuario durante el contacto con el software. Dicha técnica permitió identificar que los usuarios que utilizan lentes con graduación tuvieron problemas con la profundidad de los objetos en el mundo virtual. Un ejemplo de ello fue cuando se le solicitó modificara los parámetros de la ecuación diferencial de segundo grado, y debía que presionar algún botón, no lograban seleccionarlo con facilidad. Otro ejemplo del problema de la profundidad fue cuando los usuarios debían tomar (virtualmente) la masa y moverla hacia arriba o hacia abajo, cerraban la mano antes de poder tocarla y no lograban su movimiento.

La prueba SUS, consiste en diez preguntas, las cuales tienen cinco posibles respuestas enumeradas del 1 al 5. Se aplicó a 12 estudiantes, se sumaron cada uno de los promedios y se dividieron entre el número de usuarios a los que se les aplico la prueba, dando como resultado un porcentaje “SUS” de 70.20%, lo cual significa que el software en cuestión de usabilidad está por encima del promedio. Un sistema que tiene la puntuación “SUS” del 68.00% puede ser considerada como promedio, sin embargo, una puntuación “SUS” que se encuentre por debajo del 51.00% es considerado como un software ineficiente en cuestiones de usabilidad (Sauro, 2011). Los resultados que se registraron, de acuerdo con los datos registrados en la tabla de la figura 6, fue que el software es eficiente en cuestiones de usabilidad.

Figura 6. *Puntuación SUS*



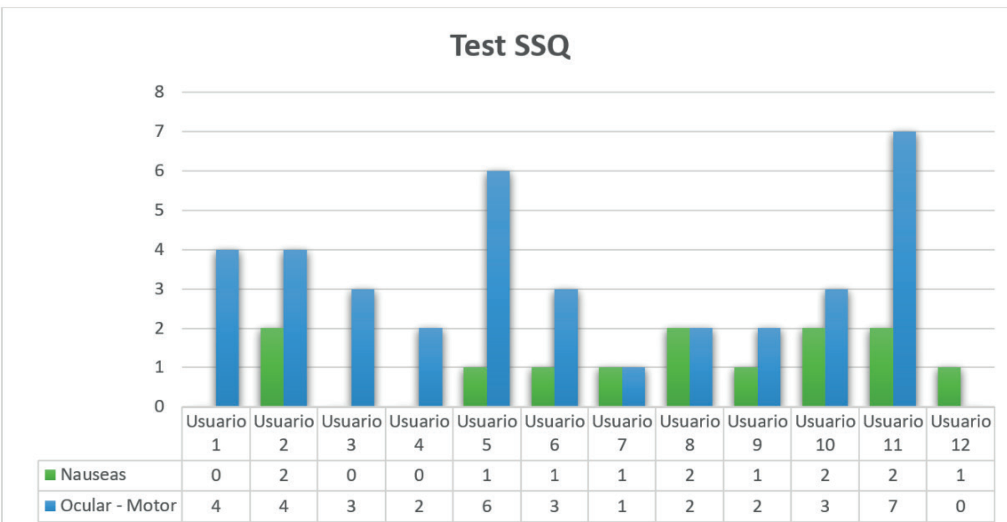
Elaboración propia.

Uno de los resultados que se obtuvieron y que se consideran importantes en la investigación son los efectos secundarios de la inmersión al mundo virtual. Se aplicó la prueba SSQ (Simulator Sickness Questionnaire) para conocer tal efecto. Este cuestionario fue probado y validado en un estudio que se realizó a 1,119 militares de la marina lo cuales fueron sometidos a un simulador de entrenamiento. Los investigadores buscaban los efectos secundarios que sufrían los usuarios al interactuar con diferentes dispositivos de visualización como sistemas CAVE o cascos de realidad virtual (Quintana, Bouchard, Serrano y Cárdenas, 2014).

La prueba consiste en que el usuario conteste cada uno de los 16 ítems, los cuales son se refiere a los síntomas que experimentó durante y después de estar en contacto con el software de realidad virtual, cada uno de estos ítems tiene 5 posibles respuestas. Las respuestas tienen un valor que va desde 0 al 4, que sería la severidad del síntoma que experimentó el usuario. Los cibermareos están compuestos de dos categorías: “Nauseas” y “problemas oculares” (Gómez, 2018), para llegar a este resultado es necesario sumar ciertos ítems, para diagnosticar nauseas se debe sumar los ítems 1, 6, 7, 8, 12, 13, 14, 15 y 16, mientras que para diagnosticar problemas oculares es necesario sumar los ítems 2, 3, 4, 5, 9, 10 y 11.

Los resultados que arrojó el estudio en la presente investigación fue que los usuarios participantes (9 de los 12 seleccionados) presentaron síntomas de náuseas leves al exponerse 10 minutos dentro del escenario, el factor común que se identificó es que estos usuarios no contaban con experiencia en utilizar un visor. En la figura 7 se muestran los resultados de la prueba.

Figura 7. *Prueba SSQ.*



	Usuario 1	Usuario 2	Usuario 3	Usuario 4	Usuario 5	Usuario 6	Usuario 7	Usuario 8	Usuario 9	Usuario 10	Usuario 11	Usuario 12
Nauseas	0	2	0	0	1	1	1	2	1	2	2	1
Ocular - Motor	4	4	3	2	6	3	1	2	2	3	7	0

Elaboración propia.

Como se puede observar en la gráfica de la figura 7 los usuarios 5 y 11 tuvieron un incremento en los problemas oculares. Posterior a la prueba SSQ, se les preguntó si usaban lentes y su graduación en caso afirmativo. El usuario 5 necesita lentes con una graduación en el ojo izquierdo de -1.5, mientras tanto el usuario 11 nunca se había realizado un examen de la vista por lo tanto no tenía conocimiento de la graduación que necesitaba. El software para la mayoría de los usuarios fue satisfactorio y presentaron leves síntomas de problemas oculares después y durante la utilización del software.

Conclusiones

En educación es contundente la incorporación de nuevas tecnologías que coadyuven a potencializar los métodos convencionales y promover la construcción de conceptos matemáticos. La realidad virtual inmersiva es una alternativa a las dinámicas de aprendizaje convencionales, ya que mediante esta se pueden generar escenario y laboratorios virtuales en donde se profundicen los contenidos del aula. Con la realidad virtual inmersiva se pueden realizar la simulación del comportamiento de un fenómeno en donde el alumno podrá interactuar con conceptos matemáticos involucrados, modificar condiciones y observar las consecuencias de esas modificaciones, esto en combinación con alguna metodología para el aprendizaje de las matemáticas en el contexto de las ciencias.

Desarrollar propuestas que abonen a la construcción de conceptos matemáticos no es una tarea fácil. Son diversos los elementos que se deben tener en consideración cuando se implementan, tener clara la idea la población a la que van dirigida y sus necesidades, específicamente los escenarios virtuales deben ser valorados desde distintas ópticas, por ejemplo, su usabilidad, para no correr riesgos de que no sean utilizados porque no es accesible o atractivo para el estudiante. El escenario puede ser capaz de resolver distintos problemas didácticos, pero si incorporarlo a las actividades académicas resulta ser una tarea complicada, los estudiantes no lo utilizarán. Deben ser, hasta donde sea posible intuitivos, tener una clara intención didáctica y, sobre todo, que en su diseño participe un equipo multidisciplinario y el usuario como elemento central en todas las etapas de diseño.

Los estudiantes que participaron en la investigación manipularon el simulador de masa-resorte sin una experiencia previa en un escenario virtual. Sin embargo, en consecuencia, al diseño intuitivo del simulador y con una breve explicación del funcionamiento básico del programa, fue posible que los alumnos pudieran manipular dicho software con mayor facilidad, la realidad virtual inmersiva jugó un gran papel importante en el éxito de la propuesta, ya que, al tener la sensación de poder manipular objetos con sus manos y observar causa-efecto en las oscilaciones del sistema y el modelo matemático, despertó su interés en caracterizar el comportamiento del sistema masa-resorte.

La trascendencia de este trabajo radica en mostrar la posibilidad de incorporar tecnologías de punta en el aula de matemáticas. Una vez que se regularice el acceso a las aulas, debido a la pandemia que hoy en día vivimos, se tiene proyectado un estudio cuantitativo para valorar el impacto de la propuesta en la construcción del concepto matemático abordado.

Referencias bibliográficas

Al-Ahmari, A., Abidi, M., Ahmad, A., & Darmoul, S. (2016). Development of a virtual manufacturing assembly simulation system. Advances in Mechanical Enginee- ring, 8.

Bowman, D. & McMahan, R. (2007). Virtual Reality: How Much Immersion Is Enough? Computer, 40(7), 36–43.
Bowman, D. & McMahan, R. (2007). Virtual Reality: How Much Immersion Is Enough? Computer, 40(7), 36–43.
Burdea, G. & Coiffet, P. (2003). Virtual reality technology. New Jersey, Cal: J. Wiley-Interscience, Ho- boken, 2nd ed edition.

Camarena, P. (2013). A treinta años de la teoría educativa "Matemática en el Contexto de las Ciencias". Innovación educativa (México, DF), 13(62), 17-44. Recuperado en 30 de septiembre de 2019, de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-26732013000200003&lng=es&tlng=es.

Caudell, T. & Mizell, D. W. (1992). Augmented reality: An application of heads- up display technology to manual manufacturing processes. In Proceedings of the twenty-fifth Hawaii international conference on system sciences, volume 2, pages 659– 669. IEEE.

Cárdenas, S. (2018). Escenario virtual KerDen Math para la manipulación de objetos tridimensionales. Tesis no publicada.

Cordero, F. & Suárez, L. (2005). Modelación en matemática educativa. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 1(18), 639–644.

Cordoba, F. (2013). La modelación en Matemática Educativa: una practica para el trabajo de aula en ingeniería. Thesis, Instituto Politécnico Nacional, México, Distrito Federal.

Duval, R., (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. Education Studies in matematics, V61, Number 1-2, pp. 103-106

Gómez, M. (2018). Test de usabilidad en entornos de realidad virtual. No Solo Usabilidad, (17).

Martínez, F. (2011). Presente y futuro de la tecnología de la realidad virtual. Creatividad y sociedad, 1 (16), 23-45.

Mata, G. (2008). Realidad virtual y simulación en el entrenamiento de los estudiantes de medicina. Educación Médica, 1(11), 29–31.

Mor, E., Domingo, M. G., & Galofré, M. (2007). Diseño centrado en el usuario en entornos virtuales de aprendizaje, de la usabilidad a la experiencia del estudiante. In SPDECE.

Pal, P. (2019), What is User Center Design (UCD) Approach? Recuperado el 20 de mayo de 2020 de: https://think360studio.com/what-is-user-centered-design-approach/

Quintana, P., Bouchard, S., Serrano Zárate, B., & Cárdenas-López, G. (2014). Efectos secundarios negativos de la inmersión con realidad virtual en poblaciones clínicas que padecen ansiedad. Revista de psicopatología y psicología clínica, 19(3), 197–207.

Rodríguez, R. & Quiroz, S. (2016). El rol de la experimentación en la modelación matemática. Educación matemática, 3(28), 91–110.

Ruiz, L. and Rivero, S. (2019). Impacto de la matemática en el contexto de las ciencias con software matemático en ecuaciones diferenciales. Científica, 1(23), 13-21.

Sancho, J. (2015). Desarrollo del simulador del instrumento Theremin empleando un Leap Motion. Recuperado el 10 de abril del 2017 de: http://hdl.handle.net/10251/55862.

Sauro, J. (2011). Measuring usability with the system usability scale (sus).

Trujillo, M., Aguilar, J. & Neira, C. (2016). Los métodos más característicos del diseño centrado en el usuario-dcu-, adaptados para el desarrollo de productos materiales. Iconofacto, 12(19), 215–236.

VOL 34, NÚMERO 2, AÑO 2021

MN-MÓVIL: UNA HERRAMIENTA PARA M-LEARNING EN LOS PROCESOS DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LOS MÉTODOS NUMÉRICOS EN INGENIERÍA

MN-MÓVIL: A TOOL FOR M-LEARNING IN THE TEACHING AND LEARNING PROCESSES OF NUMERIC METHODS IN ENGINEERING

Eugenio Carlos Rodríguez, Esther Ansola Hazday
Universidad Tecnológica de La Habana José Antonio Echeverría, Cujae. (Cuba)
ecarlos48@gmail.com, ehazday1959@gmail.com

Resumen
En este trabajo se muestra una investigación en curso en la que el centro de atención es la utilización de dispositivos móviles en la asignatura Matemática Numérica en la Universidad Tecnológica de La Habana José Antonio Echeverría, Cujae. En la investigación se utiliza la aplicación MN-Móvil, que es utilizada con el objetivo de flexibilizar la enseñanza y el aprendizaje de la asignatura, tanto en una metodología de enseñanza presencial como en la enseñanza a distancia, esta última en variantes de enseñanza no presencial o semipresencial, considerando que la aplicación despliega contenidos y sirve como herramienta para resolver problemas numéricamente. En el presente trabajo se muestra la herramienta MN-Móvil, sus características fundamentales y la concepción de su utilización en la asignatura. Se concluye que la aplicación del MN-Móvil es solo una primera experiencia y sienta las bases para futuros desarrollos de herramientas de este tipo en esta y otras materias en ingeniería.

Palabras clave: tecnología, m-learning, enseñanza-aprendizaje, Matemática

Abstract
This paper shows an ongoing research which is focused on the use of mobile devices in the subject Numerical Mathematics at "José Antonio Echeverría" Technological University of Havana, (Cujae). In the research, the MN-Móvil application is used, in order to make the teaching and learning process of the subject more flexible; both in a face-to-face teaching methodology, and in distance learning; the latter, in variants of non-face-to-face or blended teaching, considering that the application displays contents and serves as a tool to solve problems numerically. This paper shows the MN-Móvil tool, its fundamental characteristics and the conception of its use in the subject. It is concluded that the application of the MN-Móvil is only a first experience and lays the foundations for future developments of tools of this type in this subject, and in other engineering subjects.

Key words: technology, M-learning, teaching-learning, Mathematics

Introducción

El desarrollo impetuoso de la tecnología, en los últimos años, ha impactado en todos los procesos de la sociedad, no escapa a ello el proceso de enseñanza. En el transcurso de los años la enseñanza de la asignatura Matemática ha transitado por diferentes etapas, desde la clase tradicional, sin ningún dispositivo electrónico, hasta la actualidad donde ha cobrado interés e importancia la utilización de dispositivos móviles: tablets y teléfonos móviles, en lo que se ha dado en llamar m-learning.

El aprendizaje móvil tiene sus inicios en la década de 1980 y su historia, a través del desarrollo de las tecnologías, es descrita por muchos autores, entre ellos Moreno (2011), Lara (2012), Siemens (2005) y muchos otros autores.

El término "mobile learning" o "m-learning" no aparece con los smartphones y tablets, sino que se viene utilizando desde hace años, cuando se empezaron a explorar las capacidades educativas de los primeros dispositivos móviles con cierta capacidad de conectividad, como las PDA o los teléfonos con SMS. Sin embargo, no ha sido hasta la confluencia de tecnologías suficientemente maduras en el mercado (smartphones y tablets, además de redes 3G y markets de aplicaciones), y a su vez unidas a una adopción significativa de la web 2.0 educativa, cuando el momento de explosión del mobile learning ha tenido lugar (Lara, 2012, p. 263).

El término mobile learning aparece a finales de la década de los '90, en Estados Unidos, cuando se empezaron a usar las agendas electrónicas en educación" (Moreno, 2011). Varios autores se refieren al m-learning y sus características. Fombona y Pascual (2013) refieren que el mobile learning o m-learning, se basa en el uso de pequeños equipos portátiles, como teléfonos móviles y tablets o tabletas, los cuales permiten una gestión informática de los datos y conectividad inalámbrica para la interacción entre el estudiante y el profesor.

Más recientemente García-Bullé (2019) refiere que el m-learning tiene aspectos positivos que pueden enriquecer la experiencia de los estudiantes que buscan flexibilidad para su educación continua no formal. Aporta un alto nivel de accesibilidad, permitiendo a los estudiantes interactuar en la hora y lugar que más les convenga, de la misma forma que habilita el aprendizaje al paso que marquen ellos mismos y a su manera. Por lo que el m-learning es una estrategia adaptable a diferentes estilos y con gran potencial de mantener altos niveles de compromiso en los estudiantes.

Independientemente de lo anterior, hay que tener presente las dificultades que encierra el uso del m-learning, como son la gran cantidad de estímulos que provienen de las tabletas y los *smartphones*, como las notificaciones de mensajes o las redes sociales, que hacen difícil la concentración, aún por un tiempo breve. También hay que considerar el tamaño de las pantallas, que son significativamente más pequeñas que las de una computadora, lo que potencialmente dificulta la lectura (García-Bullé, 2019).

Como es conocido, los teléfonos y otros equipos móviles no son equipos diseñados para llevar a cabo la actividad educativa, ni tal vez representan el recurso más propicio para que el profesorado sea capaz de abordar determinados contenidos y la consecución de determinados objetivos. Por lo que el m-learning supone un desafío importante a los planteamientos educativos desde su triple dimensión espacial, temporal y social. En primer lugar, generan una deslocalización del lugar en el que tradicionalmente se produce el proceso de enseñanza y aprendizaje. Por primera vez, la utilización del recurso educativo en lugares dispares implica la adaptación y apertura a un perfil de estudiante diferente o desconocido en el proceso formativo (Fombona y Pascual, 2013).

Fundamentos teóricos

Esta investigación toma como marco de referencia el modelo de aprendizaje de Shepherd (2007). Según se plantea en León, Montiel, Mora, Huilcapi y Cárdenas (2017), el modelo de Shepherd es el modelo de aprendizaje de m-learning más utilizado, quien determina tres usos del m-learning:

- El primero, es cómo apoya en la etapa de preparatoria, antes del aprendizaje utilizando los diagnósticos, al tomar en cuenta que se puede establecer evaluaciones de diagnóstico y de esta manera entender el estado inicial del estudiante (Hernández y Morales, 2010).
- El segundo, define como un método de soporte al estudiante, como entrenamiento para los exámenes y para releer conocimientos, limitándose únicamente al despliegue de contenido y siendo un repositorio de información (Hernández y Morales, 2010).
- El tercero, define como práctica del estudio, como aplicación a problemas del mundo real (Hernández y Morales, 2010).
- También Hernández y Morales (2010) consideran importante la clasificación propuesta por Naismith, Lonsdale, Vavoula, y Sharples (2006), que brinda un marco de referencia de la teoría del aprendizaje para cada tipo de aplicación:
- Conductual. Las aplicaciones de m-learning se fundamentan en la representación de problemas donde la solución está dirigida por elementos que contribuyen un valor para la solución, a través de la presentación de material vía móvil, en donde se guía al alumno a una posible solución, adicionalmente se debe ofrecer retroalimentación.
- Constructivista. El alumno construye su propio conocimiento sobre nuevas ideas y conocimientos previos, las aplicaciones móviles deben ofrecer esquemas de virtualización de contextos y brindar herramientas que permitan administrar dicho conocimiento, así como métodos de búsqueda de información relevante al problema planteado.
- Situacional. Tiene mucha semejanza con el constructivista, sin embargo, varían principalmente en que los escenarios presentados al alumno, no son simulados sino reales (aprendizaje basado en problemas). En ese sentido, las aplicaciones móviles deben ser capaces de detectar el contexto donde estén inmersos y presentar información adecuada, dependiendo de la situación, lugar o tiempo donde se encuentre el alumno. De esta manera permiten que el aprendizaje sea más vivencial y atractivo para el alumno, ya que lo coloca en la mayoría de las veces en una situación de toma de decisiones.
- Colaborativo. Conduce las tecnologías móviles para brindar el aprendizaje a través de la interacción social, donde se resaltan los medios utilizados para comunicarse entre sí, hoy en día las redes sociales juegan un papel muy significativo. El aprendizaje colaborativo, ya sea por medio de un computador o un dispositivo móvil, nos señala que el aprendizaje no siempre vendrá del catedrático, sino que de algún compañero de clase.
- Informal. Las aplicaciones móviles deben brindar rutas para adquirir el conocimiento en un esquema más libre, en donde las actividades no necesariamente dependen de un currículo que se debe completar, sino que de las experiencias se dan fuera del salón de clase. Dichas actividades son asistidas por los móviles a lo largo de un curso y no son de carácter obligatorio.
- Asistido. La tecnología móvil toma un papel primordial en la coordinación del alumno y los recursos que se le proporcionan, ya que permiten medir el grado de avance en las prácticas realizadas o acceder a la información de un alumno para informar de su estatus en un curso específico, por poner un ejemplo (Brindar soporte a las tareas del profesor y las acciones de los alumnos) (Naismith et al, 2006).

Según Lara (2012) en las diversas implementaciones de proyectos m-learning en entornos educativos se pueden observar dos tendencias fácilmente diferenciadas:

a) Centrada en la producción de contenido. Dentro de este enfoque, los dispositivos móviles se comprenden meramente como una forma de hacer llegar unos contenidos a los estudiantes. Este modelo suele encontrarse ligado a los contextos educativos formales (Lara, 2012).
b) Centrada en el diseño de actividades. Este modelo sitúa al estudiante como actor principal del proceso en detrimento del protagonismo del profesor y de los contenidos formativos. Exige planificar para el trabajo autónomo del estudiante y tolerar, integrar e incluso fomentar usos espontáneos y creativos no planificados previamente. Suele estar más ligado a contextos educativos informales (Lara 2012).

Sin lugar a dudas, el m-learning puede hacer una contribución importante proporcionando información a los estudiantes, probablemente sea en la forma de texto simple y gráficos la más importante, pero con el beneficio adicional de sonido en los teléfonos móviles. La provisión de información, en muchos casos, es el uso primario de m-learning, pero su uso no necesariamente acaba allí. Las capacidades interactivas de los dispositivos móviles ofrecen un alcance considerable para un mayor número de actividades prácticas de aprendizaje (Shepherd, 2007).

Planteamiento de un problema

Con ligeras modificaciones entre diferentes carreras y entre algunos planes de estudio diferentes, el programa de Matemática Numérica en carreras de ingeniería contiene los siguientes temas: teoría de errores, determinación de raíces de ecuaciones, valores y vectores propios, sistemas de ecuaciones lineales, ajuste de curvas, interpolación, integración, optimización y ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales.

La enseñanza y el aprendizaje de los métodos numéricos utilizados en cada uno de estos temas han pasado, en los últimos años, desde el uso de las calculadoras electrónicas más elementales hasta el uso de modernas computadoras y potentes softwares profesionales.

En dependencia del tipo de tecnología utilizada en las clases, el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática Numérica se ha ido transformando, influyendo tanto en profesores como en estudiantes. Su utilización ha logrado en mayor o menor medida la ejercitación, profundización, algoritmización y la programación de los diferentes métodos.

Siendo la asignatura Matemática Numérica una de las que más se presta para el uso de tecnologías, debido a que el uso de algoritmos numéricos en la solución de problemas involucra gran cantidad de cálculos, que solamente con las tecnologías es posible llevarlos a cabo, el incremento del uso de las tecnologías en la enseñanza de esta materia ha permitido mantener actualizada esta asignatura.

Pero las tecnologías se desarrollan muy velozmente, más rápidamente que la actualización de las metodologías de enseñanza y aprendizaje, hoy en día la tecnología más utilizada por los estudiantes es la tecnología móvil; el desarrollo de la tecnología móvil, incluyendo teléfonos móviles, tablets, aplicaciones y conectividad a internet, hace que se hayan desarrollado hábitos y prácticas personales en los estudiantes que provocan, en muchos casos, sensibles distracciones en el aula de clases.

Ante este fenómeno se plantea el siguiente problema ¿es posible utilizar la tecnología móvil en la enseñanza de la Matemática Numérica? El estudio del m-learning da respuesta a esta pregunta, pero surgen otras: ¿qué enfoques en la introducción de metodologías de m-learning aplicar? ¿qué modelo de aprendizaje seguir?

El objetivo de este trabajo es mostrar las potencialidades del m-learning en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la asignatura Matemática Numérica, por sus posibilidades de flexibilizar la enseñanza y el aprendizaje de la asignatura.

La investigación

En este trabajo se muestra una investigación en curso en la que el centro de atención es la utilización del m-learning en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática Numérica, mediante el uso de teléfonos móviles o tablets, no solo por las posibilidades que poseen de almacenamiento de información sino por tres aspectos importantes: la flexibilidad en el tiempo, espacio y lugar lo cual le permite al estudiante la solución de problemas en cualquier lugar y a cualquier hora.

Se utiliza la aplicación MN-Móvil, que se define como un soporte al estudiante para la adquisición de conocimientos, con el despliegue de los contenidos y siendo un repositorio de información (Hernández y Morales, 2010), además, sirve como herramienta para resolver problemas numéricamente basándose en los métodos numéricos de cálculo. La aplicación ha sido desarrollada por un grupo de profesores y estudiantes de la Universidad Tecnológica de La Habana José Antonio Echeverría, Cujae.

Partiendo del modelo de aprendizaje de Shepherd (2007), se consideran dos de los usos planteados en el modelo: Como método de soporte al estudiante, como entrenamiento para los exámenes y para releer conocimientos, limitándose únicamente al despliegue de contenido y siendo un repositorio de información (Hernández y Morales, 2010).

Como práctica del estudio, como aplicación a problemas del mundo real (Hernández y Morales, 2010). Al mismo tiempo la aplicación diseñada no solo está centrada en la producción de contenido, o sea, meramente como una forma de hacer llegar unos contenidos a los estudiantes, sino que a la vez se centra en el diseño de actividades. Este modelo sitúa al estudiante como actor principal del proceso (Lara, 2012).

En cuanto al marco de referencia de la teoría del aprendizaje brindado por Naismith et al (2006), se considera que el modelo de aprendizaje utilizado reúne características definidas como Constructivista, Situacional, Colaborativo, Informal y Asistido.

En una concepción clásica del proceso de enseñanza aprendizaje, en lo que se conoce como enseñanza presencial, el proceso de enseñanza aprendizaje tendría tres momentos importantes:

El primer momento es en la clase, donde se imparte la teoría, los métodos y los algoritmos de cada método, los ejemplos que muestra el profesor se resuelven utilizando la aplicación, MN-Móvil como una simple herramienta de cálculo, que cada estudiante podrá visualizar en su teléfono móvil o tablet.

En el segundo momento, y como parte de la evaluación sistemática de los estudiantes, está previsto entregarles distintas tareas, que las realizarán de manera independiente o por equipos. Se podrán comunicar con el profesor para aclarar dudas o hacer consultas, y enviar las tareas resueltas al profesor por esa vía para ser revisada.

En las evaluaciones parciales de la asignatura el estudiante deberá resolver ejercicios de modelación y algoritmización, y los cálculos los realiza utilizando la aplicación, que constituye el tercer momento de uso de la tecnología móvil.

La aplicación MN-Móvil fue concebida inicialmente como una herramienta de cálculo numérico, para el apoyo a los estudiantes en la asignatura, en un proceso de forma presencial, según el modelo de aprendizaje descrito anteriormente en sus tres momentos.

La situación actual provocada por la pandemia de la COVID 19, ha transformado la forma de pensar en cuanto a cómo modelar el proceso de enseñanza aprendizaje. Así, se debate mucho actualmente sobre ventajas y desventajas de diversos modelos, a distancia, semipresenciales, on line, sincrónicos, asincrónicos y otros.

En el caso que es objeto de estudio en nuestra investigación también se transformó la concepción de esta aplicación, convirtiéndose en una herramienta para el trabajo a distancia en variantes de enseñanza no presencial o semipresencial, lo que se ajusta a la concepción teórica del m-learning (Fombona y Pascual, 2013).

En este proceso de aprendizaje, sin la presencia directa del docente, se requiere que los recursos educativos se elaboren especialmente para apoyar el protagonismo del alumno. El uso del m-learning en este sentido, hace que la formación a distancia deje de ser una oferta exclusiva de determinadas instituciones, para convertirse en parte de un nuevo modelo educativo flexible y adaptado al usuario de muchos centros educativos tradicionales (Fombona y Pascual, 2013).

El docente debe jugar un papel importante en este proceso, por lo que su dominio de la tecnología y el uso adecuado de los procedimientos en cada momento del proceso son vitales.
De esta manera fue reformulado el diseño de la aplicación, quedando como sigue:

La aplicación MN-Móvil cuenta con un módulo de texto donde el estudiante puede encontrar:

- Una guía metodológica para el estudio de la signatura.
- Los contenidos teóricos de la asignatura, divididos por temas.
- Presentaciones en Power Point de estos temas.
- Ejercicios prácticos de cada tema, los cuales el estudiante debe resolver haciendo uso de la herramienta de cálculo que aparece en el otro módulo.
- Tareas con ejercicios de modelación y algoritmización que forman parte de la evaluación de la signatura.

El diseño de la aplicación MN-Móvil centra la atención en el estudiante como actor principal del proceso. La guía metodológica brinda los elementos necesarios para orientar al estudiante en el estudio independiente, sin la presencia del profesor, de manera que pueda orientarse en el uso del libro de texto, en el estudio de los distintos temas de la signatura, mediante los contenidos que aparecen en la aplicación con sus correspondientes presentaciones en Power Point.

Los ejercicios y las tareas están dirigidas a fomentar la retroalimentación del autoaprendizaje de los estudiantes.

El módulo herramienta contiene un conjunto de programas para ejecutar cálculos con los métodos numéricos básicos más utilizados en ingeniería, consta de un menú y 15 programas independientes, que incluyen los métodos siguientes:

- Métodos de Bisección y Regula Falsi para la solución de ecuaciones.
- Método de Newton-Raphson para la solución de ecuaciones.
- Método de Secantes para la solución de ecuaciones.
- Método de Gauss con pivote elemental y pivote parcial para la solución de sistemas determinados de ecuaciones lineales.
- Métodos de Jacobi y de Seidel para la solución de sistemas de ecuaciones lineales.
- Integración numérica con doble cálculo por los métodos de Trapecios y Simpson.
- Interpolación polinómica por el método de Lagrange.
- Cálculo de diferencias divididas y el método de interpolación de Newton.
- Métodos de Euler, Runge - Kutta de orden 2 y Runge - Kutta de orden 4 para la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias.
- Métodos de Runge - Kutta de orden 2 y Runge - Kutta de orden 4 para sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias.
- Ajuste de curvas de modelos lineales respecto a los parámetros con salidas numéricas.
- Optimización unidimensional sin restricciones mediante búsqueda uniforme y acelerada.
- Optimización unidimensional en un intervalo mediante búsqueda por bisección y Fibonacci.
- Optimización multidimensional sin restricciones por el método de búsqueda por coordenadas.
- Optimización multidimensional sin restricciones por el método del gradiente.

Papel de docente

Un elemento importante es el papel que juega el profesor en la conducción de este proceso, a pesar de que el diseño de la aplicación MN-Móvil centra la atención en el estudiante como actor principal del proceso, es crucial la orientación del profesor. La comunicación de los estudiantes con el profesor puede ser programada de manera sincrónica para que los estudiantes expongan sus dudas y sean aclaradas en forma general para todos los estudiantes simultáneamente. Pero resulta más práctica la variante asincrónica, que está más a tono con la característica del m-learning de proporcionar mayor independencia al estudiante, en cualquier caso, es fundamental que los profesores dominen la tecnología y los procesos diseñados para la enseñanza a través del m-learning.

En el modelo tradicional, el profesor imparte su clase mientras los estudiantes escuchan, toman notas y, en caso de tener dudas, plantean preguntas. A pesar de que esta metodología evoluciona con la incorporación de distintos elementos de apoyo, como presentaciones multimedia o materiales extraídos de internet mediante el uso de un proyector, el verdadero aprovechamiento del aprendizaje en red está en el cambio del perfil docente.

La figura del profesor como facilitador es la de un profesor que se basa en los contenidos de la asignatura para guiar a la clase en el establecimiento de debates y la creación de conocimiento de forma conjunta. De esa forma, se pasa de un sistema centrado en el docente a otro focalizado en el estudiante.

Teniendo en cuenta que en muchos casos el estudiante tiene mayor conocimiento sobre el medio técnico utilizado que el docente, es necesario que el profesor asuma una función de guía y planificador y el alumnado realice los procesos de búsqueda, organización y elaboración de la información mediante las herramientas disponibles. De esta forma, el docente se apoya en los conocimientos ‘técnicos’ de los estudiantes, no solo para aprender de ellos, sino para mejorar su motivación y conseguir que enfoquen sus conocimientos hacia un aprovechamiento educativo.

La evaluación del aprendizaje

El diseño presentado asume la evaluación mediante tareas, individuales y de elaboración en equipos. En el proceso de diseño del método propuesto, el diseño de la evaluación ocupa un papel preponderante.

La forma de evaluar considera que el estudiante asume el control de la evaluación en lugar del profesor, lo que implica dar al estudiante la responsabilidad por el aprendizaje y por la evaluación (Dorrego, 2006).

El módulo de texto del MN-Móvil contiene un conjunto de tareas con ejercicios de modelación y algoritmización que forman parte de la evaluación de la signatura. No obstante, en determinados momentos se puede indicar a los estudiantes la realización de otras tareas, ya sean individuales o en equipos.

Visualización de la aplicación

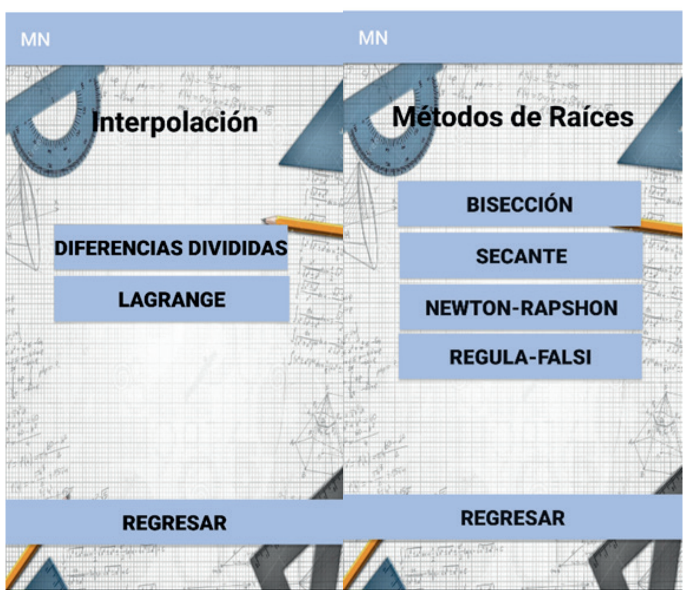
Las Figuras 1 y 2 muestran algunas pantallas de módulo de cálculo de la aplicación.
En la Figura 1 se observa como se muestra la aplicación en la pantalla del móvil y el menú principal del módulo de cálculo con los distintos métodos numéricos que pueden ser resueltos.

La figura 2 muestra los menús de los métodos de interpolación y de determinación de raíces de ecuaciones.

Figura 1. *Ubicación de la aplicación en la pantalla del móvil y menú principal de métodos numéricos.*

Elaboración propia.

Figura 2. *Menús de los métodos de interpolación y raíces de ecuaciones.*



Elaboración propia.

Conclusiones

En poco tiempo se han acelerado los cambios tecnológicos en la época que nos ha tocado vivir. Se puede tener más o menos reticencias hacia la tecnología y su uso de forma poco meditada dentro de la Educación. Sin embargo, los dispositivos móviles ya han aportado razones de peso para quedarse dentro de las escuelas y de algún modo ampliar los muros de las mismas.

Según el criterio de los autores, la experiencia práctica en la enseñanza de la ingeniería a través de los años muestra que una de las asignaturas que más se presta para el uso de tecnologías es la Matemática Numérica, debido a que el uso de algoritmos numéricos en la solución de problemas involucra gran cantidad de cálculos, que solamente con las tecnologías es posible llevarlos a cabo de manera eficiente. Pero las tecnologías se desarrollan muy velozmente, más rápidamente que la actualización de las metodologías de enseñanza y aprendizaje, hoy en día la tecnología más utilizada por los estudiantes es la tecnología móvil, el desarrollo de la tecnología móvil, incluyendo teléfonos móviles, tablets, aplicaciones y conectividad a internet, hace que se hayan desarrollado hábitos y prácticas personales en los estudiantes que provocan, en muchos casos, sensibles distracciones en el aula de clases.

Ante este fenómeno el estudio del m-learning da respuesta a las interrogantes planteadas en la investigación ¿es posible utilizar la tecnología móvil en la enseñanza de la Matemática Numérica? ¿qué enfoques en la introducción de metodologías de m-learning aplicar? ¿qué modelo de aprendizaje seguir?

En este trabajo se ha hecho un recorrido por el concepto de m-learning, su potencial educativo, sus enfoques metodológicos, los diversos modelos teóricos y los elementos a tener en cuenta a la hora de diseñar un plan de implementación y las potencialidades de su uso en la asignatura Matemática Numérica.

La respuesta a la problemática dada en esta investigación, es el diseño de la aplicación MN-Móvil, para ser empleada en un entorno de m-learning, tanto para modelos de enseñanza presencial como a distancia o semipresencial.

A pesar de que el diseño de la aplicación MN-Móvil centra la atención en el estudiante como actor principal del proceso, es crucial la orientación del profesor. La comunicación de los estudiantes con el profesor puede ser programada de manera sincrónica para que los estudiantes expongan sus dudas y sean aclaradas en forma general para todos los estudiantes simultáneamente. Pero resulta más práctica la variante asincrónica, que está más a tono con la característica del m-learning de proporcionar mayor independencia al estudiante, en cualquier caso, es fundamental que los profesores dominen la tecnología y los procesos diseñados para la enseñanza a través del m-learning.

La aplicación del MN-Móvil es solo una primera experiencia y no tiene el alcance ni proporciona todas las posibilidades que son posibles con el uso del m-learning, sin embargo, sienta las bases para futuros desarrollos de herramientas de este tipo en esta y otras materias de Matemática en ingeniería.

Referencias bibliográficas

Dorrego, E. (2006). *Educación a Distancia y Evaluación del Aprendizaje. RED. Revista de Educación a Distancia, número M6 (Número especial dedicado a la evaluación en entornos virtuales de aprendizaje)*. Recuperado el 18 de noviembre de 2020 de http://www.um.es/ead/red/M6.

Fombona, J. y Pascual, M. A. (2013). Aprendizaje con dispositivos móviles. Beneficios del m-learning en la Educación Superior. *Educatio Siglo XXI, Vol. 31 nº 2 · 2013, pp. 211-234.* España: Revistas Universidad de Murcia.

García-Bullé, S. (2019). *¿Qué es el m-learning? ¿Es una opción viable para la educación del siglo XXI?* Recuperado el 15 de junio de 2020 de https://observatorio.tec.mx/edu-news/que-es-mobile-learning.

Hernández, R. y Morales, M. (2010). *The MOBILearn Project. En americalearningmedia*. Recuperado el 15 de junio de 2020 de http://www.americalearningmedia.com/edicion-009/105-analisis/665-dispositivos-moviles-en-la-educacion.

Lara, T. (2012) MLEARNING Cuando el Caballo de Troya entró en el aula. *En J. Hernández, M. Pennesi, D. Sobrino y A. Vázquez (Eds.), Tendencias Emergentes en Educación con TIC. (pp 263-275),* Barcelona, España: Asociación Espiral, Educación y Tecnología.

León, J., Montiel, P: A. Mora, J. E., Huilcapi, M. R.,y Cárdenas, O.E. (2017). *"Dispositivos móviles como herramientas de apoyo pedagógico en la Educación Superior Ecuatoriana"*, *Revista Atlante: Cuadernos de Educación y Desarrollo (octubre 2017)*. Recuperado el 15 de junio de 2020 de: http://www.eumed.net/rev/atlante/2017/10/dispositivos-moviles-educacion.html.

Moreno, A. J. (2011). Móvil learning. *Revista Observatorio tecnológico.* España: Editorial del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

Naismith, L., Lonsdale, P., Vavoula, G. y Sharples, M. (2006). *Literature review in mobile technologies and learning*. *NESTA Futurelab series, report 11. Bristol: NESTA Futurelab*. Recuperado el 25 de Agosto de 2020 de http://www.academia.edu

Shepherd, C. (2007) *M is for Maybe*. Recuperado el 25 de Agosto de 2020 de http://www. cedma – europe.org

Siemens, G (2005). *Connectivism: A Learning Theory for the Digital Age. International Journal of Instructional Technology and Distance Learning. 2(1), 3-10*. Recuperado de http://itdl.org

REVISTA ACTA LATINOAMERICANA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA - ALME

Principios:

La revista Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (en lo sucesivo ALME), es uno de los proyectos académicos del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa – CLAME, en el que se conjuga el respeto a la pluralidad de formaciones, tradiciones y acercamientos educativos, concebida y desarrollada con la función de difundir la Matemática Educativa en un marco en el que pueden relacionarse autores que comparten este interés común, además de nuclear investigadores y profesores de Latinoamérica, y a partir de su divulgación, promover acciones que fomenten la investigación, la actualización, el perfeccionamiento y la profesionalización para el desarrollo científico y social de la región.

La revista ALME se configura como el instrumento de la CLAME para la difusión de trabajos de carácter científico, experiencias, convocatorias e información bibliográfica, dentro del ámbito de la enseñanza/aprendizaje en matemática educativa en sus diferentes formulaciones y presentaciones.

La revista ALME es una revista científica arbitrada por pares y que se atiene a los estándares internacionales de calidad propios de las publicaciones científicas de prestigio.

Misión y objetivos:

La misión de la revista ALME es la difusión de la investigación relativa a la Matemática Educativa, persiguiendo los siguientes objetivos:

- Difundir, preferentemente en lenguas española y portuguesa, relevantes y rigurosos trabajos de carácter científico, en el ámbito de la matemática educativa.
- Ofrecer experiencias innovadoras, siempre relativas al ámbito de la matemática educativa.
- Potenciar la accesibilidad y visibilidad del conocimiento, favoreciendo el entorno de acceso abierto a la literatura científica en matemática educativa.

Política editorial:

- *Idioma de los trabajos*. Podrán presentarse trabajos en lengua española, portuguesa e inglesa.
- *Trabajo original*. Los trabajos enviados a ALME para su publicación deberán constituir una colaboración original no publicada previamente en soporte alguno, ni encontrarse en proceso de publicación o valoración en cualquiera otra revista o proyecto editorial.
- *Normas de redacción y presentación*. Los trabajos deberán atenerse a las normas de redacción y presentación de carácter formal de ALME. Las colaboraciones enviadas a ALME que no se ajusten a ellas serán desestimadas.
- *Recepción de originales*. Los editores de ALME acusarán la recepción del manuscrito enviado por el autor/es. El Comité editorial revisará el artículo enviado informando al autor/es, en caso necesario, si se adecua al

campo temático de la revista y al cumplimiento de las normas y requisitos formales de redacción y presentación. En el caso de que todos los aspectos sean favorables, se procederá a la revisión del artículo.

- *Proceso de revisión.* Los artículos propuestos serán evaluados en forma "ciega" por dos integrantes del comité científico. En el proceso de evaluación se garantizará tanto el anonimato de los autores, así como de los evaluadores.
- *Información*. Los editores de ALME informarán a los autores de la decisión de aceptación, modificación o rechazo de cada uno de los artículos.
- *Política de privacidad*. Se mantendrá y preservará en todos los casos y circunstancias el anonimato de los autores y el contenido de los artículos desde la recepción del manuscrito hasta su publicación. La información obtenida en el proceso de revisión y evaluación tendrá carácter confidencial.
- *Fuentes*. Los autores citarán debidamente las fuentes de extracción de datos, figuras e información de manera explícita y tangible tanto en la bibliografía, como en las referencias. Si el incumplimiento se detectase durante el proceso de revisión o evaluación se desestimará automáticamente la publicación del artículo.
- *Responsabilidad*. ALME no se hará responsable de las ideas y opiniones expresadas en los trabajos publicados. La responsabilidad plena será de los autores de los mismos.
- *Formatos*. ALME se presentará en dos formatos, electrónico y CD, que contendrán idénticos contenidos en cada número. El formato electrónico se ofrece desde la página oficial del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (https://clame.org.mx/actas.html) y será de acceso libre y gratuito.
- *Periodicidad.* ALME tendrá una periodicidad semestral.
- *Secciones:* Las secciones de la revista ALME son las siguientes:
    1. Análisis del discurso matemático escolar
    2. Propuesta para la enseñanza de las matemáticas
    3. Aspectos socioepistemológicos en el análisis y el rediseño del discurso matemático escolar
    4. El pensamiento del profesor, sus prácticas y elementos para su formación profesional
    5. Uso de recursos tecnológicos en el proceso de aprendizaje de las matemáticas

Directrices generales para los autores:

1. El trabajo correspondiente debe haber sido aceptado para presentarse durante RELME 34. Es por ello que se solicita **enviar certificado de aprobación de la ponencia**.
2. Todo trabajo debe ser inédito y no estar en proceso de evaluación de ninguna otra revista u órgano editorial.
3. Todos los artículos deberán estar escritos en procesador de texto Microsoft Office Word 2007 o superior, tipo de letra Times New Roman, tamaño 12, interlineado sencillo márgenes superior: 2,5 cm; inferior: 2,5 cm; izquierdo: 3,5 cm; derecho: 2,5 cm. Para las expresiones matemáticas debe usarse el **editor de ecuaciones**.
4. Extensión: máximo 12 cuartillas en hoja tamaño carta. Las páginas deben estar **sin numerar**.

5. Las referencias (deben aparecer bajo ese título, por orden alfabético) habrán de colocarse en estilo APA, 6ª edición (American Psychological Association).
6. Las figuras, tablas e imágenes que se incluyan en el artículo deben ser claras, legibles e incluir epígrafes con fuente Times New Roman tamaño 10 que indiquen referencia de las mismas.
7. La estructura base del artículo debe dar cuenta de: Un planteamiento del problema, revisión de literatura de Matemática Educativa, indicaciones generales sobre la estructura teórica (marco teórico o conceptual o fundamentos teóricos), metodología implementada, desarrollo de algunos ejemplos, análisis de los resultados, conclusiones y referencias bibliográficas. Cabe aclarar, que si lo que se está reportando es una investigación en curso, se debe hacer explícito en el escrito para que esto sea considerado en el momento de hacer la evaluación del documento.
8. También se podrán publicar artículos que no son productos de investigaciones, como puede ser: reporte de experiencia en aula, curso corto, taller, grupo de discusión o de laboratorio. Para los casos anteriores la estructura del escrito debería de reportar mínimamente: introducción, desarrollo del tema en donde se hará mención del planteamiento de un problema, así como los fundamentos teóricos y las conclusiones. El artículo deberá mostrar evidencia de revisión de referencias bibliográficas de Matemática Educativa.
9. Cada uno de los manuscritos recibidos, pasa por una evaluación doblemente ciega (se retiran los nombres y datos de filiación de los autores de los documentos) y se envía a dos árbitros de nuestra comunidad, cuyos resultados, de manera anónima, son devueltos a los autores. En caso haya controversia entre los dos árbitros, se dará la propuesta a un tercer árbitro. La decisión de los árbitros es inapelable. Las evaluaciones pueden tener tres resultados posibles: Aceptado, Aceptado condicionado a modificaciones o Rechazado.

Normas para la publicación del artículo:

- Primer renglón: Título del trabajo en mayúscula en español o portugués (**sin punto al final**).
- Segundo renglón: Nombre de los autores separados por comas si hay más de un autor
- (**Nombre y Apellido** en ese orden, **sin títulos de grado**).
- Tercer renglón: Nombre de la institución y país al que pertenecen. **(No se considera válido el uso exclusivo de siglas).**
- Cuarto renglón: Dirección electrónica de los autores, separados por coma si hay más de uno y **sin hipervínculos**.
- Quinto renglón: Resumen de no más de 10 renglones de extensión en fuente Times New Roman, tamaño 10.
- Sexto renglón: palabras clave (a lo sumo cinco). Si son frases, verificar de no extenderse de las cinco palabras.
- Séptimo renglón: Abstract en inglés, en fuente Times New Roman tamaño 10.
- Octavo renglón: key words, traducción al inglés de las palabras clave.
- Noveno primer renglón: Inicia la primera sección del documento.
- Consideración para citaciones:

Citas dentro del texto. Las referencias a artículos o libros figurarán en el texto entre paréntesis, indicando el apellido del autor y el año, separados por una coma (Peters, 2001). En el caso de que en una misma referencia se incluyan varios libros o artículos, se citarán uno a continuación del otro por orden alfabético y separados por un punto y coma (García Aretio, 2002; Sarramona, 2001). Si en la referencia se incluyen varios trabajos de un mismo autor bastará poner el apellido y los años de los diferentes trabajos separados por comas, distinguiendo por letras (a, b, etc.) aquellos trabajos que haya publicado el mismo año (Casas Armengol, 1990, 1995, 2000a, 2000b, 2002, 2004). Si el nombre del autor forma parte del texto sólo irá entre paréntesis el año de publicación [Keegan (1992) afirmó que...].

Citas textuales. Las citas textuales con una extensión menor de 40 palabras irán entrecomilladas y, a continuación y entre paréntesis, se indicará el apellido del autor del texto, el año y la página o páginas de la que se ha extraído dicho texto. Ejemplo: "por educación a distancia entendemos [...] contacto ocasional con otros estudiantes" (Blanco, 1986, p. 16). Si el nombre del autor forma parte del texto, sería así: Como Martínez Sanz (2001, p. 102) señalaba "...". Las citas de 40 o más palabras deberán aparecer en un bloque de texto independiente, sin comillas y ajustado a la misma altura que la primera línea de un nuevo párrafo. Al final se indicará entre paréntesis, el autor, año y página/s.

- Consideración para referencias:

  Únicamente se incluirán aquellas que se citan en el texto y deberán ordenarse por orden alfabético en un solo listado, tanto las de formato impreso como electrónico.

  El formato será el siguiente:

- *Libro:* Apellidos del autor/es, Iniciales. (Año). Título del libro. Lugar de publicación: Editorial.

  Brzezinski, Z. (1970). La era tecnotrónica. Buenos Aires: Paidós.

- *Revistas:* Apellidos del autor/es, Iniciales. (Año). Título del artículo. Nombre de la Revista, número o volumen (número), páginas que comprende el artículo dentro de la revista, si es que existen.

  García Aretio, L. (1999). Historia de la educación a distancia. RIED. Revista Iberoamericana de Educación a Distancia, 2 (1), 11-40.

- *Capítulo o artículo en libro*: Apellidos del autor, Iniciales. (Año). Título del artículo o capítulo. En Iniciales. Apellidos del autor/es, (Ed. o Coord., sí es el caso), Título del libro. (páginas que comprende el artículo o capítulo dentro del libro). Ciudad: Editorial.

  Oettinger, A. G. (1971). Compunications in the national decision-making process. En M. Greenberger, (Ed.), Computers, communication, and the public interest (73-114). Baltimore: Johns Hopkins Press.

  Referencias de formatos electrónicos:

- *Documentos electrónicos:* autor/es (fecha publicación). Título [tipo de medio]. Lugar de publicación: editor. Recuperado de: especifique URL.

  Martín, S. (2011). Educación Aumentada: Realidad o Ficción. Blog CUED. Recuperado de http://goo.gl/w46mpA.

- *Artículos en publicaciones periódicas electrónicas* (Revistas electrónicas)

  Apellidos del autor/es, Iniciales. (Año). Título del artículo. *Nombre de la Revista*, número o volumen y (número), páginas que comprende el artículo dentro de la revista. DOI o en su defecto, recuperado de URL

- La información actualizada sobre la forma de citación puede ser consultada en la página de APA (American Psycological Association).
- Los esquemas, gráficos, tablas y fotografías deberán ser claros y se presentarán titulados, numerados e insertos en el cuerpo del texto.

Clame Comite Latinoamericano de Matematica Educativa