Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Acta Latinoamericana de Matemática Educativa

VOLUMEN 35 » NÚMERO 1 » AÑO 2022 » ISSN 2448-6469

ALME 35

ACTA LATINOAMERICANA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA, Volumen 35, Número 1, febrero 2022, es una publicación semestral editada por el Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, Av. Universidad 1900, Oxtopulco Universidad, Delegación Coyoacán, C.P. 04460, Ciudad de México, www.clame.org.mx, articulos.alme@gmail.com. Reserva de Derechos al Uso Exclusivo 04-2015-082710244200-203, otorgado por el Instituto Nacional del Derecho de Autor, ISSN: 2448-6469. Se autoriza la reproducción total o parcial, previa cita a la fuente:

Autor(es) (2022). Nombre del artículo. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 35 (1)*. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Comité Científico de Evaluación

PRESENTACIÓN

Para este número el Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (ALME) continúa como publicación semestral editada por un equipo editorial conformado por investigadoras e investigadores en Matemática Educativa procedentes de distintos países latinoamericanos que trabajan arduamente por visibilizar las acciones y la producción académica de la comunidad.

Este número de ALME deja aún en evidencia los desafíos a los que nos enfrentó la Pandemia, afectando aún los ritmos y tiempos requeridos para la producción académica entre los miembros de la Comunidad Latinoamericana de Matemática Educativa, y en el número de contribuciones recibidas. A pesar de ello el número visibiliza propuestas de investigación y enseñanza desde la evaluación y el seguimiento para fortalecer los procesos de enseñanza y aprendizaje con la implementación de diversos recursos metodológicos.

En el ALME número 1 del volumen 35 presentamos 17 artículos de diversas posturas metodológicas y teóricas, agrupados en temáticas relacionadas con el análisis del discurso matemático escolar, las propuestas para la enseñanza de las Matemáticas, los aspectos socioepistemológicos para el análisis y el rediseño del discurso matemático escolar, el pensamiento del profesor, sus prácticas y su formación profesional, y el uso de recursos tecnológicos en el proceso de aprendizaje de la Matemática. Documentos que fueron parte de una convocatoria especial para miembros CLAME, integrantes de Juventud CLAME, asistentes a las RELME 30, 31, 32, 33, 34 y conferencistas de los Webinar UPC-CLAME.

Este número es fruto del trabajo arduo que realizaron las autoras, los autores y el equipo editorial para contribuir a la profesionalización de la Comunidad Latinoamericana de Matemática Educativa, y al fortalecimiento del desarrollo del pensamiento matemático en un contexto de retos e incertidumbres de la época actual.

Olga Lidia Pérez González
Presidenta del Consejo Directivo
CLAME (2016-2022)

TABLA DE CONTENIDOS

SECCIÓN 1:
ANÁLISIS DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR

SECCIÓN 2:
PROPUESTAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

TABLA DE CONTENIDOS

SECCIÓN 3

ASPECTOS SOCIOEPISTEMOLÓGICOS EN EL ANÁLISIS Y EL REDISEÑO DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR

TABLA DE CONTENIDOS

SECCIÓN 4:

EL PENSAMIENTO DEL PROFESOR, SUS PRÁCTICAS Y ELEMENTOS PARA SU FORMACIÓN PROFESIONAL

SECCIÓN 5:

USO DE LOS RECURSOS TECNOLÓGICOS EN EL PROCESO DE APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

SECCIÓN 1

ANÁLISIS DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR

Clame Acta Latinoamericana de Matemática Educativa
SECCIÓN 1 / ANÁLISIS DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR
VOL 35, NÚMERO 1, AÑO 2022

EVIDENCIAS DE PENSAMIENTO FUNCIONAL EN ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN PREESCOLAR

EVIDENCE OF FUNCTIONAL THINKING IN PRESCHOOL EDUCATION STUDENTS

Yurry Daniela Quenorán Lucano, Honorina Ruiz Estrada, Juan Nieto Frausto
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (México)
daniela.quenoran@alumno.buap.mx, honorina.ruizestrada@viep.com.mx, juan.nieto@correo.buap.mx

Resumen
Se reportan evidencias orales de la presencia de pensamiento funcional de recurrencia y correspondencia en cinco niños de tercero de Preescolar Comunitario de la Comunidad Santa Cruz La Ixtla, Puebla, México. Los datos se obtienen de entrevistas clínicas que involucran seis tareas basadas en investigaciones previas realizadas en los Estados Unidos de América y en España. Las sesiones fueron grabadas en audio y luego transcritas, de donde se observa como transitan los informantes a través del pensamiento funcional antes citado. A diferencia de estos trabajos, nosotros interrogamos individualmente a los escolares y no encontramos evidencias de pensamiento covariacional.

Palabras clave: pensamiento funcional, educación prescolar, pensamiento de recurrencia, correspondencia y covariacional

Abstract
This paper reports oral evidence of the presence of recurrence and correspondence functional thinking in five third-grade children from the Community Preschool of Santa Cruz La Ixtla Region, in Puebla, Mexico. Data are obtained from clinical interviews involving six previous research-based tasks which were conducted in the United States of America and Spain. The sessions were recorded in audio and then transcribed, from which it is observed how the participants go through the above mentioned functional thinking. Unlike those papers, we questioned schoolchildren individually, but we found no evidence of co-variational thinking.

Key words: functional thinking, preschool education, recurrence, correspondence, and co-variational thinking

Introducción

El enfoque Early Algebra, busca que los estudiantes construyan su razonamiento de forma intuitiva sobre patrones y relaciones en el trabajo aritmético a través de experiencias cotidianas como base para el pensamiento algebraico (Stephens et al. (2017)). Una de las formas de este pensamiento es el pensamiento funcional, el cual se centra en la variación entre dos cantidades cambiantes (Smith, 2008), siendo la función el objeto matemático principal. Cabe señalar, que el propósito no es enseñar el concepto de función desde los primeros años de escolaridad tal como es presentado en la educación secundaria. Más bien, se trata de utilizar el potencial de este objeto matemático y de los conceptos matemáticos asociados, de forma que los estudiantes desarrollen habilidades que les permitan pensar algebraicamente, desde los primeros ciclos escolares.

Blanton y Kaput (2004) lideran una investigación que se enfoca en cómo los estudiantes de preescolar a quinto grado de educación primaria evidencian pensamiento algebraico, a través de la generalización de patrones en la resolución de una tarea que involucra la relación funcional entre perros, ojos y colas. Los autores exponen que los niños de prescolar (de 5 a 6 años) hallaron el número de ojos y colas hasta 10 perros, mediante el conteo de objetos visibles, asignando un punto para cada ojo y una marca larga para cada cola. Además, mencionan que los alumnos mostraron pensamiento covariacional porque, atendieron tanto el número de perros como el de ojos simultáneamente de la siguiente forma “cada vez que agregamos un perro más obtenemos dos ojos más”. Estos autores concluyen que, aunque las matemáticas de la educación primaria incluyen nociones de patrones, no se presta atención al pensamiento funcional, especialmente en los primeros grados de escolaridad. Ellos señalan que, la búsqueda de patrones en los datos de una sola variable tiene menos capacidad predictiva y es menos poderosa matemáticamente que el pensamiento funcional. Por lo que es necesario que el plan de estudios atienda cómo dos magnitudes varían simultáneamente.

Por otra parte, Castro et al. (2017) presentan un estudio centrado en el pensamiento funcional de un grupo de 12 estudiantes de educación preescolar (5-6 años) de un colegio privado de Granada, España. Plantearon tres tareas: 1) perros y collares, 2) perros y platos de comida y 3) perros, platos de comida y uno de agua. Los investigadores presentaron el contexto de la situación empleando imágenes de perros, collares y platos en colores que se pegaron en la pizarra, y formularon preguntas relativas a casos particulares (5, 7, 10 perros) y a medida que los estudiantes entendieron lo que se les preguntaba, cuestionaron por un número mayor de perros (5, 200 y 1000 perros), llegando a preguntar por la generalización en términos de variables (m, x y z). Se desarrollaron tres sesiones de forma colectiva y fueron grabadas con videocámara. Con respecto a la tarea 2, ellos señalan que se evidencia pensamiento covariacional y de correspondencia. El primero, se refleja cuando los estudiantes suman dos cada vez que se aumenta un perro (porque dos más dos son cuatro, más otro dos son seis, más otro dos son ocho) y el pensamiento de correspondencia cuando tienen en cuenta dos veces el mismo número de perros (100 perros, necesitan 200 platos).

Siguiendo a estos autores, nos interesamos en la búsqueda de evidencias de pensamiento funcional en niños de preescolar atendidos por el Consejo Nacional de Fomento Educativo (CONAFE). El CONAFE es un organismo público descentralizado que se creó el 11 de septiembre de 1971, con el fin de garantizar el acceso a la educación básica de niñas y niños mexicanos de comunidades de alta y muy alta marginación, en las cuales no es posible contar con un servicio educativo regular de la Secretaría de Educación Pública (SEP). Este organismo es encargado de generar nuevos modelos pedagógicos enfocados en abatir el rezago educativo, uno de ellos es el Aprendizaje Basado en la Colaboración y el Diálogo (ABCD), que consiste en brindar atención personalizada a niñas, niños y adolescentes de las comunidades que atiende, buscando desarrollar en cada participante la capacidad de aprender mediante el diálogo y la colaboración. El CONAFE cuenta con tres modalidades de atención: comunitario (estudiantes que hablan español), indígena (estudiantes que hablan una lengua indígena) y migrante (estudiantes que se trasladan de un lugar a otro).

En esta investigación abordamos la pregunta, ¿qué evidencias hay de pensamiento funcional en estudiantes de educación preescolar cuando trabajan con tareas que involucran la variación directamente proporcional y la lineal?

Para ello, planteamos el siguiente objetivo: identificar evidencias de pensamiento de recurrencia, correspondencia, variacional o covariacional en estudiantes de educación preescolar cuando trabajan con tareas en las que subyacen la variación directamente proporcional y la lineal.

Marco teórico

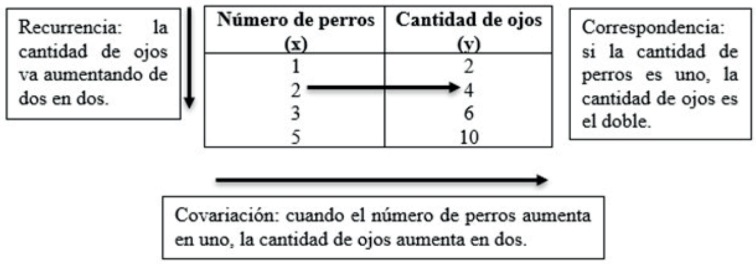
De acuerdo con la literatura, el pensamiento funcional es abordado de diversas maneras, guardando ciertas similitudes que remiten a la relación entre dos cantidades que varían y la generalización de las relaciones. Sin embargo, también presentan matices distintos que dependen de los objetivos que las investigaciones quieren alcanzar. Así, Warren y Cooper (2005) lo define como: a) las ideas de cambio (cualitativo y cuantitativo), b) las relaciones que hay entre ellas y c) la solución de problemas utilizando estas relaciones. Así mismo, estos autores añaden que, a través del pensamiento funcional se pueden establecer relaciones de dependencia entre valores de dos conjuntos en una situación cercana y cotidiana para el estudiante, lo que permite descubrir otras parejas de valores en la situación y la generalización de la relación existente entre pares de datos. Además, para Rico (2007), el pensamiento funcional es una herramienta para la resolución de problemas, que puede resultar útil para pensar en las relaciones entre las cantidades que varían y debe considerarse como una meta disciplinar y fundamental en la enseñanza de las matemáticas.

También, para Smith (2008), el pensamiento funcional se entiende como una actividad cognitiva que "se enfoca en la relación entre dos cantidades que varían, particularmente las formas de pensamiento que conducen desde las relaciones específicas (incidencias individuales) a generalizaciones de esas relaciones entre instancias" (p.145). Pinto y Cañadas (2017) establecen que el pensamiento funcional tiene como base, la relación entre cantidades involucradas, la variación conjunta y el concepto de función, siendo un contenido matemático fundamental. Por otra parte, mencionan que es uno de los enfoques del álgebra adoptado en la Educación Primaria, cuyo objetivo es que los estudiantes se centren y desarrollen habilidades en cuanto al razonamiento sobre las relaciones entre cantidades que varían, la identificación de patrones que subyacen de las relaciones y sus representaciones y la realización de procesos de generalización con el fin de justificarlos.

De acuerdo con algunas posturas respecto al pensamiento funcional y en relación a los objetivos del presente trabajo, seguimos el planteamiento de Smith (2008) quien, además presenta características más amplias sobre el pensamiento funcional, que se describen a continuación. Smith (2008), distingue tres tipos de pensamiento en los procesos de generalización: 1) recurrencia, 2) correspondencia y 3) covariación. Blanton y Kaput (2011) los define de la siguiente manera: el pensamiento de recurrencia, implica encontrar la variación dentro de una secuencia de valores. El de correspondencia, se basa en la identificación de una correlación entre variables. Y el pensamiento covariacional, consiste en analizar cómo dos cantidades varían simultáneamente y mantienen ese cambio como una parte explícita y dinámica de la descripción de una función.

En la figura 1 se presenta la tarea de "perros y ojos" para ilustrar, a manera de ejemplo, los tres tipos de pensamiento funcional.

Figura 1. *Relación funcional entre número de perros y cantidad de ojos.*



Tomada de Pinto, E. (2016). Relaciones funcionales, sistemas de representación y generalización en estudiantes de tercero de primaria (Trabajo de fin de máster). Universidad de Granada, España.

Método

Los informantes son estudiantes de la comunidad Santa Cruz La Ixtla, ubicada en una zona rural del Estado de Puebla, México. Son niños de preescolar que se encuentran en una microlocalidad, conformada por una población campesina mestiza e indígena. Esta comunidad presenta una deficiencia o carencia en los servicios públicos básicos como el sistema de agua potable, alumbrado público y no cuentan con acceso a internet. Las familias que habitan en este contexto subsisten gracias a la producción agrícola para el autoconsumo y a la cría de animales en pequeña escala.

Teniendo en cuenta las características de la población objeto de estudio, esta investigación es de tipo cualitativo, con carácter exploratorio y descriptivo (Hernández, Fernández y Baptista, 2014). Es de corte cualitativo porque, al entrar en la comunidad Santa Cruz La Ixtla, se puede estudiar el pensamiento funcional desde el contexto de los participantes, dar una explicación detallada de los comportamientos y manifestaciones que ocurren dentro del mismo y describir las acciones y producciones de los estudiantes. Es exploratorio porque pretendemos identificar evidencias de pensamiento funcional de recurrencia, correspondencia y covariación, considerando que hay pocas evidencias en la literatura que aseveran que los niños de preescolar evocan estos tipos de pensamiento. Es descriptivo dado que, nuestros informantes tienen dificultades para leer, escribir y hacer operaciones a lápiz y papel. Por estos motivos, las respuestas a las preguntas planteadas en las seis tareas se obtienen de forma oral y se describen para identificar evidencias del pensamiento funcional.

La comunidad Santa Cruz La Ixtla cuenta con 19 niños de preescolar comunitario (con edades entre 3 y 6 años). 9 son de primero, 6 de segundo y 5 de tercero. La muestra se conformó por los cinco niños de tercero, porque saben contar del 1 al 50 de forma correcta. Algunos de ellos operan mentalmente de dos en dos y no tienen dificultad para relacionar las dos variables involucradas en cada tarea, esto se evidenció en un ensayo previo presentado a los estudiantes de los tres grados.

La recolección de datos se realizó mediante entrevistas clínicas semiestructuradas basadas en una secuencia de seis tareas que involucran la variación directamente proporcional y la lineal, las cuales fueron diseñadas previamente. Las entrevistas individuales se realizaron de manera presencial en tres sesiones, de 10 a 25 minutos cada una y fueron grabadas en audio. Se contó con material manipulable: 6 imágenes de perros y de platos, una hoja en blanco para adherir las imágenes y un marcador. Al inicio de cada entrevista, se recortó y pegó en la hoja en blanco una imagen de un perro y se explicó en qué consistía la tarea. Enseguida se pegó la segunda figura, se empezó a realizar preguntas y solo se utilizaron otras imágenes si la solución no era correcta.

En la tabla 1 se presenta el número de tarea, el tipo de variación que involucra cada tarea y ejemplos de preguntas que se realizaron a los estudiantes en las entrevistas clínicas.

Tabla 1 *Tareas y ejemplos de preguntas.*

Tipo de variación	Secuencia de tareas	Ejemplos de preguntas
$y = x$	**Tarea 1. Perros y colas**: La relación entre el número de perros y el número de colas. Modificado de Castro et al. (2017).	En un perro hay una cola, ¿cuántas colas hay en dos perros?, En tres perros, ¿cuántas colas habría? Y en nueve perros, ¿cuántas colas habría?
$y = x$	**Tarea 2. Perros y platos de comida**: La relación entre el número de perros y el número de platos de comida. Tomada de Castro et al. (2017).	Para un perro se necesita un plato de comida ¿cuántos platos se necesita para dos perros?, Para tres perros, ¿cuántos platos serían necesarios? Y para cuatro perros, ¿cuántos platos se necesitarían?
$y = 2x$	**Tarea 3. Perros y ojos**: La relación entre el número de perros y el número de ojos. Tomada de Blanton y Kaput (2004).	En un perro hay dos ojos, ¿cuántos ojos hay en dos perros?, ¿Cuántos ojos habría en tres perros? En cuatro perros, ¿cuántos ojos habría?
$y = 2x$	**Tarea 4. Perros, platos de comida y agua**: La relación entre el número de perros y el número de platos de comida y agua. Modificado de Castro et al. (2017).	Para un perro se necesita dos platos. Uno de comida y uno de agua. ¿cuántos platos se necesita para dos perros? ¿Cuántos platos son necesarios para tres perros? ¿Cuántos platos necesitarías para cuatro perros?
$y = 2x$ y $y = x$	**Tarea 5. Perros, ojos y colas**: La relación entre el número de perros y el número de ojos y colas. Tomada de Blanton y Kaput (2004).	Si en un perro hay dos ojos y una cola, ¿cuántos ojos y cuántas colas hay en dos perros?, ¿Cuántos ojos habría en tres perros y cuántas colas? Y en cuatro perros, ¿cuántos ojos y colas habría?
$y = x + 1$	**Tarea 6. Perros, platos de comida y uno de agua**: La relación entre el número de perros y el número de platos de comida y un plato de agua. A cada perro le corresponde un plato de comida y todos beben agua de un solo plato. Tomada de Castro et al. (2017).	Para un perro se necesita dos platos, uno de comida y uno de agua. Para dos perros se necesita tres platos, dos de comida y uno de agua, porque todos toman de un solo plato. Para tres perros, ¿cuántos platos serían necesarios? ¿Cuántos platos son necesarios para cuatro perros?

Elaboración basada en Castro et al. (2017)

De acuerdo con Castro et al. (2017) los niños parecen tener más dificultades con tareas que involucran la variación de tipo $y = x + b$ y $y = mx$, que las del tipo $y= x$, por tanto, se considera que esta última sería un punto de partida más apropiado para el desarrollo del pensamiento funcional. Por lo anterior, la secuencia de tareas inicia con las que involucran la variación de tipo $y= x$ (tareas 1 y 2), para luego pasar a la variación del tipo $y = mx$ (tareas 3 y 4) y finalizar con una breve mirada a la variación del tipo $y = x + b$ (tarea 6).

La tarea 1 se modificó de Castro et al. (2017). Ellos propusieron la tarea perros y collares. Fue necesario hacer la modificación a perros y colas, porque se consideró que esto permitiría a los estudiantes comprender la secuencia de tareas e ir articulando las respuestas de las primeras preguntas con las posteriores.

La tarea 3 (perros y ojos) y la tarea 5 (perros, ojos y colas) se tomaron de Blanton y Kaput (2004). Pero, se cambió el número de perros en las preguntas, ellos preguntaron por la cantidad de ojos que había en un perro, dos perros, tres perros y 100 perros. En el presente trabajo, se preguntó por tres, cuatro, cinco, seis, ocho y diez perros.

La tarea 4 se modificó de Castro et al. (2017). Ellos trabajaron con perros y dos platos de comida para cada uno. En el presente trabajo se presentó un plato de comida y uno de agua.

Finalmente, la tarea 6 se tomó de Castro et al. (2017). Cabe mencionar que ellos preguntaron solo hasta doce perros. Mencionan que los estudiantes decían no entender lo que se les estaba preguntando. A diferencia de nuestra investigación, las respuestas de los estudiantes permitieron preguntar por un número mayor de perros, inclusive se realizaron preguntas que involucraron variables.

Análisis de las entrevistas

En este trabajo se muestra las respuestas orales presentadas por los 5 estudiantes en las entrevistas de cada una de las seis tareas. Para ejemplificar y diferenciar la actividad matemática puesta en juego por cada alumno, se los etiquetó con la letra E seguido de un número del 1 al 5. La letra I se destina a la investigadora.

Las respuestas estudiantiles se agruparon en dos categorías. La categoría ***A1*** involucra el uso de figuras. En las seis tareas, los estudiantes llegan a la respuesta a través del conteo de uno en uno (uno, dos, tres, etc.). La categoría ***A2***, se refiere a las soluciones elaboradas sin usar figuras. Aquí se distinguen ocho subcategorías dependiendo de la manera de operar de los alumnos (vea la tabla 2).

Tabla 2 *Tareas, categoría A2 y subcategorías.*

Número de tareas	Subcategorías	Descripción	Estudiantes
***Tarea 1* (perros y colas) y *Tarea 2* (perros y platos de comida)**	*A2.1:* conteo de uno en uno.		E1, E2
	A2.2: sin contar de uno en uno en casos particulares	Halla la solución rápidamente para cualquier número de perros (diez, doce, quince, etc.)	E3, E4, E5
	A2.3: uso de variables.	Acepta las variables (*m, x, z*) como representes de números de perros.	E3, E4, E5
***Tarea 3* (perros y ojos)**	*A2.4*: operan haciendo grupos de dos.	Realiza grupos de dos para hallar la solución (dos, dos, dos, dos, ocho ojos).	E4, E5
	A2.5: suma el patrón al valor anterior.	Identifica que el patrón de la variable ojos es dos y lo agrega al valor previo (son diez y acá son doce).	E4, E5
***Tarea 4* (perros, platos de comida y agua)**	*A2.6:* separa la variable platos de comida y agua.	En lugar de hallar el número total de platos, da el número de platos de comida por un lado y el plato de agua por otro (cuatro platos de comida y cuatro platos de agua).	E3, E4 y E5
***Tarea 5* (perros, ojos y colas)**	*A2.7*: suman dos veces el mismo número	Reconoce que puede hallar el resultado sumando dos veces el mismo número (diez más diez son veinte).	E5
***Tarea 6* (perros, platos de comida y uno de agua)**	*A2.8*: agrega el plato con agua.	Identifica que para cualquier número de perros siempre va a haber un plato con agua.	E2, E3, E4 y E5

Nota: Quenorán, Ruiz y Nieto (2022)

A continuación, se muestra de forma detallada un ejemplo de cada una de estas ocho subcategorías. Se presentan las soluciones estudiantiles y el análisis correspondiente.

Análisis de las respuestas estudiantiles en las entrevistas de las tareas 1 y 2

A continuación, se presentan ejemplos representativos de las categorías de las respuestas orales de estudiantes de tercero de preescolar, correspondientes a las seis tareas que involucran pensamiento funcional.

Las respuestas de los alumnos E1 y E2, a la tarea 1, se ubican en la subcategoría A1.1. A la pregunta, ¿cuántas colas habría en cuatro perros?, al parecer, E1 no comprendió la pregunta, porque, después de una pausa contó de uno en uno hasta el número diecisiete. Esta dificultad fue superada con ayuda de figuras de perros. Seguidamente, se transcribe la conversación del investigador con la estudiante E1.

I: En cuatro perros, ¿cuántas colas habría?
E1: Una, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, once, doce, trece, catorce, quince, dieciséis, diecisiete.
I: Vamos a ver cuántas colas hay en cuatro perros (se pega una cuarta imagen).
E1: Una, dos, tres, cuatro (cuenta las colas de los perros con su dedo índice).
Ahora, en relación a la tarea 2, las respuestas de E1 y E2 se ubican en la subcategoría A2.1. Esta es la interlocución entre I y E1.
I: Y para seis perros ¿Cuántos platos necesitaríamos?
E1: Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis.
I: Seis qué
E1: Seis platos.
I: ¿Para siete?
E1: Uno, dos, res, cuatro, cinco, seis, siete platos

Lo anterior, indica que E1 reconoció el patrón como un proceso de conteo (uno, dos, tres, cuatro) y no como una relación general (por ejemplo, “es uno más cada vez”) (Blanton, et al. (2015)). Esta forma de operar no permite establecer la relación entre un conjunto de valores de una misma variable (colas), o la relación entre las dos variables (perros y colas). Por tanto, se puede decir que E1 y E2 no dan cuenta de emplear pensamiento funcional en las entrevistas de estas tareas.

Por otra parte, de acuerdo con las soluciones proporcionadas por los estudiantes E3, E4 y E5 se puede observar que sus respuestas se ubican en la subcategoría A2.2 y muestran evidencias de pensamiento de correspondencia. Pues, identifican la regla que les permite hallar el número de colas en la entrevista de la tarea 1 y el número de platos en la entrevista de la tarea 2, dado un número de perros. El siguiente fragmento es el diálogo entre I y E3 con respecto a la tarea 1.

I: En quinientos perros, ¿cuántas colas habría?
E3: Quinientas colas.
I: ¿Cómo sabes que son quinientas colas?
E3: Porque son quinientos perros.
I: Qué tal un millón, ¿cuántas colas habría?
E3: Un millón de colas.
I: Por qué un millón de colas.
E3: Porque es un millón de perros.

Cabe resaltar, que E3, E4 y E5 transitaron de situaciones particulares a la generalización considerando las variables m, x, y, z). Ellos no tuvieron dificultad en aceptar las letras como representantes de cantidades (Castro et al.

(2017)). De esta manera, las soluciones de estos tres estudiantes se sitúan en la subcategoría A2.3, dando evidencia de pensamiento de correspondencia. A continuación, se muestra lo antes mencionado.

I: Si tenemos m perros, ¿cuántas colas habría?
E3: ¿ m colas?
I: ¿Por qué m colas?
E3: Porque son $m$perros.
I: ¿Cuántas colas habría en x perros?
E3: x colas.

Al comparar las respuestas entre los niños del CONAFE y los niños entrevistados por Castro et al. (2017), quienes aplicaron la tarea perros y collares (tarea de tipo $y = x$), se evidenció que, en ambos casos, algunos niños (como E3, E4 y E5, niños del CONAFE) muestran evidencias de razonamiento algebraico porque no tuvieron dificultades en pasar de situaciones particulares a la generalización de variables.

Análisis de las respuestas estudiantiles en la entrevista de la tarea 3

Ahora nos enfocamos en las categorías A2.4 y A2.5, donde se ubican las producciones orales de los alumnos E4 y E5. Ellos hallaron el número de ojos, considerando hasta diez perros, se dieron cuenta que, un perro tiene dos ojos y para un número mayor de perros agregaron dos ojos por cada perro que consideraban, identificando, de esta manera, pensamiento de recurrencia.

En el fragmento dado abajo, se observa que la solución del alumno E5 se ubica en la subcategoría A2.4. Él identifica que el patrón de la variable número de ojos (en un perro) es dos. Así, al preguntarle por cuántos ojos habría en cuatro perros, él responde: "ocho". ¿Cómo lo hizo? E5 menciona que "son dos ojos, otros dos, otros dos y otros dos, son ocho". Esto indica que hizo grupos de dos y sumó de dos en dos. Aquí el diálogo sostenido con este estudiante.

I: Y en cuatro perros, ¿cuántos ojos habría?
E5: Ocho ojos.
I: ¿Cómo sabes que son ocho?
E5: Porque son dos ojos, otros dos, otros dos y otros dos son ocho.
Otra forma de contar empleada por E5 se ubica en la subcategoría A2.5. Después de preguntar por el número de ojos en diez perros, la investigadora hizo la siguiente pregunta: ¿qué tal si hubiese un perrito más?, ¿cuántos ojos más habría?, E5 respondió: "once" y luego dice "doce ojos". En su respuesta se evidencia que hizo grupos de dos llegando a diez y finalmente le agregó dos para un total de doce ojos, tal como se observa a continuación.
I: […] Aaah son diez, ¿qué tal si hubiese un perrito más?, ¿cuántos ojos más habría?
E5: Once.
I: ¿Once?
E5: Y doce ojos.
I: ¿Cómo sabes que son doce?
E5: Porque son dos, dos, dos, dos, dos, entonces son diez y acá son doce (señalando la hoja con el dedo índice como si mirara las figuras de los perros).

De esta forma se concluye, que tanto los informantes del estudio de Blanton y Kaput (2004), como dos niños del CONAFE (E4 y E5) identificaron el patrón en la variable ojos (tarea 3) y operaron a partir de ello. Este aspecto es importante, porque los estudiantes identificaron la variación en la variable ojos. Aunque, no establecieron la relación en términos de generalización, tal como: "siempre que agregamos un perro más, obtenemos dos ojos más", que fue la respuesta colectiva proporcionada por los niños en el estudio de Blanton y Kaput (2004).

Análisis de las respuestas estudiantiles en la entrevista de la tarea 4

En las respuestas proporcionadas por E3, E4 y E5 se identificó la subcategoría A2.6 y evidencias de pensamiento de correspondencia. Si bien, ellos no hallaron el total de número de platos para un determinado número de perros, sí identificaron que el número de platos de comida o el número de platos de agua es el mismo que el número de perros, lo que les permitió hallar la solución correcta al preguntar tanto por un número pequeño de perros (cuatro perros) como por un número grande (quinientos perros). Incluso, preguntas que involucran variables. Aquí, el diálogo entre la I y E5.

I: […] Y para 500 perros, ¿cuántos platos se necesitaría?
E5: Son 500 perros, 500 platos de comida y 500 platos de agua.
I: ¿en un millón de perros cuántos platos necesitaríamos?
E5: Un millón de platos de comida y un millón de platos de agua.
I: ¿Cómo sabes que son un millón de platos de comida y de agua?
E5: Porque son un millón de perros.

Cabe mencionar que, en el tipo de soluciones proporcionadas por los estudiantes en la entrevista de esta tarea, no se evidencia relación alguna con aquellas respuestas obtenidas en la investigación de Castro et al. (2017). Quizá porque, en Castro y colaboradores presentaron la tarea, perros y platos de comida, donde a cada perro le corresponde dos platos de comida y en este caso a cada perro necesita un plato de comida y uno de agua.

Análisis de las respuestas estudiantiles en la entrevista de la tarea 5

Un aspecto importante en las respuestas de los estudiantes frente a la entrevista de la tarea "perros, ojos y colas", particularmente, las producciones de E5 se relacionan con la subcategoría A2.7. A la pregunta: ¿cuántos ojos y cuántas colas hay en diez perros? El estudiante menciona que "diez colas" y "veinte ojos" y más adelante expone que "los perros tienen dos ojos y son diez, entonces son veinte ojos". Esto significa que, el estudiante suma dos veces el mismo número Castro et al. (2017). El diálogo entre I y E5, permite evidenciar el paso del empleo del *pensamiento de recurrencia* al de correspondencia.

I: […] ¿Y en 10 perros?
E5: Diez colas.
I: ¿Y cuántos ojos habría?
E5: Veinte ojos.
I: ¿Cómo sabes que son veinte ojos?
E5: Porque en diez perros son veinte ojos.
I: Pero, por qué veinte ojos.
E5: Porque los perros tienen dos ojos y son diez entonces son veinte ojos.

Al comparar las soluciones estudiantiles de esta tarea, particularmente, la expuesta por E5, "los perros tienen dos ojos y son diez entonces son veinte ojos" se relaciona con la respuesta proporcionada por los niños objeto de estudio en Castro, et al. (2017), en la tarea perros y platos de comida (dos platos de comida por cada perro). Estos autores preguntaron por ¿cuántos platos se necesita para cinco perros? Ellos señalan que un estudiante respondió que se necesitan diez platos, porque sumó cinco más cinco.

Análisis de las respuestas estudiantiles en la entrevista de la tarea 6

En este último apartado, E2, E3, E4 y E5 evidencian pensamiento de *correspondencia*. E2 halló el número de platos hasta seis perros, E3 hasta veinte, mientras que E4 y E5 reconocieron el patrón de tomar el mismo número de platos que de perros, y tuvieron en cuenta que cualquier cantidad de perros iban a beber agua del mismo plato. En el siguiente fragmento se evidencia que E2, a la pregunta ¿cuántos platos se necesita para cuatro perros?, E2 dice: "cuatro platos de comida" y a la pregunta ¿y cuántos de agua?, menciona que "uno". Igualmente, al preguntar para seis perros, responde "seis de comida y uno de agua", que se ubica en la subcategoría A2.8.

I: Si tuviéramos cuatro perros, ¿cuántos platos necesitaríamos?
E2: Cuatro platos de comida.
I: ¿Y cuántos de agua?
E2: Uno.
I: ¿Y si tuviéramos seis perros?
E2: Seis platos de comida y un plato de agua.

Castro et al. (2017) mencionan que en esta tarea obtuvieron poca información debido a que, muy pocos estudiantes habían identificado el patrón de tomar el mismo número de platos que de perros y agregarle el plato con agua. A diferencia de ellos, en esta investigación, hallaron la solución tanto en casos particulares como en casos que involucraron variables.

Conclusiones

Este trabajo aporta evidencias acerca de pensamiento de recurrencia y de correspondencia en cinco niños de tercero de preescolar, alumnos del subsistema educativo CONAFE, México. Los testimonios fueron recabados mediante las respuestas orales de seis tareas del tipo $y = x$ (tarea 1 y 2), $y = 2x$ (tarea 3 y 4), $y = x$ y $y = 2x$ (tarea 5) y $y = x + 1$ (tarea 6).

A diferencia de las investigaciones de Blanton y Kaput (2004) y Castro et al. (2017), el presente estudio da cuenta del pensamiento funcional de cada uno de los cinco alumnos que entrevistamos. Estos autores reportaron evidencias de pensamiento de correspondencia y covariacional en escolares de este mismo nivel educativo. Nosotros no observamos este último tipo de pensamiento en nuestros informantes.

Los participantes en el presente trabajo dan evidencias de pensamiento de recurrencia en la tarea 3, perros y ojos (de tipo $y = 2x$). Fue la tarea más difícil, porque el pensamiento operacional de nuestros informantes es aún aditivo, lo que les impide reconocer que es el doble o que pueden hallar el resultado multiplicando por dos (Castro et al. (2017)). El pensamiento de correspondencia se evidencia, en la tarea 1 (perros y colas), tarea 2 (perros y platos de comida), tarea 4 (perros, platos de comida y agua), tarea 5 (perros, ojos y colas y tarea 6 (perros, platos de comida y uno de agua). Los estudiantes identificaron la relación entre las variables involucradas, estableciendo una regla que les permitiera hallar el resultado a partir de un valor dado. En vista de lo anteriormente dicho, podemos afirmar que la secuencia de tareas presentadas es factible y se puede llevar al aula de clases para fomentar el pensamiento funcional en alumnos de preescolar.

La principal limitación del presente trabajo es la escasa bibliografía acerca del pensamiento funcional en niños de preescolar. Hasta donde sabemos, no existen reportes de producción escritas elaboradas por niños de este nivel educativo, por lo que es recomendable aplicarlas a estudiantes de los primeros grados de educación primaria y solicitar que las respuestas sean escritas, como forma de complementar el presente estudio. Si bien, entrevistamos presencialmente a nuestros informantes, ellos estuvieron en confinamiento parcial debido a la pandemia por el COVID 19. Esta variable no fue considerada en nuestro estudio, aunque la tutoría por pares, maestro-alumno, es relevante en el modelo ABCD del CONAFE. Tampoco consideramos la variable género ni la cultura propia de la comunidad de los escolares participantes. Dado que México es un país pluricultural, estas dos últimas variables pueden cambiar significativamente de una comunidad a otra.

Referencias bibliográficas

Blanton, M., & Kaput, J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. In M. Johnsen, & A. Berit (Eds.), Proceedings of the 28th international group of the psychology of mathematics education (pp. 135–142). Bergen, Norway: Bergen University College

Blanton, M., & Kaput, J. J (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. In J. Cai, & E. Knuth (Eds.), Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives (pp. 5–23). Heidelberg, Germany: Springer.

Castro, E., Cañadas, M., & Molina, M. (2017). Pensamiento funcional mostrado por estudiantes de Educación Infantil. Educación Matemática En La Infancia, 6(2), 1–13.

Hernández, R, Fernández, C y Baptista, P (2014). Metodología de la Investigación 6°edición. México, DF: McGraw-Hill / Interamericana Editores, S.A. DE C.V. Recuperado de http://uca.ac.cr/wp-content/uploads/2017/10/Investigacion.pdf

Pinto, E. (2016). Relaciones funcionales, sistemas de representación y generalización en estudiantes de tercero de primaria (Trabajo de fin de máster). Universidad de Granada, España

Pinto, E. y Cañadas, M.C. (2017). Estructuras y generalización de estudiantes de tercero y quinto de primaria: un estudio comparativo. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), Investigación en Educación Matemática XXI (pp. 407-416). Zaragoza: SEIEM.

Rico, L. (2007). La competencia matemática en PISA. PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática, 1(2), 47-66

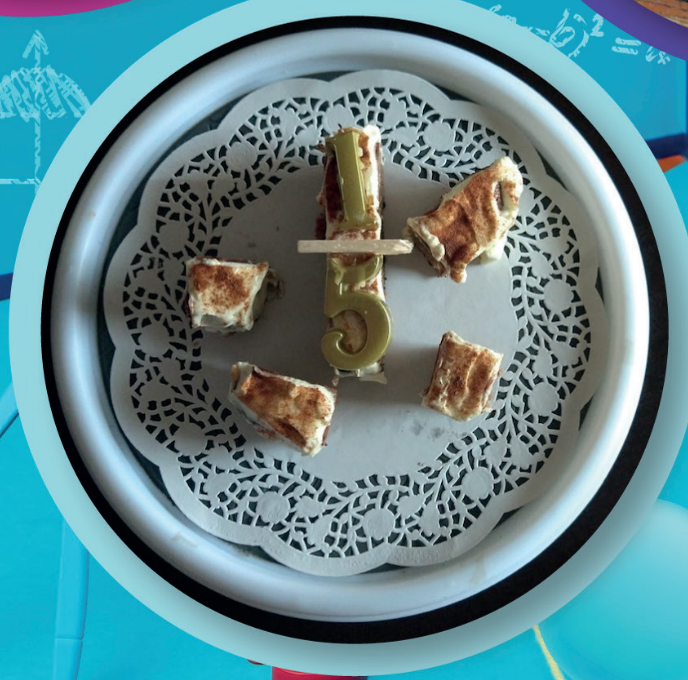
Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. En J. Kaput, W. Carraher y M. Blanton (Eds.), Algebra in the early grades (pp. 133-160). Nueva York, NY: Lawrence Erlbaum Associates

Stephens, A. C., Fonger, N., Strachota, S., Isler, I., Blanton, M., Knuth, E., & Murphy Gardiner, A. (2017). A Learning Progression for Elementary Students' Functional Thinking. Mathematical Thinking and Learning, 19(3), 143–166. Doi: 10.1080/10986065.2017.1328636

Warren, E., & Cooper, T. (2008). Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 year olds' thinking. *Educational Studies in Mathematics*, *67*(2), 171–185. Doi: 10.1007/s10649-007-9092-2

SECCIÓN 2

PROPUESTAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS



A CONTRIBUIÇÃO DA ETNOMATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO ESCOLAR INDÍGENA DO POVO GUARANI M'BYA

THE CONTRIBUTION OF ETHNOMATHEMATICS IN THE INDIGENOUS SCHOOL EDUCATION OF GUARANI M'BYA PEOPLE

José Roberto Linhares de Mattos, Sandra Maria Nascimento de Mattos, Bárbara de Medeiros Marinho
Universidade Federal Fluminense, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (Brasil)
jrlinhares@gmail.com, smnmattos@gmail.com, bmarinho@ufrrj.br

Resumo
Este trabalho apresenta alguns resultados de uma pesquisa, cujo objetivo é analisar a contribuição da Etnomatemática na escola estadual indígena KaraíKuery Renda do povo Guarani M'bya, para a preservação da cultura indígena. A pesquisa contribui para a valorização dos conhecimentos, em particular os matemáticos, gerados e difundidos pelos membros da comunidade, pois entendemos que as pessoas precisam interagir com o mundo utilizando e reforçando os valores da sua própria cultura. A metodologia utilizada é a observação participante na aldeia e entrevistas semiestruturadas com os professores da escola. Resultados preliminares mostram um avanço na valorização cultural desse povo, por meio de sua educação escolar indígena que ainda precisa ser melhorada.

Palavras chaves: etnomatemática, educação escolar indígena, Guarani

Abstract
This paper presents some results of a research aimed at analyzing the contribution of ethno-mathematics in the KaraíKuery Renda indigenous state school, of the Guarani M'bya people, for the preservation of indigenous culture. The research contributes to the assessment of knowledge, especially mathematics ones, generated and disseminated by community members, since we understand that people need to interact with the world by using and reinforcing the values of their own culture. The methodology used is participant observation in the village, and semi-structured interviews with the school teachers. Preliminary results show an advance in the cultural valuation of this people, through its indigenous school education which still needs to be improved.

Keywords: ethnomathematics, indigenous school education, Guarani

Introdução

Desde a época do Brasil colonial até o final da década de 1980, a educação escolar indígena no Brasil teve uma tendência voltada à homogeneização cultural, objetivando tornar os indígenas cidadãos brasileiros desconsiderando suas diferenças culturais, étnicas e linguísticas. De acordo com o Referencial Curricular Nacional para as Escolas Indígenas - RCNEI (Brasil, 1998b) - a rotina da maioria dos povos indígenas, no Brasil, acontece num enredo de conflito entre conhecimentos indígenas e não indígenas. Porém, a Constituição Federal (Brasil, 1988), garante uma educação diferenciada e de qualidade, construída e planejada. A legislação foi um grande avanço, mas para que se faça uma ruptura com a perspectiva educacional eurocêntrica, a lei precisa ser efetivamente cumprida.

A educação diferenciada nas escolas das comunidades indígenas precisa atender duas necessidades: o acesso aos conhecimentos universais e as práticas escolares que promovam respeito aos conhecimentos tradicionais da cultura. Há mais de 30 anos é dever do estado oferecer uma educação escolar indígena bilíngue e intercultural, porém é necessário que o Estado também assegure que os povos indígenas tenham o efetivo controle de suas escolas, proporcionando uma formação adequada aos professores indígenas e outros membros da comunidade que possuem interesse em atuar nas escolas da etnia. Assim, a adequação do currículo e a escolha do Projeto Político Pedagógico (PPP), poderão ser elaborados pelos professores indígenas, a comunidade, as lideranças e assessorias, sempre com a intenção de recuperar e preservar a história da comunidade. Cada etnia deveria produzir seu próprio material escolar, porém, devido ao grande número de etnias, produzir materiais específicos para cada uma delas ainda é um grande desafio para manter a qualidade do ensino.

Segundo a Fundação Nacional do Índio (FUNAI) (Brasil, 2018), atualmente, no país, encontram-se 305 povos indígenas que falam 274 línguas diferentes. No estado do Rio de Janeiro, no Brasil, existem indígenas da etnia Guarani do subgrupo M'bya, falantes da língua Guarani. Este povo ocupa no estado três terras indígenas: a Terra Indígena Araponga e a Terra Indígena Parati-Mirim, localizadas no município de Paraty e a Terra Indígena Guarani de Bracuí, localizada no município de Angra dos Reis, local onde são realizadas as pesquisas deste trabalho.

Todas as matérias obrigatórias que são ministradas dentro do espaço escolar possuem o potencial de serem trabalhadas numa perspectiva que valorizem a cultura da comunidade. A nossa pesquisa restringe-se a investigar a disciplina matemática.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (1998a, p. 33) apontam o Programa Etnomatemática como uma proposta de ação pedagógica com o intuito de entender a realidade do aluno e fazer uma conexão da matemática com a pluralidade cultural. A Etnomatemática não se limita apenas em entender os conhecimentos matemáticos realizados no cotidiano dos alunos, mas possui uma abordagem bem mais ampla. O Programa Etnomatemática, do ponto de vista educacional, oportuniza uma possível articulação entre o conhecimento acadêmico e o conhecimento empírico propiciando um significado social e culturalmente contextualizado no que diz respeito ao ensino da matemática.

A escola deve ser um espaço de reflexão e construção coletiva com a participação direta dos estudantes, professores e membros da comunidade, com o intuito de formar indivíduos críticos em relação a realidade em que estão inseridos. Introduzindo elementos da cultura do seu povo no processo de ensino da matemática, a aprendizagem se torna mais significativa contribuindo para que o aluno entenda o espaço onde vive, além de relacionar a matemática praticada na sua cultura com a matemática praticada em outras culturas.

Diante dessas reflexões, o problema que norteia a nossa investigação é: que contribuições a Etnomatemática pode dar à educação escolar indígena Guarani M'bya?

> Estudos de Etnomatemática ajudaram a esclarecer que a matemática está em todos os processos de ensino e aprendizagem, como parte de processo e enculturação. Quando algumas técnicas, digamos, de construção de

> casa, são passadas para a geração seguinte nós também estamos testemunhando um processo de educação matemática. (Skovsmose, 2007, p. 48).

Assim, é importante que a comunidade reconheça a importância da matemática produzida pelo seu povo e relacione-a com a matemática praticada na academia.

Ao analisarmos a trajetória das escolas indígenas no Brasil, percebemos que foram estruturadas sob a ótica da escola tradicional e que, infelizmente, a história registra alguns resultados desastrosos no que diz respeito aos projetos políticos pedagógicos para essas escolas. Mattos e Ferreira Neto relatam sobre suas investigações que:

> Percebemos em muitas escolas indígenas, a falta de cuidado das secretarias de educação ao implantar um currículo escolar nas aldeias, sem levar em consideração o conhecimento já adquirido por todas as etnias ao longo do território brasileiro. Confeccionar material didático levando em conta a contextualização de cada assunto, respeitando a cultura dos povos indígenas é, de certa forma, uma maneira de arcar com uma dívida que ao longo dos anos, desde a chegada dos europeus ao Brasil até os dias de hoje, "assombra" a cultura destes povos. (Mattos e Ferreira Neto, 2016, p. 83)

A escola é um espaço para se refletir, aprender sobre outras culturas e, principalmente, sobre a história do seu próprio povo e é de extrema relevância que as escolas montem seus projetos políticos pedagógicos pautados na cultura do seu povo. D'Ambrosio (2011, p. 43) fala que conhecer as diferentes culturas se torna assertivo, desde que as raízes sejam fortes. Em especial, na educação matemática, a Etnomatemática pode fortalecer essas raízes.

Como as dificuldades no ensino da Matemática são muitas, percebemos a importância de novas propostas pedagógicas na área, pois segundo Freire (2004, p. 27) devem ser criadas oportunidades para que haja a possibilidade de uma produção própria e não apenas a "transmissão" de conhecimento. Daí surge a necessidade de se pesquisar sobre o assunto, observar o que já é utilizado e a partir dessas análises sugerir novas propostas.

> [...] a educação indígena pode se realizar com a presença do educador não-índio, não para transferir nenhum tipo ou modelo de conteúdo, mas para que, no diálogo com os povos indígenas, eles possam reconhecer como científicas as construções produzidas por seus antepassados[...]. (Scandiuzzi, 2009, p. 23)

A aprendizagem não é realizada apenas no espaço escolar, em uma comunidade indígena, todos os espaços são lugares onde o conhecimento são passados dos mais experientes para os mais novos, mas o fato é que as crianças frequentam a escola regularmente e isso nos leva a refletir se a matemática ensinada no espaço escolar realmente auxilia no desenvolvimento sociocultural desse povo.

Referencial teórico

A matemática presente no cotidiano de uma comunidade é tão importante quanto a acadêmica e ambas devem ser valorizadas e trabalharem conjuntamente. O presente trabalho descreve alguns resultados de uma pesquisa que investiga a educação escolar indígena de uma comunidade que luta para que a sua cultura seja preservada. O referencial teórico principal da presente pesquisa é o Programa Etnomatemática de Ubiratan D'Ambrosio (2011, p. 63), que utiliza o seguinte conceito de caráter etimológico para fundamentar a palavra etnomatemática: "[...] há várias maneiras, técnicas, habilidades (ticas) de explicar, de entender, de lidar e de conviver com (matema) distintos contextos naturais e socioeconômicos da realidade (etnos)" e indica como um dos objetivos, dar significado a modos de fazer e saber das várias etnias no que diz respeito às práticas de natureza matemática e, ao mesmo tempo, agregar conhecimentos de outras culturas.

Cada grupo social possui a sua forma singular, própria da sua cultura, de realizar suas tarefas no seu dia a dia. Dessa forma, entendemos que os saberes das práticas cotidianas devem estar presentes na educação escolar reconhecendo e valorizando o conhecimento que o aluno constrói durante sua trajetória. No contexto escolar, a inserção da Etnomatemática se torna positiva, pois busca conciliar o conhecimento matemático legitimado pela ciência aos conhecimentos que são realizados no cotidiano dessa comunidade. D'Ambrosio (2011, p. 23) nos diz que "um importante componente da etnomatemática é possibilitar uma visão crítica da realidade, utilizando instrumentos de natureza matemática". Para que o ensino da matemática tenha significado e encaminhe o educando a uma reflexão crítica de sua realidade social lançamos mão do movimento Educação Matemática Crítica (EMC) que tem como suporte os trabalhos de Skovsmose (2007, 2013). Essa corrente recebeu visibilidade na década de 1980 e nos traz questões relacionadas à democracia e a justiça social e nos dá suporte para melhor compreender os aspectos políticos da educação matemática.

A teoria da EMC nos diz que para direcionar o aluno a uma postura crítica, o ensino e aprendizagem da matemática deve possuir questões sociais e políticas que o levem a refletir sobre questões que envolvam o seu cotidiano e não apenas a modelos matemáticos estruturados pelo currículo que não envolvem o aluno como sujeito de sua ação, pois segundo Skovsmose (2013, p. 38) "a educação deve ser orientada para problemas, quer dizer, orientada em direção a uma situação "fora" da sala de aula". Logo, para que haja uma significativa e ampla compreensão dos alunos, explorar a contextualização social onde os mesmos estão inseridos oportuniza uma aquisição de aprendizado considerável.

Para estruturar o entendimento no que diz respeito à educação matemática na Etnomatemática lançamos mão da obra de Vergani (2007). Em sua obra a autora discorre sobre a importância de formar jovens capazes de entender e interagir com o mundo sem eliminar os valores da sua própria cultura.

Refinando a investigação, consideramos as pesquisas sobre a Etnomatemática na cultura indígena de pesquisadores atuantes na área, como as análises de Mattos e Ferreira Neto (2016) e Scandiuzzi (2009). Trabalhos esses que diminuem o "abismo" existente entre a matemática prática e a teórica e reconhecem e valorizam o conhecimento específico no contexto de cada comunidade indígena.

A Constituição (Brasil, 1988) resgata todos os direitos dos povos indígenas e no que tange a educação, a mesma deve colaborar com estas populações no sentido de que possam manter suas manifestações culturais e suas identidades. Unindo forças, a Constituição Federal de 1988 e a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Brasil, 1996) garantem uma educação diferenciada, e entendemos que não existe escola diferenciada sem material diferenciado. Como norteador desses assuntos teremos os Parâmetros Curriculares Nacional – PCN do ensino fundamental (Brasil, 1997, 1998a) e o Referencial Curricular Nacional para as Escolas Indígenas - RCNEI (Brasil, 1998b).

Método

A pesquisa está sendo realizada na Escola Estadual Indígena Karaí Kuery Renda, da etnia Guarani M'bya, na aldeia Sapukai, localizada em Bracuhy, no município de Angra dos Reis, no estado do Rio de Janeiro, Brasil. Para a execução da presente pesquisa se tornou indispensável a compreensão do que vem a ser a metodologia qualitativa. Segundo Angrosino (2009), a pesquisa qualitativa não é apenas o oposto da pesquisa quantitativa, ela tem como objetivo investigar a forma como as pessoas constroem o mundo a sua volta, o que nos levou ao entendimento de que poderíamos melhor nos acercar do nosso objeto de estudo. A pesquisa possui uma abordagem qualitativa e versa sobre o enfoque da Etnomatemática na educação escolar indígena, com observações da rotina da aldeia, conversas com os membros da comunidade e entrevistas semiestruturadas.

Para que a investigação alcançasse os objetivos pretendidos, a elaboração de um roteiro com as perguntas que foram realizadas durante a condução da entrevista se tornou indispensável. Trabalhos dos autores Mattos e Ferreira Neto (2016) e Scandiuzzi (2009), serviram de inspiração, pois são autores que possuem investigações realizadas diretamente dentro de diversas comunidades indígenas e suas pesquisas contribuíram para a decisão de quais perguntas seriam relevantes no processo de investigação.

As entrevistas foram realizadas com os professores que ministram a disciplina matemática e a diretora da escola. São seis professores indígenas que atuam do 1º ao 5º ano do ensino fundamental I, moradores da aldeia, sendo dois professores do 1º ano (pois a escola possui duas turmas do 1º ano) e um professor não indígena que atua nas turmas de 6º ao 9º ano do ensino fundamental II.

Resultados

Para que a língua nativa seja preservada, uma condição fundamental nas escolas indígenas é que os professores sejam da etnia e com este objetivo as aulas dos 1º e 2º anos do Ensino Fundamental I são ministradas em guarani, mas a língua portuguesa é trabalhada entre a grade de disciplinas e assim os alunos já têm o primeiro contato com a língua portuguesa, visto que os membros da comunidade se comunicam entre si através da língua materna. A perpetuação do idioma de cada etnia é muito importante para a valorização da cultura local, porém, para que os membros da comunidade tenham acesso aos seus direitos, aos conhecimentos universais e a oportunidade de cursar uma universidade, se torna importante que a língua portuguesa seja praticada e fixada entre os integrantes da comunidade, então, a partir do 3º ano as aulas passam a ser ministradas em português, para que os alunos aprendam este segundo idioma. Por ser ainda um período de transição, muitos alunos sentem dificuldades com a língua portuguesa, então os professores, sempre que necessário, retomam a explicação em guarani. Assim, em uma mesma aula, os professores explicam o conteúdo em português e na língua nativa.

Na rotina de uma comunidade indígena, todos os espaços da aldeia são locais onde as experiências dos mais velhos são passadas para os mais novos, oportunizando que os conhecimentos tradicionais daquela comunidade sejam passados através das gerações. Com a implantação da educação escolar indígena, em algumas comunidades, foram estabelecidos espaços onde os conhecimentos escolares, indicados por um currículo, sejam lecionados por professores indígenas ou não indígenas. A aldeia, onde foram realizadas as pesquisas, conta com uma escola que possui uma infraestrutura bem precária, edificada com muito esforço pelos membros da comunidade.

Durante a investigação, perguntamos aos professores se eles utilizam o cotidiano para ensinar conceitos matemáticos. Um dos professores relata que:

> Na verdade, a gente trabalha um pouco da relação, é..., por exemplo, eu, particularmente procuro trabalhar assim, o que tem a ver com a realidade do dia a dia, por exemplo, na construção de casa, a gente, porque na nossa cultura é assim, a gente não pode cortar árvore, pra gente desperdiçar, tem que cortar de acordo com o que que a gente vai usar, você cita..., até pra gente cuidar do meio ambiente também. (Professor L., 2017)

O mesmo professor, ao ser perguntado se levava os alunos para realizar alguma atividade relacionada a matemática fora da sala de aula, deu a seguinte resposta:

> Sim, as vezes sim, quando tem uma construção de uma casa, assim, a gente dá uma olhada, faz a medida, aí, uma vez, a gente saiu, depois na, trabalhamos aqui na sala com a medida. (Professor L., 2017)

A maioria das aulas de matemática ainda são ministradas dentro da sala de aula, pois os professores possuem dificuldades em relacionar questões da matemática com o cotidiano, devido a formação tradicional dos professores. Porém, em algumas ocasiões, como a construção de uma casa, eles aproveitam a oportunidade para transmitir um conhecimento que é passado de geração em geração associando com a matemática escolar.

Além da construção de casas, outros exemplos foram citados pelos professores. No ensino da aritmética elementar, o uso de sementes é muito utilizado como recurso pedagógico e a utilização desse material concreto é muito bem recebido pelos alunos, visto que é utilizado como componente facilitador na construção do conhecimento, além de ser um elemento encontrado facilmente na comunidade.

Ao serem perguntados sobre o processo de avaliação dos alunos, os professores do 1º e 2º anos do ensino fundamental I responderam que nesses dois anos, não existe a obrigatoriedade de uma prova e que os alunos são aprovados automaticamente. Eles avaliam os alunos observando-os durante as aulas e quando percebem que os alunos não compreenderam o conteúdo, eles explicam novamente até certificarem-se que os mesmos entenderam o assunto que foi ministrado naquele dia. A partir do 3º ano os alunos já realizam avaliações e o professor não indígena relata como ele realiza as suas avalições:

> Eu faço três avaliações, não tem nenhum critério repetitivo, as vezes eu junto com os professores e a gente faz interdisciplinar, [...], prova normal valendo 5, que eles exigem isso, e um trabalho. O meu eu faço sempre no quadro, eu chamo todos eles no quadro, claro, não no mesmo dia, mas eu complemento no outro, porque eles não têm o hábito de levar o material para casa e fazer exercício em casa. (Professor A., 2017)

A escola possui uma forma oficial de avalição dos alunos a partir do 3º ano do ensino fundamental I, como no processo de avaliação de uma escola tradicional. Essa prova compõe metade da avaliação e a outra metade da pontuação fica a critério do professor decidir qual a melhor forma de avaliação. Os professores indígenas preferem avaliar os alunos observando-os durante as aulas e o professor não indígena prefere realizar atividades diferenciadas sozinho ou em parceria com outros professores, indígenas ou não. A participação direta dos alunos nas práticas educacionais que envolvem um conhecimento que está presente na sua cultura torna a aprendizagem mais atrativa e significativa para eles.

Em uma escola indígena, o ideal é que todos os professores sejam membros da etnia, pois a participação direta da comunidade pode contribuir para que a educação escolar indígena específica e diferenciada tenha um olhar voltado para efetivo exercício da cidadania daquela comunidade, como indica o RCNEI (1998b, p.24). Durante a investigação, perguntamos aos professores indígenas a opinião deles sobre a atuação de professores não indígenas na escola. Todos indicaram como positiva essa cooperação, como relata o professor guarani L.:

> É bom, é, porque, na verdade, o desafio maior, que hoje a gente vê, é..., a gente não tem muito apoio assim pedagógico né e nós professores só temos, uns têm ensino médio, alguns tem só o ensino fundamental, então a gente, por exemplo, a gente tem o quarto ano, ano que vem vai passar pro quinto e depois do quinto a gente já não tem mais assim conhecimento pra tá ensinando eles, então precisa das pessoas que já fez a faculdade pra poder ensinar, pra ser a educação de qualidade pra eles. (Professor L., 2017)

Portanto, os professores indígenas entendem que para oferecer uma educação de qualidade para as suas crianças, se torna indispensável a atuação de professores não indígenas na escola da comunidade. Como a comunidade ainda não possui um professor com formação em licenciatura em Matemática, para que a educação escolar dos alunos avance é necessário a presença de professores não indígenas.

Também perguntamos a opinião dos professores indígenas sobre a troca de conhecimentos entre professores indígenas e não indígenas. Essa troca foi apontada por eles como positiva, como relata um professor indígena:

> Eu gosto e eles também gostam, a troca de conhecimento com eles, porque nós indígenas temos dificuldades em algumas disciplinas né, algumas matérias, aí eles ajudam, tem professor aqui que é coordenador também e eles ajudam a elaborar provinha pra eles. (Professor C., 2017)

Os professores também relatam o interesse dos professores que não são indígenas pela cultura guarani e nesses momentos de conversa, ocorre um fortalecimento da língua portuguesa, visto que alguns professores indígenas possuem dificuldades com este idioma. Essa troca também proporciona que a cultura guarani seja levada para fora da aldeia e também eles aprendem bastante sobre a cultura do *juruá* (homem branco), pois eles entendem a necessidade de conhecer a cultura universal.

A produção de conhecimentos em uma comunidade indígena é baseada na observação e na conversação dos mais novos com os mais velhos. Na educação escolar indígena, com a necessidade de serem transmitidos conhecimentos previamente estipulados por um currículo, para auxiliar nesse processo, é importante que a comunidade possua um material didático específico e bilíngue que contemple a cultura local.

Durante a pesquisa, constatamos que a escola possui somente os livros disponibilizados pela secretaria estadual de educação que são comuns as outras escolas da rede. Esses livros são pouco utilizados dentro da sala de aula, visto que, nos 1º e 2º anos do ensino fundamental as aulas são ministradas exclusivamente em guarani e estes livros estão em português. A partir do 3º ano, onde as aulas começam a ser ministradas em português, os livros ainda são pouco utilizados pelos professores, devido à dificuldade com a língua portuguesa e a contextualização de problemas que não fazem parte da cultura local.

Uma pesquisadora e professora não indígena, em parceria com um professor indígena da comunidade, produziu um livro didático bilíngue que contempla os conteúdos dos dois primeiros anos do ensino fundamental I. Porém, com a dificuldade financeira e falta de apoio da Secretaria Estadual de Educação para se reproduzir o livro em larga escala, esse material não é utilizado durante as aulas.

Perguntamos a um professore indígena se os alunos possuem alguma dificuldade para aprender conteúdos curriculares da disciplina matemática. A resposta do professor está transcrita a seguir:

> Bom, pra gente, o mais difícil é língua portuguesa, é..., porque, pra você entender, pra você fazer um trabalho ou alguma atividade, você tem que entender bem o português primeiro. O português é o principal. Na língua portuguesa, mesmo pra você fazer matemática, você tem que entender o que tá falando ali, então a criança tem mais dificuldade em, nessa parte né. Mas quando você só passa só número, aí sim é mole pra eles. (Professor C., 2017)

Percebemos na fala do professor indígena que quando os professores trabalham com os alunos os assuntos da aritmética elementar, os alunos possuem maior facilidade em entender o conteúdo e relacionar os cálculos com as tarefas do dia a dia. A dificuldade surge quando eles precisam trabalhar com assuntos mais contextualizados, pois como a escola não conta com livros na língua nativa e os professores usam os livros oferecidos pela Secretaria Estadual de Educação, que são publicados apenas na língua portuguesa, os alunos começam a demonstrar dificuldade com os conteúdos da matemática devido à falta de domínio da língua portuguesa.

Conclusões

A comunidade luta para que a sua cultura seja preservada, e a educação escolar indígena é fundamental para que os valores da etnia sejam passados para as novas gerações, além de tornar a aprendizagem mais significativa. Segundo D'Ambrosio (2011, p. 46-47), "a proposta pedagógica da etnomatemática é fazer da matemática algo vivo, lidando com situações reais no tempo [agora] e no espaço [aqui]". No que diz respeito a Etnomatemática, percebemos que os professores, devido a uma formação "tradicional", possuem dificuldades em inserir elementos do cotidiano da aldeia nas aulas de matemática ou utilizar outros espaços para a realização das mesmas.

A escola ainda não possui um material pedagógico próprio para a comunidade, contando apenas com os livros oferecidos pela Secretaria Estadual de Educação, que não são específicos para aquela etnia. Porém existe um interesse dos professores que um material didático bilíngue e que contemple a cultura da comunidade seja confeccionado. De fato, para que a educação escolar indígena seja diferenciada se faz necessário que o material pedagógico também seja diferenciado.

A atuação de professores não indígenas é vista como algo positivo, pois a comunidade ainda não possui professores com a qualificação necessária para a atuação no ensino fundamental II. Os professores indígenas entendem que, para que o ensino de suas crianças não seja interrompido, se faz necessário a atuação de professores não indígenas. A troca de experiências entre professores indígenas e não indígenas também fortalece a proficiência da língua portuguesa entre os membros da comunidade. Uma das dificuldades relatadas pelos professores indígenas, em relação ao ensino da matemática, foi a falta de domínio com a língua portuguesa, tanto dos professores indígenas quanto dos alunos.

A escola utiliza a prova escrita como parte da avaliação dos alunos a partir do 3º ano do ensino fundamental I e os professores possuem uma liberdade maior para compor a outra parte da avalição, escolhendo atividades que respeitem as características daquele grupo. Nas turmas de 1º e 2º anos não existe a obrigatoriedade de uma avaliação escrita e os professores preferem avaliar os alunos através de observações realizadas durante as aulas. Mesmo com uma infraestrutura precária e a falta de um material didático diferenciado, existe um empenho dos membros da comunidade para que educação escolar das suas crianças seja de qualidade e que valorize os conhecimentos tradicionais da cultura Guarani.

Referências

Angrosino, M. (2009). *Etnografia e observação participante.* (Coleção Pesquisa Qualitativa). Porto Alegre: Artmed.

Brasil. (1988). *Constituição Federal*. Diário Oficial [da] República Federativa do Brasil, Poder Executivo, Brasília, DF.

Brasil. (1996). Ministério da Educação**.** *Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional.* Brasília, DF: MEC.

Brasil. (1997). Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática* (1º e 2º ciclos do ensino fundamental). Brasília, DF: MEC.

Brasil. (1998a). Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática* (3º e 4º ciclos do ensino fundamental). Brasília, DF: MEC.

Brasil. (1998b). Ministério da Educação e do Desporto, Secretaria de Educação Fundamental. *Referencial Curricular Nacional para as Escolas Indígenas*. Brasília, DF: MEC/SEF.

Brasil. (2000). Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: *Matemática. Ensino Médio***.** Brasília, DF: MEC.

Brasil. (2018). *Fundação Nacional do Índio (FUNAI)*. Recuperado de: http://www.funai.gov.br/index.php/indios-no-brasil/quem-sao.

D'Ambrosio, U. (2011). *Etnomatemática*: *Elo entre as tradições e a modernidade*. Belo Horizonte: Autêntica.

Freire, P. (2011). *Pedagogia da Autonomia. Saberes necessários à prática educativa.* São Paulo: Paz e terra.

Mattos, J.R.L. e Ferreira Neto, A. (2016). O povo Paiter Suruí e a etnomatemática. In: Bandeira, F. e Gonçalves, P. (Ed.). *Etnomatemáticas pelo Brasil: aspectos teóricos, ticas de matema e práticas escolares*. Curitiba: CVR.

Scandiuzzi, P. P. (2009). *Educação Indígena x Educação Escolar Indígena: uma relação etnocida em uma pesquisa etnomatemática*. (1. ed.) São Paulo: UNESP.

Skovsmose, O. (2007). *Educação crítica. Incerteza, matemática, responsabilidade*. São Paulo: Cortez.

Skovsmose, O. (2013). *Educação matemática crítica: a questão da democracia*. (6. ed.) São Paulo: Papirus.

Vergani, T. (2007). *Educação Etnomatemática: O que é?*. Natal: Flecha do tempo.

APRENDIENDO POTENCIAS Y RESOLVIENDO ECUACIONES UTILIZANDO PAPIROFLEXIA

LEARNING POWERS AND SOLVING EQUATIONS USING ORIGAMI

Eliú Leonardo Mejía Acevedo, José Aníbal Contreras Rodríguez
Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán (Honduras)
emejia@upnfm.edu.hn, joseanibal128@gmail.com

Resumen
Este escrito describe el desarrollo del taller aprendizaje de potencias y resolución de ecuaciones a través de la papiroflexia llevado a cabo en la RELME 34, con el objetivo de mostrar el proceso de aprendizaje interactivo por el que a través del doblado de papel, se pueden deducir las propiedades de las potencias con exponentes enteros y encontrar raíces reales de ecuaciones de grado dos y por medio de ellas calcular raíces cuadradas de números reales a través de relaciones geométricas generadas en el plano cartesiano. Se utilizó el método deductivo por medio de actividades que tienen como punto central el uso del papel, como técnica manipulativa para aprender matemáticas.

Palabras clave: potencia, ecuaciones, papiroflexia.

Abstract
This paper describes the development of the workshop “Learning powers and solving equations through origami” carried out at RELME 34. It aims to show the interactive learning process by which, through paper folding, the properties of powers with integer exponents can be deduced, and real roots of equations of degree two can be found; and through them, square roots of real numbers can be calculated through geometric relations generated in the Cartesian plane. The deductive method was used through activities that have the use of paper as a central point, which is a manipulative technique to learn mathematics.

Key words: power, equations, origami.

Introducción

El aprendizaje de la matemática frecuentemente se ve limitado en la educación tradicional, por la monótona adquisición de conocimientos y aprendizajes abstractos sin llevarlos a la práctica. De acuerdo a la experiencia como docentes es común utilizar o visualizar varios grupos de objetos de igual cantidad para aprender que la multiplicación es una adición de iguales sumandos, esta práctica hace que el aprendizaje del concepto de multiplicación sea más eficaz y amigable al estudiante, ya que está aprendiendo a través de la visualización o manipulación de objetos que forman parte de su entorno cotidiano. Sin embargo, algunos conceptos como la potenciación no son enseñados de la misma manera y esto provoca que sea común ver como el concepto no es asimilado apropiadamente por los educandos y suelan confundir la potenciación con la multiplicación.

Con el propósito de atender la problemática anterior, autores como Jara (2018) proponen el uso de la papiroflexia en el aula de clase argumentando que esta es una técnica japonesa del doblado de papel que ofrece amplios usos para la enseñanza de la matemática, favoreciendo el aprendizaje en sus distintas ramas, especialmente en la geometría. Además, la papiroflexia desarrolla la capacidad imaginativa y creadora al relacionar la realidad con una pieza de papel. En este sentido, en este taller se propone la papiroflexia como un recurso didáctico para la enseñanza de la potenciación y la resolución de ecuaciones de segundo grado a través de la deducción de un método geométrico que permita encontrar las raíces de dicha ecuación auxiliándose de la geometría analítica.

Se utilizó el método deductivo por medio de actividades que tienen como punto central el uso del papel como técnica manipulativa para aprender matemáticas a través de la papiroflexia, puesto que Soler y Manrique (2014) afirman que este método permite la verificación y validación de hipótesis planteadas ; en este caso los participantes ejecutaron acciones sobre la pieza de papel y registraron los datos cuantitativos y cualitativos que se derivaron de esta actividad para el análisis y comprensión del concepto de potencia, los procesos asociados a la deducción de sus propiedades y encontrar raíces de ecuaciones de grado mayor que o igual a dos.

Marco Teórico

De acuerdo con De la Torre y Prada (2008), la papiroflexia da al profesor de matemáticas una herramienta pedagógica que le permite desarrollar diferentes contenidos no solo conceptuales, sino procedimentales. Monsalve, Posada y Jaramillo (2002), con respecto al doblado de papel, mencionan que:

> Como actividad lúdica, proporciona un potencial cognoscitivo que no se puede desperdiciar cuando se la considera un simple juego agradable para pasar el tiempo. Su utilidad didáctica radica en que permite a los estudiantes, desde los primeros años escolares, acercarse en forma intuitiva a muchos conceptos matemáticos implícitos en dicha actividad lúdica. (p. 11)

Surco y Delgadillo (2018), afirma que la papiroflexia dentro del aula de clase, ayuda a construir, asimilar y comprender conocimientos geométricos de manera innovadora y práctica. Además, Blanco y Otero (2009) establecen que puede ser de gran apoyo en la educación de las matemáticas debido a que “proporciona al profesor de matemáticas una herramienta pedagógica que le permite desarrollar diferentes contenidos, no sólo conceptuales sino de procedimiento” (p. 2). En ese sentido, en este taller se mostró cómo, a través del doblado de papel, se puede enseñar lúdicamente a los estudiantes de primaria y secundaria a deducir las propiedades de las potencias con exponentes enteros, así como las leyes para la multiplicación y división.
Al momento de utilizar el doblado de papel para fines pedagógicos es importante analizar geométricamente lo que se hace al doblar el papel, es por esto que también se tuvo como objetivo aplicar la papiroflexia para encontrar raíces reales de ecuaciones de grado dos y así calcular raíces cuadradas, a través de la construcción y análisis de conceptos geométricos.

Desarrollo del Taller

Inicialmente se mostró que realizar dobleces consecutivos sobre una hoja de papel representa una multiplicación, por ejemplo, doblar una hoja dos veces y luego seguirla doblando por tres veces representa la multiplicación 2 por 3 debido a que al desdoblar la hoja está queda dividida en seis partes, determinadas por las marcas que se realizaron al doblarla. Es importante tomar en cuenta que las partes en que queda divida la hoja no deben necesariamente tener a misma área, ya que para los fines del ejercicio lo que nos interesa es la cantidad.

Así mismo, se expuso que es posible realizar divisiones de números naturales utilizando una hoja de papel. Por ejemplo, para realizar la división 12 entre 3 es necesario tener una hoja dividida en 12 partes iguales para representar el dividendo, luego para representar el divisor se dobla en tres partes iguales, como un trifolio y se observa que se obtiene una pieza de papel la cual está dividida en cuatro partes esto quiere decir que la división 12 entre 3 es igual a 4. Este proceso básico para realizar una multiplicación y una división utilizando una hoja de papel es fundamental en el transcurso del taller donde se aborda el cálculo de potencias y la deducción de leyes para la multiplicación y división de potencias de números enteros.

Para describir el concepto de potencia se trabajó con una hoja de papel en la cual se realizaron dobleces consecutivos anotando datos en una tabla. Se empezó con una hoja de papel la cual se dobló en dos partes iguales (una vez) de acuerdo con el proceso que se trabajó inicialmente sobre cómo realizar multiplicaciones utilizando una hoja de papel; proceso correspondiente a la multiplicación 2 x 1 cuyo resultado es evidenciado al desdoblar la hoja de papel y observar que aparecen dos rectángulos. Luego se volvió a tomar la misma hoja de papel y se dobló en dos partes iguales, esta vez repitiendo el proceso dos veces, lo que corresponde a la multiplicación 2 x 2, observando al desdoblar la hoja cuatro rectángulos. Después se realizó este proceso de nuevo doblando la hoja de papel en dos partes iguales repitiendo el doblado tres veces emulando la multiplicación 2 x 2 x 2, al desdoblar la hoja se puede observar que se han obtenido 8 rectángulos. Se realiza sucesivamente este proceso doblando la hoja de papel en dos partes iguales repitiendo el doblado 4 y 5 veces anotando los datos involucrados en este ejercicio, así como se muestra en la tabla 1.

Tabla 1. *Doblado de una hoja de papel en dos partes iguales con datos de los dobleces*.

Doblado de una hoja de papel en dos partes iguales			
Repeticiones	Multiplicación	Cantidad de rectángulos	
1	2 x 1 = 2	2	
2	2 x 2	4	
3	2 x 2 x 2	8	
4	2 x 2 x 2 x 2	16	
5	2 x 2 x 2 x 2 x 2	32	

Fuente: Creación propia.

En el ejercicio anterior el factor de la multiplicación es 2 y la cantidad de repeticiones en el doblado es el número qué determina cuantas veces el factor 2 se multiplica por sí mismo, es por ello que para describir el concepto de potencia se realizaron las siguientes preguntas las cuales fueron contestadas con la información que se tiene hasta ahora en la tabla 1.

Pregunta 1: ¿qué factor aparece en la columna "Multiplicación" en la tabla 1 independientemente del número de repeticiones?
Pregunta 2: ¿qué define la cantidad de factores en la columna "Multiplicación"?
En respuesta a las preguntas 1 y a la pregunta 2, es claro que el factor que aparece en la columna de las multiplicaciones es el factor 2 y que las repeticiones en el doblado del papel definen cuantas veces aparece este factor.
Luego de contestar estas preguntas se muestra el siguiente concepto de potencia.
Una potencia a^n es una forma abreviada de representar una multiplicación de factores iguales. La base (a) de la potencia es el factor que se repite y el exponente (n) indica el número de veces que se repite.
Después de observar esta definición se contestaron las siguientes preguntas planteadas en el taller.
Pregunta 3: ¿considera que las multiplicaciones de la tabla 1 se pueden expresar como una potencia?
Pregunta 4: ¿qué número representa la base? La respuesta es dos.
Pregunta 5: ¿qué número determina el exponente?

Con respecto a la pregunta 3, se afirmó que las multiplicaciones de la tabla 1 se pueden representar como una potencia dado que se ha multiplicado un número por sí mismo y cumple la definición de potencia presentada previamente. Además, respondiendo a la pregunta 4 y a la pregunta 5 respectivamente, el número 2 representa la base y la cantidad de repeticiones en el doblado de la hoja de papel determina el exponente. Después de contestar las preguntas anteriores y relacionar las multiplicaciones donde se repite el mismo factor con el concepto de potencia, los participantes trabajaron en la tabla relacionada a este ejercicio y expresaron las multiplicaciones como una potencia de acuerdo a la definición presentada anteriormente.

Tabla 2. *Doblado de una hoja de papel en dos partes iguales con la escritura de potencias con exponente positivo.*

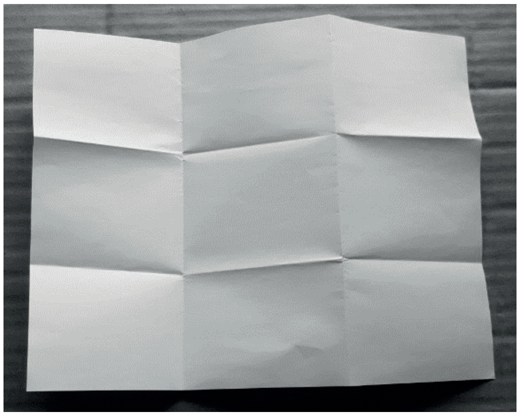
Doblado de una hoja de papel en dos partes iguales			
Repeticiones	Multiplicación	Cantidad de rectángulos	Potencia
n	$a \text{ x } a \text{ x } \dots \text{ x } a$	m	$m = a^n$
1	2 x 1 = 2	2	$2 = 2^1$
2	2 x 2	4	$4 = 2^2$
3	2 x 2 x 2	8	$8 = 2^3$
4	2 x 2 x 2 x 2	16	$16 = 2^4$
5	2 x 2 x 2 x 2 x 2	32	$32 = 2^5$

Fuente: Creación propia.

La segunda actividad del taller consistió en un ejercicio similar a la actividad 1 donde se dobló una hoja de papel en tres partes iguales representando multiplicaciones dónde aparece el factor 3 repetidamente, las cuales se expresaron como una potencia de base 3.

Con esto se deduce que, si se busca calcular la potencia 2 elevado a la 3 en una hoja de papel, está se debe doblar en dos partes iguales repitiendo este proceso tres veces en la misma hoja. Si se pretende calcular la potencia 3 elevado a la 2 se debe doblar una hoja en 3 partes iguales repitiendo el proceso dos veces (imagen 1), por lo tanto, se concluye que para calcular cualquier potencia a elevado a un exponente n utilizando una hoja de papel es necesario doblarla en a partes iguales realizando n repeticiones.

Figura 1. *Potencia* 3^2.



Fuente: Creación propia.

Para calcular 2^0 se tiene en cuenta que el exponente 0 conlleva la instrucción de realizar cero dobleces, por lo tanto 2^0 es igual a 1 debido a que si no se realizan dobleces en la página tenemos solamente un rectángulo, la página misma, situación considerada por los participantes del taller como una manera práctica y de fácil comprensión para visualizar el cálculo de esta potencia. Seguidamente se abordó el cálculo de potencias con exponente entero negativo, para esto se analizaron los resultados de las potencias con exponente entero positivo en la tabla 2. En el doblado de papel, en cada repetición ejecutada, el exponente aumenta en una unidad y el resultado se duplica. Por otra parte, si se analiza la tabla de abajo hacia arriba, en la columna de *Potencia* se observa que, si el exponente disminuye en una unidad el resultado de la potencia disminuye a la mitad. Por ejemplo, 2^5 es igual a 32, mientras que 2^4 es igual a 16. En vista de que esto sucede con cada par de potencias consecutivas se deduce que $2^{-1} = \frac{1}{2}$ en vista de que $2^0 = 1$. Además, 2^{-2} es igual a la mitad del resultado de 2^{-1}, es decir $2^{-2} = \frac{1}{4}$.

Tabla 3. *Doblado de una hoja de papel en dos partes iguales incluyendo la escritura de potencias con exponente negativo.*

Doblado de una hoja de papel en dos partes iguales			
Repeticiones	Multiplicación	Cantidad de rectángulos	Potencia
n	a x a x … x a	m	$m = a^n$
-2		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} = 2^{-2}$
-1		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} = 2^{-1}$
0		1	$1 = 2^0$
1	2 x 1 = 2	2	$2 = 2^1$
2	2 x 2	4	$4 = 2^2$
3	2 x 2 x 2	8	$8 = 2^3$
4	2 x 2 x 2 x 2	16	$16 = 2^4$
5	2 x 2 x 2 x 2 x 2	32	$32 = 2^5$

Fuente: Creación propia.

Luego de observar cómo se pueden calcular multiplicaciones, divisiones y potencias utilizando una hoja de papel, se calcularon multiplicaciones y divisiones de potencias para deducir las leyes de la multiplicación y división de potencias.

Para esto se multiplicaron potencias utilizando una hoja de papel. La primera multiplicación es 2^2 por 2^3, la cual es una multiplicación con igual base y distinto exponente.

Para realizar está multiplicación se dobló una hoja en dos partes iguales dos veces seguidas para representar la primera potencia y después se continuó doblando en dos partes iguales 3 veces seguidas sobre la misma hoja para representar la segunda potencia. Al desdoblar la hoja aparecen 32 rectángulos como resultado de esta multiplicación, este número se puede expresar como la potencia 2^5, es decir qué es dos elevado a la 2^2 por 2^3 es igual a 2^5.

La segunda multiplicación de potencias con distinta base e igual exponente (2^2 por 3^2), una multiplicación. Esta multiplicación se realizó de manera similar a la primera, se dobla una hoja de papel en dos partes iguales dos veces para representar la primera potencia y luego se realizaron tres dobleces dos veces para representar la segunda potencia. Al desdoblar la hoja se observaron 36 rectángulos, este número se puede expresar como la potencia 6^2.

Las características y los productos de estás multiplicaciones se anotaron en la tabla 4 para su posterior análisis donde se dedujo que: para multiplicar potencias con igual base y distinto exponente se conserva la base y se suman los exponentes, mientras que para multiplicar potencias con distinta base e igual exponente se multiplican las bases y se conserva de exponente.

Tabla 4. *Multiplicación de potencias.*

Multiplicación	Características	Cantidad de rectángulos	Potencia
$2^2 \times 2^3$	Igual base y distinto exponente	32	2^5
$2^2 \times 3^2$	Distinta base e igual exponente	36	6^2

Fuente: Creación propia.

Para deducir las leyes de la división potencias se inició resolviendo la división 2^5 entre 2^2, la cual es una división con igual base y distinto exponente. Para resolver esta división a través del doblado de papel necesitamos una hoja de papel que represente la potencia 2^5, esto equivale a doblar la hoja de papel a la mitad cinco veces consecutivas. Al desdoblarla aparecen 32 rectángulos como resultado de la potencia y para dividir esta cantidad entre 2^2 es necesario doblar la hoja de papel a la mitad dos veces seguidas, después de realizar esto se observa que se obtienen 8 rectángulos los cuales se pueden expresar como la potencia 2^3. Asimismo se realiza la división de potencias 6^2 entre 3^2, la cual es una división de potencias con distinta base e igual exponente, obteniendo como resultado como resultado 2^2. Siguiendo el mismo proceso en el doblado de papel todos estos datos se anotan en la tabla 5 para su posterior análisis en el cual se deduce que para dividir potencias con igual base y distinto exponente se conserva la base y se restan los exponentes y que para dividir potencias con distinta base e igual exponente se dividen las bases y se conservan el exponente.

Tabla 5. *División de potencias.*

División	Características	Cantidad de rectángulos	Potencia
$2^5 \div 2^2$	Igual base y distinto exponente	8	2^3
$6^2 \div 3^2$	Distinta base e igual exponente	4	2^2

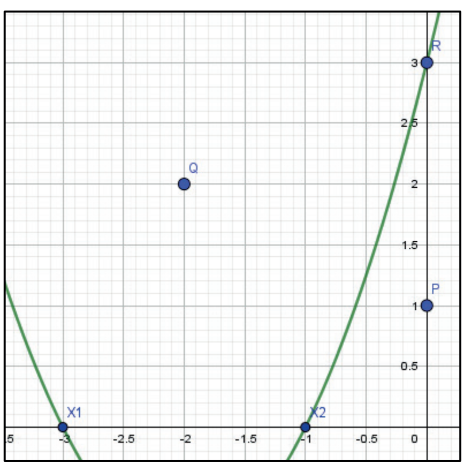
Fuente: Creación propia.

En la segunda sesión del taller se abordó el uso de la papiroflexia para resolver ecuaciones de segundo grado de la forma $ax^2 + bx + c$, donde $a = 1$, b y c pertenecen al conjunto de los números reales, en el caso de que a sea distinto de uno se debe dividir toda la ecuación entre este número para que sea igual a 1.

Dado que una función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ describe una parábola donde los ceros de la función están determinados por el punto de intersección entre la parábola y el eje x, se propuso encontrar un método geométrico para calcular las raíces reales de una ecuación cuadrática sin necesidad de graficar la parábola,

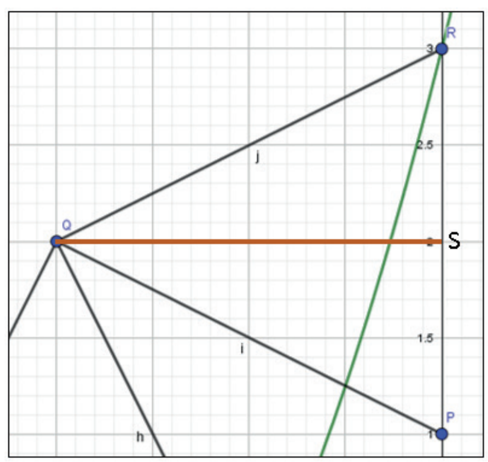
Para deducir este método se inicia buscando la coordenada del punto Q, el cual está dentro de la parábola y equidista de los ceros de la función, del punto $R\,(0, c)$ y $P\,(0, a)$, ilustrada en imagen 2. El punto Q y el foco de la parábola tienen la misma coordenada en x, por lo tanto, se parte de la "forma vértice" de la ecuación de la parábola, $y = a(x - h)^2 + k$ y se obtiene el coeficiente de la variable de grado uno es $-2ah$, es decir $b = -2ah$. Luego, como h representa la coordenada en x del foco y del punto Q, se despeja para h y se obtiene $h = \frac{-b}{2a}$.

Figura 2. *Función cuadrática.*



Fuente: Creación propia.

Figura 3. *Trazado del segmento $\overline{QS}$.*



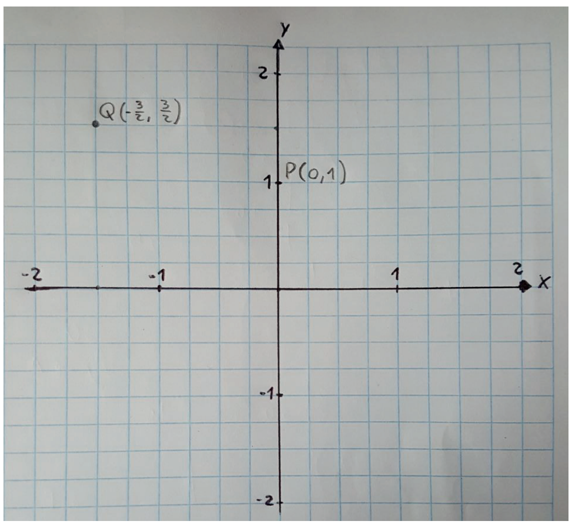
Fuente: Creación propia.

Para encontrar la coordenada en y del punto Q se demostró que $\overline{QS} \perp \overline{RP}$ (imagen 3), siendo S punto medio de $\overline{RP}$. Teniendo en cuenta las coordenadas $R\,(0, c)$ y $P\,(0, a)$, por definición de punto medio la coordenada en y del punto S es igual $\frac{1}{2}(a + c)$, que al mismo tiempo es coordenada en y de Q porque $\overline{QS} \perp \overline{RP}$.

Ahora que se conoce la coordenada del punto Q es posible encontrar las raíces de una ecuación de segundo grado, para esto se grafican los puntos P y Q en el plano cartesiano, luego se debe trazar una circunferencia con centro Q que pase por P y puesto que Q equidista de P y las raíces de la ecuación, los puntos de intersección entre dicha circunferencia con el eje y señalan las soluciones a la ecuación. Para lograr esto a través del doblado de papel se debe tener el punto Q de manera fija y a la vez identificar en que puntos del eje x se puede sobreponer el punto p. Con respecto a este método para encontrar las raíces de una ecuación de segundo grado, en el taller se desarrolló el siguiente ejercicio.

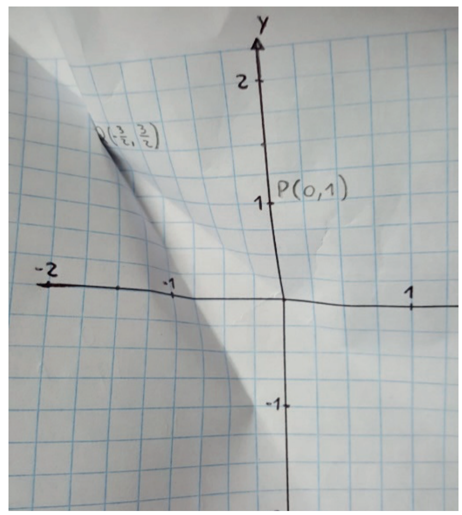
Ejercicio1 : Encontrar las raíces de la ecuación $x^2 + 3x + 2 = 0$.
Se observa que a = 1, b = 3 y c = 2. Además, se dedujo previamente que $P = (0, a)$ y $Q = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{1}{2}(a + c)\right)$, por lo tanto $P = (0, 1)$y$Q = \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$. Los participantes del taller representaron el plano cartesiano en papel cuadriculado y procedieron a graficar los puntos P y Q tal como se muestra en la imagen 4.

Figura 4. *Trazado de los puntos P y Q.*



Fuente: Creación propia.

Figura 5. *Fijación del punto Q.*

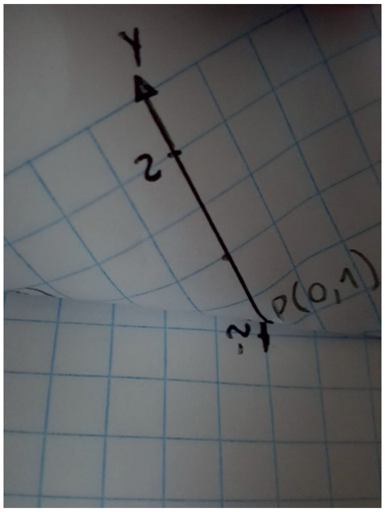


Fuente: Creación propia.

En la imagen 6 se observa que el punto Q se sostiene detrás de la página con el dedo pulgar e índice para mantenerlo en una posición fija mientras se busca ubicar el punto P en el eje x. Solo existen como máximo dos puntos en los que el punto P puede ser ubicado sin rasgar la hoja de papel, esto concuerda con el hecho de que una ecuación de segundo grado tiene un máximo de dos raíces reales diferentes.

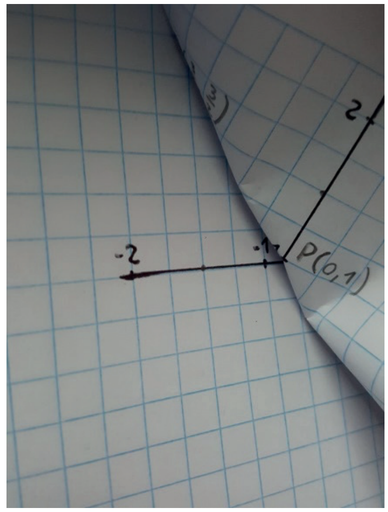
Tal como se muestra en las imágenes 6 y 7, los únicos puntos en el eje x donde se puede ubicar el punto P, cumpliendo las condiciones descritas previamente, es en $x = -2$ y $x = -1$. Estos puntos representan las soluciones que satisfacen la ecuación $x^2 + 3x + 2 = 0$.

Figura 6. *Identificación de la primera solución.*



Fuente: Creación propia.

Figura 7. *Identificación de la segunda solución.*



Fuente: Creación propia.

Este método para encontrar raíces de ecuaciones de segundo grado a través del doblado de papel también se utilizó para calcular raíces cuadradas de números reales, por ejemplo, para calcular la raíz cuadrada de 7, se plantea la ecuación de segundo grado $x^2 - 7 = 0$ donde se tiene que a $a = 1$, $b = 0$ y $c = -7$ para encontrar los puntos P y Q, ubicarlos en el plano cartesiano y realizar el doblado de papel correspondiente para encontrar los valores de x que satisfacen la ecuación.

Conclusiones

Las actividades de trabajo propuestas permitieron desarrollar de manera práctica conceptos y contenidos a través de la papiroflexia. El doblado de papel al utilizarse como una herramienta didáctica para la enseñanza de las potencias hace que su concepción sea menos abstracta y facilita su aprendizaje manipulando y visualizando patrones creados en el papel. Además, el proceso deducido y empleado para encontrar raíces reales de ecuaciones de segundo grado involucró la aplicación de conceptos geométricos y algebraicos combinados con el doblado de papel. En general, a través de la papiroflexia tal como lo manifiesta Martínez (2009), no solamente se está plegando papel, sino que además se realiza un proceso mental organizado que requiere explicitar conceptos matemáticos que van de lo simple a lo complejo y que, además, estimulan la imaginación. Por lo tanto, se convierte en una herramienta didáctica pertinente para desarrollar contenidos conceptuales y procedimentales.

Referencias bibliográficas

Blanco, C. y Otero, T. (2009). Geometría con papel (papiroflexia matemática). *La geometría y la historia de la matemática en la enseñanza secundaria*, 21.

De la Torre, H. y Prada, A. (2008). *El origami como recurso didáctico para la enseñanza de la geometría*. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/992/

Jara, K. (2018). El taller de papiroflexia para desarrollar aprendizajes de fracciones en los estudiantes del quinto grado de primaria de la Institución Educativa Ceppat Rio Azul del distrito de Hermilio Valdizan, Leoncio Prado, Huánuco-2018.

Martínez, L. (2009). El razonamiento espacial y la expresión gráfica bidimensional como experiencia a través de la papiroflexia. *INVENTUM*, *4*(6), 80-86.

Monsalve, O., Posada, C., y Jaramillo, M. (2002). El placer de doblar el papel. Mostraciones y algunas aplicaciones matemáticas. *Revista Educación y Pedagogía*, *15*(35), 10-25.

Soler, M. y Manrique, V. (2014). El proceso de descubrimiento en la clase de matemáticas: los razonamientos abductivo, inductivo y deductivo. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, *32*(2), 191-219.

Surco, I. y Delgadillo, J. (2018). *El origami como estrategia didáctica para el fortalecimiento del Proceso de Enseñanza y Aprendizaje de la geometría en estudiantes del nivel secundario. (Unidad Educativa de la Fuerza Aérea Boliviana, El Alto, 2018)* [Disertación Doctoral, Unidad Educativa de la Fuerza Aérea Boliviana]. https://repositorio.umsa.bo/handle/123456789/18788

ASPECTOS COGNITIVOS QUE EVIDENCIAN ESTUDIANTES DE TERCERO DE PRIMARIA EN LA GENERALIZACIÓN DE PATRONES FIGURALES

COGNITIVE ASPECTS SHOWED BY THIRD-GRADE PRIMARY SCHOOL STUDENTS IN THE GENERALIZATION OF FIGURAL PATTERNS

Reinaldo Montoya-Ditta, Guadalupe Cabañas-Sánchez
Universidad Autónoma de Guerrero. (México)
rmontoya@uagro.mx, gcabanas@uagro.mx

Resumen
El estudio describe aspectos cognitivos que evidencian dos estudiantes de tercer grado de primaria (8 a 9 años) al responder preguntas de generalización cercana y lejana, en una tarea de generalización de patrones figurales asociados a una sucesión lineal. Estos estudiantes no habían sido instruidos previamente, en el estudio de la generalización de patrones lineales. Los resultados muestran que los procesos cognitivos de los estudiantes se articularon a las formas de percibir los patrones figurales, que evolucionó de la sensorial a la cognitiva. De esa evolución, construyeron tanto una regla local como una directa. Conectaron significados, propiedades y conceptos matemáticos, según su nivel de abstracción, haciendo uso del lenguaje.

Palabras clave: generalización, patrón figural, aspectos cognitivos.

Abstract
The study describes cognitive aspects showed by two third-grade primary school students (8 - 9 years old) when answering near and far generalization questions in a generalization task of figural patterns linked to a linear sequence. These students had not received previous instruction in the study of lineal generalization patterns. The findings indicate that students' cognitive processes were connected to the ways to perceive the figural patterns, which evolved from the sensory to the cognitive process. From this evolution, they built both a local and a direct rule. They connected mathematical meanings, properties and concepts, according to their level of abstraction, making use of language.

Keywords: generalization, figural pattern, cognitive aspects

Antecedentes y problema de investigación

La generalización es una herramienta útil, poderosa y una de las formas más importantes de introducir el álgebra en la escuela (Mason, 1999; Stacey, 1989). En Educación Matemática ha sido objeto de estudio desde diferentes enfoques y contextos. En matemáticas, destacan las aportaciones de Pólya (1966) y Krutetskii (1976). Pólya (1966), la considera como "el paso de la consideración de una serie determinada de objetos a la de una serie mayor que contenga a la primera" (p. 37). Krutetskii (1976), por su parte, como la habilidad para generar conocimiento matemático (objetos, relaciones y operaciones) y distingue dos niveles: la habilidad personal para ver lo general y conocido en lo que es particular y concreto, y la habilidad para ver algo general y todavía desconocido en lo que es particular y aislado. En el ámbito curricular, organizaciones internacionales como el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) en Estados Unidos y en Australia, el Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority (2015), demandan la inclusión del álgebra en el currículo de primaria más allá de la manipulación simbólica que se prioriza en secundaria, debido a que los estudiantes necesitan, primero, comprender los conceptos, las estructuras y los principios que rigen la manipulación de los símbolos, y cómo pueden usarse estos para registrar ideas y ampliar la comprensión de las situaciones (NCTM, 2000, p. 39). Esta demanda internacional (Aké, 2013), vigente, se puede atender vía la generalización, por ser una herramienta útil para introducir aspectos algebraicos desde primaria. En México, también se reconoce la importancia del estudio del álgebra desde nivel básico (e.g., SEP, 2011; SEP, 2011a). Si bien sólo aparece implícita en documentos oficiales, como el plan y programas de matemáticas, si se reconoce en los libros de texto gratuito para el profesor y el estudiante en básica (Cabañas-Sánchez, et al., 2017).

La investigación ha documentado lo que hacen o dejan de hacer estudiantes de diferentes niveles escolares al trabajar con patrones figurales lineales principalmente (e.g., Carraher y Schliemann, 2007; Dörfler, 2007; Rivera, 2013), pocos con profesores en formación (e.g., Barbosa y Vale, 2015; Kirwan, 2015). Se reconoce, además, a la visualización como fundamental en la construcción de estructuras matemáticas plausibles que expliquen el comportamiento de patrones en cualesquiera de sus etapas (e.g., Nilsson y Juter, 2011; Rivera, 2010). Rivera (2010) por ejemplo, documentó la existencia de "plantillas" visuales en la generalización de patrones y tipos de generalización algebraica construidas por los estudiantes a partir de razonamientos aditivos y multiplicativos. Se identifican tres tendencias en este tipo de estudios. La primera, refiere a la identificación de estrategias y/o formas de uso, de las estructuras o formas de proceder en el proceso de generalización (e.g., Rivera y Becker, 2008; Rivera, 2018; Cetina-Vázquez y Cabañas-Sánchez, 2022). Una segunda, explora y desarrolla formas de razonamientos, en específico el inductivo (en estudiante o bien profesores), por la misma naturaleza de la generalización (Cañadas, 2007; Cañadas y Figueiras, 2011; Rivera, 2013) o sobre las formas de aprehensión cognitiva que muestran al resolver problemas de generalización (Callejo, et al., 2019). Una tercera tendencia, son estudios teórico-empíricos, que establecen modelos teóricos sobre procesos de generalización, categorías de estrategias y/o factores que parecen incidir en su uso (e.g., Stacey, 1989; Lannin, et al., 2006; Rivera, 2013; Kirwan, 2015).

Desde lo curricular y la investigación se reconoce la importancia de la generalización en la construcción de conocimiento matemático. Sin embargo, poco se sabe de investigaciones con estudiantes mexicanos, que enfaticen en aspectos cognitivos que articulen tanto a las estrategias como a los tipos de razonamientos que evidencia al resolver tareas de generalización de patrones lineales. La presente investigación se orienta en esa dirección, nos preguntamos *¿Qué aspectos cognitivos evidencian niños de primaria, en tareas que demandan la generalización de patrones figurales asociados a una sucesión lineal?* Para responder a la cuestión, nos propusimos *describir los aspectos cognitivos que movilizan niños de primaria, al resolver tareas de generalización de patrones figurales.*

Para el logro del objetivo, nos planteamos dos objetivos específicos:
O.E.1: *Examinar los tipos de razonamientos y representaciones que movilizan estudiantes de primaria al resolver tareas que demandan la generalización de patrones.*
O.E.2: *Identificar qué estrategias movilizan estudiantes de primaria en el desarrollo de estructuras matemáticas y la generalización de patrones figurales.*

Marco conceptual

Percepción

Entendemos a la percepción en el sentido de Seel (2012), como: el proceso mediante el cual la información del entorno es detectada por los sentidos y transformada en una experiencia significativa en el cerebro. Una búsqueda dinámica de patrones útiles en lugar de una grabación pasiva, la percepción es una interpretación de eventos, que involucra la ruptura de datos sensoriales y el ensamblaje de información tanto a nivel consciente como inconsciente.

Rivera y Becker (2008) reconocen que en tareas de patrones que involucran señales figurativas, entre los tipos de percepciones, la que importa es la percepción visual. Las describen basados de la postura de Dretske (1990), a la que se adhiere esta investigación.

La percepción sensorial (u objeto) es cuando los individuos ven un objeto como un mero objeto en sí mismo. La percepción cognitiva va más allá de lo sensorial cuando los individuos ven o reconocen un hecho o una propiedad en relación con el objeto (Rivera y Becker, 2008).

En ese contexto, afirman que, los niños pequeños que ven grupos consecutivos de señales figurativas, como meros conjuntos de objetos, exhiben percepción sensorial. Sin embargo, cuando reconocen que las señales tomadas en conjunto forman en realidad una secuencia de patrones de objetos, manifiestan una percepción cognitiva. La percepción cognitiva desde esta perspectiva, requiere el uso de procesos conceptuales y otros procesos cognitivos, que permita a los estudiantes articular lo que eligen reconocer como un hecho o una propiedad de un objeto estudiado. Está mediado de otros tipos de conocimiento visual que inciden en el objeto, y estos tipos pueden ser de naturaleza cognitiva o sensorial.

Estrategias

Por estrategia se atiende a la forma de proceder y la ruta que siguen para construir la generalización o una estructura matemática. Rico (1997) la define como "Cualquier **procedimiento** o **regla** de acción que permite obtener una conclusión o responder a una haciendo uso de relaciones y conceptos, generales o específicos de una determinada estructura conceptual" (p.33). Se enfatiza en el análisis tanto de estrategias, así como de los enfoques de razonamiento, que la investigación ha reportado en lo que respecta a la generalización de patrones que las estrategias desarrolladas por los participantes se centran en lo numérico y figural (Becker y Rivera, 2005; Jurdak y El Mouhayar, 2014; Stacey, 1989).

Razonamiento

El razonamiento es un proceso del pensamiento, en el que a partir de una o varias premisas, se extraen conclusiones (Castro et al., 2010). Se estudian tres tipos de razonamiento:

a) *Razonamiento inductivo.* Es el proceso de generar una inferencia viable a partir de una base de conocimiento incompleto (Rivera y Becker, 2007).
b) *Razonamiento abductivo.* Proceso cognitivo que parte de hechos sorprendentes que demandan explicación, del que se obtiene o adopta una conclusión.
c) *Razonamiento deductivo.* Proceso de inferencia de conclusión de premisas, basadas en reglas propias de la lógica formal, se obtienen de casos generales a casos particulares.

Patrón y generalización

Varios autores han destacado la importancia de incorporar el estudio de patrones desde edades tempranas. Un patrón, en el dominio de las matemáticas, en palabras de Mulligan y Milchelmore (2009), es "cualquier regularidad que usualmente involucra relaciones numéricas, espaciales o lógicas" (p.34).

La *generalización* es un aspecto fundamental en las matemáticas, ya que reside en el corazón de esta (Mason, 1999). Desde el punto de vista cognitivo, "es un atributo común del pensamiento humano" (Radford, 2018, p. 7). Kaput (1999, p. 136) define generalizar como:

> […] extender deliberadamente el rango de razonamiento o comunicación más allá del caso o casos considerados, identificar y exponer explícitamente lo común entre los casos, o elevando el razonamiento o comunicación a un nivel donde el foco ya no está en los casos o situaciones mismos, sino en los patrones, procedimientos, estructuras y las relaciones entre ellos.

Tipos de generalizaciones en patrones figurales

Rivera (2010), destaca dos formas básicas, algebraicas de desarrollar una generalización de patrones, atendiendo tanto a la estructura matemática como a la manera en que organizan los objetos:

a) *Generalización constructiva:* La construyen a partir de etapas dadas en un patrón figural, de percibir cognitivamente las figuras de manera independiente, es decir, en partes no superpuestas que, cuando se suman, forman la figura percibida que se aplica a través de las etapas del patrón.
b) *Generalización deconstructiva:* La construyen a partir la percepción cognitiva de figuras en etapas conocidas, como superpuestas o por partes. Ven las etapas figurales conocidas en un patrón como sub-configuraciones superpuestas que se pueden descomponer de manera bastante conveniente.

Representaciones y tipos

El concepto de representación se asume desde la postura de Lupiáñez (2016) quien las define en el ámbito de las matemáticas como "aquellas notaciones simbólicas o gráficas, o bien expresiones verbales, mediante las que se hacen presentes y se nombran los conceptos y procedimientos en esta disciplina, así como sus características, propiedades y relaciones más relevantes" (p. 120). Las representaciones pueden organizarse según sus características y propiedades en diferentes sistemas de representación. Reconoce dos grandes familias, las simbólicas y las gráficas. Las *simbólicas,* incluyen símbolos alfanuméricos que se emplean con unas reglas de procedimiento y, las *gráficas* que son de tipo figurativo y disponen de unas reglas de composición y de unos convenios de interpretación. Considerando estos dos tipos de representación y el concepto objeto de estudio, pueden surgir otros sistemas de representación que expresan diferentes facetas del mismo, así como sus significados. Entre los tipos de representación destacan:

Simbólica. Son aquellas de carácter alfanumérico, cuya sintaxis viene descrita mediante una serie de reglas de procedimiento (Rico, 2009, p. 8). Se distinguen dentro de las representaciones simbólicas dos tipos: numéricas y algebraicas.

Numérica. Se sirven de números y operaciones expresadas mediante lenguaje matemático que suelen organizarse para realizar un cálculo.

Algebraica. Se caracterizan por el uso del simbolismo algebraico para expresar un enunciado o generalizar las operaciones aritméticas. Suponen un mayor grado de abstracción.

*Pictórica***.** Se utiliza un sistema de representación visual, por lo general un dibujo, para plantear las relaciones entre datos e incógnitas de la tarea, sin ninguna notación que pueda considerarse de carácter simbólico (Cañadas y Figueiras, 2011).

*Tabular***.** Es aquella en la que los estudiantes se valen de una tabla de datos para la organización y representación de cantidades numéricas, expresiones verbales, o relaciones entre elementos de la tarea.

Verbal. Se sirven del lenguaje natural (oral y escrito) para exponer la información de forma cohesionada. En el caso de los protocolos que llevan a cabo los estudiantes al resolver una tarea, permiten expresar el proceso de razonamiento de forma secuencial (Cañadas y Figueiras, 2011).

*Gestual***.** Forma de expresar una generalidad mediante movimientos corporales repetitivos al trabajar con tareas que demandan la generalización de patrones figurales.
Múltiples. Son aquellas que resultan de la combinación de dos o más sistemas de representación.

Metodología

Se diseñó e implementó un experimento de enseñanza (Steffe y Thompson, 2000), con el fin de desarrollar la habilidad de generalizar, en estudiantes de tercer grado de primaria, a través de tareas de generalización de patrones figurales lineales, cuya expresión algebraica general es de la forma $f(n) = an + b$, con $b \neq 0$.

Experimento de enseñanza y entrevistas

En el marco del experimento de enseñanza (ExpE) se diseñaron tres tareas (T) de generalización, que desafiaron a los estudiantes a construir una estructura matemática plausible que explique el comportamiento de patrones figurales, en cualesquiera de sus etapas. El ExpE se desarrolló en tres sesiones de 60 minutos aproximadamente. Cada una abordó una tarea. Los estudiantes trabajaron individualmente con T, al final fueron entrevistados a fin de profundizar en sus formas de proceder y de acción. Se les motivó a explicar a toda la clase, apoyados de la pizarra, sus procedimientos y a responder preguntas de sus compañeros. Para fines del artículo se discuten resultados en T1.

Participantes

Participaron 22 estudiantes (13 mujeres y 9 hombres) de tercer grado de una escuela primaria, quienes al momento del estudio no habían recibido ninguna preparación en la resolución de tareas de generalización de patrones. Su participación se dio a partir de las facilidades otorgadas por la institución y de su habilidad en la comprensión lectora y los significados de la suma y la multiplicación, y la asistencia a las tres sesiones en que se trabajaron las tareas.

Tarea 1

Esta tarea se constituye de un patrón figural creciente (tomada de Montoya-Ditta, 2019), cuya regla algebraica asociada es: $S_n = 2n + 2$

Figura 1. *Tarea 1 "Las mesitas".*

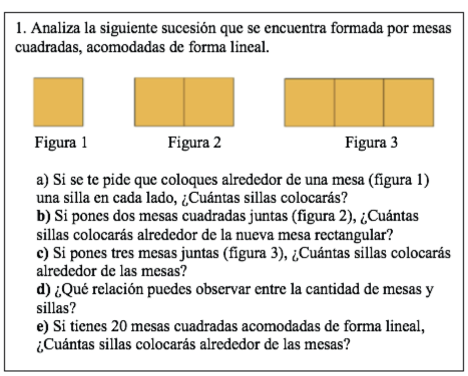

1. Analiza la siguiente sucesión que se encuentra formada por mesas cuadradas, acomodadas de forma lineal.

Figura 1 Figura 2 Figura 3

a) Si se te pide que coloques alrededor de una mesa (figura 1) una silla en cada lado, ¿Cuántas sillas colocarás?
b) Si pones dos mesas cuadradas juntas (figura 2), ¿Cuántas sillas colocarás alrededor de la nueva mesa rectangular?
c) Si pones tres mesas juntas (figura 3), ¿Cuántas sillas colocarás alrededor de las mesas?
d) ¿Qué relación puedes observar entre la cantidad de mesas y sillas?
e) Si tienes 20 mesas cuadradas acomodadas de forma lineal, ¿Cuántas sillas colocarás alrededor de las mesas?

Nota: La figura muestra una tarea plateada a estudiantes de primaria tercer grado de primaria. Fuente: Montoya-Ditta, (2019, p. 216).

El ExpE fue guiado por el primer autor de este documento, asumiendo el rol de profesor-investigador.

Análisis de datos

El análisis de los datos consideró las producciones escritas y verbales que presentaron tanto en el ambiente de papel y lápiz como en la entrevista durante el ExpE, a fin de reconocer las formas de proceder de los estudiantes y triangular esta información con las categorías de estrategias que la investigación ha documentado (Stacey, 1989; Lannin et al., 2006; Jurdak y El Mouhayar, 2014) en el marco de la generalización de patrones e identificar en ese proceso, tipos de razonamientos. Las formas de proceder, así como los tipos de razonamientos, se analizaron con las formas de percepción que los estudiantes mostraron a lo largo del ExpE.

Discusión de resultados

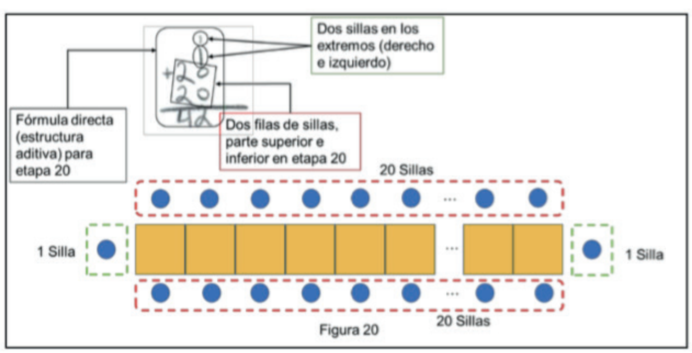
Aspectos cognitivos desarrollados por estudiantes que generalizaron

Se ejemplifica mediante los procesos desarrollados por los estudiantes (E) 4 y 12 en T1.

Estudiante 4

E4 movilizó diferentes procesos cognitivos. Primero, se observó su paso por un proceso de percepción sensorial, al percibir formas rectangulares de la unión de las mesas cuadradas. Luego se ubicó a trabajar sobre el contorno y analizó partes de las figuras. De ello, identificó la relación entre las variables figura y sillas. En las tres primeras etapas se apoyó del conteo, manifestando así el inicio de un pensamiento aditivo. En la etapa 20, explicita este pensamiento, a través de una estructura matemática que explica de manera adecuada el comportamiento del patrón figural. La estructura es de la forma: $Sn = n + n + 1 + 1$, de tipo deconstructiva aditiva (Figura 2). Recurrió al profesor-investigador para explicar y validar esta estructura, que, por alguna razón, no mantuvo al trabajar en otras etapas, aun con este acompañamiento. La estructura que mantuvo hasta el final es de la forma: $Sn = 2n$, la que se constituyó en una regla directa, aunque no así en la regla general que explica el comportamiento del patrón. Los procesos inferenciales de abducción, inducción y deducción fueron fundamentales en la generalización del patrón en E4, quien manifestó dos estructuras, una multiplicativa y otra aditiva.

Figura 2. *E4 percibió el patrón figural por medio de la estructura aditiva en la etapa 20.*

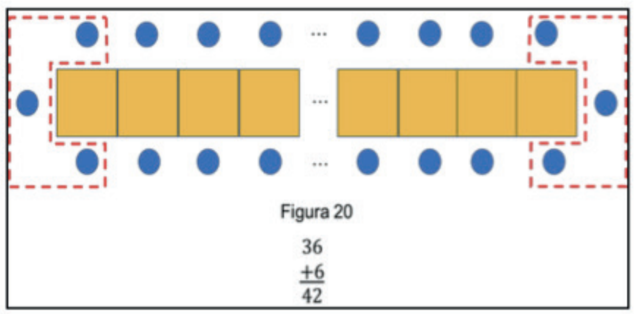


Fuente: Creación propia.

Estudiante 12

Se reconocieron procesos cognitivos diferentes en E12. Al inicio su percepción fue sensorial, de percibir formas rectangulares al fijarse en el contorno formado por las mesas unidas. Siguió un proceso cognitivo al coordinar significados, propiedades y representaciones, para inferir explicaciones. En etapas lejanas dirigió su atención a los pares de sillas que visualizó, los que sumó inicialmente, luego se apoyó de la multiplicación. Infirió una regla directa (o conjetura) verdadera, que expresó a través de dos estructuras multiplicativas distintas (o generalizaciones), una de tipo constructiva, la otra deconstructiva. Siguió un proceso abductivo para reconocerlas y las validó inductivamente en etapas cercanas. La generalización fue deconstructiva, la construyó guiado por el profesor, y quedó a nivel de regla directa. Manifestó un razonamiento deductivo, al cuestionarle por el número de sillas en etapas lejanas no consecutivas, superior a la etapa 20. Aquí, se apoyó de la generalización tipo constructiva, para determinar el número de sillas que se le demandó. Estableció nuevas conclusiones, verdaderas, a partir de otra también verdadera. La figura siguiente reconstruye la fórmula directa de E12 en la etapa 20.

Figura 3. *Forma de proceder desde lo figural de la regla directa para caso 2 de E12. Etapa 20.*



Fuente: Creación propia.

Los procesos abductivos, inductivos y deductivos fueron fundamentales en la generalización del patrón. Manifestó dos estructuras multiplicativas diferentes, ambas equivalentes y válidas, que se corresponden con la cantidad de mesas en relación con el número de etapa.

Estructuras matemáticas plausibles

Los estudiantes que generalizaron, establecieron distintas conjeturas o reglas directas relacionadas con la manera de percibir el patrón figural. Las estrategias que evidenciaron en su forma de proceder fueron la de *conteo a partir de una figura* (Stacey, 1983)*,* la *recursiva* y la *funcional* (El Mouhayar y Jourdak, 2016). La primera, la usaron para contar la variable silla en cada figura en las etapas dadas. La recursiva, cuando identificaron cuánto crece de una etapa a otra el número de sillas, usaron ese término o patrón recursivo, para determinar el número de sillas en etapas siguientes. La estrategia funcional, se identificó cuando relacionaron parte del patrón con el valor de la posición de la figura.

Los estudiantes que generalizaron, al inicio mostraron una forma de proceder similar como aquellos que no generalizaron. En su evolución, los primeros fueron capaces de percibir propiedades y características y relacionarlo con lo que visualmente percibían y así, transitar a una regla directa para explicar de mejor forma el comportamiento del patrón figural en etapas cercanas y lejanas.

Conclusiones

Los procesos cognitivos desarrollados por los estudiantes se conectaron a las formas en que percibieron los patrones figurales y procesos inferenciales que siguieron. Esto es, evolucionaron en las formas de percibir los patrones, que pasó de la sensorial a la cognitiva que desde la postura conceptual de Dretske (1990), ambas caracterizan a la percepción visual. Esta evolución se reconoció tanto en los que construyeron una regla local como una directa, ya que conectaron significados, propiedades y conceptos matemáticos, atendiendo a su nivel de abstracción, apoyados del lenguaje común.

La percepción sensorial se evidencia al momento en que los estudiantes, al involucrarse en el análisis de patrones figurales, ven grupos consecutivos de señales figurativas como meros conjuntos de objetos. Así, al trabajar en las sucesiones de patrones figurales asociadas a las tareas, al principio, trabajaron sobre las formas que reconocieron de las figuras de las etapas dadas. Percibieron así, meros objetos o formas geométricas.

La percepción cognitiva se articuló a los significados de la suma y la multiplicación, a nociones de perímetro y área, implícitas en sus diversas formas de proceder. Identificaron y justificaron un patrón creciente y cuánto crece, lo que derivó en una conjetura, que infieren de razonar abductivamente al trabajar y organizar las etapas dadas (o casos particulares). Probaron su conjetura mediante un razonamiento inductivo, estableciendo así una regla local, articulada a la relación de recurrencia. Los estudiantes cuyo razonamiento evolucionó de la relación de recurrencia al de correspondencia, fueron quienes construyeron y justificaron una estructura matemática plausible con la cual explicaron el comportamiento que siguió el patrón figural asociado en las tareas, en cualesquiera de sus etapas.

Se identificaron tres tipos de estrategias: conteo a partir de una figura, recursiva y funcional. Los tipos de generalización, las estructuras y los sistemas de representación manifestados por los estudiantes, dan cuenta de su evolución en la forma de percibir los objetos, así como de un mayor nivel de abstracción, al construir y justificar una estructura matemática, haciendo uso del lenguaje verbal-escrito y del simbólico. Se identificaron dos tipos de generalización, la constructiva y la deconstructiva. Asimismo, dos tipos de estructuras, una de tipo aditiva y otra, multiplicativa, asociadas a su nivel de abstracción. Sobre el tipo de representación empleados en los procesos de razonamiento en la resolución de las tareas, destacan el verbal-escrito, el simbólico- numérico y el pictórico (o figural). Su uso, se articula a la forma de percibir visualmente el patrón figural.

La visualización jugó un papel importante en la generalización de patrones en esta investigación. Se articuló al modo de percibir (sensorial y cognitiva) el patrón, así como a las estrategias y las estructuras que establecieron en el proceso de generalización y que describen el comportamiento de la sucesión lineal asociada al patrón figural.

Referencias bibliográficas

Aké, L. (2013). *Evaluación y desarrollo del razonamiento algebraico elemental en maestros en formación.* (Tesis doctoral), Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática, Granada, España.

Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority. (2015). *Mathematics: Sequence of content F-6 strand: Number and algebra.* Sydney, Australia.

Barbosa, A., & Vale, I. (2015). Visualization in pattern generalization: Potential and Challenges. *Journal of the European Teacher Education Network, 10*, 57-70.

Becker, J., & Rivera, F. (2005). Generalization Strategies of Beginning High School Algebra Students. En H. Chick, & J. Vincent (Edits.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* (Vol. 4, págs. 121-128). Melbourne: University of Melbourne.

Cabañas-Sánchez, G., Salazar, V., & Nolasco-Hesiquio, H. (2017). Tareas que potencian el desarrollo del pensamiento algebraico temprano en libros de texto de matemáticas de primaria. En J. Cuevas, & L. Aké (Ed.), *Pensamiento algebraico en México desde diferentes enfoques.*

Callejo, M., Fernández, C., & García-Reche, Á. (2019). Cognitive apprehension in visual pattern generalization problems. *Journal for the Study of Education and Development, 42*(4), 783-828.

Cañadas, M. (2007). *Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de educación secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas.* (Tesis Doctoral), Universidad de Granada, Granada, España.

Cañadas, M., & Figueiras, L. (2011). Uso de representaciones y generalización de la regla del producto. *Infancia y aprendizaje, 34*(4).

Carraher, D., & Schliemann, A. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. 2, págs. 669–705). Charlotte, NC: Information Age.

Castro, E., Cañadas, M., & Molina, M. (2010). El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático. *UNO*, 55-67.

Cetina-Vázquez, M., & Cabañas-Sánchez, G. (2022). Estrategias de generalización de patrones y sus diferentes formas de uso en quinto grado. *Enseñanza de las Ciencias, 40*(1), 65-86.

Dörfler, W. (2007). En route from patterns to algebra: comments and reflections. *ZDM Mathematics Education*, 143–160.

Dretske, F. (1990). Seeing, believing, and knowing. En D. Osherson, S. Kosslyn, & J. Hollerback (Edits.), *Visual cognition and action: An invitation to cognitive science* (págs. 129–148). Cambridge, Massachusetts: MIT Press.

Jurdak, M., & El Mouhayar, R. (2014). Trends in the development of student level of reasoning in pattern generalization tasks across grade level. *Education Studies Mathematical, 85*, 75–92.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. En E. Fennema, & T. Romberg (Edits.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (págs. 133-155). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kirwan, J. (2015). *Preservice secondary mathematics teachers' knowledge of generalization and justification on geometric-numerical patterning tasks.* (Tesis doctoral), Illinois State University, Normal.

Krutetskii, V. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren.* (J. Kilpatrick, I. Wirszup, Edits., & J. Teller, Trad.) Chicago: Chicago University Press.

Lannin, J., Barker, D., & Townsend, B. (2006). Algebraic Generalisation Strategies: Factors Influencing Student Strategy Selection. *Mathematics Education Research Journal*, 3-28.

Lupiáñez, J. (2016). Sistemas de representación. En L. Rico, & A. Moreno (Edits.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria* (págs. 119-136). Granada, España: Pirámide.

Mason, J. (1999). Incitación al estudiante para que use su capacidad natural de expresar generalidad: Las secuencias de Tunja. *Revista EMA*, 232-246.

El Mouhayar, R., & Jurdak, M. (2016). Variation of student numerical and figural reasoning approaches by pattern generalization type, strategy use and grade level. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 47*(2), 197-215.

Mulligan, J., & Mitchelmore, M. (2009). Awareness of pattern and structure in early mathematical development. *Mathematics Education Research Journal*, 33-49.

National Council of Teachers of Mathematics . (2000). *Principles and standards for school mathematics.* USA: NCTM.

Nilsson, P., & Juter, K. (2011). Flexibility and coordination among acts of visualization and analysis in a pattern generalization activity. *The Journal of Mathematical Behavior*, 194-205.

Pólya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible.* (J. Abellan, Trad.) Madrid: Editorial Tecnos.

Radford, L. (2018). The Emergence of Symbolic Algebraic Thinking in Primary School. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice* (págs. 3-25). New York: Springer.

Rico, L. (1997). Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación secundaria. En L. Rico, E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, . . . M. Socas (Edits.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (págs. 15-38). Madrid: Ice-Horsori.

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA, 4*(1), 1-14.

Rivera, F. (2010). Visual templates in pattern generalization activity. *Educational Studies in Mathematics*, 297-328.

Rivera, F. (2013). *Teaching and Learning Patterns in School Mathematics.* Dordrecht: Springer.

Rivera, F. (2018). Pattern Generalization Processing of Elementary Students: Cognitive Factors Affecting the Development of Exact Mathematical Structures. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 1-31.

Rivera, F., & Becker, J. (2007). Abduction-Induction (Generalization) Processes of Elementary Majors on Figural Patterns in Algebra. *The Journal of Mathematical Behavior*, 140-155.

Rivera, F., & Becker, J. (2008). Middle school children's cognitive perceptions of constructive and deconstructive generalizations involving linear figural patterns. *ZDM*, 65–82.

Seel, N. M. (2012). *Encyclopedia of the Sciences of Learning.* New York: Springer US.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalizing problems. *Educational Studies in Mathematics, 20(2)*, 147-164.

SEP. (2011). *Plan de estudios 2011. Educación básica.* México: SEP.

SEP. (2011a). *Programas de estudio 2011. Guía para el Maestro. Educación Básica. Primaria. Matemáticas. Primer grado.* México: SEP.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics* , 147-164.

Steffe, L., & Thompson, P. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential. En R. Lesh, & A. Kelly (Edits.), *Research design in mathematics and science education* (págs. 267-307). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

A ETNOMATEMÁTICA E A CASTANHA-DA-AMAZÔNIA: SUBSÍDIOS PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA ESCOLAR

THE ETHNOMATHEMATICS AND THE AMAZON NUTS: BENEFITS FOR SCHOOL MATHEMATICS TEACHING

Sandra Maria Nascimento de Mattos, José Roberto Linhares de Mattos, Antonio Ferreira Neto
Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Universidade Federal Fluminense, Instituto Federal de Rondônia (Brasil).
smnmattos@gmail.com, jrlinhares@gmail.com, antonio.f.neto@ifro.edu.br

Resumo
Este trabalho teve como objetivo analisar as interrelações entre a cultura dos Paiter Suruí na coleta e comercialização da castanha-da-Amazônia com o ensino da matemática escolar para a proposição de tarefas, ressignificando a aprendizagem dos alunos. Trata-se de um estudo de caso com abordagem qualitativa em que utilizamos como instrumento para a produção de dados a observação participante. Os resultados permitem concluir que os conhecimentos indígenas são fundamentais para a continuidade da identidade da etnia e da preservação cultural. Ficou constatado que a preservação da floresta, da sustentabilidade e da biodiversidade é preocupação da etnia e que o professor de matemática aproveita épocas em que toda a etnia está envolvida com práticas tradicionais para propor tarefas com as quais os alunos constroem o conhecimento matemático escolar.

Palavras-chave: Etnomatemática, castanha-da-Amazônia, cultura, educação escolar indígena

Abstract
This work aimed to analyze the interrelations between the culture of the Paiter Suruí in the collection and commercialization of Amazon nuts and the teaching of school mathematics for the proposition of tasks; re-signifying students' learning. This is a case study with a qualitative approach in which we used participant observation as an instrument for data production. The results allow us to conclude that indigenous knowledge is fundamental for the continuity of ethnic identity and cultural preservation. It was observed that the preservation of the forest, sustainability and biodiversity is a concern of ethnicity. So, the mathematics teacher takes advantage of times when all ethnicity is involved with traditional practices to propose tasks with which students build school mathematical knowledge.

Keywords: ethno-mathematics, Amazon nuts, culture, indigenous school education

Introdução

Um dos recursos naturais da região amazônica é a castanha-da-Amazônia, chamada também de castanha-do-Pará ou castanha-do-Brasil, principal fonte de renda do povo indígena Paiter Suruí de Rondônia, no Brasil. Esse povo faz a extração da castanha-da-Amazônia preservando seus conhecimentos tradicionais sobre o uso e a forma de explorá-la, sem esgotá-la e tampouco destruir o habitat natural da mesma, ou seja, a floresta. A castanha-da-Amazônia é uma amêndoa, um fruto da castanheira, uma árvore de grande porte que pode alcançar até 50 metros de altura. O aproveitamento desse recurso natural favorece as comunidades locais, sendo-lhes fonte de subsistência e de renda.

Na etnia Paiter Suruí a coleta é realizada por toda família e a comercialização é feita pelo homem. Esses ensinamentos são passados aos mais jovens, preservando a cultura da etnia. Analogamente a esse entendimento, constatou-se que a Etnomatemática era um caminho para auxiliar o professor de matemática em sua prática docente, bem como, aos alunos em sua aprendizagem. Dessa forma, a proposição de tarefas, embasada na prática da coleta, utilização e comercialização da castanha-da-Amazônia reforça os conhecimentos tradicionais e, por conseguinte, a aprendizagem dos alunos.

Conforme podemos ver em Oliveira e Mattos (2021), a relação entre escola e sustentabilidade contribui com reflexões sobre o desenvolvimento socioambiental nas comunidades indígenas. Há a preocupação, por parte dos indígenas, com a articulação dos conhecimentos tradicionais às tecnologias, bem como aos conhecimentos acadêmicos. Consequentemente, eles esperam que os professores indígenas assumam a responsabilidade de resgatar e propagar saberes e fazeres tradicionais da etnia, mesclando-os aos saberes e fazeres escolares. Faz-se, assim, uma base dialógica que direcionam as ações pedagógicas, desenvolvidas em sala de aula, às necessidades, aos interesses e às concepções tradicionais indígenas.

Por meio das observações realizadas e dos resultados alcançados, constatamos a importância de o professor de matemática ensinar utilizando a cultura dos alunos, no caso aqui, da etnia Paiter Suruí. Ficou evidenciado que a aprendizagem acontece pela significação dos conteúdos escolares, em que os alunos atribuem sentido e significado aos conceitos matemáticos. Podemos constatar, dessa maneira, que é possível a utilização da cultura no ensino e na aprendizagem dos conteúdos matemáticos escolares.

A Etnomatemática como recurso didático dentro e fora da sala de aula

Qualquer matemática, seja ela, do cotidiano, escolar, acadêmica ou em suas mais variadas formas, surge por meio de uma necessidade humana em solucionar algum problema encontrado. Faz parte do processo de hominização, que conduz a evolução do ser humano. Nessa perspectiva, não podemos rejeitar ou empoderar qualquer uma das matemáticas. Se assim o fizéssemos, estaríamos atribuindo um sentido e um significado superior àquela que elegemos como a dominante. Com essa visão, D'Ambrosio (2011) construiu o Programa Etnomatemática para retirar o caráter dominante de uma matemática sobre as demais.

Para o autor, contextualizar a matemática acadêmica com outros tipos de matemática existentes em grupos ou comunidades é essencial para todos. Entretanto, essa modificação de pensamento tem um viés político, pois a matemática dita dominante, luta por não perder seu lugar, enquanto as outras lutam para serem visibilizadas aos olhos daqueles que detêm o poder sobre o sistema educativo. Apesar desse embate político, há um debate sociocultural que possibilita o enfrentamento e traz as matemáticas para o âmbito escolar como recurso didático que auxilia tanto o ensino como a aprendizagem dos alunos.

A educação escolar, em sua maioria, é baseada na exposição oral que traz teorias sem qualquer contextualização, o que não favorece o processo cognitivo e afetivo dos alunos em relação aos conteúdos ensinados em sala de aula. Ao ensinar, o professor deve buscar que seu aluno realmente aprenda. Para aprender o aluno precisa querer aprender e para isso há a necessidade de contextualizar os conteúdos matemáticos escolares na sua cultura, podendo desenvolver atividades que busquem a interdisciplinaridade. Esses aspectos são preconizados pelo Programa Etnomatemática.

Sendo assim, partimos da Etnomatemática de Ubiratan D'Ambrosio, pois entendemos que "as distintas maneiras de fazer [práticas] e de saber [teorias], que caracterizam uma cultura, são parte do conhecimento compartilhado e do comportamento compatibilizado. Assim como comportamento e conhecimento, as maneiras de saber e de fazer estão em permanente interação" (D'Ambrosio, 2011, p. 19). Se esses saberes e fazeres interagem, constituindo a cultura de um povo, consequentemente caracterizam-se como conhecimento gerado e difundido na comunidade que forma esse povo. Nessa perspectiva,

> Todo indivíduo vivo desenvolve conhecimento e tem um comportamento que reflete esse conhecimento, que por sua vez vai-se modificando em função dos resultados do comportamento. Para cada indivíduo, seu comportamento e seu conhecimento estão em permanente transformação, e se relacionam numa relação de simbiose (D'Ambrosio, 2011, p. 18).

Os comportamentos que espelham os conhecimentos adquiridos dão base àquilo que Charlot (2000) cunhou de relação com saber, ou seja, "o valor e o sentido do saber nascem das relações e de suas apropriações" (Mattos, 2018, p. 744). Charlot (2000, pp. 63-64) afirma que "um saber só tem sentido e valor por referência às relações que supõe e produz com o mundo, consigo, com os outros." Desse modo, todo ser humano aprende e essa aprendizagem deve equivaler a adquirir um saber, entendendo-o como um conteúdo intelectual e não simplesmente acumulação de conteúdos intelectuais.

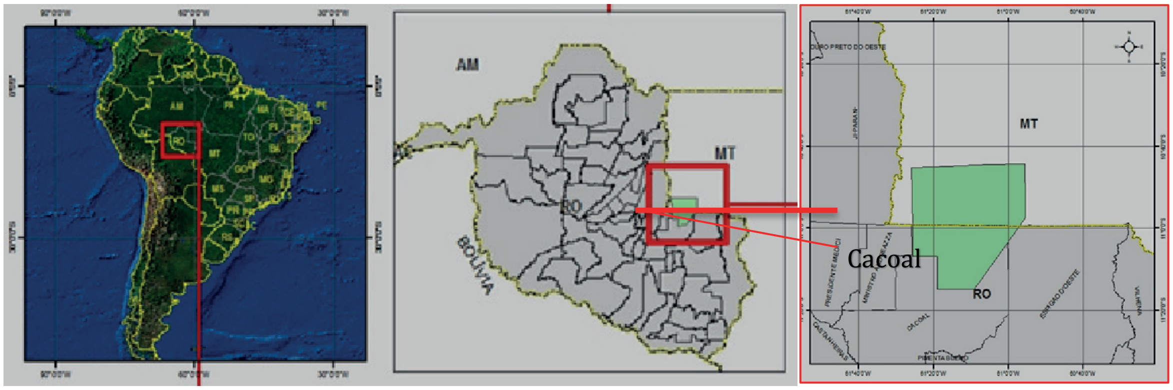
É essa visão que foi exposta acima e que o Programa Etnomatemática traz para o professor de matemática como ferramenta para ensinar os conteúdos matemáticos escolares. As apropriações e as relações que envolvem a cultura de um povo permite vivenciar o conhecimento próprio desse povo. Possibilita, ainda, em se tratando de uma comunidade indígena, reafirmar a identidade etnocultural e, ao mesmo tempo, empoderar pela visibilidade dada aos saberes e fazeres do cotidiano sociocultural dessa etnia.

De acordo com D'Ambrosio (2009, p. 119) "o grande desafio que se encontra na educação é justamente sermos capazes de interpretar as capacidades e a própria ação cognitiva não da forma linear, estável e contínua que caracteriza as práticas educacionais mais coerentes."

A etnia Paiter Suruí de Rondônia - Brasil e a Educação Escolar Indígena

A etnia Paiter Suruí está localizada nas Terras Indígenas Sete de Setembro, possuindo vinte e cinco aldeias, distribuídas ao longo de linhas vicinais (estradas de acesso). Segundo Mattos e Ferreira Neto (2016, p. 80) esses indígenas se autodenominam "Paiter" que significa "nós mesmos" ou "gente de verdade". A aldeia pesquisada foi a aldeia Paiter Linha 09, na cidade de Cacoal – Rondônia (Figura 1). Essa aldeia foi aberta por duas famílias. Atualmente contém aproximadamente 200 pessoas distribuídas em 22 famílias.

Figura 1: Localização das Terras Indígenas Sete de Setembro dos Paiter Suruí de Rondônia – Brasil



Fonte: Funai

O nome Sete de Setembro originou-se do nome do acampamento da Funai, criado um ano antes do contato em sete de setembro de 1968. Os Paiter Suruí são organizados em quatro clãs: *Gameb* (marimbondos pretos), *Gabgir* (marimbondos amarelos), *Makor* (taboca) e *Kaban* (mirindiba). A aldeia pesquisada é pertencente ao clã *Kaban*. Apesar de serem poligâmicos, poucos se ariscam a ter mais de uma esposa. Os afazeres da aldeia são divididos entre homens e mulheres. Às mulheres cabem o cuidado da casa e dos filhos, a produção de artesanatos, de cestaria, de panela de barro e tecer o algodão. Aos homens cabem a caça, a pesca (as mulheres também podem pescar, desde que não seja com arco e flecha), a construção da roça, a produção de arcos e flechas e de cocares.

A educação escolar indígena integrada à educação indígena permite a preservação da cultura e do ambiente, possibilitando uma aprendizagem significativa (Ausubel, 2000). A educação indígena (Figura 2) sempre existiu e não depende de escola, já que a todo momento ocorre o ensinamento para aqueles que querem aprender. Basta que os mais jovens se aproximem dos sabedores anciãos e que estes estejam desenvolvendo um instrumento, um artesanato, uma cestaria, ou mesmo falando sobre algo, que haverá ensino. É o que chamamos de educação informal. Podemos perceber que nesses ensinamentos há uma matemática própria da etnia e do cotidiano.

Figura 2: Indígena ensinando sobre a castanheira no meio da floresta (Educação indígena)

Fonte: Dos autores

A educação escolar indígena, no Brasil, busca atender aos artigos 26, 32, 78 e 79 da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional 9394/96 (Brasil, 1996), os quais afirmam que esta deve ser intercultural e bilíngue, como forma de preservar a identidade, os costumes e as tradições das etnias. O Referencial Curricular Nacional para as escolas indígenas (Brasil, 1998) assegura um currículo local, priorizando os anseios e interesses das comunidades indígenas. Em atendimento à legislação, a aldeia Paiter Linha 09 possui uma escola que no ano de 2017 recebeu 35 crianças no ensino fundamental e 13 jovens no ensino médio. Conta com cinco professores indígenas e 13 professores não indígenas que atuam por revezamento.

No ensino fundamental é utilizado o projeto Mais Educação do governo federal que visa fomentar, por meio de sensibilização, incentivo e apoio, projeto ou ações de articulação de políticas sociais e implementação de ações socioeducativas oferecidas gratuitamente a crianças, adolescentes e jovens, para o fortalecimento cultural e do uso de língua Paiter. Agroecologia, cultura, artes, memória e histórias das comunidades tradicionais, artesanatos e acompanhamento pedagógico são as áreas trabalhadas pela escola no projeto Mais Educação, fortalecendo o trabalho do professor indígena em sala de aula, valorizando a cultura, a memória e a história do povo Paiter Suruí, por meio da participação e práticas dos idosos, sabedores dos conhecimentos socioculturais da etnia.

A introdução da cultura, da história, dos saberes e fazeres da etnia Paiter Suruí na escola, não significa rejeição à cultura do não indígena em suas práticas escolares, muito pelo contrário, pois é intenção desse povo apreender os conhecimentos do não indígena, tão necessários à sua sobrevivência. É o conhecer para preservar o mundo, significando entender o conhecer "como ação efetiva, ação que permite ao ser vivo continuar sua existência em um determinado meio ao fazer surgir o mundo. Nem mais, nem menos" (Maturana & Varela, 2001, p. 36).

Nessa perspectiva, o viés etnomatemático (D'Ambrosio, 2011) se faz pertinente por mostrar a importância dos conhecimentos matemáticos próprios contidos no cotidiano da etnia. Assim, os indígenas compreendem que existe saber nas atividades desenvolvidas na aldeia e que esse saber tem importância para o desenvolvimento dos conhecimentos acadêmicos (Mattos & Ferreira Neto, 2016).

A castanha-da-Amazônia

A castanha-da-Amazônica (Figura 3) é considerada produto florestal não madeiráveis (PFNM), sendo um recurso viável à sustentabilidade local, já que não há necessidade de destruir a matéria prima, que é a castanheira. Para Machado (2008, p. 13) "os PFNM são todos os produtos provenientes da floresta e que não sejam madeira, [...]." No estado de Rondônia, Brasil, que é o quarto maior produtor de castanha-da-Amazônia, a extração está concentrada em terras indígenas (TI). Uma dessas TI é a Sete de Setembro com aldeias localizadas na cidade de Cacoal, no estado de Rondônia e na cidade de Rondolândia no estado do Mato Grosso, em que a coleta era feita, mesmo antes do contato, por todas as famílias da aldeia. Assim, o extrativismo tradicional consiste na coleta dos ouriços que estão no chão, sendo amontoados e posteriormente guardados em cestos.

Figura 3: Castanha-da-Amazônia e castanheira

Fonte: Dos autores

A coleta é realizada por toda comunidade, dividida em famílias. Antes do contato, eles colhiam as castanhas somente para o consumo. A castanha era consumida de maneira tradicional, ou seja, há milhares de anos as comunidades indígenas já faziam uso da castanha na alimentação, preparando paçoca com carne, leite ou ralada com mel. Atualmente, eles colhem o máximo que podem para comercializar. Essa comercialização teve início a partir do século XIX e vem aumentando significativamente por suas propriedades nutricionais, gastronômicas e cosméticas.

De acordo com Ribeiro:

> O aumento da procura por produtos ambientalmente corretos, que contribuam para a conservação da floresta Amazônica e para a qualidade de vida das populações tradicionais, como os com certificação orgânica e florestal, representa uma grande oportunidade para a comercialização da castanha. Para isso é necessário realizar o manejo adequado desse recurso, que garanta tanto a qualidade como a sua sustentabilidade, viabilizando a exploração por tempo indeterminado pelas populações que dependem do mesmo (Ribeiro, 2011, p.6).

O perigo encontra-se na ganância de alguns fabricantes que querem uma coleta desenfreada e exagerada. Entretanto, os indígenas estão mais preocupados com a preservação da castanha. Constatamos que a coleta realizada pelos indígenas da etnia Paiter Suruí permite a garantia tanto da qualidade das castanhas quanto da preservação da sustentabilidade local. É interesse da etnia continuar realizando o consumo e a comercialização das castanhas.

Metodologia

Tomamos a abordagem qualitativa de pesquisa com enfoque no método de estudo de caso, por ser um método estruturado e empírico. Utilizamos como instrumento a observação participante com captação de imagens, para gerar um conhecimento mais contextualizado, focando uma determinada situação em uma comunidade, o que pode “revelar a descoberta de novos significados, estender a experiência.” Da mesma maneira levar “a descoberta de novas relações” (André, 2005, p. 18). Essa abordagem permitiu-nos compreender como a Etnomatemática, implícita na coleta e comercialização da castanha-da-Amazônia, pode auxiliar no ensino e na aprendizagem de conteúdos matemáticos escolares.

O objetivo da pesquisa foi analisar as possíveis interrelações entre a cultura dos Paiter Suruí, na coleta e comercialização da castanha-da-Amazônia, e o ensino dos conteúdos da matemática escolar, para a proposição de tarefas que melhore a aprendizagem dos alunos. De acordo com o objetivo, a pesquisa justificou-se pelo entendimento que os conhecimentos prévios da cultura dos alunos atuam como subsunçores para a aprendizagem significativa (Ausubel, 2000) dos conteúdos matemáticos. De fato, Mattos e Mattos (2019) defendem a aprendizagem significativa junto ao Programa Etnomatemática por entenderem que o uso de organizadores prévios estimula a estrutura cognitiva do aluno, a fim de facilitar a aprendizagem por meio da cultura.

A pesquisa foi realizada no ano de 2017 e teve como lócus a Escola Estadual Indígena Izidoro de Souza Meireles da aldeia Paiter Linha 09, cidade de Cacoal, estado de Rondônia, Brasil. Além da escola, tomamos como lócus de pesquisa o entorno da mesma, no momento em que os indígenas estavam na prática das atividades cotidianas para a coleta e comercialização da castanha-da-Amazônia.

Toda a comunidade, de uma forma geral, foi participante da pesquisa, já que todos participam da coleta da castanha, entretanto restringimo-nos essencialmente como sujeitos de pesquisa o professor de matemática e os alunos. Foram realizadas algumas visitas à aldeia que nos possibilitou estar em sala de aula na realização de observação participante para compreender como o professor desenvolveu a aula. Além disso, foram produzidas imagens e realizado vídeos para preservar o contexto no momento da pesquisa.

Para obter os resultados, os dados foram analisados de acordo com as observações realizadas durante as aulas do professor de matemática, as quais nos permitiram verificar como o professor trabalhou conteúdos curriculares de matemática escolar utilizando a castanha-da-Amazônia para ensiná-los, conforme será descrito nos resultados a seguir.

Resultados

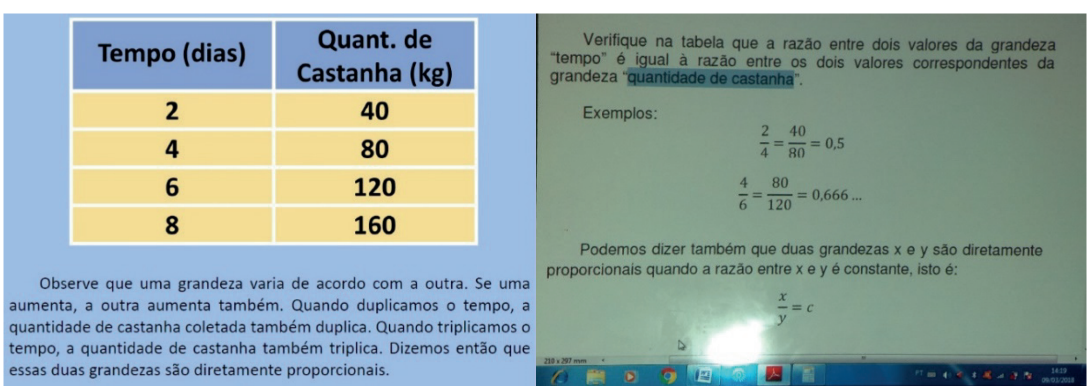
Na análise e discussões dos dados coletados procuramos deixar claro que a contextualização na cultura, que está na base da Etnomatemática, é um elemento importante para tornar a aprendizagem significativa para os alunos. Como D'Ambrosio afirma sobre o Programa Etnomatemática: "ao reconhecer que não é possível chegar a uma teoria final das maneiras de saber/fazer matemático de uma cultura, quero enfatizar o caráter dinâmico deste programa de pesquisa" (D'Ambrosio, 2011, p. 18). Consequentemente, qualquer professor, indígena ou não, deve estar aberto a novas metodologias de ensino com o propósito de garantir a aprendizagem de seus alunos.

Com o olhar focado na Etnomatemática, apresentamos algumas maneiras de ensinar alguns conteúdos matemáticos com a prática da coleta, utilização e comercialização da castanha-da-Amazônia. Apresentamos neste trabalho o ensino de razão e proporção, em que o professor utilizou o tempo, em dias, com a quantidade, em quilos, de castanha coletada. Isso é importante, tendo em vista que a coleta e venda da castanha, além de uma prática cultural, é um dos principais recursos financeiros dos Paiter, e quanto mais venderem, melhor. Diversas tarefas foram desenvolvidas apresentando razão e proporção, além de reforçar a tabuada na multiplicação e divisão.

No primeiro momento, o professor de matemática conversou sobre a castanha, a coleta e a comercialização. Mostrando as atividades tradicionais da etnia, algo do cotidiano dos alunos, já que eles participam dessa atividade junto com suas famílias. Nesse momento, o professor atuou como um sabedor local, explicando mitos e histórias relativas à essa prática. A relação da matemática do cotidiano com a matemática escolar ocorreu de forma natural. Consequentemente, constatamos que "a etnomatemática propõe uma pedagogia viva, dinâmica, de fazer o novo em resposta a necessidades ambientais, sociais, culturais, dando espaço para a imaginação e para a criatividade" (D'Ambrosio, 2008, p. 10).

No segundo momento, o professor de matemática fez a relação da matemática escolar com a coleta da castanha. Em sua exposição do conteúdo sobre razão e proporção (Figura 4) demonstrou que tudo que faz parte do cotidiano da etnia tem conteúdos importantes da matemática escolar.

Figura 4: Power point do professor de matemática indígena contextualizando razão e proporção



Fonte: Dos autores

Na fala do professor pudemos constatar que ele sempre fazia a distinção entre matemática escolar e matemática do cotidiano. Mais uma vez buscamos D'Ambrosio (2009, p. 84) para demonstrar a postura filosófica do professor, pois ao proporcionar que os alunos aprendessem com prazer, ele traz "sua maneira de ver o conhecimento." E, ainda, ele compreende que os alunos são envolvidos com os conteúdos a serem ensinados de maneira afetiva.

Essa compreensão corrobora a opinião de Mattos e Almeida (2016, p. 9) que afirmam: "quando o professor gosta do que faz e passa sua intenção de ensinar, ressignifica o conteúdo matemático de forma criativa, favorecendo a integração do mundo interior do aluno com o mundo exterior." Consequentemente, o professor faz a ligação dos conteúdos matemáticos escolares com o cotidiano das atividades da aldeia.

Devemos ressaltar que a postura do professor perante a aprendizagem dos alunos envolve o tom da voz na comunicação, a proximidade com os alunos e a forma como acolhe o entendimento do aluno, aspectos esses que impactam afetivamente os alunos e favorecem a aprendizagem dos conceitos ensinados. Segundo Mattos (2016, p. 3) "procurar indícios que levem alunos a não terem desempenhos insatisfatórios em matemática é, de certa forma, tentar revertê-los." E, se o professor que ensina matemática escolar pretende reverter esse quadro, deve ficar atento porque "há que se modificar práticas docentes e ponto de vista dos alunos sobre os conteúdos matemáticos" (Mattos, 2016, p. 3).

Podemos observar na figura 5 que o professor caminha pela sala com o intuito de auxiliar seus alunos, caso haja quaisquer dúvidas que possam surgir, no percurso em que estão desenvolvendo suas argumentações e justificativas para chegar à solução da tarefa proposta. Mattos (2018, p. 741) afirma que "a aprendizagem dos alunos é espelhada pelo comportamento que o professor desenvolve em sala de aula." Nessa perspectiva, os alunos se sentem seguros para expor suas argumentações e apresentar os resultados que alcançaram.

Figura 5: Professor auxiliando os alunos na compreensão dos conceitos matemáticos

Fonte: Dos autores

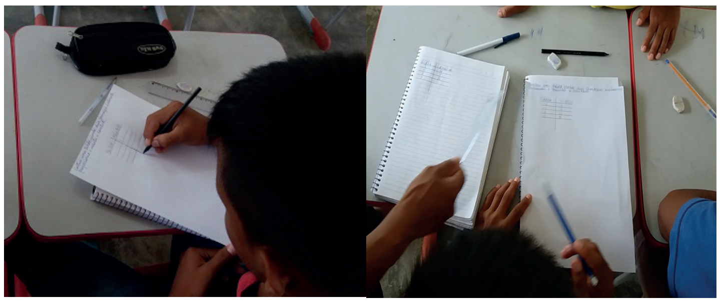
Com relação aos alunos, pudemos perceber que eles interagem com os conceitos matemáticos, expostos pelo professor, pela satisfação que sentem ao compreenderem que na sua cultura há um saber matemático próprio que está implícito nas atividades cotidianas da aldeia. Mattos (2016, p. 8) afirma que ao "ser encorajado a realizar tarefas matemáticas, a expressar sua opinião e a expressar que caminhos seguiu para realizar uma tarefa torna-se necessário para que o aluno perca o medo diante de uma sessão de aula." O que constatamos é que não há medo, por parte dos alunos, a respeito dos conteúdos matemáticos escolares.

O professor indígena viabiliza a aprendizagem dos conteúdos matemáticos escolares em seus alunos, obtendo resultados satisfatórios, devido ter a intenção de modificar sentido e significados introduzindo aspectos da cultura. Isso permite alterar a relação que os alunos têm com a matemática de uma forma geral, já que há a introdução da Etnomatemática trazendo um novo olhar para as próprias atividades locais.

Assim, o professor reduz acontecimentos que produzam reações com tonalidades desagradáveis no que diz respeito à matemática escolar e, ao mesmo tempo, estabelece interações amistosas entre ele e seus alunos e de ambos com o conhecimento (Figura 6).

Esse novo olhar dado a coleta e comercialização da castanha, auxilia no entendimento cuidadoso das tradições culturais da etnia. O estímulo dado aos alunos, por meio de uma atividade que estava sendo realizada e que envolvia toda a comunidade, possibilitou a esses alunos terem uma maior interação em sala de aula e fora dela, na tentativa de aprender mais sobre a coleta e comercialização da castanha.

Figura 6: Alunos expondo seus argumentos e justificativas para a resolução da tarefa proposta



Fonte: Dos autores

Em nossas observações em sala de aula vimos, também, que os alunos se ajudavam mutuamente (Figura 7). Aquele que entendia mais rapidamente o que era exposto ou proposto pelo professor, auxiliava o colega para que alcançasse a resposta satisfatória da tarefa.

Figura 7: Aluno ajudando ao colega

Fonte: Dos autores

Conclusões

Por meio da observação participante realizada com o professor de matemática constatamos que a utilização da cultura dos Paiter Suruí em sala de aula, por meio da coleta da castanha, que é uma atividade desenvolvida por todos, torna a mesma uma fonte de aprendizado e preservação das tradições, empoderando-os e reafirmando a identidade da etnia. Os conteúdos matemáticos escolares são ressignificados, reavivando os conhecimentos inerentes aos próprios indígenas e proporcionando a aprendizagem significativa (Ausubel, 2000). Observamos que não há aprendizagem somente em sala de aula, visto que, na aldeia há saberes e fazeres da cultura indígena que transbordam conhecimentos matemáticos próprios do povo e que podem ser utilizados para promover e contextualizar a aprendizagem dos alunos, aspectos que estão na base da Etnomatemática (D'Ambrosio, 2011).

É notório que a postura do professor indígena ao ensinar os conteúdos matemáticos escolares, por meio das atividades desenvolvidas pela comunidade, influencia a participação ativa dos alunos. Permite ainda que apreendam o conhecimento já que este está ancorado naquilo que eles conhecem de sua cultura e, quando ocorre alguma dificuldade, o professor está sempre solícito para saná-la. Percebemos, ainda, que os alunos ajudavam um ao outro, seja para o entendimento dos conteúdos, seja para a resolução da tarefa proposta.

A preservação da floresta, da sustentabilidade e da biodiversidade é preocupação de toda etnia e, mais ainda, do professor de matemática. Ele aproveita épocas em que toda a etnia se vê envolvida nas práticas culturais tradicionais para propor tarefas com as quais os alunos constroem o conhecimento matemático escolar.

Diante do exposto nos resultados, tendo em vista as etapas utilizadas pelo professor para desenvolver suas aulas, concluímos que tanto a etnomatemática quanto a castanha-da-Amazônia atuaram como recursos didáticos para o ensino e a aprendizagem de conteúdos matemáticos, como razão e proporção.

Referências bibliográficas

André, M. E. D. A. (2005). *Estudo de Caso em Pesquisa e avaliação educacional*. Brasília: Liber Livro Editora.

Ausubel, D. P. (2000). *Aquisição e Retenção de Conhecimentos: Uma Perspectiva Cognitiva*. Lisboa: Plátano Edições Técnicas.

Brasil. (1998). *Referencial curricular nacional para as escolas indígenas*. Brasília, DF: MEC.

Brasil. (1996). *LEI Nº 9.394 de 20 de dezembro de 1996*. Estabelece as Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Brasília, DF: MEC.

Charlot, B. (2000). *Da relação com o saber: elementos para uma teoria*. Trad. Bruno Magne. Porto Alegre: ArtMed.

D'Ambrosio, U. (2011). *Etnomatemática – elo entre as tradições e a modernidade*. 4.ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora.

D'Ambrosio, U. (2009). *Educação matemática: da teoria à prática*. 17. ed. Campinas: Papirus. (Coleção Perspectivas em Educação Matemática).

D'Ambrosio, U. (2008). O programa etnomatemática: uma síntese. *Acta Scientiae*, 10(1). Recuparado de http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/74.

Machado, F.S. (2008). *Manejo de produtos florestas não madeiráveis: um manual com sugestões para o manejo participativo em comunidades da Amazônia*. Acre: Pescare e Cifor. Recuperado de http://www.pesacre.org.br/MACHADO_F_S_Livro_Manejo_de_PFNMs_WEB.pdf.

Mattos, S.M.N. (2018). Comportamentos expressos pelo professor de matemática em sala de aula: a visão dos alunos brasileiros do ensino fundamental II. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa – Alme*. 31(1), 741-748.

Mattos, S.M.N. e Almeida, L.R. (2016). Sentimentos expressos por alunos do ensino fundamental II: a aula de matemática em foco. Encontro Nacional de Educação Matemática, XII. *Anais*... São Paulo: Universidade Cruzeiro do Sul, 1-12.

Mattos, J. R. L. & Ferreira Neto, A. (2016). O povo Paiter Suruí e a etnomatemática. In Bandeira, F. A. & Gonçalves, P. G. F. (Orgs.). *Etnomatemáticas pelo Brasil*: *aspectos teóricos, ticas de matema e práticas escolares*. Curitiba: CRV, 79-100.

Mattos, S.M.N & Mattos, J.R.L. (2019). Etnomatemática e prática docente indígena: a cultura como eixo integrador. *Hipátia*. 4(1), 102-115.

Maturana, H.R. e Varela, F.J. (2001). *A árvore do conhecimento: as bases biológicas da compreensão humana.* Trad. Humberto Mariotti e Lia Diskin. São Paulo: Palas Athena.

Oliveira, K.F. & Mattos, S.M.N. (2021). Utilização de práticas de sustentabilidade na educação escolar indígena: o babaçu na aldeia Aritana do povo Paiter Surui. In Mattos, J.R.L. & Ferreira Neto, A. (org.). *Textos e contextos educativos*. Jundiaí: Paco editorial. 89-114.

Ribeiro, M.B.N. (2011). *Ecologia, manejo e sustentabilidade da exploração da castanha-da-Amazônia (Bertholletia Excelsa) pelos índios Kaiapó, sudeste de Amazônia*. Tese (Doutorado em Biologia). 142 f. INPA, Manaus.

VOL 35, NÚMERO 1, AÑO 2022

ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA PARA LA JUSTICIA SOCIAL UNA DIDÁCTICA DE LA INTERDISCIPLINARIEDAD

TEACHING MATHEMATICS FOR SOCIAL JUSTICE A DIDACTIC OF INTERDISCIPLINARITY

Verónica Molfino, Cristina Ochoviet
Consejo de Formación en Educación, Uruguay
veromolfino@gmail.com; cristinaochoviet@gmail.com g

Resumen
En esta comunicación breve presentamos algunos ejemplos acerca de cómo es comprendida la perspectiva de la enseñanza de la matemática para la justicia social por parte de estudiantes de profesorado o docentes en formación a quienes hemos acercado esta perspectiva en diferentes cursos, desde el año 2016 a la fecha. El análisis de cada uno de estos ejemplos y su categorización permite vislumbrar cómo en cada uno de ellos la interdisciplinariedad surge como una herramienta natural para dar respuesta a problemas del mundo en que vivimos. Concluimos que la perspectiva adoptada constituye una herramienta potente para la formación didáctica de los futuros profesores con posibilidades de impactar en la consideración social de la matemática.

Palabras Clave: justicia Social, interdisciplinariedad, formación profesores

Abstract
In this communication we present some examples about how the perspective of teaching mathematics for social justice is understood by prospective teachers or teachers in postgraduate courses to whom we have approached this perspective, from 2016 to the date. The analysis of each of these examples and their categorization allows us to glimpse how interdisciplinarity emerges as a natural tool to solve problems about our world. We conclude that the adopted perspective constitutes a powerful tool for prospective teachers with the possibility of impacting over their social consideration of mathematics.

Keywords: social justice, interdiscipinarity, teacher training.

Introducción

Como formadoras de profesores presentamos la enseñanza de la matemática para la justicia social (EMpJS) a los futuros profesores o profesores en formación porque entendemos que desde la educación matemática de los ciudadanos es posible contribuir a la construcción de una mejor sociedad para todos. Acordamos con Llorente (2012, párr. 14) en que "frente a las funciones tradicionales de la escuela, económica, ideológica, de socialización y de reproducción social, apostamos por la función emancipadora de la educación que consiste en educar para la participación responsable y la crítica activa". Así, entendemos necesario fomentar desde la formación inicial de profesores una educación que se proponga cambiar el mundo y posibilite una inserción crítica en él (Freire, 2014) y para ello utilizamos un enfoque que promueve en los estudiantes de enseñanza media un pensamiento crítico hacia las desigualdades de la sociedad en la que vivimos. La perspectiva de la EMpJS que proponemos en los cursos de formación docente desde el año 2016, plantea promover aprendizajes matemáticos a través de una lectura del mundo con recursos matemáticos (Felton–Koestler, 2017; Skovsmose, 2012). En Molfino y Ochoviet (2019) se desarrolla la perspectiva teórica y se presentan antecedentes que reportan resultados relativos a la implementación de esta perspectiva en cursos de formación de profesores.

En el camino transitado desde 2016 a la fecha, nuestros estudiantes han generado distintas propuestas de enseñanza que con diferentes aproximaciones se enmarcan en la perspectiva de la EMpJS. Algunas de ellas fueron implementadas en cursos de enseñanza media, con diferentes tipos de reacciones por parte de sus estudiantes. Hoy, a cuatro años de comenzado este desafío, proponemos una mirada retrospectiva que nos permita reflexionar sobre lo hecho y seguir avanzando.

La perspectiva de la EMpJS implica, para docentes y futuros docentes, no solo reflexionar sobre sus concepciones sobre la enseñanza de la matemática, sino también sobre la matemática misma. Es por ello que adoptamos para nuestra mirada retrospectiva una categorización relativa a las maneras en que los estudiantes de profesorado visualizan las relaciones entre la matemática y la comprensión del mundo (Felton–Koestler, 2017). En este ensayo ilustraremos cada una de esas categorías con propuestas de enseñanza diseñadas por diversos grupos de estudiantes de profesorado.

En este artículo presentamos la categorización presentada por Felton–Koestler (2017) sobre las relaciones entre la matemática y la comprensión del mundo que pueden presentar los futuros profesores. A continuación, ilustramos estas categorías mediante ejemplos de las producciones de distintos grupos de estudiantes del profesorado de matemática que consisten en diseños para la enseñanza. El análisis de dichos ejemplos permite, a su vez, inferir aspectos sobre la manera en que los futuros docentes o docentes en formación comprenden la perspectiva. Estos diseños, como se verá, reflejan las posibilidades y las dificultades para llevar adelante estas propuestas educativas. Asimismo, en ellos se hace patente el potencial del enfoque para el diseño de propuestas de enseñanza desde una mirada interdisciplinar. Para cerrar, reflexionamos acerca de cómo la EMpJS posibilita que futuros profesores y sus alumnos conciban a la matemática como herramienta para leer el mundo y, por qué no, intervenir en él para promover cambios.

Tipos de relaciones entre la matemática y la comprensión del mundo

Felton–Koestler (2017), en su trabajo con profesores y futuros profesores, ha identificado cuatro tipos de relaciones entre la matemática y la comprensión del mundo:

1. *Disciplina distinta*: La matemática es una disciplina particular, prácticamente autocontenida, que no se relaciona con la vida cotidiana o el entorno y no se ocupa de temáticas sociales o políticas.
2. *Mundo real*: La matemática debe estar vinculada a temáticas del mundo en el que vivimos que son apolíticas o neutrales. No toma posiciones acerca de las problemáticas sociales.
3. *Sociopolítica*: La matemática debe estar relacionada a temas claramente políticos o a asuntos controversiales.

4. *Injusticia*: La matemática debe estar conectada a temas que pretenden generar conciencia para comprender y trabajar para la superación de las injusticias que la disciplina permite identificar.

El autor aclara que estas visiones no constituyen categorías estancas, sino que los docentes o los estudiantes de profesorado podrán ubicarse en una de estas visiones o transitar entre ellas. Es por eso que ilustramos las últimas tres categorías mediante ejemplos de trabajos desarrollados por estudiantes de profesorado que ilustran cada una de las últimas tres categorías, en el entendido que estos mismos estudiantes podrían desarrollar otras secuencias de enseñanza que por la problemática que abordan se sitúen en otra categoría.

La categoría que considera a la matemática como una disciplina sin vínculos con temáticas sociales o políticas no es ilustrada porque al enmarcarse en la EMpJS, las secuencias diseñadas buscan, por definición, algún tipo de vínculo con problemáticas sociales, en mayor o menor medida. No obstante, presentaremos la reflexión de un profesor en formación de posgrado, al solicitársele que diseñara una propuesta didáctica enmarcada en la EMpJS para la formación de profesores.

Visiones que ilustran que la matemática es una disciplina distinta

Como ya señalamos anteriormente, en este trabajo ejemplificamos distintas propuestas didácticas diseñadas por futuros profesores o profesores en formación que evidencian una manera particular de entender la perspectiva de la EMpJS.

Solicitamos a un grupo de docentes en formación el diseño de una propuesta de enseñanza desde este enfoque, y si bien no se negaron a hacerlo interponiendo el argumento de que la matemática no se relaciona con el entorno o con temáticas sociopolíticas, sí expusieron las dificultades que surgían al intentar pensar la propuesta. A continuación, presentamos la reflexión de un profesor de matemática:

> Es posible que me equivoque, que me corrijan, y que tenga que dar la razón enseguida, pero igual estoy seguro de que no es posible enseñar cualquier tema desde la realidad. Creo que el problema es justamente que estamos tan acostumbrados a pensar la matemática como algo abstracto que nos olvidamos muchas veces de que puede ser trabajada desde lo real. Por ejemplo, si pensamos en la completitud de R, no se me ocurre cómo enseñar dicho concepto vinculándolo con la justicia social, o cualquier tema de topología.
>
> Sin embargo, uno de los problemas que identifica Llorente, al igual que otros como Wright, es que el curriculum no apunta a trabajar los contenidos en dicha perspectiva en ningún momento. De hecho, me atrevo a afirmar que, todo lo contrario. Podríamos afirmar que apunta a generar una sensación de imparcialidad política ideológica en las clases de matemática que la verdad no estoy de acuerdo.
>
> Ahora, la pregunta que resuena es ¿se puede enseñar desde esta perspectiva en formación docente o solo se puede enseñar en esta perspectiva en secundaria (o más específicamente, en ciclo básico)?

Lo que el profesor dice hace patente la concepción de la matemática que tienen muchos docentes y estudiantes de profesorado que consideran a la matemática como una disciplina distinta que no se vincula con el entorno: “Creo que el problema es justamente que estamos tan acostumbrados a pensar la matemática como algo abstracto que nos olvidamos muchas veces de que puede ser trabajada desde lo real”.

Además, el profesor ofrece testimonio de la existencia de la primera relación expuesta por Felton–Koestler (2017), la matemática como disciplina aséptica (que no es la que él comparte): “Podríamos afirmar que apunta a generar una sensación de imparcialidad política ideológica en las clases de matemática que la verdad no estoy de acuerdo”. Con este ejemplo, exponemos en forma manifiesta que la consideración social hacia la matemática como una disciplina distinta, también se presenta en nuestra comunidad de profesores.

Diseños que ilustran una visión de la matemática con vínculos con el mundo real

La segunda categoría que presenta Felton–Koestler (2017) refiere a la consideración de que la matemática debe relacionarse con el mundo real mediante el abordaje de temáticas que son consideradas apolíticas y neutrales.

Uno de estos temas podría ser, por ejemplo, la alimentación saludable: es deseable para todos los ciudadanos y, a priori, algo alcanzable. Dos trabajos de estudiantes han usado esta temática para la enseñanza de porcentaje en primer año de enseñanza media. Estos trabajos no ponen de relieve la posibilidad de acceso a una alimentación digna, lo que implicaría una visión sociopolítica de la problemática, sino que lo que se proponen es brindar a los estudiantes herramientas para seleccionar, de entre lo que ellos tienen a disposición, los alimentos más saludables.

Es por ello que consideramos que los estudiantes de profesorado, a través de esta secuencia de enseñanza, dejan traslucir una visión de que la matemática debe vincularse con temáticas del mundo real que son apolíticas o neutrales.

Uno de esos trabajos fue reportado en Álvarez, Molfino, Pereira y Silva (2017), transcribimos a continuación la secuencia diseñada:

Figura 1. Propuesta didáctica

Actividad

Se les debe solicitar a los estudiantes que traigan un paquete de galletas dulces vacío de las que consumen habitualmente.
En el envase de galletas OREO se lee la siguiente información nutricional

(a) Calcula los porcentajes de la cantidad de proteínas, grasas totales y azúcares totales presentes en una porción de galletitas OREO.
(b) Calcula ahora los mismos porcentajes para el paquete de galletitas dulces que trajiste a la clase.
(c) Compara, mediante diagramas circulares, los porcentajes de la cantidad de esos componentes en cada uno de los paquetes de galletitas.
(d) ¿Cuáles galletas resultan más saludables y por qué? Puedes buscar información de esos componentes en tu computadora o dispositivo móvil.

Esta tarea pretende alcanzar la meta de leer el mundo con matemática (Gutstein, 2006) mediante una serie de acciones matemáticas a desplegar por los estudiantes para resolverla: leer la información que figura en la imagen, identificar cuáles datos son los que requieren para responder lo pedido y realizar el cálculo correspondiente, representar porcentajes en diferentes registros; numérico, tabular y gráfico y comparar diferentes situaciones.

Finalmente, se pregunta a los estudiantes sobre cuáles galletas resultan más saludables, y es allí donde se introducen vínculos con otras disciplinas para responder preguntas del mundo real, en este caso particular con ciencias naturales. Responder requiere una investigación previa sobre lo que significa que sea saludable, cuáles componentes son considerados buenos para la salud y cuáles malos y por qué, qué proporción de cada uno de ellos es lo recomendable por organismos nacionales e internacionales de salud.

Otra temática abordada por estudiantes de profesorado para el diseño de tareas enmarcadas en la EMpJS es el uso de videojuegos por parte de estudiantes, con la intención de concientizarlos sobre las problemáticas que pueden acarrear para su capacidad de atención y para conciliar el sueño, basado en estudios científicos al respecto. Es claro que es una temática vinculada al mundo en el que vivimos y la óptica de los autores de la secuencia es apolítica, la conciben como una problemática personal de los estudiantes, sin relacionarla con factores sociales que puedan profundizarla o resolverla.

Diseños que ilustran una visión sociopolítica de la matemática

Esta tercera categoría refiere a la consideración de que la matemática debe relacionarse con “tópicos considerados abiertamente políticos o controversiales por naturaleza” (Felton–Koestler, 2017, p. 60).

La mayor parte de los trabajos desarrollados por nuestros estudiantes de profesorado de matemática en relación a la EMpJS son ejemplos de esta categoría. Algunas de las temáticas abordadas han sido la desigualdad de género evidenciada a través del salario, las posibilidades de inserción en el mundo laboral y el trabajo no remunerado, entre otros indicadores; la violencia de género y doméstica; las desigualdades entre países vinculadas a las diferencias de recursos naturales, productivos y económicos; la pobreza en niños y adolescentes; la migración; la xenofobia; el racismo y la imagen prototípica de la belleza femenina.

Ilustramos esta categoría con actividades diseñadas para abordar otros contenidos matemáticos, diferentes a los anteriores. El primer ejemplo se trata de una secuencia para tercer año de enseñanza media, propuesta para abordar estadística y que emplea como recurso el teatro de títeres.

Mediante la puesta en escena de la obra “Extraterrestres en matemática”, con dramaturgia realizada por los propios estudiantes de profesorado, se propone que estudiantes de enseñanza media reflexionen sobre el fenómeno migratorio y las desigualdades e injusticias que puede acarrear, especialmente pensando en la situación que vive Uruguay desde hace unos años, que se ha posicionado como país de acogida de varios inmigrantes provenientes del norte de Sudamérica y de América Central. Los estudiantes de profesorado alertan sobre situaciones de exclusión y marginación que ellos mismos experimentan en sus clases. La propuesta didáctica consistió en la representación de la obra de teatro de títeres y, a partir de esta, se planteó la tarea que transcribimos a continuación:

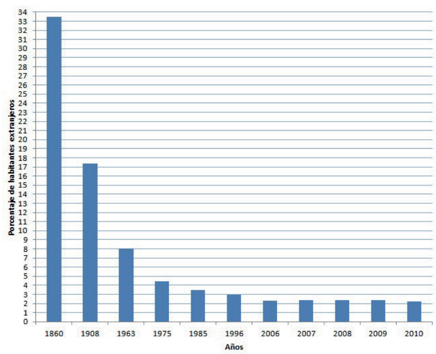
Figura 2. Propuesta didáctica.

Actividades y preguntas

Las actividades sugeridas para trabajar luego de la obra son las siguientes:

1. ¿Conoces algún caso de migración masiva? ¿Cuáles son sus causas?

2. “La primera ola de inmigrantes europeos hacia el Uruguay tuvo lugar a principios del siglo XVI, cuando un gran grupo de españoles llegó al Río de la Plata. Ellos, sumado al aporte posterior de italianos (mediados del siglo XIX) conformaron la mayor parte de la población en Uruguay, que siguió siendo un receptor neto de inmigrantes” (OEA, 2014, párr. 1) a lo largo de su historia. El siguiente gráfico de barras representa la proporción de población nacida en el exterior sobre la población total del Uruguay entre el año 1860 y 2010. Fue elaborado consultando los datos ofrecidos por OIM (2016).



a. Organiza en una tabla los datos que proporciona el gráfico.

b. Redacta una breve nota que explique la información que aporta el gráfico. Comparte tu escrito con el de otros compañeros. ¿Todos interpretaron de la misma manera la información?

3. a. Grafica los siguientes datos en un sistema de ejes cartesianos, graficando años en el eje horizontal y porcentajes en el eje vertical. Observa cómo ha variado la procedencia de los inmigrantes a nuestro país. La tabla fue elaborada a partir de información extraída de OIM (2016) e INE (2014).

Región geográfica de nacimiento	Censos y encuesta de hogares							
	1908	1975	1985	1996	2006	2008	2012	2013
América	73,7	68,6	60,3	44,7	37,9	37,6	30,1	60,5
Europa	26,2	28,8	36,9	52,1	59,9	60,4	66,4	35
África, Asia y Oceanía	0,1	2,6	3,3	3,3	2,1	2	3,5	4,5

Cuadro: Variación de la procedencia de los inmigrantes en Uruguay

b. Utilizando la información de la tabla, elabora un pictograma que muestre la procedencia de los inmigrantes en nuestro país en el año 2013.

c. Investiga si alguno de tus antepasados debió emigrar de su lugar de nacimiento a otra ciudad o país y por qué.

4. Realiza una reflexión, de modo individual, en la que plantees tu opinión acerca de las distintas oleadas migratorias que ha vivido nuestro país y cómo crees que la educación podría beneficiar a la inclusión y a la buena adaptación en este tipo de procesos

En este ejemplo también se pretende cumplir con la meta de lectura del mundo con recursos matemáticos (Gutstein, 2006) demandando de parte de los estudiantes que interpreten información dada por un gráfico, la organicen en otros registros de representación como el tabular y diseñen instrumentos estadísticos para representar gráficos, como el pictograma.

Pero también tiene una serie de preguntas que apuntan a que el estudiante reflexione, primero desde su situación personal y después a nivel más general, sobre los cambios sociodemográficos que se han dado en Uruguay y el mundo en general. Estas preguntas invitan a que otras disciplinas entren en la clase de matemática para lograr tener una comprensión más profunda de una misma situación: historia, geografía, sociología.

Otro ejemplo que ilustra esta categoría podría ser una secuencia de enseñanza que aborda relaciones de dependencia entre el analfabetismo y la afrodescendencia, diseñada para abordar el concepto de *función* en segundo año de enseñanza media (Molfino, Perdomo, Ruiz y Villa, 2017). Las estudiantes autoras del trabajo, provenientes de Melo, detectaron un dato que llamó su atención: la tasa de analfabetismo en Uruguay, una de las más bajas del mundo, aumenta notoriamente en la población afrodesdendiente, según datos del censo 2011 que fue especialmente dedicado a recabar información sobre esta población (Cabella, Nathan y Tenenbaum, 2013). Es significativo que Cerro Largo sea uno de los departamentos de Uruguay con mayor tasa de población afrodescendiente. A partir de ello, las estudiantes de profesorado diseñaron una secuencia que sitúa a la problemática como netamente sociopolítica: el analfabetismo sería un indicador que evidencia la marginación a la que la población afrodescendiente se ve expuesta en nuestro país. La presentamos a continuación:

Figura 3. Propuesta didáctica

Actividades

La educación es el gran motor del desarrollo personal. Es a través de la educación como la hija de un campesino puede convertirse en una médica, el hijo de un minero puede convertirse en el jefe de la mina, o el hijo de trabajadores agrícolas puede llegar a ser presidente de una gran nación.

Nelson Mandela

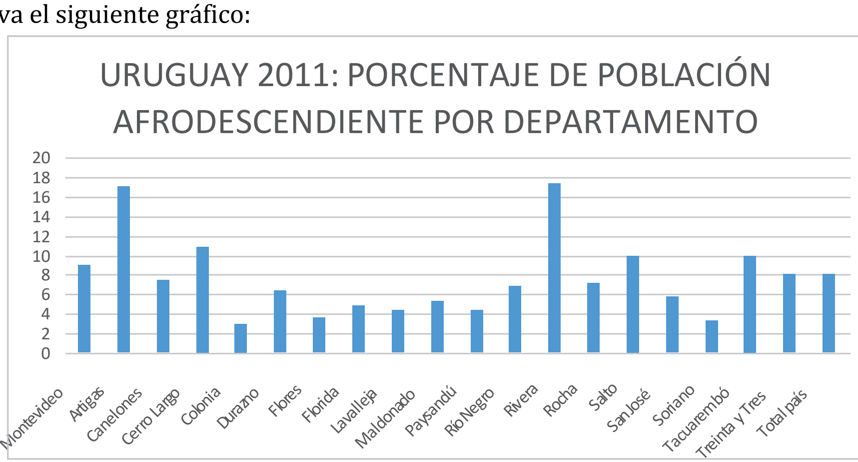
Sabías que…

(1) *Etnia*

Uruguay tiene una población de 3 251 654 habitantes (aproximadamente) donde el 8,1% son afrodescendientes.

(a) ¿De cuántas personas afrodescendientes estamos hablando?

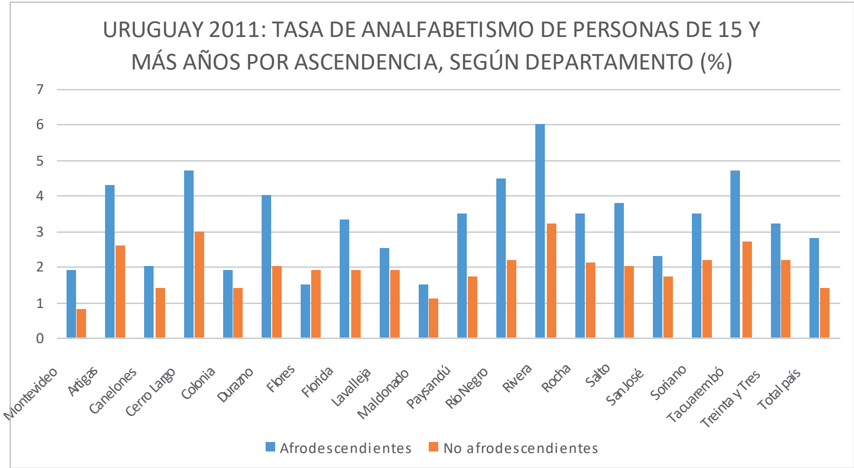
Observa el siguiente gráfico:



Fuente: Elaboración propia a partir de los datos presentados en Cabella, Nathan y Tenenbaum (2013)

(b) Indica qué se representa en cada uno de los ejes y explicita dos aspectos que te llamen la atención de la información que brinda.
(c) ¿Cuáles son los tres departamentos que registran mayor porcentaje de afrodescendientes?

(2) *Analfabetismo*
Uruguay es un país con muy bajo nivel de analfabetismo. Asimismo, el censo realizado a la población uruguaya en 2011 deja al descubierto la siguiente información:



Fuente: Elaboración propia a partir de los datos presentados en Cabella, Nathan y Tenenbaum (2013)

(a) Escribe al menos dos datos que consideres importantes según lo que muestra el gráfico.
(b) El 27,1% de los afrodescendientes que viven en Cerro Largo, tienen 14 años o menos. ¿Cuántos son los mayores de 15 años que no saben leer y escribir?
(3) *Debate y Reflexión*
A partir de lo observado en la parte anterior, ¿qué piensas sobre la frase de Nelson Mandela?

(4) *Tarea domiciliaria*
(a) Cuéntales a al menos dos personas (puede ser familiar, vecino, amigo, etcétera), sobre este tema y los datos descubiertos.

Si bien esta secuencia también aborda el tema Porcentajes, no es el tema central, sino que fue diseñada para abordar el contenido Función entre dos conjuntos, en particular la interpretación y análisis de gráficos que representan funciones, en segundo año de enseñanza media.

Respecto a los vínculos con otras disciplinas, nuevamente entendemos que invita a los estudiantes a pensar sobre temáticas propias de las ciencias sociales, y que podrían ser abordadas, a la par, por profesores de esas disciplinas con preguntas como: ¿cuáles son las causas que condujeron a la población afro a instalarse en el territorio uruguayo? ¿En qué condiciones se dio tal inmigración y cuál era en ese momento su situación socioeconómica? ¿Cómo es su situación actual, por qué se distribuyen geográficamente de la manera en que lo hacen? ¿Cuáles son las causas que permiten explicar la alta tasa de analfabetismo en esa población, si se la compara con la tasa de la población total del país?

Diseños que ilustran una visión de la matemática estrechamente ligada a la denuncia de situaciones de injusticia

La cuarta categoría refiere a la consideración de que la matemática debe relacionarse con “tópicos vistos o posicionados como explícitamente centrados en advertir sobre las injusticias percibidas, comprender sus orígenes y/o trabajar para cambiarlas” (Felton–Koestler, 2017, p. 60).

En esta categoría situamos trabajos de estudiantes que denuncian explícitamente relaciones de desigualdad entre diferentes pueblos o diferentes grupos de una misma sociedad.

Uno de estos trabajos propone utilizar la narración oral de cuentos como recurso didáctico para abordar una realidad compleja con estudiantes de tercer año de enseñanza media. La historia que se narró fue una adaptación de un fragmento de la novela Planilandia (Abbott, 2010), escrita por Edwin Abbott en 1884. La propuesta invita a los estudiantes a reflexionar sobre las desigualdades de nuestra sociedad, a partir de una analogía con una sociedad ficticia en la que los ciudadanos son figuras geométricas y sus derechos dependen, inevitablemente, de qué figura son, dando lugar a una sociedad fragmentada en la que es imposible salir del grupo social en el que se nació. La propuesta didáctica, promueve, a su vez, la construcción de conocimiento relativo a geometría del espacio.
Después de narrar oralmente la historia se propone la siguiente actividad:

Figura 4. Propuesta didáctica

Actividad

¿Cómo imaginas Planilandia y a sus habitantes? Discútelo con tus compañeros y luego realicen o respondan lo siguiente:
(1) ¿Qué tipo de figuras geométricas habitan Planilandia?
(2) Representen en una cartulina, usando un solo color, algunos habitantes de Planilandia.
(3) ¿Cómo clasifican en Planilandia a sus habitantes? Clasifiquen a los habitantes que dibujaron de acuerdo a ese criterio.
(4) Usando un color diferente al de la parte (2), representen cómo podrían verse en Planilandia los sólidos que se les entregaron (prisma, pirámide, cono, cilindro), para alguien que no vive en Planilandia.
(5) Ingresen a https://www.geogebra.org/m/t5QdSD4F. A partir de experimentar moviendo la bola verde, ¿creen que el cubo podría verse en Planilandia como un hexágono para alguien que no vive en Planilandia? Discute con tus compañeros si cada sólido de la parte (4) puede ser visto de una forma distinta a la que representaron.
(6) ¿Se puede clasificar a la esfera en alguna de las clases sociales de Planilandia? ¿Y a los demás sólidos?
(7) En nuestra sociedad, ¿también hay valoraciones sociales que dependan de cosas medibles? ¿Cuáles?
(8) ¿Creen que existen características relevantes de las personas que no puedan ser expresadas a partir de cosas medibles? ¿Cuáles?
(9) La presencia de la matemática en los criterios dados en (7), ¿implica que estos sean objetivos? Es decir, ¿hace que admitan una única forma de clasificación una vez establecido el criterio?
(10) Considera el siguiente fragmento del cuento: “Los polígonos irregulares tienen una vida dura, eso es indiscutible, no están bien integrados a la sociedad. Los intereses de la mayoría exigen que sea así. No se puede vivir bien con peligrosos polígonos irregulares, que al verlos uno de frente no puede saber qué forma esconden y qué peligro representan.” ¿Creen que en nuestra sociedad hay individuos que ocupen un lugar similar al que ocupan los polígonos irregulares en Planilandia? ¿Qué opinan de esto?

(11) Así como los habitantes de Planilandia no podían percibir la tercera dimensión, ¿creen que hay cosas que ustedes no pueden percibir?
(12) ¿A qué se refiere el cuadrado, al final de la historia, cuando dice que espera que rebeldes se nieguen a vivir en una dimensión limitada? ¿Creen que en algún sentido ustedes viven en una dimensión limitada? ¿Pueden hacer algo para cambiar esto?

Fuente: Schaffel y Ochoviet, 2016, p. 36

Este ejemplo aborda un contenido matemático diferente a los anteriores para promover una lectura del mundo con recursos matemáticos (Gutstein, 2006): la geometría. Para ello los estudiantes deben desarrollar acciones como describir figuras, representar de diferentes maneras, clasificar, identificar características en figuras dadas y comparar.

Por otra parte, al igual que algunos ejemplos anteriores esta actividad promueve un vínculo con ciencias sociales, pues invita a reflexionar sobre las condiciones sociales, históricas y geográficas que causan las diferencias en nuestra sociedad. Además, plantea un cruce con la literatura, tanto a partir de la comprensión de un texto literario como de la creación de textos propios, lo que puede ser especialmente significativo en tercer año porque es la primera vez que los estudiantes tienen esa materia en su plan. Vemos entonces que esta propuesta es un potente ejemplo de las posibilidades que brinda la perspectiva de la EMpJS para desarrollar la interdisciplinariedad.

Conclusiones

La perspectiva de la EMpJS ha probado ser un enfoque con potencial para promover cambios sustantivos en la enseñanza de la matemática. Por un lado, las temáticas que permite abordar a través de problemas hacen que el vínculo con la vida real aparezca de manera natural y genuina, y permite evitar la aparición de situaciones matemáticas que muchas veces son forzadas y los alumnos perciben que lo son, pero igualmente deben resolverlas porque su docente se las propone; sabemos que esta es una cláusula del contrato didáctico que está fuertemente instalada. Esta propuesta, entonces, abona a la construcción de una concepción diferente sobre la matemática: no se resuelven problemas cuyo vínculo con el mundo real es inventado por el profesor para mostrarle al alumno la importancia de la matemática y que este aprecie en consecuencia su relevancia, sino que se resuelven problemas cuya emergencia es inminentemente de naturaleza social.

Por otra parte, los estudiantes de profesores, durante su formación, ensayan diseños didácticos y los ponen a prueba en sus clases de práctica y pueden vivenciar los resultados de este enfoque y la motivación e interés que generan en los estudiantes de enseñanza media.

Asimismo, el enfoque propuesto da lugar a exploraciones de corte interdisciplinar de manera natural. Es decir, para resolver problemas que emergen del mundo en que vivimos es necesario utilizar herramientas de diferentes disciplinas para comprenderlos mejor. Así, el trabajo interdisciplinar aparece como una herramienta necesaria para abordar una situación compleja y no como imposición del profesor o de sugerencias institucionales. Esto es, desarrollamos un trabajo interdisciplinar porque emerge como condición necesaria para analizar una problemática y no como un mandato de desarrollar trabajo interdisciplinar.

En suma, este enfoque enriquece la formación didáctica de los futuros profesores, aporta a una visión diferente de la matemática y de su enseñanza y posibilita el trabajo conjunto entre distintas disciplinas con el objetivo de resolver un problema real. Ello promueve que los estudiantes conciban a la matemática como una potente herramienta que permite analizar críticamente el mundo en que vivimos y, si lo consideran oportuno, intervenir en él para construir una mejor sociedad para todos.

Referencias bibliográficas

Abbott, E. (2010). *Planilandia*. España: Laertes Ediciones.

Álvarez, F., Molfino, V., Pereira, L. y Silva, F. (2017). Alimentación saludable también para los adolescentes. En G. Buendía, V. Molfino y C. Ochoviet (Comp.), *Estrechando lazos entre investigación y formación en Matemática Educativa. Experiencias conjuntas de docentes y futuros docentes, Volumen IV* (pp. 73–83). CFE: Montevideo.

Bentancort, C., Bentancur, Y., Bertrand, L., Fernández, R., Irazusta, F., Izquierdo, A., Pastro, M. y Ochoviet, C. (2017). El teatro de títeres como recurso didáctico para la enseñanza de la matemática. En G. Buendía, V. Molfino y C. Ochoviet (Comp.), *Estrechando lazos entre investigación y formación en Matemática Educativa. Experiencias conjuntas de docentes y futuros docentes, Volumen IV* (pp. 25–52). CFE: Montevideo.

Cabella, W., Nathan, M. y Tenenbaum, M. (2013). *Atlas Sociodemográfico y de la Desigualdad del Uruguay. La población afro–uruguaya en el Censo 2011* (*Fascículo 2).* Montevideo, Uruguay: Ediciones Trilce.

Felton–Koestler, M. (2017). Mathematics education as sociopolitical: prospective teachers' views of the What, Who, and How. *Journal of Mathematics Teacher Education, 20*(1), 49–74.

Freire, P. (2014). *Pedagogía de la indignación. Cartas pedagógicas en un mundo revuelto.* Buenos Aires: Siglo Veintiuno Editores.

Gonzalez, L. (2009). Teaching mathematics for social justice: Reflections on a community of practice for urban high school mathematics teachers. *Journal for Urban Mathematics Education, 2*(1), *22–51.* Recuperado de: <http://ed-osprey.gsu.edu/ojs/index.php/JUME/article/view/32/13>.

Guerra, P., Lim, W. y López, R. (2017). Math, social justice and prospective teachers in U.S.A. and Uruguay: learning together. En A. Chronaki (Ed.), *Mathematics Education and Life at Times of Crisis. Proceedings of the Ninth International Mathematics Education and Society Conference.* University of Thessaly Pess, Volos, Greece. Recuperado de: <http://mes9.ece.uth.gr/portal/images/proceedings/MES9_Proceedings_low_Volume1.pdf>.

Gutstein, E. (2006). *Reading and writing the world with mathematics: Toward a pedagogy for social justice*. New York: Routledge.

Instituto Nacional de Estadística (INE) (2014). *Uruguay en cifras 2014*. Montevideo: INE. Recuperado de: <http://ine.gub.uy/documents/10181/39317/Uruguay_en_cifras_2014.pdf/aac28208-4670-4e96-b8c1-b2abb93b5b13>.

Llorente, M. (2012). Educar para la justicia social. *Ponencia presentada en el Foro Mundial de Educación (Brasil).* Recuperado de: <http://www.concejoeducativo.org/article.php?id_article=436>.

López, R. y Guerra, P. (2017). Enseñanza de la Matemática para la Justicia Social. Experiencia IFD de Pando – Universidad de Kennesaw, EEUU. *Actas del 7º Congreso Uruguayo de Educación Matemática* (pp. 245–252). Recuperado de: <http://semur.edu.uy/curem/actas/pdf/56.pdf>.

Molfino, V., Perdomo, N., Ruiz, X. y Villa, S. (2017). Analfabetismo y afrodescendencia: ¿casualidad o causalidad? En G. Buendía, V. Molfino y C. Ochoviet (Comp.), *Estrechando lazos entre investigación y formación en Matemática Educativa. Experiencias conjuntas de docentes y futuros docentes, Volumen IV* (pp. 97–111). CFE: Montevideo.

Molfino, V. y Ochoviet, C. (2019). Enseñanza de la matemática para la justicia social en cursos de postgraduación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 22*(2), 139-162. https://doi.org/10.12802/relime.19.2221

Organización de Estados Americanos (OEA) (2014). *Síntesis histórica de la migración internacional en el Uruguay.* Recuperado de: <http://www.migracionoea.org/index.php/es/sicremi-es/17-sicremi/publicacion-2011/paises-es/140-uruguay-1-si-ntesis-histo-rica-de-las-migracio-n-internacional-en-uruguay.html>.

Organización Internacional para las Migraciones (OIM) (2016). *Perfil Migratorio Uruguay 2011*. Recuperado de: <https://uruguay.iom.int/sites/default/files/publicaciones/Perfil%20Migratorio%20Uruguay%202011.pdf>.

Rodriguez, A. J. (2005). Teachers' resistance to ideological and pedagogical change: Definitions, theoretical framework, and significance. En A. J. Rodríguez y R. S. Kitchen (Eds.), *Preparing mathematics and science* *teachers for diverse classrooms: Promising strategies for transformative pedagogy* (pp. 1–16). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Schaffel, V. y Ochoviet, C. (2016). Consiguieron la paz en planilandia. En G. Buendía, V. Molfino y C. Ochoviet (Comps.), *Estrechando lazos entre investigación y formación en Matemática Educativa. Experiencias conjuntas de docentes y futuros docentes, Volumen III* (pp. 29–42). CFE: Montevideo.

Skovsmose, O. (2012). Alfabetismo matemático y globalización. En P. Valero y O. Skovsmose (Eds.), *Educación matemática crítica. Una visión sociopolítica del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas* (pp. 65–105). Bogotá: Una Empresa Docente. Recuperado de: <http://funes.uniandes.edu.co/2003/1/Skovsmose2012Alfabetismo.pdf>.

Stinson, D., Bidwell, C. y Powell, G. (2012). Critical pedagogy and teaching mathematics for social justice. *The International Journal of Critical Pedagogy, 4*(1), 76–94. Recuperado de: <http://libjournal.uncg.edu/ojs/index.php/ijcp/article/view/302/263>.

Wright, P. (2014). Teacher researchers, mathematics classrooms and social justice. *Paper presented at BERA Conference 2014 (London)*. Recuperado de: <http://maths-socialjustice.weebly.com/uploads/3/0/2/7/30279643/wright_2014_bera_paper.pdf>.

VOL 35, NÚMERO 1, AÑO 2022

CONSTRUCCIÓN MECÁNICA DE LA HIPÉRBOLA DESARROLLADA POR DESCARTES

MECHANICAL CONSTRUCTION OF THE HYPERBOLA DEVELOPED BY DESCARTES

Luis Miguel Paz-Corrales, Joseth David Molina, Kelvin Alonso García
Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán (Honduras)
lmpaz@upnfm.edu.hn, josethdmolina@gmail.com, kelvinalonsogarciagiron@gmail.com

Resumen

Se reporta la reflexión sobre el diseño de un taller, el cual se encuentra dirigido a profesores de matemática de nivel secundario y superior, cuyo objetivo es analizar el proceso de construcción de una curva –desarrollado por Descartes– y su posible representación mediante ecuaciones algebraicas para su clasificación. Se asume como hipótesis de partida que el pensamiento variacional está inmerso en la construcción del conocimiento matemático y que, para desarrollarlo, se requiere diseñar una variedad de tareas como la que se describe en este taller. El diseño original del taller permite que los participantes elaboren y utilicen un instrumento mecánico (hiperbológrafo) para trabajar la construcción de la curva, y además se adapta este artefacto articulado utilizando software de geometría dinámica, para así comprender su funcionamiento. Finalmente, se comenta una experiencia previa de implementación de este taller y se discuten algunas implicaciones sobre la enseñanza.

Palabras clave: construcción de curvas, ecuaciones algebraicas, hiperbológrafo, pensamiento variacional

Abstract

This paper reports the reflection on the design of a workshop focused on secondary and higher education mathematics teachers. It is aimed at analyzing the process of construction of a curve –developed by Descartes– and its possible representation by means of algebraic equations for its classification. It is assumed as a starting hypothesis that variational thinking is immersed in the construction of mathematical knowledge, and to develop such knowledge, the design of a variety of tasks, as the ones described in this workshop, is required. The workshop original design allows participants to elaborate and use a mechanical instrument (hyper-bolograph) to work on the construction of a curve. Besides, this articulated artifact is adapted by using dynamic geometry software, in order to understand its functioning. Finally, a previous implementing experience of this workshop is discussed, as well as some implications on teaching.

Key words: algebraic equations, construction of curves, hyper-bolograph, variational thinking

Introducción

La noción que se tiene en la actualidad sobre la geometría analítica dista mucho de la que se tenía en el siglo XVII pues, en aquel entonces, las curvas originaban una ecuación, mientras que hoy en día, se puede obtener una curva a partir del análisis de sus propiedades algebraicas (Cortés y Soto, 2012). En el trabajo de Dyck (1892/1994) se muestran antecedentes de la utilización de artefactos articulados para el trazado de curvas, los cuales datan de la Grecia Antigua, y su evolución a lo largo de los siglos venideros. En este sentido, se ha destacado la importancia de introducir los contextos históricos para desarrollar la experiencia científica en el aula (véase Barbin et al., 2018; Mariotti et al., 1997), especialmente, en lo concerniente al trabajo con la geometría.

A partir de lo antes planteado, se diseña este taller dirigido a profesores de matemática que se desempeñen en los niveles de educación secundaria y superior (con estudiantes desde los 15 años de edad en adelante), cuya importancia radica en que los participantes analicen el proceso de construcción de una curva –desarrollado por Descartes– y su posible representación mediante ecuaciones algebraicas.

La estructura de este escrito es la siguiente: después de esta introducción, se presenta el fundamento teórico sobre el que se cimenta esta propuesta; luego, se describe la estructura del taller y se explicita el uso del instrumento mecánico hiperbológrafo; finalmente, se comenta una experiencia previa de implementación de esta propuesta con profesores de matemáticas de Honduras, además de reflexionar sobre sus implicancias en la enseñanza.

Fundamento teórico

La Matemática como disciplina científica, al ser tan antigua como el Hombre mismo, ha despertado no sólo el interés de matemáticos sino también de matemáticos educativos. Para estos últimos, el interés se centra en cuestionamientos como, por ejemplo, ¿por qué cae la manzana?, aludiendo a la comprensión de cómo Isaac Newton planteó las tres leyes que llevan su nombre o la formulación de la ley de gravitación universal; o también, ¿por qué Descartes siguió llamando Geometría a un quehacer que dista mucho del que los geómetras griegos, como Apolonio o Euclides, llevaban a cabo en su tiempo?

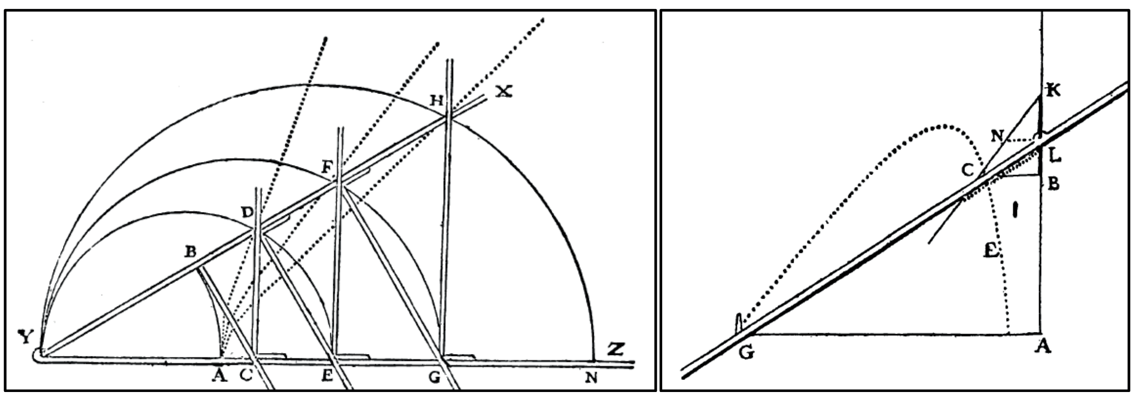
Para este taller se adopta como referente la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME; Cantoral, 2013), ello justificado en que este enfoque teórico permite un acercamiento a la comprensión histórico-epistemológica de fenómenos propios de la disciplina, como los cuestionamientos antes planteados. En la TSME se asume como punto de partida la problematización del saber, el cual requiere del análisis, tanto de obras originales sobre un conocimiento matemático en particular, como de libros de texto, para así comparar los usos de dicho conocimiento (Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini, 2015). Esta teoría, además, postula que el discurso Matemático Escolar (dME) es la noción en que radica la esencia de la problemática de la enseñanza-aprendizaje de la matemática, entendido como el conjunto de discursos estructurados que se producen por convencionalismos sociales y culturales, los cuales surgen ante la necesidad de comunicar y difundir de manera masiva los saberes matemáticos (Cantoral, Farfán, Lezama y Martínez-Sierra, 2006).

Estudios que han adoptado este enfoque (véase Galo-Alvarenga, 2019; Paz-Corrales, 2019; Pérez-García, 2019, entre otros), han centrado su atención en los fenómenos específicos relacionados, por un lado, con la construcción del conocimiento matemático y, por otro, con su difusión. Es por ello que han confrontado un libro de texto con una obra matemática original, tomando en cuenta su contexto de producción.

Este taller se cimenta sobre el estudio de Paz-Corrales (2019), en el cual se analizó la obra matemática La Geometría de Descartes (1637/1954) y se sobrepuso con una expresión del dME en el texto Geometría Analítica de Lehmann (1942/2005). El primero, que corresponde a uno de los tres tratados que conforman el Discurso del Método, es considerado como una de las obras culminantes del saber humano, además de la iniciadora de la matemática moderna (González-Urbaneja, 2007); el segundo, por su parte, es un libro muy utilizado en el sistema educativo mexicano, desde el siglo pasado hasta la actualidad (Serna-Martínez, 2015).

De acuerdo con este estudio, el interés de Descartes en su obra se centra principalmente en responder a la pregunta ¿cuál es el lugar geométrico que satisface una condición específica? Al dar respuesta a esta interrogante, no sólo permitió a su autor resolver de manera general el problema de Pappus, considerado como piedra angular del método cartesiano, sino que también expandir la geometría más allá de los límites tridimensionales a los que estuvo restringida por más de 20 siglos. De este modo, expresiones como x^2 o x^3 ya no representan áreas o volúmenes, sino que simplemente son longitudes de segmentos, por lo que, para el estudio y clasificación de nuevas curvas (hasta entonces, desconocidas por los geómetras griegos), el matemático francés utilizó artefactos mecánicos capaces de trazarlas, en particular, el mesolabio y el hiperbológrafo, presentados en la Figura 1. La generación de curvas se produce a partir de las trayectorias de estos mecanismos articulados, por medio de continuos movimientos mecánicos, en un método conocido como generación orgánica de curvas (Manzano, 2016).

Figura 1. Mesolabio (izquierda) e hiperbológrafo (derecha) de Descartes



Fuente: Extraído desde Descartes (1637/1954, pp. 46, 53)

Descartes no sólo leyó la obra de matemáticos como Euclides o Apolonio, sino también de Pappus, con lo que pudo darse cuenta que sus colegas consideraron tres tipos de problemas tomando como base la construcción utilizada en su solución, a saber, planas (construcciones con regla y compás), sólidas (secciones cónicas y medias proporcionales). Hasta ahora se han mencionado dos tipos de problemas, pero ¿qué tiene de particular el tercero? Resulta que los problemas que requerían de algún ingenio mecánico simplemente fueron excluidos de la geometría de ese entonces. Lo anterior sirvió de punto de partida para Descartes, quien se propuso crear una geometría que incluyera todas esas curvas o lugares geométricos generados a través de artefactos mecánicos, es decir, instrumentos elaborados con barras articuladas mediante pivotes. Ello significó otro de sus grandes hallazgos, pues permitió a la matemática moderna definir una infinidad de curvas hasta el siglo XVII no conocidas, a las que clasificó, pero no demostró como algebraicas.

El interés principal de Descartes no estaba en las propiedades estáticas de estos artefactos, sino que en aquéllas que se derivan de sus movimientos y dinámica (Paz-Corrales, 2019). Este escrito se centra en el segundo artefacto mecánico descrito por este matemático en La Geometría, a saber, el hiperbológrafo. Si bien este instrumento fue ideado originalmente para generar hipérbolas, como lo sugiere su nombre, su papel como compás le permite crear otro tipo de curvas. La pregunta con la que Descartes utilizó este artefacto tiene una intención predictiva: ¿de qué género es la curva? Una regla (que gira circularmente) y una pieza triangular (que se desliza verticalmente en una recta fija), al intersecarse, producen la curva. El funcionamiento de este artefacto se explica en el siguiente apartado, de acuerdo con el contexto de este taller.

Descripción del taller y diseños didácticos

El taller que se reporta en este escrito corresponde a la adaptación de una experiencia previamente implementada, la cual se describe en el apartado siguiente y que, por razones de trabajo virtual, se ha reestructurado de la forma en que se presenta en la Tabla 1.

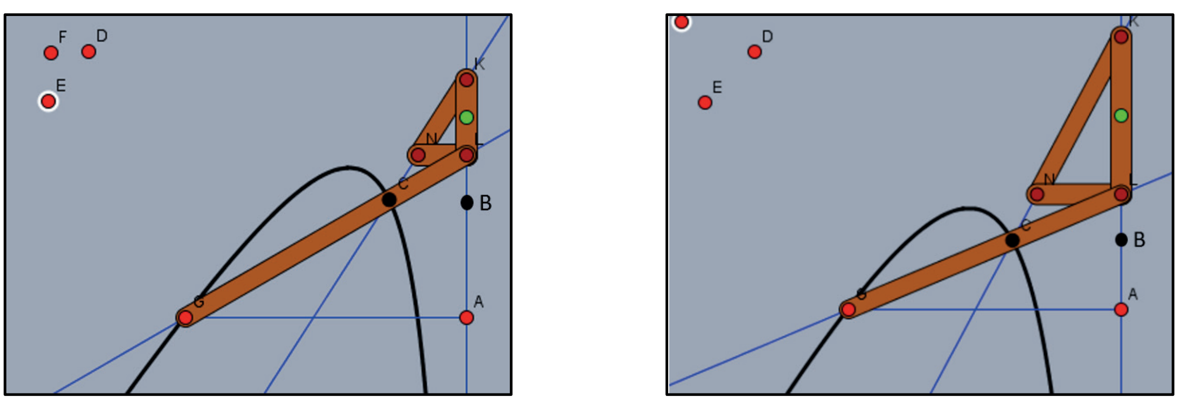
Tabla 1. Descripción de las actividades del taller por sesiones

Sesión	Actividades	Tiempo
Primera	– Presentación del taller, de sus objetivos y dinámica de trabajo.	10 minutos
	– Presentación de un video sobre la construcción del hiperbológrafo con material concreto.	10 minutos
	– Construcción de curvas con un applet (software de geometría dinámica *Cinderella*) y su análisis.	70 minutos
Segunda	– Se continúa la construcción y análisis de curvas.	40 minutos
	– Reflexión sobre la actividad y su aplicabilidad en el aula; preguntas de los participantes.	40 minutos
	– Cierre del taller.	10 minutos

Fuente: Elaboración propia

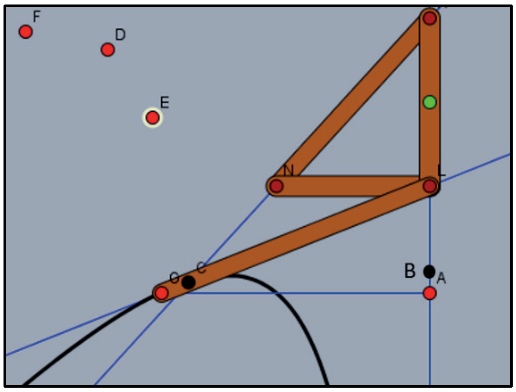
En su diseño original, la segunda actividad del taller consistía en la construcción del hiperbológrafo por parte de los participantes, utilizando material concreto y siendo guiados por los autores. No obstante, dadas las condiciones de formato online del taller, es que se ha reemplazado esa actividad por un video en que los autores construyen y explican el funcionamiento de dicho artefacto. Además, para observar la variación del problema que se muestra en la Figura 1 (derecha), es que como tercera actividad del taller se ha realizado la construcción del artefacto con el software de geometría dinámica Cinderella, en un procedimiento en que se observan cuatro estados, tal como se representan en la Figura 2.

Figura 1. Estados de construcción del hiperbológrafo con el software gráfico Cinderella

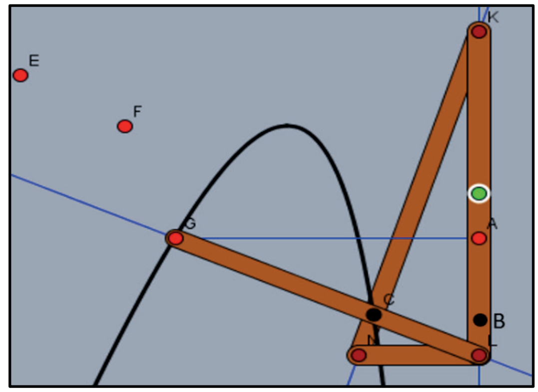


Estado 1

Estado 2



Estado 3



Estado 4

Fuente: Elaborado por los autores

El funcionamiento del applet del hiperbológrafo está determinado de la siguiente forma:

Sea la curva GC (Figura 2, todos los estados) descrita por la intersección de la regla GL con la figura rectilínea CNKL, cuyo lado KN es generado indefinidamente en dirección a C, y que, siendo movida en el mismo plano de manera que su diámetro KL siempre coincida con alguna parte de la línea AB (producida en ambas direcciones), proporciona a la regla GL un movimiento giratorio alrededor de G (la regla está unida a la figura CNKL en L). En esta construcción, Descartes utilizó las primeras letras del alfabeto para referirse a las cantidades (constantes) conocidas, y las últimas para las desconocidas (variables o cantidades indeterminadas), de modo que

$$GA = a, \quad KL = b, \quad NL = c, \quad AB = x, \quad BC = y,$$

respectivamente.

Al moverse la pieza CNKL (Figura 2), se observan cuatro estados de sus diferentes puntos durante el movimiento en el artefacto. Además de las relaciones de semejanza, que se encuentran invariantes en la construcción, al describir expresiones que representan las relaciones entre los segmentos (los triángulos KLN y KBC son semejantes; Figura 2, estados 1 y 4); a simple vista, se observa al punto A que también permanece fijo en los cuatro estados (de manera similar, sucede en el llamado punto origen en el plano cartesiano que se enseña en la escuela). Lo anterior permite notar cómo el resto de los puntos se mueven y, a medida que se cortan la pieza triangular y la regla GL, van generando la curva GC (Figura 2, estados 2 y 3). Ahora bien, ya se ha dicho que no sólo hipérbolas podrían ser trazadas con este instrumento, tal es el caso, si el instrumento que sirve para trazarlas, en lugar de la línea recta CNK, se utiliza esta hipérbola obtenida (véase la curva en la Figura 1), o alguna otra línea curva de primer género, para limitar la pieza CNKL, la intersección de esta línea borde y de la regla GL describirá, en vez de la hipérbola GC, otra línea curva que será de segundo género. Por ejemplo,

> si CNK es un círculo, donde L sea su centro, se describirá la primera concoide de los antiguos. Pero si fuese una de segundo género la que limita la pieza CNKL, se obtendría una de tercer género, o si fuese una de tercero, resultaría una de cuarto, y así al infinito. (Descartes, 1637/1954, p. 54, traducción de los autores)

Para el desarrollo de este taller, se toma en cuenta la pluralidad de contextos educativos de los participantes, por lo cual son los expositores quienes introducen los elementos constitutivos, tanto en la construcción del hiperbológrafo como en la utilización del applet de Cinderella. De este modo, se espera que los participantes, basados en el procedimiento antes descrito, desarrollen la construcción de las curvas con el applet.

La segunda sesión del taller continúa con la dinámica de la primera, aunque se deja a los participantes que desarrollen las construcciones que consideren pertinentes, para luego dar paso a una etapa de reflexión sobre las implicaciones de desarrollar este tipo de actividades en el aula, según los contextos educativos de los participantes.

Experiencias de implementación

A partir de la propuesta de Paz-Corrales (2019) que se mencionó en el apartado Fundamento teórico, es que se diseñó un taller implementado en el Séptimo Congreso de Matemática Educativa (COME VII) del año 2018, celebrado en Tegucigalpa (Honduras). Este evento, que reúne a profesores de matemáticas de todos los niveles educativos (desde prebásica hasta superior), surgió como un espacio de capacitación docente en torno a diversas temáticas de la disciplina. En dicha oportunidad, se intervino con un grupo de 30 profesores de los niveles de educación media y superior, quienes trabajan con estudiantes de 15 años en adelante.

Al comienzo del taller, los profesores recibieron las indicaciones generales y el material a utilizar para el desarrollo del mismo (véase Figura 3, izquierda). Inicialmente, se presentó un recorrido histórico a los participantes sobre la obra matemática de Descartes, con el fin de reflexionar sobre el quehacer geométrico-analítico mostrado, y servir de motivación para la audiencia. Dentro de las intervenciones de los profesores, hubo un comentario que imperó en relación a lo que se enseña en el sistema educativo: No enseñamos geometría analítica de esta forma. Por ejemplo, Descartes llegaba a la ecuación de otra forma, al usar la semejanza de triángulos, y tampoco usaba –de forma explícita– las coordenadas (x,y) de un punto.

Posteriormente, con el material concreto y organizados en equipos de cinco integrantes, procedieron a construir el hiperbológrafo, guiándose por una imagen mostrada en la presentación (véase Figura 1, derecha). Las reglas articuladas y los tornillos fueron emulados por rectángulos de cartoncillo y ataches, respectivamente. Durante este proceso, se observó a los profesores muy entusiasmados (véase Figura 3, derecha), dado que esta situación los llevó a aprender matemática, haciendo matemática. Sobre el pliego de papel que se entregó a cada grupo, comenzaron a trazar la curva o lugar geométrico generado por este artefacto, lo cual les resultó sencillo, pues éste era un símil a un compás, con la diferencia que, en lugar de las circunferencias, trazaba hipérbolas. Se pidió a los participantes del taller que observaran las curvas obtenidas con este procedimiento, e inmediatamente se percataron que todas eran hipérbolas, con pequeñas diferencias en su trazo, determinadas por la longitud que decidieron dar al segmento NL (véase Figura 2, estados 3 o 4).

A continuación, se indujo a los participantes al funcionamiento del artefacto, a través de cuestionamientos del tipo ¿cómo funciona?, ¿por qué funciona de esta manera? Para responderlas, se partió de los datos que Descartes estableció sobre esta construcción, asignando valores a la longitud de los segmentos conocidos y desconocidos. Fue casi inmediato que los profesores notaron la relación de semejanza entre al menos dos de los triángulos en el hiperbológrafo. La mayoría de equipos llegó a la ecuación de la hipérbola, salvo por dos equipos que requirieron del apoyo de uno de los instructores del taller. Finalmente, los profesores mencionaron con mucho agrado que realizarían esta actividad con sus estudiantes porque, además de considerar que el material para la elaboración del artefacto es accesible, produciría en los jóvenes aprendizajes más significativos sobre el tema de las secciones cónicas.

Figura 3. Taller implementado en el COME VII

Fuente: Archivo del autor

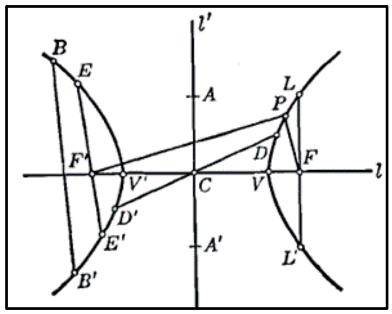
Consideraciones finales

La Geometría significó un hito en la evolución del pensamiento matemático. En primer lugar, porque Descartes liberó a la geometría (sintética) de la denominada, por algunos historiadores de la matemática, cárcel tridimensional (González-Urbaneja, 2007); segundo, por el análisis (álgebra) que añadió a esta geometría. Sobre este último punto, si bien se ha asumido que este análisis tuvo sus orígenes en el trabajo realizado por Viète y Fermat, no existe evidencia que vincule a Descartes con el tipo de sintaxis utilizada por ellos (Rabouin, 2010). El uso de letras para representar longitudes de segmentos conocidos y desconocidos, fue uno de los grandes aciertos de Descartes que, además de económico, simplificó los procesos al momento de resolver un problema y que, por supuesto, no esconde los artificios matemáticos llevados a cabo en su resolución que tanto criticó a los griegos. De este modo, “el álgebra simbólica, constituye una verdadera ruptura epistemológica en la forma de concebir los objetos matemáticos” (Paz-Corrales, 2019, p. 52).

En ese sentido, a estas alturas sería incorrecto afirmar que el matemático francés usó la notación moderna, pues más bien, la notación que imperó y que sigue vigente, es la cartesiana, salvo por el uso del signo igual y de llaves que se observa en las ecuaciones planteadas en la obra matemática. La escuela hoy día, para la enseñanza de la geometría analítica, parte de la ecuación y luego se construye una tablita de valores de puntos discretos que se grafican en el plano, hasta que finalmente se bosqueja una curva suave y ligera. Pero, ¿qué hay del quehacer geométrico expuesto por Descartes en La Geometría? Y es que, sin sumergirse tanto en su lectura, no hay en esta obra gráfica alguna de una ecuación. El tratamiento que se dio a las curvas es atípico desde el punto de vista didáctico, puesto que éstas eran construidas por acciones geométricas, en su mayoría, generadas a través de mecanismos articulados. Una vez trazadas las curvas, se disponía a introducir un sistema de coordenadas, con el único afán de describir su proceso de construcción y, de esta manera, obtener su expresión analítica. Así queda suficientemente claro que, en su proceso constitutivo, las ecuaciones no creaban las curvas, sino que éstas generaban ecuaciones. (Lenoir, 1979). En resumen, en la obra matemática que Descartes publicó de manera anónima en 1637, no se habla de construcciones estáticas de las curvas, mucho menos de demostraciones axiomáticas, sino que de todo tipo de movimientos mecánicos (trayectorias producidas por movimientos continuos) y su representación mediante ecuaciones de los lugares geométricos (otro análisis en profundidad sobre la representación de curvas, se encuentra en Bos, 1981).

Por su parte, en la enseñanza de las secciones cónicas en la escuela, y en particular de la hipérbola (véase Figura 4), se les define como "el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos del plano llamados focos, es siempre igual a una cantidad constante" (Lehmann, 1942/2005, p. 191). Y esta definición coincide con la forma en que Paz-Corrales y Cantoral (2019) definen a la variación en geometría analítica, con un punto móvil en el sujeto a ciertas propiedades.

Figura 4. Gráfica de la hipérbola



Fuente: Extraido desde Lehmann (1942/2005, p. 191)

Su transposición didáctica también influyó que en los textos escolares sólo se enseñaran hipérbolas horizontales y verticales, y aunque la definición resalta las propiedades mencionadas, su abordaje en los libros de texto favorece más un escenario algebraico que gráfico, que de acuerdo con Lehmann (1942/2005), es el segundo problema fundamental de la geometría analítica (trabajo que caracterizó el quehacer de Fermat).

A través de la actividad propuesta en este taller, se pretenden al menos dos alcances: por una parte, demostrar lo valioso que puede resultar la enseñanza de la matemática utilizando procedimientos del pasado, para comprender sus orígenes, y así desvelar de todo lo que se le ha despojado como paso previo a su llegada a la escuela; por otra, hacer esta construcción de los artefactos mecánicos, lo que permite entender su funcionamiento por los propiedades invariantes que éstos conservan (véase, Bartolini Bussi, 2005).

Sobre lo anterior, y tal como se esbozó al comienzo de este escrito, existen diversos estudios en que se valoran la inclusión de los contextos históricos en la enseñanza de la matemática, con autores destacados como María Bartolini Bussi y colaboradores (Bartolini Bussi y Mariotti, 1999; Bartolini Bussi y Pergola, 1994, 1996), entre otros. Los trabajos de esta autora han tenido como centro de atención la entrada de la historia de la matemática en el aula, a través de la utilización de instrumentos y otros artefactos (Bartolini Bussi, 2000) para contribuir, sobre todo, al aprendizaje de la geometría. Bartolini (1993) desarrolló un trabajo con estudiantes de 11º grado, en que se introducen el razonamiento geométrico y la perspectiva histórica para enmarcar el trabajo con las denominadas máquinas matemáticas. Siguiendo esta línea de investigación, Bartolini Bussi (1998) plantea como tesis que, a través de la exploración, con tareas idóneas y bajo la guía del profesor, el establecimiento de vínculos y la utilización de instrumentos de dibujo, "los estudiantes de secundaria y universitarios pueden revivir la elaboración de teorías en un caso paradigmático de la fenomenología histórica de la geometría" (p. 735).

Agradecimientos

Este documento contó con la colaboración desinteresada del Dr.(c) Carlos Ledezma.

Referencias Bibliográficas

Barbin, É., Guichard, J.-P., Moyon, M. Guyot, P., Morice-Singh, C., Métin, F. ... Hamon, G. (2018). *Let History into the Mathematics Classroom*. Cham, Suiza: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-57150-8

Bartolini Bussi, M. G. (1993). Geometrical proofs and mathematical machines – An exploratory study. En I. Hirabayashi, N. Nohda, K. Shigematsu y F.-L. Lin (Eds.), *Proceedings of the 17th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 97-104). Tsukuba, Japón: PME.

Bartolini Bussi, M. G. (1998). Drawing instruments: Theories and practices from history to didactics. *Documenta Mathematica – Extra Volume ICM 1998, 3*, 735-746.

Bartolini Bussi, M. G. (2000). Ancient instruments in the modern classroom. En J. Fauvel y J. van Maanen (Eds.), *History in Mathematics Education: The ICMI Study* (pp. 343-350). Dordrecht, Países Bajos: Springer. https://doi.org/10.1007/0-306-47220-1_10

Bartolini Bussi, M. G. (2005). The meaning of conics: Historical and didactical dimensions. En J. Kilpatrick, C. Hoyles y O. Skovsmose (Eds.), *Meaning in Mathematics Education* (pp. 39-60). Nueva York, NY: Springer. https://doi.org/10.1007/0-387-24040-3_4

Bartolini Bussi, M. G. y Mariotti, M. A. (1999). Instruments for perspective drawing: Historic, epistemological and didactic issues. En G. Goldschmidt, W. Porter y M. Ozkar (Eds.), *Proceedings of the 4th International Design Thinking Research Symposium on Design Representation* (Vol. 3, pp. 175-185). Cambridge, MA: Massachusetts Institute of Technology & Technion – Israel Institute of Technology.

Bartolini Bussi, M. G. y Pergola, M. (1994). Mathematical machines in the classroom: The history of conic sections. En N Malara y L. Rico (Eds.), *Proceedings of the First Italian-Spanish Research Symposium in Mathematics Education* (pp. 233-240). Moderna, Italia: Dipartimento di Matematica, Università di Modena.

Bartolini Bussi, M. G. y Pergola, M. (1996). History in the mathematics classroom: Linkagesand kinematic geometry. En H. N. Jahnke, N. Knoche y M. Otte (Eds.), *Geschichte der Mathematik in der Lehre* (pp. 39-67). Gotinga, Alemania: Vandenhoeck & Ruprecht.

Bos, H. J. M. (1981). On the representation of curves in Descartes' Géométrie. *Archive for History of Exact Sciences, 24*(4), 295-338. https://doi.org/10.1007/bf00357312

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Barcelona, España: Gedisa.

Cantoral, R., Farfán, R. M., Lezama, J. y Martínez-Sierra, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *RELIME: Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9*(Número especial), 83-102.

Cantoral, R., Montiel, G. y Reyes-Gasperini, D. (2015). Análisis del discurso matemático escolar en los libros de texto, una mirada desde la Teoría Socioepistemológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 8*, 9-28.

Cortés, J. C. y Soto, H. A. (2012). Uso de artefactos concretos en actividades de geometría analítica: una experiencia con la elipse. *REDIMAT: Journal of Research in Mathematics Education, 1*(2), 159-193. https://doi.org/10.4471/redimat.2012.09

Descartes, R. (1954). *The Geometry of René Descartes* (D. E. Smith y M. L. Latham, Trads.). Nueva York, NY: Dover Publications. (Trabajo original publicado en 1637)

Dyck, W. (1994), *Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente*. Hildesheim, Alemania: Georg Olms Verlag. (Trabajo original publicado en 1892)

Galo-Alvarenga, S. (2019). *El estudio del cambio en Geometría Euclidiana* (Tesis de maestría no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México.

González-Urbaneja, P. (2007). Raíces históricas y trascendencia de la geometría analítica. *SIGMA – Revista de Matemáticas, 30*, 205-236.

Lehmann, C. H. (2005). *Geometría Analítica* (R. G. Díaz, Trad.). Ciudad de México: Limusa. (Trabajo original publicado en 1942)

Lenoir, T. (1979). Descartes and the geometrization of thought. The methodological background of Descartes' géométrie. *Historia Mathematica, 6*(4), 355-379. https://doi.org/10.1016/0315-0860(79)90023-5

Manzano, F. (2016). Conicógrafos del siglo XVII para la educación matemática del siglo XXI. *TRIM: Revista de Investigación Multidisciplinar, 10*, 47-60.

Mariotti, M. A., Bartolini Bussi, M. G., Boero, P., Ferri, F. y Garutti, R. (1997). Approaching geometry theorems in contexts: From history and epistemology to cognition. En E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 180-195). Lahti, Finlandia: PME.

Paz-Corrales, L. M. (2019). *Ideas variacionales en La Geometría de Descartes y en el texto Geometría Analítica de Lehmann* (Tesis de maestría no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México.

Paz-Corrales, L. M. y Cantoral, R. (2019). Estudio socioepistemológico sobre la confrontación entre La Geometría de Descartes y la Geometría Analítica. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 32*(2), 394-403.

Pérez-García, R. (2019). *Estudio sobre el papel de la confrontación en el tratamiento de la física clásica de Newton al discurso Matemático Escolar* (Tesis de maestría no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México.

Rabouin, D. (2010). What Descartes knew of mathematics in 1628. *Historia Mathematica, 37*(10), 428-459. https://doi.org/10.1016/j.hm.2010.04.002

Serna-Martínez, L. A. (2015). *Estudio socioepistemológico de la tangente como objeto escolar* (Tesis doctoral no publicada). Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional, Legaria, México.

VOL 35, NÚMERO 1, AÑO 2022

ANÁLISIS GEOMÉTRICO Y ANALÍTICO DE LA PARÁBOLA MEDIANTE EL USO DE MECANISMOS ARTICULADOS PARA EL TRAZADO DE CURVAS

ANALYTICAL AND GEOMETRIC ANALYSIS OF THE PARABOLA BY USING ARTICULATED MECHANISMS FOR DRAWING CURVES

Samuel Moreno Mazón, Manuel Alfredo Urrea Bernal
Universidad de Sonora (México)
samuelmoreno514@gmial.com, manuel.urrea@unison.mx

Resumen
Se presenta una propuesta de enseñanza a partir del uso de mecanismos articulados para el trazado de curvas, fundamentada en algunos elementos del marco teórico Espacios de Trabajo Matemático. Se promueve el análisis geométrico y analítico de la parábola, comenzando con el análisis de las condiciones geométricas necesarias para el trazado de la curva, y posteriormente, la construcción de una representación algebraica de la parábola a partir del análisis del mecanismo articulado, generando relaciones bidireccionales entre representaciones. Se presenta el diseño de una actividad, así como el análisis y conclusiones preliminares a partir del trabajo matemático generado por los estudiantes.

Palabras clave: geometría analítica, mecanismos articulados, parábola

Abstract
This paper presents a teaching proposal from the use of articulated mechanisms for drawing curves, based on some elements of the theoretical framework of Mathematical Work Spaces. The analytical and geometric analysis of the parabola is promoted, starting with the analysis of the geometric conditions necessary for drawing the curve; and later, the construction of an algebraic representation of the parabola from the analysis of the articulated mechanism, generating bidirectional relationships between representations. The design of an activity is presented, as well as the analysis and preliminary conclusions from the mathematical work generated by the students.

Key words: analytical geometry, articulated mechanisms, parabola

Descripción de la problemática

En el curso de geometría analítica en el bachillerato, específicamente en el tema de los lugares geométricos, se observa una tendencia de enseñanza que prioriza los desarrollos algebraicos sobre los geométricos. Al darle prioridad a los procesos algebraicos durante la enseñanza de los lugares geométricos, se promueve sobre todo la automatización de procedimientos y la memorización de ecuaciones algebraicas, dejando de lado las propiedades geométricas que dan origen al trazado del lugar geométrico (Villarreal, Carmona, y Arango, 2013). Debido al énfasis que se da a los tratamientos algebraicos, a los estudiantes se les dificulta interpretar geométricamente los resultados que obtienen por métodos algebraicos.

Otro factor que dificulta la interpretación geométrica de resultados algebraicos es la poca importancia que se ha dado a la representación gráfica en los cursos de geometría analítica. De acuerdo con Arellano y Oktaç (2009), las representaciones gráficas se usan sólo para ejemplificar algunas características, pero no se aprovecha la riqueza de las propiedades y conceptos geométricos involucrados en la construcción del trazo (Gómez y Carulla, 1999).

Al respecto, Duval (1998) pone de relieve la importancia de la articulación de diferentes representaciones de un mismo objeto matemático, señalando que, entre mayor sean las relaciones entre las representaciones, mayor será la comprensión que se tenga del objeto matemático con el que se trabaje. Debido a que comúnmente el trabajo con la parábola y demás lugares geométricos se centra en la representación algebraica, a los estudiantes se les dificulta identificar relaciones con la representación gráfica, así como trabajar a partir de ésta para obtener la algebraica (Gómez y Carulla, 1999).

Buscando atender parte de esta problemática, algunos autores han recurrido al uso de mecanismos articulados para el trazado de curvas (MATC). Un MATC es un sistema mecánico compuesto por barras rígidas unidas mediante articulaciones móviles que permiten transformar el movimiento, que al tener fija una o varias articulaciones y/o una o varias barras al plano, trazan un locus, es decir, un lugar geométrico que retoma las características geométricas del MATC (Manzano, 2017). Diferentes trabajos muestran que el uso de MATC es viable para la enseñanza de los lugares geométricos, ya que permite visualizar de manera directa las condiciones geométricas necesarias para el trazado de la cónica con la que se trabaje (Dennis y Confrey, 1997 Cortés y Sóto Rodríguez, 2012; Manzano, 2017). En este trabajo se retoma el uso de MATC para, primeramente, visualizar la parábola no como una curva estática, sino como el movimiento de un punto, en el plano, que cumple con la característica geométrica de estar ubicado a la misma distancia de un punto fijo y una recta fija; en segundo lugar, identificar las características geométricas del MATC que dan pie a la construcción o trazado de la parábola, aprovechando las ventajas que ofrece el software de geometría dinámica GeoGebra; finalmente, construir una representación algebraica de la parábola a partir de la representación gráfica que permita establecer relaciones bidireccionales entre ambas representaciones.

Un trabajo con esas características podría contribuir a que los estudiantes desarrollen una concepción más amplia, tanto de la parábola como de la noción de lugar geométrico. Esta estrategia no busca dejar de lado los desarrollos algebraicos, sino promover un panorama en el cual el trabajo geométrico se relacione y de sentido al trabajo algebraico, y viceversa. Con esta intención, a continuación, se presentan los objetivos para este trabajo:

Objetivo general:

Diseñar una secuencia de actividades didácticas que promuevan el análisis geométrico y analítico de la parábola mediante el uso de mecanismos articulados para el trazado de curvas

Objetivos específicos:

- Identificar dificultades reportadas en la enseñanza y aprendizaje de la parábola
- Identificar y seleccionar mecanismos articulados que tracen parábolas

- Ubicar contextos (matemáticos o extra-matemáticos) útiles para la exploración geométrica y analítica de la parábola mediante los MATC
- Valorar el diseño

Elementos Teóricos

Este trabajo se sustenta en algunos elementos del marco teórico Espacios de Trabajo Matemático (ETM), el cual busca analizar el trabajo que realiza un sujeto al tratar de resolver problemas matemáticos. Se le llama ETM a una estructura abstracta organizada para permitir y facilitar el trabajo de los individuos que resuelven problemas de un dominio específico de la matemática, como la geometría, el álgebra, entre otros (Kuzniak y Nechache, 2021). Al ser matemáticas escolares las que se ponen en juego, estos individuos son estudiantes aprendices, y el diseñador encargado del ETM será el profesor.

Dos elementos que son característicos en este marco teórico son un par de planos horizontales, los que Kuzniak y Richard (2014) denominan: plano epistemológico y plano cognitivo. Cada plano está compuesto por tres componentes, los cuales se relacionan entre sí para resolver problemas y explicar el trabajo matemático.

El plano epistemológico está definido por el dominio y el objeto matemático con el que se trabaja, y está conformado por los componentes: representamen, artefactos y referencial teórico. A su vez, el plano cognitivo está definido por los procesos cognitivos del sujeto que esté interactuando en la resolución de problemas. Este plano está conformado igualmente por tres componentes: visualización, construcción y prueba.

Durante el desarrollo del trabajo matemático los componentes de los planos horizontales se relacionan entre sí, dando lugar a tres génesis: génesis semiótica, en el cual la visualización del representamen le proporciona sentido y lo hace un objeto matemático operatorio; génesis instrumental, en el que los artefactos son utilizados como instrumentos para la construcción de representaciones; génesis discursiva, en la que el sujeto genera pruebas para argumentar y convencer a partir del referencial teórico (Kuzniak y Richard, 2014).

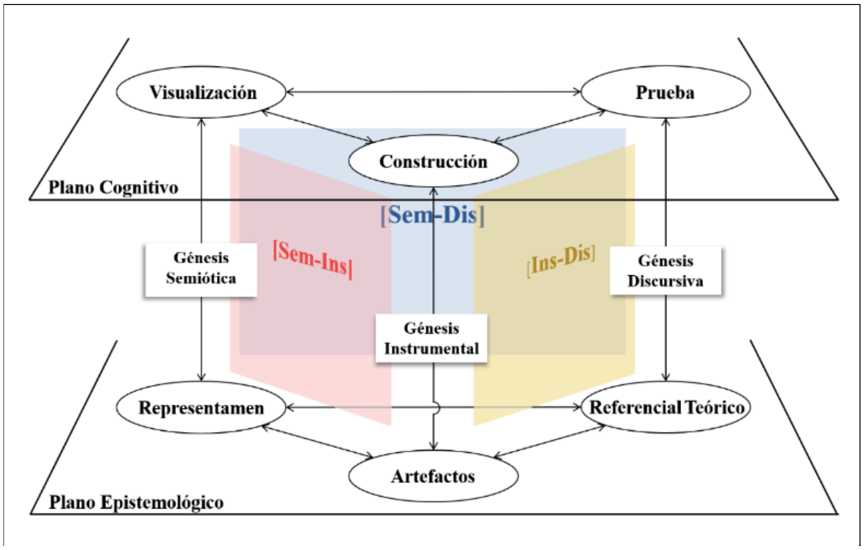
Los tres tipos de génesis señaladas anteriormente no son del todo independientes, sino que se relacionan durante las diferentes etapas del trabajo matemático para la resolución de una tarea, estableciendo tres planos verticales:

- El plano [Sem-Ins], conformado por la interacción entre la génesis semiótica y la génesis instrumental,
- El plano [Ins-Dis], conformado por la interacción entre la génesis instrumental y la génesis discursiva,
- El plano [Sem-Dis], conformado por la interacción entre la génesis semiótica y la génesis discursiva.

Dentro del marco del ETM, para que un estudiante desarrolle dominio del contenido u objeto matemático con el que se trabaja, es necesario que las actividades que se le propongan favorezcan la circulación entre los distintos elementos del diagrama (Figura 1) a lo largo de la secuencia, sean los componentes individuales de los planos horizontales, las génesis y/o los planos verticales (Kuzniak y Nechache 2015).

El diseño que se propone en este trabajo se desarrolla en dos dominios de la matemática: el de la geometría sintética (GS) y el de la geometría analítica (GA), los cuales se diferencian en el uso del plano cartesiano y de expresiones algebraicas para representar las relaciones geométricas (Klein, 1908). Esta distinción entre las geometrías es relevante, ya que los componentes del referencial teórico, los artefactos para la construcción y el tipo de representamen utilizados son distintos.

Figura 1. Diagrama de los planos horizontales y verticales del ETM



Fuente: retomado de Kuzniak y Richard, 2014 (p. 11)

Fases metodológicas

El desarrollo de este trabajo se ha organizado en 5 fases metodológicas, las cuales son:

Fase 1: Análisis preliminar, en el que se revisaron planes y programas de estudio, libros de texto y antecedentes relacionados al tema de estudio para fundamentar la problemática, la justificación y retomar ideas para el diseño de la propuesta.

Fase 2: Selección del MATC. Para realizar un análisis completo de la parábola se seleccionaron dos mecanismos: el nombrado "herramienta de la escuadra" (Figura 2a) para el análisis geométrico, y el "Parabológrafo de Van Schooten" (PVS, Figura 2b) para el tránsito de la GS a la GA y la construcción de la representación algebraica de la parábola. Por motivo de la pandemia del Covid-19 las actividades no se pudieron trabajar de manera presencial, por lo que los MATC se trabajaron virtualmente a través de applets de GeoGebra.

Figura 2a Herramienta de la escuadra, elaboración propia

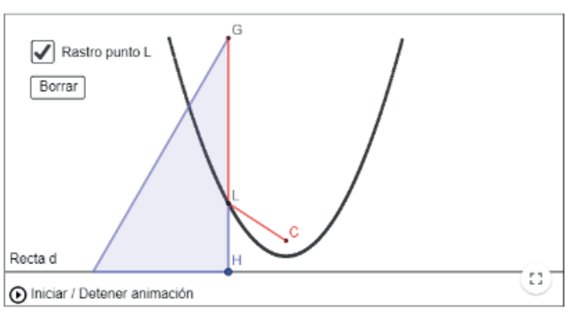
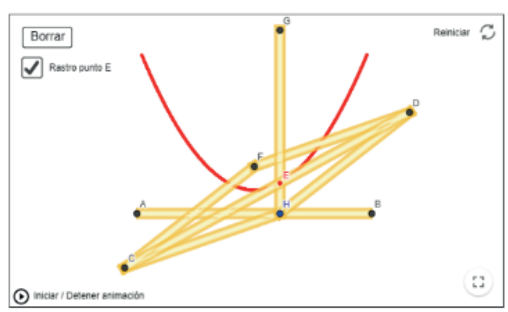


Figura 2b Parabológrafo de Van Schooten, elaboración propia



Fuente: Elaboración propia

Fase 3: Diseño de las actividades. Se diseñaron siete actividades distribuidas en dos secuencias didácticas, organizadas en inicio, desarrollo y cierre, donde la primera secuencia está dirigida al análisis geométrico de la parábola, y la segunda está dirigida al tránsito de la GS a la GA, concluyendo con la construcción de la representación algebraica de la parábola y el establecimiento de relaciones entre ambas representaciones. Paralelamente al diseño de las actividades se realizó un análisis a priori, con la finalidad de contrastarlo con un análisis a posteriori a partir de los resultados de la implementación.

Fase 4: Implementación de las actividades. Por motivo de la pandemia del Covid-19, las actividades se realizaron a través de la plataforma de videoconferencias Zoom, con un grupo de 15 estudiantes del tercer semestre de bachillerato, durante seis sesiones de dos horas cada una. Se recopilaron como evidencias las hojas de trabajo resueltas por los estudiantes y las videograbaciones de las sesiones de discusión en equipo y grupal, observando con mayor atención a dos de los cuatro equipos.

Fase 5: Valoración del diseño, a partir de la información que se obtuvo del contraste del análisis a priori y el a posteriori, además de la observación de las videograbaciones. Actualmente se está trabajando en generar las conclusiones pertinentes, y en producir la versión mejorada de las secuencias propuestas.

Descripción de la propuesta

A continuación, se presenta el diseño de la Actividad 2 de la segunda secuencia, en la que se comienza el tránsito de la GS a la GA con el parabológrafo de Van Schooten (PVS). Junto a la descripción de cada episodio de la actividad, se presenta el análisis a priori contrastado con el análisis a posteriori, con la finalidad de facilitar la comprensión de la actividad y de la estructura utilizada para el diseño y el análisis.

La Actividad 2 de la segunda secuencia tiene como antecedente la Actividad 1, en la que se presenta el PVS y se relaciona su funcionamiento con el concepto de mediatriz de un segmento. Ahora bien, la Actividad 2 tiene los objetivos de identificar las condiciones geométricas del PVS que le permiten trazar parábolas, y construir una representación algebraica de la parábola a partir del análisis geométrico del PVS.

Episodio 1. Se solicita la construcción del PVS en un applet en GeoGebra siguiendo una serie de instrucciones, con la finalidad de atender el primer objetivo, es decir, que el estudiante interactúe con los objetos y propiedades que están interviniendo en el PVS y en la construcción de la curva. Esta primera acción genera una circulación en el plano [Sem-Ins] (Figura 3a), donde GeoGebra se utiliza como artefacto para la construcción del representamen, en este caso, el PVS y la curva que se traza con él.

Figura 3a Circulación acción 1

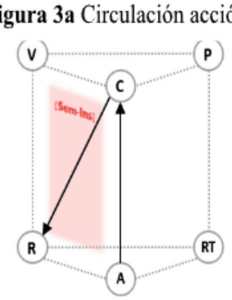


Figura 3b Circulación acción 2

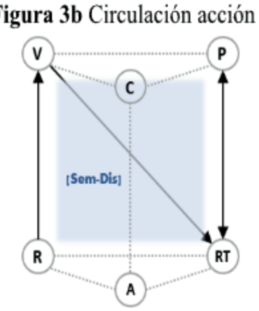
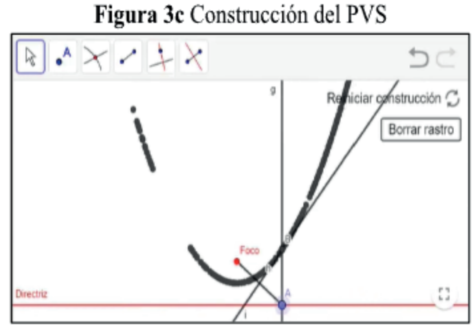


Figura 3c Construcción del PVS



Fuente: Elaboración propia

Posteriormente, se solicita argumentar si la curva que se traza con el PVS construido es una parábola, acción que genera una circulación en el plano [Sem-Dis] (Figura 3b), donde la visualización no icónica del representamen moviliza elementos del referencial teórico, tales como la definición de parábola y mediatriz, con los que se genera una prueba intelectual de que la curva corresponde a una parábola, lo que pasa a formar parte del referencial teórico del estudiante. Durante la implementación de este primer episodio se trabajó de manera grupal, por lo que se llegó a la conclusión esperada de manera grupal. Por lo tanto, en este episodio se desarrollaron las circulaciones esperadas.

Episodio 2. Esta tarea comienza señalando que se busca construir una representación algebraica de la parábola a través del mecanismo, por lo cual ahora se presenta un nuevo applet con el PVS en el que se identifican dos segmentos como x y y (Figura 4a). Se solicitan dos acciones: a) identificar en el PVS los segmentos entre puntos que, a pesar del movimiento se mantienen constantes o variables. Esto genera una circulación en el plano [Sem-Ins] (Figura 4b), donde a partir de la manipulación del PVS se traza la parábola y hace variar las longitudes de los segmentos entre puntos. La visualización icónica de los segmentos entre los puntos del PVS (representamen) permite identificar los segmentos que varían y los que permanecen constantes. El b) solicita identificar equivalencias entre los segmentos del PVS, lo que genera una circulación similar a la anterior (Figura 4c).

Figura 4a PVS con y identificados

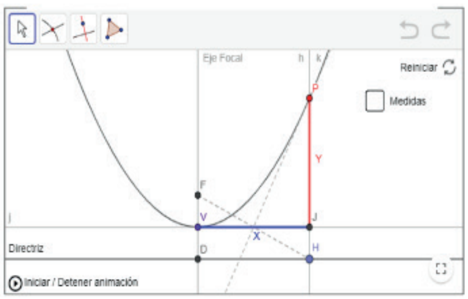


Figura 4b Circulación a)

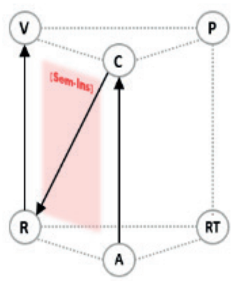
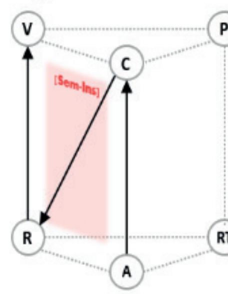


Figura 4c Circulación b)



Fuente: Elaboración propia

El análisis a posteriori del episodio muestra que los equipos siguieron un procedimiento similar al descrito a priori, a excepción del equipo 1, quienes generaron una circulación primero en el plano [Sem-Dis] (Figura 5a), visualizando de manera no icónica el representamen, lo que los llevó a la construcción de un punto L, correspondiente a la intersección de la recta h y de una recta g1, que es perpendicular al Eje Focal que pasa por el punto F, generando una circulación mayormente en el plano [Sem-Ins] (Figura 5b). En la Figura 5c se muestra la construcción realizada por el equipo.

Figura 5a Circulación acción 1

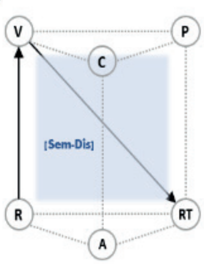


Figura 5b Circulación acción 2

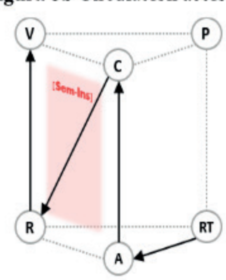


Figura5c Construcción del PVS

Fuente: Elaboración propia

Episodio 3. En el tercer episodio se solicitan tres acciones: a) la construcción guiada de un triángulo PFA en el applet, b) identificar qué tipo de triángulo es, y c) identificar equivalencias entre los segmentos del PVS y los lados del triángulo PFA. Para la acción a) se proporciona una serie de instrucciones para la construcción en GeoGebra, que consiste en trazar una recta perpendicular al Eje Focal que pase por el punto P, identificando como el punto A la intersección entre las rectas (Figura 6a). Esta acción genera una circulación en el plano [Sem-Ins] (Figura 6b), donde GeoGebra se utiliza como un artefacto para la construcción del representamen, en este caso el triángulo PFA.

Figura 6a Triángulo

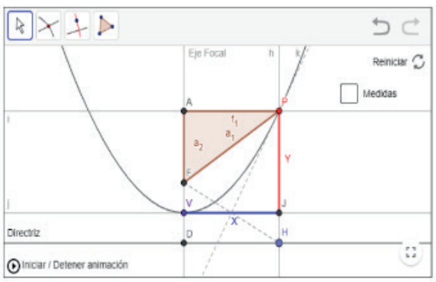


Figura 6b Circulación acción a)

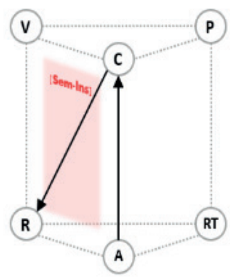
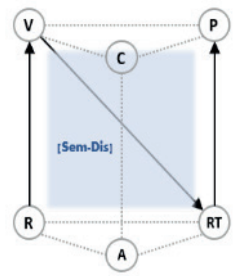


Figura 6c Circulación acción b)



Fuente: Elaboración propia

La acción b) implica la visualización no icónica del representamen (triángulo PFA), lo que moviliza del referencial teórico las características de los triángulos rectángulos y de las rectas perpendiculares, para generar una prueba intelectual de que, a pesar del movimiento del PVS, el triángulo PFA es un triángulo rectángulo, generando una circulación en el plano [Sem-Dis] (Figura 6c).

La acción c) requiere de la manipulación y la visualización icónica del PVS para identificar que, a pesar del movimiento, el lado AP del triángulo PFA es igual a x, es decir, el segmento VJ, generando una circulación en el plano [Sem-Ins] (Figura 7a). Por otra parte, la visualización no icónica del PVS permite movilizar elementos del referencial teórico, tal como la definición de parábola como lugar geométrico, con lo que se hace una prueba intelectual de que, a pesar del movimiento, el lado PF del triángulo PFA es igual al segmento PH, en otras palabras, AF=y+JH, generando una circulación en el plano [Sem-Dis] (Figura 7b).

Figura 7a Circulación 1 acción c)

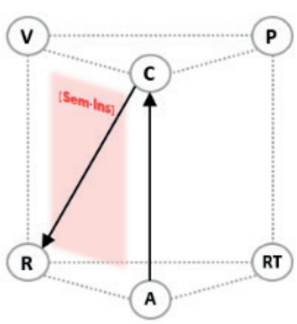
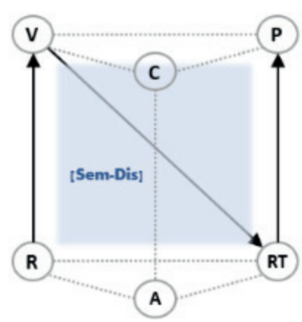


Figura 7b Circulación 2 acción c)



Fuente: Elaboración propia

El análisis a posteriori de la actividad muestra que los equipos desarrollaron circulaciones muy similares a las del análisis a priori de la actividad descrita anteriormente. Una diferencia significativa fue la del equipo 1 en la acción 3, donde se solicita identificar equivalencias entre los segmentos del PVS y los lados del triángulo PFA. El equipo hizo una visualización icónica del representamen (Figura 6a), respondiendo que los lados son variables, sin embargo, el equipo tuvo la oportunidad de refinar su respuesta durante la discusión grupal, generando circulaciones similares a las esperadas.

Episodio 4. En este episodio se solicita calcular y expresar la longitud del lado AF del triángulo PFA tomando como base sus otros lados PA y PF, que ahora están expresados como PA=x, y PF=y+JH. Este trabajo implica primeramente una circulación en el plano [Sem-Dis] (Figura 8a), donde la visualización no icónica del representamen (triángulo PFA y las expresiones algebraicas que representan las medidas de sus lados) permite movilizar el Teorema de Pitágoras del referencial teórico, lo que se utiliza como artefacto simbólico en la construcción de un representamen simbólico, o algebraico, de las relaciones entre los lados del triángulo PFA, circulando en los planos [Ins-Dis] y [Sem-Ins] (Figura 8b). Siguiendo ese proceso se concluye que AF=√(〖(y+JH)〗^2-x^2) (Figura 8c).

Figura 8a Circulación acción| 1

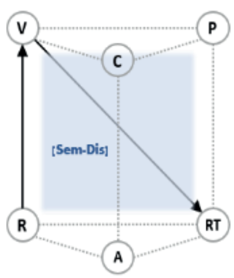


Figura 8b Circulación acción 2

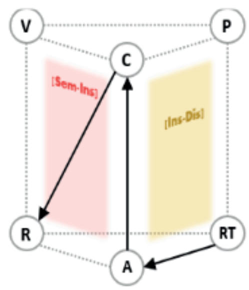


Figura 8c Desarrollo algebraico

$$(y+JH)^2 = x^2 + AF^2$$
$$(y+JH)^2 - x^2 = AF^2$$
$$\sqrt{(y+JH)^2 - x^2} = AF$$

Fuente: Elaboración propia

El análisis a posteriori del episodio 4 muestra que el equipo 1 realizó una circulación similar a la descrita a priori, pero primeramente movilizaron del referencial teórico las razones trigonométricas, buscando obtener el valor del lado AF, sin embargo, desistieron de esa estrategia, intentando con el teorema de Pitágoras. El equipo 2 movilizó el teorema de Pitágoras desde un inicio, pero se les dificultó organizar la información de los lados del triángulo PFA de manera simbólica. Antes de que los equipos terminaran la actividad el tiempo se terminó, por lo que se retomó en una discusión grupal, donde comentaron sus avances hasta el momento, logrando desarrollar los resultados y las circulaciones descritas en el análisis a priori de la actividad.

Figura 9a Circulación acción 1

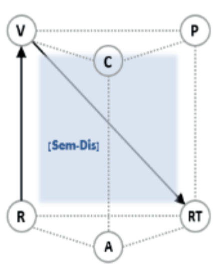


Figura 9b Circulación acción 2

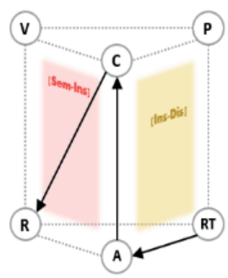


Figura 9c Construcción del PVS

$$y = \sqrt{(y+c)^2 - x^2} + c$$
$$y - c = \sqrt{(y+c)^2 - x^2}$$
$$(y-c)^2 = (y+c)^2 - x^2$$
$$y^2 - 2yc + C^2 = y^2 + 2yc + c^2 - x^2$$
$$x^2 = 4yc$$

Fuente: Elaboración propia

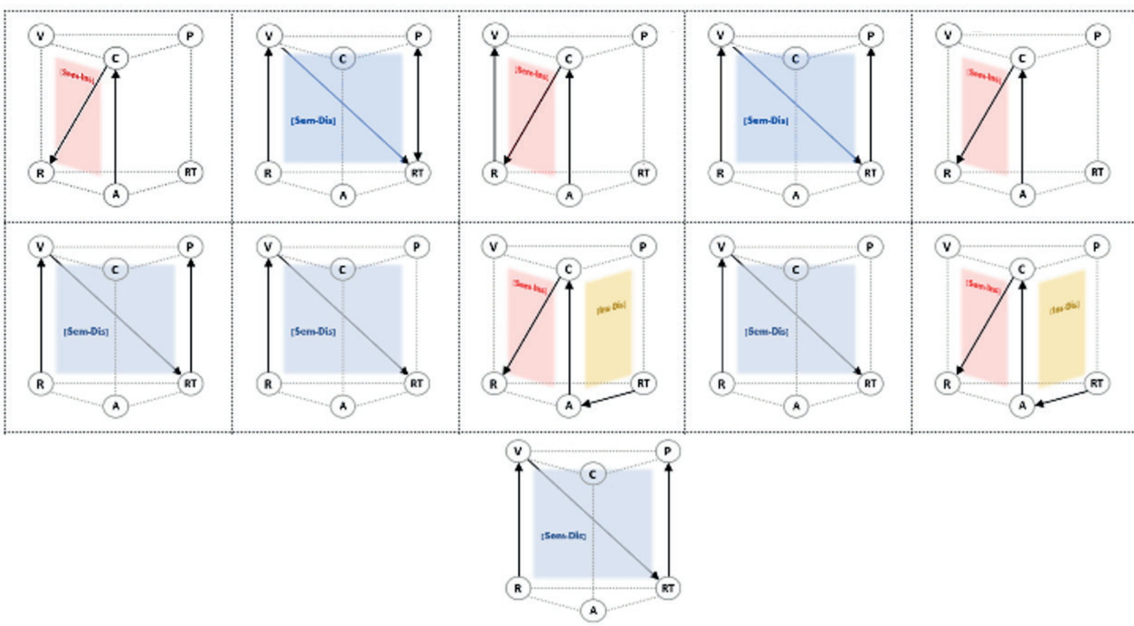
Episodio 5. En este episodio se solicitan dos acciones: a) expresar el segmento y como la suma de dos distancias, en este caso y=√(〖(y+c)〗^2-x^2)+c, (donde c representa la longitud de los segmentos constantes JH, FV, VD), y b) despejar x^2 de la expresión resultante. La acción a) genera una circulación en el plano [Sem-Dis] (Figura 9a), donde la visualización no icónica del representamen simbólico (ecuación a despejar) moviliza elementos del referencial teórico, tales como el despeje de una ecuación y el desarrollo de binomios al cuadrado, lo que se utiliza como artefacto simbólico para la construcción de un representamen simbólico que representa las relaciones entre los lados del triángulo PFA, generando una circulación en los planos [Ins-Dis] y [Sem-Ins] (Figura 9b). Siguiendo este proceso se concluye que (Figura 9c), que corresponde con la ecuación canónica de la parábola con vértice en el origen y con apertura hacia arriba.

El análisis a posteriori de este episodio muestra que a los estudiantes se les dificultó realizar el desarrollo algebraico, ya que se les dejó un tiempo para desarrollar la ecuación individualmente y sólo tres lo completaron correctamente, mismos que participaron durante la discusión grupal y despeje de la ecuación. A pesar de que los desarrollos algebraicos individuales de los estudiantes no resultaran correctos en su totalidad, en la discusión grupal se generaron las circulaciones descritas en el análisis a priori.

Conclusiones preliminares

La actividad que se describe en este reporte corresponde a una de las dos actividades de desarrollo de la segunda secuencia, donde se tiene el objetivo de construir una representación algebraica de la parábola a partir del análisis del PVS, la cual se retoma para trabajarla en el plano cartesiano durante la Actividad 3.

Figura 10. Circulaciones generadas durante la resolución de la actividad 2



Fuente: Elaboración propia

En la actividad 2 los estudiantes cumplieron con el propósito de construir una representación algebraica de la parábola con ayuda del profesor y, como se muestra en la Figura 10, el trabajo con el PVS estuvo en el centro de la actividad. En las primeras tres circulaciones se observa que la construcción de la parábola con el PVS es el centro del trabajo, y en los siguientes se observa que la visualización de los elementos del PVS es lo que da pie al trabajo algebraico que desemboca en la construcción de la representación algebraica de la parábola.

La Actividad 2, y en general las dos secuencias tienen algunos puntos fuertes, tales como:

involucra al estudiante en el proceso de construcción del mecanismo articulado, promueve un método de análisis de los lugares geométricos dinámico y diferente al que típicamente se promueve en libros de texto,
la visualización no icónica del mecanismo articulado está en el centro de los episodios de resolución,
transita de un entorno geométrico a un algebraico de manera paulatina, relacionándolos entre sí, y
permite construir una representación algebraica de la parábola a partir del análisis geométrico del mecanismo articulado.

Actualmente se está trabajando en las adecuaciones a las secuencias de actividades didácticas para presentar el diseño final, y así cumplir con el objetivo general del proyecto.

Referencias bibliográficas

Arellano, F., & Oktaç, A. (2009). Algunas dificultades que presentan los estudiantes al asociar ecuaciones lineales con su representación gráfica. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (págs. 357-365). México DF: Comite Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cortés, J. y Soto, H. (2012). Uso de artefactos concretos en actividades de geometría analítica: una experiencia con la elipse. REDIMAT - Journal of Research i Mathematics Education, 1(2), 159-193.

Dennis, D. y Confrey (1997). René Descartes curve-drawing devices: experiments in the relations between mechanical motion ald symbolic language. Mathematics Magazine 70, 3, 163–174.

Duval, R,. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. Didáctica, Investigaciones en Matemática Educativa.

Gómez, P., & Carulla, C. (1999). La Enseñanza de la Función Cuadrática en las Matemáticas Escolares del Distrito Capital. Una Empresa Docente

Kuzniak, A., & Nechache, A. (2021). On forms of geometric work: a study with pre-service teachers based on the theory of Mathematical Working Spaces. Educational Studies in Mathematics, 106, 1-19. doi:https://doi.org/10.1007/s10649-020-10011-2

Kuzniak, A., & Richard, P. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 17, 5-15.

Manzano, J. (2017). Mecanismos articulados para trazar curvas como recurso educativo digital para la Didáctica de las Matemáticas en Secundaria y Bachillerato. Tesis de doctorado no publicada, Universidad Autónoma de Madrid. Madrid, España.

Villareal, J. E., Carmona, J. A., & Arango, C. M. (2013). La enseñanza aprendizaje de la geometría analítica: Una propuesta de desarrollo del pensamiento a partir del modelo de van hiele y la metodología de aula taller. Congreso Iberoamericano De Educación Matemática. (p.1664–1671). Montevideo: Universidad de Antioquia

VOL 35, NÚMERO 1, AÑO 2022

CONSTITUCIÓN DEL OBJETO FRACTAL EN ESTUDIANTES DE GRADO SÉPTIMO: UN EXPERIMENTO DE ENSEÑANZA

CONSTITUTION OF THE FRACTAL OBJECT IN SEVENTH-GRADE STUDENTS: A TEACHING EXPERIMENT

Brianna Lorena Díaz Barreto, Liceth Andrea Casallas Hernández
Universidad Distrital Francisco José de Caldas (Colombia).
lore-2820@hotmail.com, licethcasallas1208@gmail.com

Resumen
En este trabajo describimos la constitución del objeto fractal en un experimento de enseñanza en el cual participaron 60 estudiantes de grado séptimo (11-13 años), de una institución educativa de Bogotá Colombia. Diseñamos una secuencia de episodios de enseñanza basada en una propuesta fenomenológica del objeto fractal que contempla cinco objetos metales constitutivos del concepto: Autosimilaridad, recursividad, factor de escala, infinito y dimensión fractal. En los resultados identificamos la importancia de la experimentación para generar esquemas de acción en los estudiantes, además enfatizamos en la categorización de estos esquemas mediante matematización.

Palabras clave: fractales, esquemas, matematización, experimento.

Abstract
In this work, we describe the constitution of the fractal object in a teaching experiment in which 60 seventh- grade students (in the 11 to 13 age group) participated, from an educational institution in Bogotá, Colombia. We designed a sequence of teaching episodes based on a phenomenological proposal of the fractal object that includes five key objects that make up the concept: Self-similarity, recursion, scale factor, infinity, and fractal dimension. Among the outcomes, we identify the importance of experimentation to generate action schemes in students; and we also emphasize the categorization of these schemes through mathematization.

Key words: fractals, schemes, mathematization, experiment

Introducción

La geometría fractal es una fuente de recursos fenomenológicos que pueden ser aprovechados para la enseñanza de las matemáticas en el aula, por su aplicabilidad en diferentes campos y su capacidad de modelar fenómenos de la naturaleza, la cultura, el arte, entre otros. Esta geometría aporta contextos que permiten a los estudiantes hacer aproximaciones sensoriales sobre estos fenómenos y tener una base experiencial desde la que se constituyan esquemas de pensamiento matemático en el aula. En esta investigación encontramos que dichos contextos permiten, además, una introducción mucho más natural a objetos clave de la matemática escolar, como: la letra, la recursión, la dimensión, el crecimiento exponencial, entre otros.

Fenomenología del objeto fractal

Nuestra propuesta de investigación se basa en los desarrollos teóricos planteados en la educación matemática realista (EMR), la cual nos induce a pensar la enseñanza de las matemáticas desde el desarrollo de la fenomenología de los objetos matemáticos, es decir, comprender cómo los conceptos matemáticos nos ayudan a organizar fenómenos tanto de la vida real como de la matemática misma. El objeto matemático que desarrollamos es el objeto fractal, de tal manera que la fenomenología que describimos, está basada en cómo los objetos mentales que permiten su constitución se relacionan con los fenómenos para los cuales los fractales son el medio de organización, indicando en palabras de Freudenthal (1983), cuáles son los fenómenos para cuya organización fue creado y a cuáles puede ser extendido, de qué manera actúa sobre esos fenómenos como medio de organización y de qué poder nos dota sobre estos fenómenos.

Al realizar una revisión teórica, experimentación y análisis de algunos fractales clásicos, lineales, naturales y la experimentación con vegetales, identificamos cinco recursos fenomenológicos que permanecían invariantes en su composición. Y, al ponerlos a prueba nos dimos cuenta de que, más que características, tenían un carácter constitutivo del fractal. Por lo tanto, los consideramos objetos mentales en el sentido que Freudenthal (1983) propone y los postulamos como organizadores del objeto matemático fractal. Estos objetos mentales son: autosimilaridad, recursividad, factor de escala, infinito y dimensión fractal. A su vez identificamos que los fenómenos que se comportan de manera caótica con un comportamiento que se repite una y otra vez, en escalas diferentes, forman estructuras complejas, pueden ser organizadas por el objeto fractal a través de los objetos mentales mencionados anteriormente.

En el caso de nuestra investigación, privilegiamos contextos naturales para iniciar la exploración de los fenómenos, puesto que Benoȋt Mandelbrot propone la geometría fractal como la geometría de la naturaleza, también, encontramos que el objeto fractal puede ser el medio de organización de fenómenos como la música, el arte, el cine, la medicina, la tecnología, la economía y otras actividades presentes en la cotidianidad de la actividad humana. Todos estos fenómenos en algún momento se comportan de manera caótica, difícil de describir y analizar, encontramos en el objeto fractal una manera de comprenderlos y modelarlos.

Para desarrollar la fenomenología del objeto fractal, es importante que tengamos una noción de qué es un objeto fractal y cómo se relacionan los cinco objetos mentales propuestos para su constitución. Para esto, partimos del primer intento que hace Benoȋt Mandelbrot para definir los fractales. En su libro: los objetos fractales: forma, azar y dimensión, Mandelbrot no da una definición formal de lo que se podría denominar fractal, sin embargo, en el glosario de dicho libro, aparece fractal definido desde lo que él denomina sentido intuitivo como:

> Fractal. Adj sentido intuitivo. Que tiene una forma, bien sea sumamente irregular, bien sumamente interrumpida o fragmentada, y sigue siendo así a cualquier escala que se produzca el examen. Que contiene elementos distintos cuyas escalas son muy variadas y cubren una gama muy amplia. (Mandelbrot, 1993, p. 168)

En los primeros renglones de esta definición identificamos que uno de los objetos mentales al que se hace referencia es la autosimilaridad, definida como la característica que tienen algunos objetos en donde “el todo está formado por varias copias de sí mismo solo que reducidas y puestas en diferente posición” (Sabogal y Arenas, 2011, p.9), es decir, el todo es igual a sus partes salvo un factor de escala.

Gracias a la experimentación realizada, identificamos que fenomenológicamente la autosimilaridad y el factor de escala tienen las mismas raíces, ya que su constitución requiere objetos matemáticos comunes como: razón, semejanza, proporcionalidad, correspondencia, tamaño, forma, magnitudes de la misma naturaleza, constante o razón de cambio e invarianza.

Observemos que este vínculo que identificamos entre los objetos autosimilaridad y factor de escala, también se pone en evidencia en la definición de “escalante” dada por Mandelbrot (1993), “dícese de una figura geométrica o de un objeto natural cuyas partes tienen la misma forma o estructura que el todo, salvo que están a diferente escala y pueden estar ligeramente deformadas”. (p. 167)

Así mismo, el análisis fenomenológico de algunos fractales nos mostró que el proceso iterativo es fundamental para que se generen formas similares que están a diferente escala. Este proceso iterativo, está relacionado con otro objeto mental importante para la constitución del objeto matemático fractal, denominado recursividad. Este consiste en un proceso cíclico, donde se realiza una acción en el punto de salida de un nivel, y esta misma se convierte en el comienzo del siguiente nivel. (Sabogal & Arenas, 2011) definen iteración como la repetición infinitas veces de algo. Por lo tanto, los fractales se generan a través de la repetición de un patrón geométrico, establecido como fijo, indefinidamente.

Al hablar de los objetos matemáticos relacionados con la recursividad, encontramos que estos tienen inmerso un proceso de repetición infinito, lo que hace que se obtengan formas caóticas e irregulares propias de los fractales. Este proceso lo relacionamos con el objeto mental infinito, en el que están presentes objetos matemáticos como enumeración, conteo, infinito potencial e infinito actual que permiten su constitución. Además, encontramos que no en todos los fractales podemos hablar del mismo proceso infinito, ya que dependiendo de la cantidad de escalas podemos clasificarlos como fractales escalantes y no escalantes (Mandelbrot, 1993) y debido a las formas irregulares, fragmentadas, ligeramente deformadas, que aparecen luego de aplicar algunas iteraciones, se hace necesario identificar qué tan irregular es determinado fractal. Para identificar dicha irregularidad debemos determinar su dimensión, es decir, identificar sus propiedades métricas y topológicas. Para comprender esto, debemos replantear las dimensiones geométricas convencionales, pues estas nos permiten ubicar los objetos en dimensiones enteras y los fractales se ubican en dimensiones no enteras, es decir, fraccionarias.

Una vez establecida la fenomenología del objeto fractal, nos fue posible establecer una ruta para la constitución de este objeto, dicha ruta se describe en la siguiente sección.

Diseño del experimento de enseñanza

Nuestro trabajo de investigación tiene como propósito describir los procesos de matematización desarrollados por un grupo de estudiantes, al abordar situaciones realistas organizadas por el objeto fractal, esta descripción la realizamos a la luz de los planteamientos de la EMR y la teoría de esquemas propuesta por David y Tall (2002). Consideramos que el experimento de enseñanza nos permite llevar a cabo de la mejor manera nuestra propuesta de investigación y nos brinda la posibilidad de experimentar de primera mano el aprendizaje y razonamiento matemático de los estudiantes (Steffe y Thompson, 2000). A su vez, al ser de carácter cualitativa, esta metodología de investigación nos permite describir e interpretar la manera en que los estudiantes construyen matemáticas y cómo organizan su realidad a partir de ella, es decir, comprender lo que en la educación matemática realista se denominan los procesos de matematización desarrollados por los estudiantes en el experimento de enseñanza.

Para desarrollar nuestro experimento de enseñanza llevamos a cabo tres fases de investigación, en la primera, realizamos la preparación del experimento de enseñanza en donde identificamos fenómenos organizados por el objeto fractal y plantemos el análisis fenomenológico del objeto fractal mediante un estudio cuidadoso de los objetos mentales que permiten constituirlo. Una vez identificados los posibles fenómenos, realizamos un banco de tareas que atendieran a la fenomenología propuesta. De este banco de tareas tomábamos las actividades y las modificamos de acuerdo con las necesidades que iban surgiendo durante la aplicación.

En la segunda fase de investigación, realizamos la experimentación, en donde contamos con 60 estudiantes de séptimo grado, los cuales se distribuyeron en dos grupos, cada uno de aproximadamente de 30 estudiantes. Estos encuentros, debido a la contingencia provocada por la pandemia del Covid-19, se desarrollaron mediante la modalidad de educación remota, con encuentros sincrónicos en la plataforma Zoom y como medio de comunicación alterno la plataforma EDMODO. En total, se emplearon 9 semanas de aplicación de la investigación, con tres encuentros semanales con los estudiantes, entre el 18 de agosto y el 23 de octubre del 2020.

Como instrumentos de recolección de la información empleamos las grabaciones de audio y video de cada uno de los encuentros, las cuales tienen una doble importancia en nuestra investigación, ya que las empleamos para la realización de los análisis retrospectivos y como recurso que nos permitió retomar discusiones y aportes de los estudiantes para abordarlos en las siguientes sesiones, pues "el análisis cuidadoso de las cintas de video ofrece a los investigadores la oportunidad de activar los registros de sus experiencias pasadas con los estudiantes y llevarlos a la conciencia" (Steffe y Thompson, 2000, p. 292).

En la tercera y última fase realizamos los análisis continuados y el análisis final. Para la realización de los análisis continuados, el grupo de investigación, compuesto por tres docentes investigadoras, nos reunimos dos veces a la semana para analizar lo ocurrido en los episodios de enseñanza aplicados y replantear o validar las hipótesis propuestas; para así, continuar con el diseño de las tareas de los siguientes episodios de enseñanza.

A continuación, describimos sintéticamente las cuatro situaciones realistas abordadas por los estudiantes, cada una estaba basada en un fenómeno organizado por el objeto fractal. Sin embargo, los estudiantes desconocían este hecho, solo hasta el final de la secuencia introdujimos el término fractal como aquel que reúne las características ya trabajadas.

- Situación 1: "explorando la naturaleza", en la primera parte se les solicitó a los estudiantes realizar la descripción de tres imágenes en las que se mostraban un árbol sin hojas, una rama de un helecho y una cadena montañosa y realizar réplicas de cada imagen, describiendo el proceso de construcción empleado. En la segunda parte se realizó el análisis de objetos naturales como el brócoli, apio, cilantro, coliflor entre otros.
- Situación 2: "subdivisiones", se realizó una construcción en Geogebra, donde se les daba a los estudiantes una serie de pasos que debían realizar, con el fin de explorar procesos recursivos. A partir de lo que observaron se les solicitó completar información en relación con la cantidad de veces que había realizado el proceso recursivo y la cantidad de triángulos en cada subdivisión, haciendo uso de representaciones simbólicas. Posteriormente, se les presenta otra construcción en Geogebra, similar a la anterior, con la diferencia de que se podía cambiar la forma, tamaño y posición de los triángulos.
- Situación 3: "al ritmo de la música", se desarrolló el análisis de tres pistas musicales, donde se identifican sonidos, patrones y ritmos de cada una, posteriormente se centra la atención en una de estas, para realizar un análisis detallado de diferentes intervalos o secciones de la pieza musical.
- Situación 4: "¿en qué dimensión estamos?" En la primera parte de la situación se realiza la construcción del triángulo de Sierpinski en una hoja de papel. En la segunda parte, se caracterizan las dimensiones euclidianas y a partir de estas se determina entre qué dimensiones se encuentran algunos fractales.

El análisis de las acciones realizadas por los estudiantes durante la experimentación con cada uno de los fenómenos lo realizamos considerando (1) los objetos mentales planteados en la fenomenología del objeto fractal

(Autosimilaridad, recursividad, factor de escala, infinito y dimensión fractal), (2) los niveles de comprensión planteados desde la EMR (situacional, referencial general y formal) y (3) la teoría de esquemas de acuerdo a los planteamientos de Davis & Tall (2002) quienes definen esquema como una estructura organizada de conocimiento, en la que el nuevo conocimiento y la nueva experiencia deberían encajar, por tanto, un esquema es una colección ordenada y jerárquica de relaciones, en donde el estudiante logra categorizar sus propias acciones. Estos autores, proponen dos tipos de esquema:

- Esquema de acción (esquema de orden 0): es una secuencia de acciones realizadas para alcanzar una meta. Por ejemplo, en el abordaje de la situación 1, la descripción de las imágenes se realiza empleando un lenguaje cotidiano y desde el sentido común, en el que se pueden distinguir atributos de los objetos mentales propuestos.
- Esquema de orden n-ésimo (de orden superior): es una categorización de esquemas de orden más bajo. Por ejemplo, una categorización del esquema mencionado anteriormente se da cuando los estudiantes prestan mayor atención a la forma de hacer referencia a las partes constitutivas de los objetos mostrados en la imagen, lo que les permitió reconocer la dependencia entre la parte (rama, montaña) y el todo (árbol, cadena montañosa).

Contemplar estas tres categorías nos permitió determinar en qué momento los estudiantes estaban construyendo esquemas de acción en la constitución de cada uno de los objetos mentales y cómo estos esquemas de acción se ubican dentro de los niveles de comprensión. Tomamos la decisión de emplear los esquemas de acción porque en los análisis preliminares identificamos que las acciones llevadas a cabo por los estudiantes dentro de un mismo nivel de comprensión involucraron diferentes categorizaciones conceptuales.

Proceso de constitución del objeto fractal

Desarrollaremos esta descripción de acuerdo con el orden en que fueron surgiendo manifestaciones asociadas al uso de esquemas de pensamiento relacionados con cada uno de estos objetos mentales. Al tiempo que identificamos momentos en los que sucede la categorización de estos esquemas que logran hacer avanzar a los estudiantes en la constitución de dichos objetos, con el fin de dar cuenta del estado de ese proceso de constitución, puesto que no pretendemos que hayan quedado del todo constituidos con esta experiencia.

Antes de iniciar la descripción, aclaramos que durante el desarrollo del experimento de enseñanza buscamos siempre que la primera experiencia de los estudiantes con los fenómenos fuese desde sus conocimientos previos, no necesariamente desde las matemáticas, desde su sentido común. Esto contribuyó a que surgieran de manera natural formas de referirse implícitamente a los objetos mentales propuestos en la fenomenología del objeto fractal.

A continuación, describimos el proceso de constitución de cada uno de los objetos mentales a medida que avanzaba el proceso de experimentación con cada uno de los fenómenos, resaltando los objetos mentales emergentes, los esquemas de acción desarrollados y el nivel de comprensión de acuerdo con la matematización desarrollada.

Constitución del objeto mental recursividad:

En las descripciones realizadas por los estudiantes sobre las imágenes que se muestran en la Figura 1, evidenciamos que ellos empiezan a hacer referencia a procesos iterativos en la composición o estructura de los objetos naturales que se les muestra, haciendo referencia a algo que se repite dentro de la imagen, apareciendo un esquema de orden 0, como lo observamos en la siguiente declaración de un estudiante:

"si te das cuenta entre las ramas hay más ramas, ósea entre una rama principal como dice Pastrana, en una rama principal salen otras ramas"

Figura 1. Imágenes, primera situación

Fuente: Ilustración SEQ Ilustración* ARABIC 1

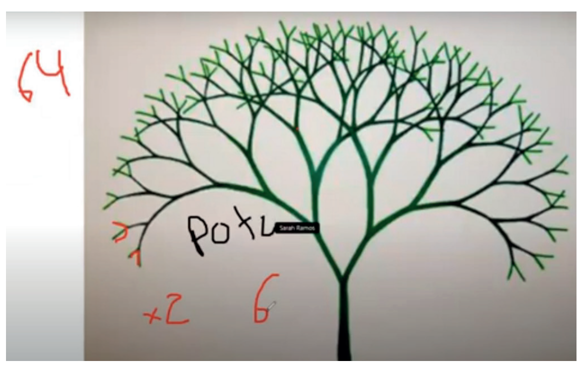
A través de las discusiones dadas en los encuentros, observamos que los estudiantes van regulando las formas de expresarse. A lo largo de la experimentación los estudiantes desarrollan un género discursivo a través del diálogo conjunto de los participantes, al establecer una manera de referirse específica al contexto trabajado.

Luego de esas descripciones iniciales, los estudiantes detallan el proceso de construcción de las réplicas realizadas, donde se generan nuevas unidades de referencia, por ejemplo, un estudiante menciona *"yo usé cubetas de huevos y las trabajé en grupos de dos montañas",* en esta acción se da un procesos de unitización, como Lamon (1994) citado en Romero, J Rojas, P y Bonilla, M (2014) menciona, ya que el proceso de unitización está presente en la generación de nuevas unidades, como la unidad grupos de dos montañas, que se convierte en la unidad de referencia.

Al avanzar en el trabajo con los estudiantes se realiza un cambio de representación, lo que permite generar dos discusiones, la primera sobre determinar los puntos de inicio de las nuevas ramificaciones, y la segunda sobre si la primera ramificación es el tallo. Estas discusiones permitieron a los estudiantes relacionar el patrón identificado con la potenciación y se hizo alusión a algunas de sus propiedades como la propiedad de exponente cero. Esto lo evidenciamos en la declaración de un estudiante:

"este (tallo) *lo dejamos en* 2^0 *como este todavía no sería nuestra primera ramificación, entonces este sería uno, unidad".*

Figura 2. Cambio de representación y uso de potencia



Fuente: Ilustración SEQ Ilustración* ARABIC 2

Los estudiantes relacionan la base con el patrón y el exponente con el número de subdivisión, en la figura 2 apreciamos las relaciones establecidas para la sexta ramificación.

El trabajo realizado con el cambio de representación, y las discusiones emergentes en las clases, permitió que los estudiantes categorizaran conceptualmente el objeto mental recursividad en un esquema de orden mayor, ya que no solamente reconocen la acción sucesora, sino que logran representarla mediante el objeto mental potenciación.

Al continuar con la experimentación de las otras tres situaciones realistas, observamos que el objeto recursividad se fue afianzando en su constitución y el objeto mental potenciación es empleado para describir los procesos recursivos que aparecen en cada una. En la situación 2 los estudiantes establecen las potencias de 4 para describir el proceso de subdivisión generado, como se observa en la siguiente declaración:

"En cuanto al número de triángulos, empieza en 1 y se van multiplicando por 4. La expresión, yo le expresé, como potenciación, 4 a la 0, da 1, 4 a la 1, da 4, 4 a la dos, da 16, como se van multiplicando por 4 y cuatro a la tres, de 64"

Figura 3. Organización de datos, situación 4.

Fuente: Ilustración SEQ Ilustración* ARABIC 3

Así mismo, en la situación 3 se establecen las potencias de 3 para la determinación de la cantidad de sonidos en cada sección de la pieza musical, y en la situación 4, potencias de 3 para la cantidad de triángulos generados por cada corte realizado en el papel, como lo observamos en la siguiente figura 3.

El emplear el objeto mental potenciación les permite a los estudiantes avanzar en la categorización del objeto mental recursión a un esquema de orden 1, puesto que han logrado matematizar el patrón que identifican. Además, podemos decir que la potenciación, está inmersa en la actividad matemática de los estudiantes siendo conscientes de la función que esta cumple en el análisis de las situaciones propuestas, es decir, se ha establecido como un objeto mental, lo cual es también un indicador de la formación de esquemas de primer orden de acuerdo con Davis y Tall (2002).

Al continuar con la aplicación de la secuencia, se hizo necesario formalizar los aspectos que los estudiantes identificaban en relación con procesos recursivos, patrones y la matematización que estaban proponiendo, por lo cual, se define con ellos el término recursividad a partir de una caracterización de las propias acciones de los estudiantes, llegando así a que ellos la describan como lo observamos en lo escrito por un estudiante en la figura 4.

Figura 4. Descripción de recursividad dada por un estudiante.

1. Describe como identificas la recursividad en el proceso de construcción del Triángulo de Sierpinski.

   Rta: Tiene un punto de origen que es el primer corte ósea el más grande o ancho y así se le hagan cambios se repite y se repite, pero siempre va a ser igual aun que cambie el tamaño la figura se va a repetir, porque la recursividad es una característica que se repite y parte de un punto y controla a los demás.

Fuente: Elaboración propia

Que los estudiantes lograran construir una definición propia de recursividad que no está alejada de la definición formal, nos indica que han logrado avanzar en la categorización conceptual de este objeto llegando a un esquema de orden 2.

Constitución del objeto mental infinito

En el proceso de constitución del objeto mental recursividad observamos que este objeto, iba de la mano con el objeto mental infinito. Ya que una vez, se ahondaron discusiones sobre cómo expresar cualquier momento o parte del proceso recursivo, identificamos que principalmente la noción de infinito trabajada por los estudiantes fue la de infinito potencial, ya que ellos reconocieron la recursión como un proceso que no tiene fin, una acción que puede ser repetida una y otra vez, como apreciamos en la siguiente declaración: *"que así se podría seguir hasta el infinito haciendo las mismas cosas"*

Una vez los estudiantes reconocen que el proceso recursivo se puede seguir aplicando una y otra vez, indefinidamente, y basados en las potencias establecidas previamente, logran establecer una expresión para cualquier iteración, en el caso de la situación 2, las expresiones empleadas fueron 4^{Δ}y 4^{s}, para la tercera situación las expresiones establecidas para las características analizadas de la pieza musical fue 3^{E} suponiendo que esta sigue sonando indefinidamente. Finalmente, para la situación 4, establecen la expresión 3^{x-1}para designar la cantidad de nuevos triángulos en relación con el corte realizado en el papel.

El desarrollo algebraico empleado por los estudiantes permitió que se siguiera constituyendo el objeto mental infinito potencial, puesto que este objeto mental está vinculado con la repetición de un proceso que nunca finaliza. Por lo tanto, este objeto mental contribuyó a avanzar en la categorización conceptual del objeto mental recursividad llevando a un esquema de orden 3.

Constitución del objeto mental autosimilaridad

Durante la experimentación con la situación 1, los estudiantes tenían que describir la composición de las imágenes que aparecen en la ilustración 1. Observamos que en estas descripciones aparecen las primeras categorizaciones del objeto autosimilaridad reconociendo la variación de tamaño en las nuevas ramas y que estas conservan la misma forma, como observamos en lo mencionado por el estudiante sobre la figura 2.

"de esta ramita que es igual a la que está acá pues se nota que salió acá la otra ramita y de esta otra ramita, salió estas mini ramitas y de estas mini ramitas salió la hoja".

Pero esta categorización no sólo aparece en la figura 2, sino en las otras dos, ya que usan palabras como ramas y ramitas, montañas y mini montañas para diferenciar los objetos grandes de los pequeños. Esto nos lleva a decir que han logrado esquematizar el objeto autosimilaridad en un esquema de orden 0, puesto que logran reconocer estas características en otros objetos. Posteriormente, los estudiantes experimentan con vegetales e identifican que estos están constituidos por partes muy similares en su forma, pero de diferente tamaño. Al emerger de manera natural la palabra "similar" en los estudiantes se decide introducir la palabra Autosimilaridad para referirnos a las cosas que ellos están observando en los objetos que analizan. Además, en la descripción de los vegetales reconocen la relación entre una parte y el todo, puesto que dicen que si tienen un objeto que es autosimilar cualquier parte de ese objeto lo será.

"pues es otra ramificación, pero aun así es autosimilar porque si yo digo que la saque de esta (mostrando la de mayor tamaño) *y digo primero que está* (la de mayor tamaño) *es autosimilar, entonces pues esta también sigue la secuencia de autosimilaridad"*

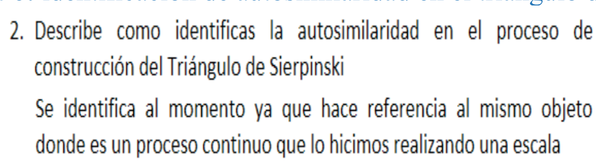
Figura 5. Autosimilaridad en la coliflor

Fuente: Ilustración SEQ Ilustración* ARABIC 4

Este reconocimiento de la variación de tamaño, conservación de la forma y la relación entre la parte y el todo, también se presentan en la experimentación con las otras situaciones. Por ejemplo, en la situación 2 reconocen que los triángulos nuevos que se generan en el proceso recursivo que realizan, son iguales en forma y que si el triángulo original sufre algún cambio, todos los demás cambiarán de la misma manera, como lo observamos en la siguiente declaración de un estudiante: "*es autosimilar primero porque utiliza la misma forma todos, se mueven donde el otro vaya…!ah¡ y que también cuando va a hacer una nueva división aparecen cuatro*".

En esta situación también se genera la necesidad de comprobar si los triángulos que se generan son realmente iguales en forma, por lo que en este proceso de comprobación surgen los objetos mentales: criterios de semejanza específicamente al criterio ángulo, ángulo, ángulo, área y razón. Ya en la situación 3, al experimentar con la pista musical, identifican que los tiempos de duración de los sonidos y los cambios en el tamaño de las formas que aparecen en la gráfica son autosimilares. Para la situación 4, en el proceso de construcción del fractal, identifican que los triángulos que se forman componen la figura original como observamos en la figura 6.

Figura 6: identificación de autosimilaridad en el triángulo de Sierpinski



2. Describe como identificas la autosimilaridad en el proceso de construcción del Triángulo de Sierpinski

Se identifica al momento ya que hace referencia al mismo objeto donde es un proceso continuo que lo hicimos realizando una escala

Fuente: Elaboración propia

Que los estudiantes reconozcan estas características en las demás situaciones, nos indica que han avanzado en la categorización del objeto mental autosimilaridad, llegando a un esquema de orden 1, puesto que su categorización ya no es solo intuitiva, por decirlo de alguna manera, sino que ahora pueden comprobar si un objeto es autosimilar a través de la verificación de sus características y la relación entre las partes y el todo.

Constitución del objeto mental factor de escala

Para continuar en la categorización conceptual del objeto autosimilaridad, debemos hablar de la constitución del objeto factor de escala, ya que este objeto ayudó a formalizar la característica de la variación de tamaño que los estudiantes habían identificado en los esquemas de orden 0 y 1. Esto lo lograron a través de las matematizaciones de las relaciones de tamaño que identificaban, mediante el uso de un número racional, donde el numerador era 1, que representaba la unidad, y el denominador se relacionaba con el patrón que identificaban en el proceso recursivo. Por ejemplo, en la situación 2 los estudiantes reconocen que "*hay un triángulo grande el cual se divide en 4 partes entonces de ahí sale ¼*" luego añaden, refiriéndose a los triángulos de las subdivisión dos *"Pues porque solamente estamos cogiendo un triangulito pequeño y son 16, entonces esos 16 ocupan el espacio del primer triángulo, 1/16*". En la situación 3 reconocen que la relación entre los sonidos es de ⅓ en el primer intervalo, de un 1/9 en el segundo intervalo y así con los demás. En cuanto a la situación 4, reconocen que la relación que hay entre los triángulos que se forman está relacionada con los cortes que se realizan a la hoja mencionando que "*tendría que ver con que tenemos un patrón de dos, ¿no?, porque cuando cortamos vamos aumentando por dos*" de esta manera relacionan los tamaños de los triángulos que se generan en la hoja con el número racional ½.

Este proceso de matematización que se logró desarrollar con los estudiantes hace que se avance a un esquema de orden 2 en la constitución del objeto autosimilaridad, puesto que las categorizaciones que hacen los estudiantes de este objeto se acompañan de procesos matemáticos más rigurosos y formales.

Constitución del objeto mental dimensión fractal

La constitución de este objeto mental se desarrolla principalmente en la situación 4 desde una concepción intuitiva a través de la exploración sensorial en la construcción del triángulo de Sierpinski.

En este abordaje de la dimensión consideramos pertinente realizar un trabajo de reconocimiento de las dimensiones euclidianas a partir de la relación de atributos medibles de los objetos geométricos que pertenecen a cada una de ellas. Por ejemplo, para la dimensión dos un estudiante menciona que "*son figuras que tienen dos atributos medibles, largo y ancho, o aquellas que tienen área*". Este reconocimiento, nos indica que se ha generado un esquema de orden 0.

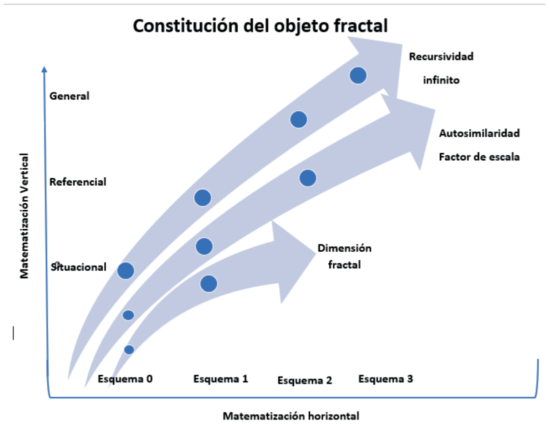
Con el fin de trabajar la percepción de la dimensión fractal, los estudiantes analizaron las transformaciones que tienen algunos fractales a partir de identificar la dimensión del objeto geométrico inicial sobre el que se aplica el proceso recursivo, y a partir de la caracterización de ese proceso recursivo, es decir, si se agregaron o quitaron partes al objeto geométrico inicial, lograron indicar entre qué dimensiones se encontraría el fractal, como observamos en lo que menciona un estudiante sobre el análisis de la esponja de Menger: "*Sufre cambios, le quita, entre la 2 y 3 pues 2 no tanto, pero sí entre 2 y 3*". La identificación intuitiva de la dimensión fractal a partir del análisis de las transformaciones nos indica que los estudiantes han avanzado en la categorización conceptual de este objeto a un esquema de orden 1.

Constitución del objeto fractal

En la figura 7, observamos una gráfica en la que se recoge el proceso de constitución de los cinco objetos mentales propuestos, vemos que en el nivel situacional se encuentran los esquemas de orden 0, caracterizados por acciones relacionadas con la aparición de géneros discursivos enmarcados dentro del contexto de la clase, donde se empiezan a crear las primeras nociones de estos objetos a partir de sus propias experiencias. En el nivel referencial, observamos el avance en un esquema de orden 1 en donde aparecen algunos objetos matemáticos que les permiten organizar los fenómenos, como lo son la potenciación, criterios de semejanza, números racionales, la razón, las dimensiones euclidianas entre otros, que contribuyen a la creación de modelos matemáticos de las situaciones, relacionados con la generalización de patrones y el factor de escala.

En el nivel general observamos la aparición de los esquemas de orden 2 y 3, en donde los estudiantes logran reconocer que los modelos matemáticos que ya han desarrollado les permiten organizar fenómenos que se comportan de una misma manera. Además, observamos que en el proceso de constitución del objeto fractal, la matematización involucrada no fue jerárquica, ya que evidenciamos que a medida que se iban abordando las otras situaciones realistas, la constitución de los cinco objetos mentales principales no era lineal, algunos fenómenos favorecieron la constitución de uno o algunos objetos más que otros, por tanto, la categorización conceptual del objeto fractal fue fluctuante en la medida que se iban constituyendo los cinco objetos mentales.

Figura 7: Constitución del objeto fractal



Fuente: Elaboración propia

Consideraciones parciales

Nuestra investigación aún se encuentra en fase de refinamiento del análisis de los datos, y revisión sobre la pertinencia del diseño instruccional desarrollado, algunas de las consideraciones parciales que podemos mencionar son las siguientes:

- Podemos concluir que a pesar de que el objeto fractal es un objeto mental complejo, por el requerimiento de conceptos matemáticos que generalmente no se abordan en el currículo escolar, el proceso de constitución desarrollado por los estudiantes les permitió llegar a una categorización conceptual apropiada para el nivel escolar en el que se encuentran, puesto que logran reconocer el fractal en un sentido intuitivo como Mandelbrot lo define, es decir, logran reconocer que un objeto cuya estructura se compone de formas irregulares, que guardan cierto parecido y que sigue conservando sus características a cualquier escala es un fractal.
- Identificamos que este objeto mental puede ser de gran ayuda para la resignificación y constitución de diferentes objetos matemáticos escolares, todo depende de la intención del investigador, ya que el objeto fractal puede ser trabajado en cualquier nivel escolar.
- Algunos de los objetos matemáticos curriculares que se pueden potenciar con la constitución del fractal enfatizando en alguno de los objetos mentales propuestos para la misma son:
  Si se enfatiza en el objeto mental autosimilaridad, los estudiantes pueden experimentar con transformaciones en el plano, criterios de semejanza, razón, propiedades de figuras geométricas, proporcionalidad, infinito actual, plano cartesiano, entre otros.
  Si se enfatiza en el objeto recursividad, los estudiantes pueden experimentar con estructuras multiplicativas como potenciación y splitting, desarrollo de pensamiento algebraico, regularidades, generalización de patrones, procesos de unitización y normación entre otros.

La aparición de diferentes objetos matemáticos curriculares depende del énfasis que se realice sobre los objetos que se consideren en la fenomenología, pues la propuesta fenomenológica que realizamos en este trabajo puede ser ajustada, si se identifican objetos constitutivos del fractal no contemplados en esta investigación.

Referencias bibliográficas

Davis, E. y Tall, D. (2002). What is a Scheme?. En D. Tall, M. Thomas (Ed.) *Intelligence, Learning and Understanding - A Tribute to Richard Skemp* (pp. 141-159).

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrech: Reidel Publishing Company.

Mabndelbrot, B. (1993). *LOS OBJETOS FRACTALES Forma, azar y dimensión.* Barcelona: Tusquets Editores S.A.

Sabogal, S. Arenas, G. (2011). *Una introducción a la geometría fractal.* Bucaramanga: Universidad industrial de Santander.

Steffe, L. y Thompson, P. (2000). *Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements*. In R. Lesh & A. E. Kelly (Eds.), Research design in mathematics and science education (p. 267-307). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Clame Acta Latinoamericana de Matemática Educativa
SECCIÓN 2 / PROPUESTAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS
VOL 35, NÚMERO 1, AÑO 2022

REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS DE LA FUNCIÓN COMO HERRAMIENTA EN EL APRENDIZAJE DEL CONCEPTO

SEMIOTIC REPRESENTATIONS OF FUNCTION AS A TOOL FOR LEARNING THE CONCEPT

Laura Ximena Casas Rodríguez, Yuri Carolina Niño Castillo
Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia – UPTC (Colombia)
laura.casas@uptc.edu.co , yuricarolina.nino@uptc.edu.co

Resumen
Este artículo muestra resultados parciales de una investigación cuyo propósito fue caracterizar el aprendizaje de los estudiantes a través de la modelación matemática desde las representaciones semióticas de la función, teniendo en cuenta la comprensión y aplicación del concepto en diferentes situaciones. De esta manera, se propusieron una serie de actividades que favorecieran el proceso cognitivo en el tránsito de un registro de representación a otro. Las actividades se desarrollaron con un grupo de estudiantes de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, y en esta ocasión los resultados corresponden a uno de los aspectos analizados, que vincula la modelación matemática y las representaciones semióticas. La investigación tuvo un enfoque cualitativo, y la información se recopiló a través de observación y apuntes de los estudiantes. Se reconoció que las actividades permitieron identificar relaciones de dependencia entre variables y entre los registros de representación de la función, vinculando el concepto con fenómenos de variación.

Palabras clave: aprendizaje, función, representaciones semióticas, modelación matemática

Abstract
This article shows the preliminary outcomes of a research that was aimed at characterizing students' learning through mathematical modeling from the function's semiotic representations, taking into account the concept understanding and application in different situations. So, a series of activities that favored the cognitive processes in the change from one representation registry to another were proposed. The activities were carried out with a group of students from the Technological and Pedagogical University of Colombia. In this case, the results correspond to one of the aspects analyzed, which links the mathematical modeling and the semiotic representations. This was a qualitative-focused research, and the information analyzed was collected through observation and from the student's notes. It was recognized that the activities allowed students to identify relationships of dependency between variables and between the function representation registers, linking the concept to the variation phenomena.

Keywords: learning, function, semiotic representations, mathematical modeling

Introducción

Durante mucho tiempo se ha generado cierta apatía frente a las matemáticas, que en ocasiones puede llegar a repercutir en el aprendizaje de las mismas; esta actitud tal vez puede atribuirse a un posicionamiento inicial que opacó las capacidades de cada estudiante en el área, provocado en muchos casos, "por la inadecuada introducción por parte de sus maestros" (Guzmán, 1992, p.14), o quizá porque los métodos enseñanza de la matemática se han inspirado en las ideas de las matemáticas formales; de esta manera, las estrategias didácticas se basan en la memoria y el manejo de algoritmos, lo cual no le permite al estudiante percibir los vínculos que tiene cada procedimiento con las aplicaciones que puede encontrar a su alrededor, ya que se ésta privando de experimentar sus aprendizajes en escenarios diferentes a los que se proporcionan en clase (Cantoral, 2001; Aravena, Caamaño & Giménez, 2008).

Es posible que esta dinámica de clase desvanezca el interés del estudiante propiciando un aprendizaje superficial basado en la memorización y reproducción (Salinas & Alanís, 2009), repercutiendo en el desarrollo de actividades relacionadas con las aplicaciones de la matemática; es decir, generando dificultades en la traducción de problemas verbales al lenguaje matemático (Cantoral, 1993; López y Sosa, 2008; Trigueros, 2009), además se debe tener en cuenta que "las dificultades en la enseñanza y en el aprendizaje de las matemáticas persisten, con porcentajes altos de reprobación de los alumnos y bajos rendimientos en la aplicación de la matemática en contexto" (Ministerio de Educación Nacional- MEN, 2017, citado en Jiménez, 2019, p.122). Así, a través de esta investigación se propone que el trabajo con las matemáticas sea más aplicado que algorítmico, buscando caracterizar el aprendizaje de los estudiantes a través de la modelación matemática desde las representaciones semióticas de la función.

Ahora, la matemática posee diversidad de aplicaciones, así como ramas y conceptos, por lo que el interés por concentrarse específicamente en determinado concepto puede deberse a diferentes razones. Desde el punto de vista de Font (2011), no todos tienen la misma importancia para lograr comprender la disciplina que de ellos se encarga, pero la función es un concepto que toma protagonismo en la matemática por "su naturaleza unificante y modelizadora" (p. 146), además considera que comprender el concepto de función es muy importante, debido a los diferentes ámbitos en los que se puede encontrar, por ejemplo, los medios de comunicación ofrecen tablas y gráficos que dejan ver el cambio de una variable a consecuencia del cambio de otra, lo que se evidencia también en ciertas situaciones de la naturaleza. Es así, como su importancia también se atribuye a las diversas aplicaciones prácticas que tiene (Azcárate & Deulofeu, 1996).

Esta diversidad de situaciones en las que el concepto puede ser útil se han reconocido desde la antigüedad, al respecto, algunos autores muestran que el concepto ha tenido un proceso evolutivo influenciado por las necesidades y avances de la humanidad, por lo que con el paso del tiempo se vio representado de varias maneras (véase, por ejemplo, Font, 2011; Hitt, 2002; Riscanevo, Cristancho & Fonseca, 2011); es decir, incluso antes de que se formalizara el concepto, ya se usaban diferentes representaciones de la función.

Elementos teóricos

De acuerdo con el interés principal de la investigación, el cual relaciona las representaciones semióticas de la función y las aplicaciones de la matemática, enfocadas en la modelación, se describen algunos aspectos sobre dichos temas.

Inicialmente, a nivel histórico las primeras representaciones de la función que coexistieron fueron las tablas y el lenguaje verbal, y esto sucedió a través de los babilonios; por su parte los griegos usaron también el lenguaje verbal, pero a este se sumaron las figuras geométricas como recurso para representar la función. Durante la edad media se dieron los primeros acercamientos a la representación gráfica, tomando como punto de partida los trabajos realizados por Nicolás Oresme, que se complementaron con los de Galileo Galilei, quien buscó establecer relaciones entre magnitudes, lo cual fue trascendental para desarrollar la noción de función (Sastre, Rey & Boubée, 2008). En cuanto a la representación algebraica, esta surgió gracias a la aparición del álgebra simbólica durante la edad moderna, y a partir de esta época, grandes pensadores como Descartes, Fermat, Newton, Leibnitz, Bernoulli, Euler, Lagrange, Dirichlet, entre otros, hicieron aportes importantes en la formalización del concepto de función (Azcárate & Deulofeu, 1996; Font, 2011; Ugalde, 2014).

Así, se pone en evidencia que el concepto de función se ha entendido de diversas maneras, en las cuales se recurre a propiedades y representaciones distintas (Font, 2011), por lo que es posible que en ocasiones se considere que una representación es más adecuada que las otras (Ugalde, 2014), ya que cada una está diseñada para destacar ciertas características de la función.

Por ejemplo, verbalmente se puede describir determinada situación que relaciona diferentes datos; una tabla de valores proporciona una visión cuantitativa de la situación, pero no permite extraer características globales de la función; simbólicamente se pueden usar variables para denotar las diferentes cantidades que intervienen en la situación planteada; y gráficamente se pueden poner de relieve las características de dependencia entre las variables; sin embargo, la expresión gráfica y la simbólica o algebraica, se consideran las más complejas de interpretar, ya que proporcionan una visión general y completa de la función, además que brindan información más amplia que permite caracterizar modelos (Azcárate y Deulofeu, 1996). La función en sí misma también puede interpretarse de diversas formas, para Azcárate y Deulofeu (1996) las diferentes maneras de verla pueden clasificarse según el aspecto que se considere más relevante, por ejemplo, puede ser por la correspondencia entre valores de variables, o entre elementos de dos conjuntos, o la dependencia entre variables.

A pesar de que ninguna interpretación se considera errónea, puede que las interpretaciones más intuitivas carezcan de rigor, o que las más rigurosas se alejen de las situaciones concretas, por lo que podría resultar más práctico que el estudiante pueda determinar un concepto que sea lo suficientemente útil y operativo, el cual surge de acuerdo a la manera en la que interpreta o generaliza una serie de situaciones en las que se tiene una relación entre magnitudes (Font, 2011), Sobre esto, las situaciones deben tener un aspecto en común: la existencia de magnitudes variables y dependientes entre sí, aspecto que a su vez se puede expresar mediante diferentes representaciones (Azcárate & Deulofeu, 1996); de esta manera se propone que dichas situaciones que le permitan al estudiante acercarse al concepto de función de una manera más práctica, y a su vez transitar entre sus diferentes representaciones, se aborden a través de la modelación matemática.

En cuanto a la modelación matemática, Villa y Ruiz (2009) se refieren al proceso a través del cual se obtiene y evalúa un modelo matemático que representa determinado fenómeno, como "ciclo de modelación", y Janvier (1996, citado en Posada & Villa, 2006, p.1) especifica que dicho proceso comprende dos etapas: la formulación del modelo y la validación del mismo. Para formularlo se identifican las relaciones entre las variables que intervienen en la situación, y al obtenerlo éste debe validarse con los datos iniciales.

De esta manera, el interés en trabajar con actividades que pongan de relieve la relación entre magnitudes, se basa en que si la función se ve solo como una regla de correspondencia deja de verse como un modelo matemático (Posada & Villa, 2006). Además "las funciones surgen siempre que una cantidad depende de otra" (Stewart, 2012, p. 10), y precisamente las relaciones existentes entre las variables que intervienen en determinada situación, se identifican en la primera etapa del ciclo de modelación, para lo cual los estudiantes pueden apoyarse en diversas representaciones.

Es así como toma importancia el papel de las representaciones semióticas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, ya que permiten el acceso a los objetos matemáticos y pueden contribuir a lograr un aprendizaje con mayor significado para los estudiantes. Esto se fundamenta en que la actividad matemática se realiza necesariamente en un contexto de representación (Duval & Sáenz, 2016).

Así mismo, en el campo del aprendizaje de las matemáticas se involucra el análisis de las actividades cognitivas, y las representaciones semióticas son un sistema particular de signos que son necesarios para la conceptualización de los procesos cognitivos. Estas actividades cognitivas requieren el uso de los sistemas de representación diferentes al registro lenguaje natural, ya sean los esquemas, las figuras geométricas, los gráficos cartesianos o las tablas, considerando que estos sistemas de representación son diferentes entre sí y cada uno plantea preguntas específicas sobre el aprendizaje (Duval, 1999).

En el desarrollo de la actividad cognitiva del estudiante, se emplean distintos registros de representación aparte del lenguaje natural y los símbolos; las transformaciones del registro semiótico de representación que se realizan son el *tratamiento* y la *conversión*. Así pues, se hace referencia al tratamiento como "la transformación de una representación –inicial- en otra representación terminal, respecto a una cuestión, un problema o una necesidad" (Duval, 1999, p.42); es decir, al hablar de tratamiento, la transformación produce otra representación dentro del mismo registro. Por otro lado, la conversión es "la transformación de la representación de un objeto, de una situación o de una información dada de un registro, es una representación del mismo objeto o de la misma información en otro registro" (Duval, 1999, p.44); en otras palabras, la conversión es el cambio de registro sin cambiar el objeto.

En relación con lo anterior, los registros se pueden movilizar en los procesos matemáticos empleando el tratamiento y la conversión para tal fin. Respecto al proceso de conversión, puede ocurrir que en ocasiones no se evidencie de manera inmediata, ni con facilidad, esto corresponde a las características que deben permanecer al realizar el cambio de registro, explicarse desde la congruencia o incongruencia entre los registros; así que Duval & Sáenz (2016) describen las condiciones que cumple la congruencia, afirmando que:

> …en algunos casos, es como si hubiera una correspondencia uno a uno y la representación fuente fuera transparente para la representación de llegada. En estos casos, la conversión no parece ser más que una simple codificación, pero en otros casos no sucede así. En otras palabras, puede o no haber congruencia entre una representación fuente y su representación convertida dentro de un registro de llegada (p.84).

Así pues, la congruencia de los registros de representación según Duval (2004, citado en Ospina, 2012) se presenta cuando

> …al segmentar cada una de las representaciones en sus unidades significantes para ponerlas en correspondencia, se cumplen tres criterios: correspondencia semántica entre las unidades significantes propias de cada registro, univocidad semántica terminal y conservación del orden de organización de las unidades significantes en las representaciones (p.24).

De este modo, los registros de representación son entendidos como signos o símbolos con los cuales se puede describir un objeto matemático; de hecho, Duval (2013) hace referencia a que los objetos matemáticos "no son accesibles perceptiva o instrumentalmente. Lo son, a través de los sistemas semióticos de representación" (p.7). Del mismo modo, se hace referencia a la definición de las representaciones descritas como un conjunto y caracteres propios de un registro específico, partiendo de un estado inicial que se transforma en una nueva representación, la cual se debe encontrar en el mismo registro (Duval, 1999).

A continuación, se presenta la descripción de las tres clases de registro que se tuvieron en cuenta para la experiencia. Según Duval (1995, citado en Guzmán, 1998) las representaciones semióticas

> …son aquellas en las cuales la producción y la movilización de un registro de representación se puede originar mediante elaboraciones discursivas incluidas el lenguaje natural y el lenguaje formal o no discursivas que están relacionadas con las figuras, gráficos y esquemas (p.7).

Registro semiótico del lenguaje natural r^1

En este registro se utilizan los signos del lenguaje, la sintaxis y la gramática propia del español, Duval (1999) afirma que "la expansión natural se caracteriza por el empleo de la lengua. Moviliza simultáneamente la red semántica de una lengua natural y los conocimientos pragmáticos propios al medio social cultural de los locutores" (p.113). De esta manera permite dar explicaciones y definiciones sobre la lectura de algún problema matemático y cada representación se enunciará como R_m^1**,** siendo m cada una de las que sea posible.

Registro semiótico del lenguaje gráfico o geométrico r^2

En este registro se utiliza el plano cartesiano, las figuras geométricas para representar y lograr una visualización de lo enunciado en el lenguaje natural y expresado en lenguaje algebraico. Duval (1999) lo describe como la expansión que "se basa en el principio de recuperación plurívoca de lo que aparece como una misma unidad lexical, sea bajo el modo fonético-acústico o gráfico-visual" (p.111). Se utilizan los elementos de la geometría como cuadrados, rectángulos y polígonos en general, así como características y propiedades de estos, cada una de estas representaciones se designará con R_m^2, con m para cada representación del registro.

Registro semiótico del lenguaje algebraico r^3

Este registro utiliza los signos y las reglas propias de la matemática, concretamente del álgebra (reducción de términos semejantes, productos notables). Duval (1999) considera que la "expansión formal se caracteriza por la aplicación de reglas de sustitución que se basan exclusivamente en símbolos que representan variables o proposiciones independientemente de su significación" (p.112). Lo anterior, se puede evidenciar cuando los estudiantes escriben las expresiones algebraicas que representan cada problema enunciado, al lograr estas representaciones se simbolizarán como R_m^3, para cada m que sea posible.

Aspectos metodológicos

La investigación se establece desde un enfoque cualitativo, el cual busca comprender los fenómenos basándose en la perspectiva y experiencia de los participantes; es decir, se concentra en examinar los puntos de vista, interpretaciones y significados que los involucrados le otorgan al fenómeno (Hernández, Fernández y Baptista, 2014), así que acorde a esto, la información que permitiera caracterizar el aprendizaje de los estudiantes, se recopiló a través de grabaciones de audio, la observación y los pliegos en los que los estudiantes tomaron sus apuntes.

El grupo de trabajo estaba conformado por 30 estudiantes de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, quienes se organizaron en grupos de 4 y 5 estudiantes, de los cuales se seleccionaron dos grupos para recopilar la información correspondiente. Se desarrollaron tres actividades, teniendo en cuenta los tres tipos de referencias de los que se puede valer el docente para abordar una actividad en clase, como son: las puramente matemáticas; las que se relacionan con una situación semi real, la cual plantea una realidad construida, vista como una situación que tiene aportes de la realidad, pero también contempla aspectos que sería poco probable que se dieran en ésta; y las que son situaciones de la vida real (Skovmose, 2000).

En cada una de las actividades se analizaron los mismos aspectos de acuerdo a los objetivos específicos de la investigación; en este caso se expone el análisis relacionado con el reconocimiento del papel de la modelación matemática en el tránsito entre representaciones semióticas de la función, en el desarrollo de una de las actividades, la que se relacionaba con la primera referencia de acuerdo a Skovmose (2000); razón por la cual solo se tuvieron en cuenta los elementos teóricos correspondientes.

Resultados

La actividad que se presenta a continuación fue la primera que se propuso, la cual surgió luego de realizar algunos ajustes a ejercicios propuestos en libros de Cálculo como de Leithold (1998) y el de Stewart (2012), la actividad fue la siguiente:

Representar un rectángulo con perímetro de 24 centímetros y calcular su área. Responder las siguientes preguntas:

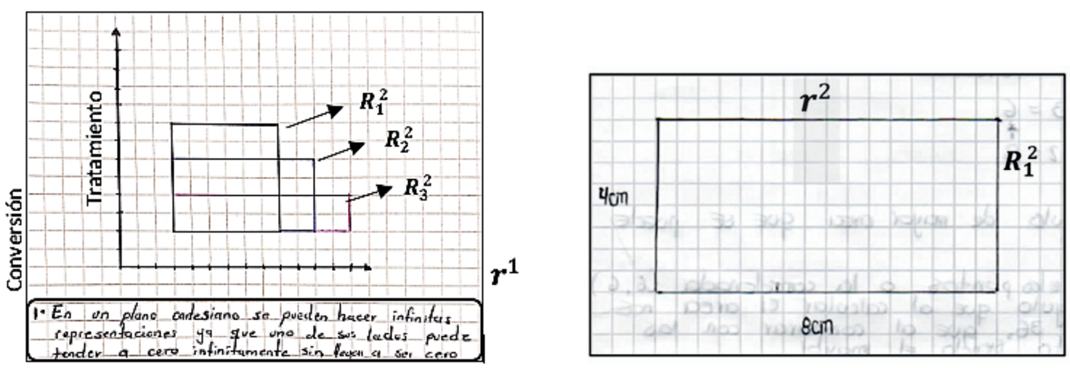
- ✔ *¿Cuántos rectángulos con perímetro de 24 centímetros pueden construirse?*
- ✔ *¿Existe relación entre las dimensiones de los rectángulos y su respectiva área? ¿De qué manera(s) se podría representar dicha relación?*
- ✔ *¿Cuál es el rectángulo de mayor área que se puede representar?*
- ✔ *¿Será posible determinar una manera que permita hallar el área de cualquiera de los rectángulos conociendo la medida de uno de sus lados? ¿Si, no, por qué?*

Como se mencionó, la actividad no fue tomada de ningún libro específicamente, sino que las docentes la diseñaron con el fin de lograr el objetivo señalado anteriormente, referente al tránsito entre representaciones semióticas.

En relación con el primer cuestionamiento, se evidencia que el grupo 1 da a conocer diferentes representaciones empleando el plano cartesiano, hace relación al lenguaje natural desde el punto de vista a considerar infinitas soluciones pues se trabaja con los números reales, por otro lado, el grupo 2, solo muestra una representación gráfica, sin evidenciar, ni hacer alusión a diferentes representaciones ni registro semióticos en su construcción.

En las representaciones de estos dos grupos se resalta la congruencia entre el registro de salida (lenguaje natural r^1) y el registro de llegada (registro gráfico r^2), además en el grupo 1, se ven los procesos cognitivos de tratamiento al realizar diversos rectángulos que cumplen la condición además de especificar con palabras lo que están realizando y conversión respecto al tránsito de los registros semióticos (Figura 1).

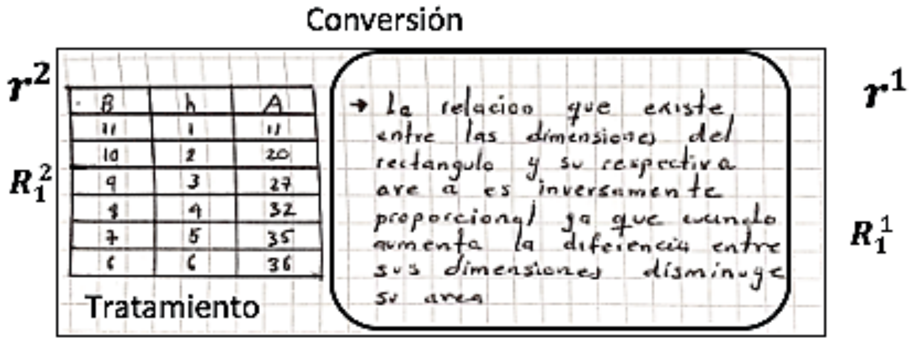
Figura 1 y 2. conversión respecto al tránsito de los registros semióticos



Fuente: Elaboración propia

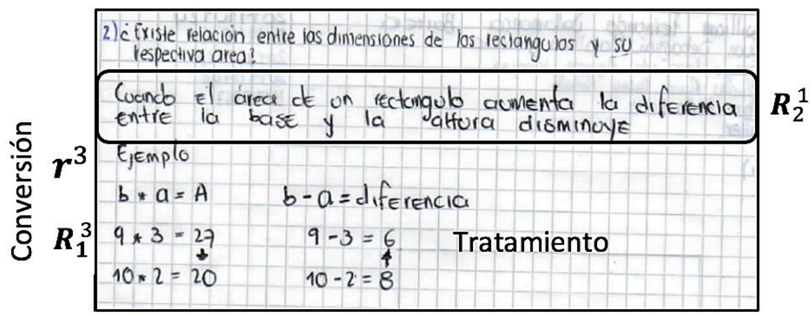
Ahora bien, al realizar la segunda pregunta en la que los estudiantes deben establecer una relación (si existe) entre las dimensiones del rectángulo y su área, se encontró que ellos realizan los procesos cognitivos de formación, tratamiento y conversión. El primero al considerar la representación mental (interna), el segundo al realizar los registro gráfico r^2 (Figura 3) y algebraico r^3 (Figura 4) respectivamente y describir cada situación respectivamente y el tercero al realizar los cálculos internos dentro de cada representación con el objetivo de dar una generalidad respecto registro de partida, en las representaciones y los registros semióticos se evidencia congruencia pues se mantienen las unidades significantes y la univocidad semántica es acorde con los registros ya mencionados.

Figura 3. Registro gráfico r^2



Fuente: Elaboración propia

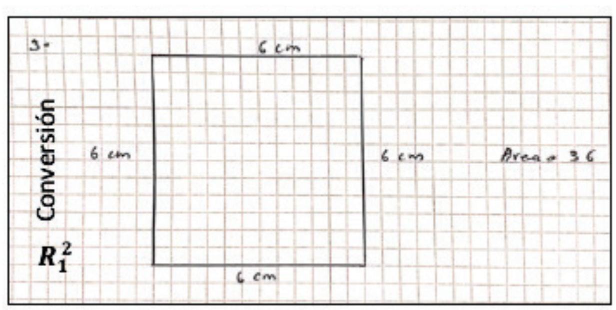
Figura 4. Registro algebraíco r^3



Fuente: Elaboración propia

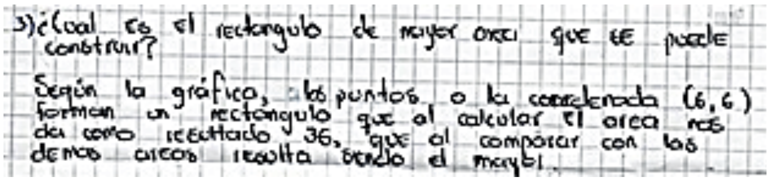
Respecto a la tercera pregunta, uno de los grupos usó la representación de un cuadrado para indicar las dimensiones del rectángulo de 24cm de perímetro de mayor área, sin embargo, éste puede vincularse con el registro semiótico gráfico r^2, ya que inicialmente los estudiantes se apoyaron en el plano cartesiano para revisar diferentes posibilidades para los valores que podrían tener las dimensiones del rectángulo (Figura 5). El otro grupo de estudiantes por su parte eligió el lenguaje natural r^1 para mencionar el mismo hecho, pero sustentaron la respuesta con la gráfica que se había usado para dar respuesta a la segunda pregunta, ya que de manera específica indican que ésta fue su guía para encontrar las dimensiones del rectángulo de 24cm con mayor área (Figura 6). En este caso no se evidencia un proceso de tratamiento en ninguno de los grupos para dar la respuesta definitiva.

Figura 5. Representación gráfica; rectángulo de mayor área, grupo 1



Fuente: Elaboración propia

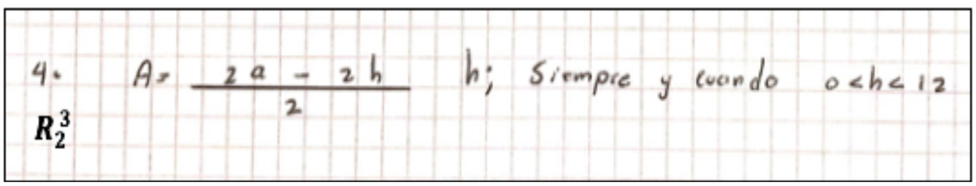
Figura 6. Luengiaje natural, grupo 2



Fuente: Elaboración propia

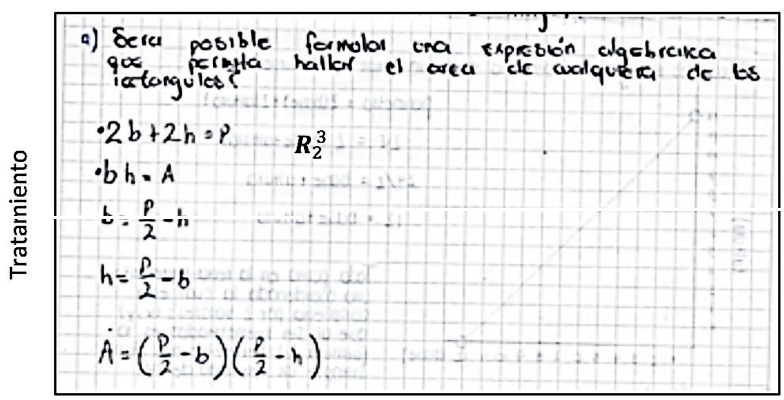
En cuanto a la cuarta pregunta, para llegar a la expresión algebraica que permita hallar el área de cualquier rectángulo con 24cm de perímetro, en uno de los grupos se evidencia el tratamiento que se realiza al interior del registro algebraico r^3, sin embargo, en la expresión definitiva que se muestra se requiere tanto del valor de la base como la altura para reemplazar en ésta (Figura 8), contrario a la del otro grupo, en la cual solo se requiere una dimensión para determinar al área del rectángulo (Figura 7); no obstante, al observar la expresión obtenida por el grupo 2 (Figura 8), se puede llegar a expresar como una función de una sola variable, sea la base o la altura, lo cual permite obtener una expresión similar a la del grupo 1, sabiendo que el valor de “P” equivale a 24cm.

Figura 7. Respuesta del grupo 2



Fuente: Elaboración propia

Figura 8. Respuesta del grupo 1



Fuente: Elaboración propia

Respecto al ciclo de modelación, la primera etapa se da al identificar la relación que existe entre las dimensiones de los rectángulos, mencionando que entre más pequeña sea la diferencia entre éstas, mayor será el área de cada rectángulo; así mismo, luego de usar por ejemplo, la representación tabular, se llegó a la representación algebraica del modelo matemático que puede usarse para hallar el área de cualquiera de los rectángulos de 24cm de perímetro, conociendo solo una de sus dimensiones (Figura 7 y 8), incluso se delimitan los valores que puede tomar la variable independiente, que en este caso corresponderá al valor de la dimensión conocida (Figura 7).

En relación con la segunda etapa del ciclo de modelación, solo el grupo 1 retomó los datos de la tabla que representa la relación entre las dimensiones de los rectángulos y su respectiva área, reemplazando algunos valores para la altura y obteniendo el valor correcto para el área a través de la expresión algebraica que habían propuesto.

Consideraciones finales

Es importante resaltar que el proceso de investigación genera un ambiente abierto de conocimiento para las partes involucradas (docentes-estudiantes), además, es una fuente enriquecedora de saberes, pues en la práctica docente es necesario entrelazar la investigación como una línea de formación propia que facilite instrumentos y genere nuevas concepciones, así mismo que se oriente en fundamentos teóricos y metodológicos que sean necesarios para su desarrollo (Gutiérrez, Almaraz & Bocanegra, 2019).

Respecto al desarrollo de la actividad, se observa que al abordar cada pregunta planteada se dio la conversión entre registros semióticos de representación, así como el tratamiento al interior de algunos de ellos, pero todo el tiempo se evidenció la relación entre los registros; es decir, los estudiantes reconocieron que todos hacían referencia a la misma situación, proceso que resulta fundamental para comprender un objeto matemático, en consecuencia para enseñarlo y aprenderlo, ya que si no se relacionan todas sus representaciones se puede llegar a considerar que cada una se refiere a un objeto matemático distinto (Duval, 2006).

Así mismo, como se mencionó anteriormente, durante el desarrollo de la actividad se dio el ciclo de modelación matemática, y este a su vez favoreció el tránsito entre representaciones semióticas, lo cual se considera de gran utilidad, ya que darle prioridad a una representación sin transitar a las otras no es favorable para el aprendizaje de un concepto, debido a que no es suficiente contar con varias representaciones si no se desarrolla la habilidad de pasar de una a otra cuando sea necesario (Acosta, 2005).

Por otro lado, podría decirse que la modelación contribuye en la identificación y comprensión de cantidades dependientes e independientes, facilita establecer relaciones de variación entre las cantidades que intervienen en cada situación, fortaleciendo las habilidades para reconocer e interpretar una función, en este caso recurriendo a las diferentes representaciones semióticas; así, de acuerdo a Posada y Villa (2006) el reconocimiento del concepto en diferentes ámbitos relacionados con fenómenos de variación, puede darle un sentido más dinámico y aplicado.

Finalmente, el uso de las representaciones de la función se dio desde la antigüedad, aspecto que se emula de cierta forma al abordar las actividades de modelación matemática de funciones, y el acercarse a algunos rasgos del proceso histórico que ha tenido un concepto para llegar a la formalización, puede contribuir a una mejor comprensión del mismo (González, 2004); además, para que los estudiantes tengan acceso a dichos conceptos, deben construirlos en contextos empíricos para luego refinarlos y establecerlos de manera formal (Tall & Vinner, 2002, citados por, Aya, Echeverry & Samper, 2016).

Referencias

Acosta, J.A. (2005). Tránsito entre representaciones en Matemáticas ¿Pensamiento global o local? *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 18,* (pp. 5-10). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Aravena, M., Caamaño, C. & Giménez, J. (2008). Modelos matemáticos a través de proyectos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 11* (1), 49-92.

Aya, O., Echeverry, A. & Samper, C. (2016). ¿Es el cuadrado un rectángulo? *Sophia, 12* (1), 139-158.

Azcárate, C. & Deulofeu, J. (1996). *Funciones y gráficas.* Madrid: Síntesis.

Cantoral, R. (1993). Hacia una didáctica del Cálculo basada en la cognición. *Publicaciones Centroamericanas, 7*, 391-410.

Cantoral, R. (2001). Enseñanza de la Matemática en el nivel superior. *Revista electrónica sinéctica 19*, 3-27.

Duval, R. (1999). *Semiósis y pensamiento humano. Registros semióticos y prendizaje intelectual.* (Trad. M. V. Restrepo) Santiago de Cali, Artes Gráficas Univalle.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: la habilidad para cambiar el registro de representación. *La gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 9* (1), 143-168.

Duval, R. (2013). Prólogo. En B. D´Amore, M. I. Fandiño y M. Lori, *La semiótica en la didácica de la matemática* (pp.7-9). Magisterio.

Duval, R. & Saénz, A. (2016). *Comprensión y aprendizaje en matemáticas : perspectivas semióticas seleccionadas.* Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Font, V. (2011). Funciones. En J. Goñi, J. Barragués, M. Callejo, J. Fernández, S. Fernández, V. Font y G. Torregrosa, *Matemáticas, Complementos de formación disciplinar* (pp. 145-185). Graó.

Gonzalez, P. M. (2004). La historia de la matemática como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *Suma, 45*, 17-28.

Gutiérrez, D., Almaraz, O. & Bocanegra, N. (2019). Concepciones del docente en sus formas de percibir el ejercicio de la investigación desde su práctica. *Revista de investigación, desarrollo e innovación*, *10* (1), 149-161. doi: 10.19053/20278306.v10.n1.2019.10019

Guzmán , I. (1998). Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funcions: voces de estudiantes. *Revista oficial del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C, 1* (1), 5-21.

Guzmán, M. (1992). Tendencias innovadoras en Educación Matemática. *Simposio Iberoamericano sobre Educación Matemática*, (pp. 9-34).

Hernández, R., Fernández, C. & Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación.* Mc Graw Hill.

Hitt, F. (2002). *Funciones en Contexto.* Pearson Educación.

Jiménez, A. (2019). La dinámica de la clase de matemáticas mediada por la comunicación. *Revista de Investigacion, desarrollo e innovacion, 10* (1), 121-134. doi: 10.19053/20278306.v10.n1.2019.10016

Leithold, L. (1998). Funciones como modelos matemáticos. En L. Leithold, *El cálculo* (pp. 20-28). Oxford University Press.

López, J. & Sosa, L. (2008). Dificultades conceptuales y procedimentales en el aprendizaje de funciones en estudiantes de bachillerato. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, (pp. 308-318). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Ospina , D. (2012). *Las representaciones semióticas en el aprendizaje de la función lineal.* Tesis de Maestría no publicada, Universidad Autónoma de Manizales , Manizales, Colombia.

Posada, F. & Villa, J. (2006). El razonamiento algebraico y la modelación matemática. *Didáctica de las matemáticas, 2* (2), 127-163.

Riscanevo, L. E., Cristancho, K. J. & Fonseca, C. P. (2011). La influencias del contrato didáctico en el aprendizaje del concepto de función. *Praxis & saber, 2* (3), 119-137

Salinas, P. & Alanís, J. (2009). Hacia un nuevo paradigma de la enseñanza del Cálculo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 12* (3), 355-382

Sastre, P., Rey, G. & Boubée, C. (2008). El concepto de función a través de la historia. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática* (16), 141-155.

Skovmose, O. (2000). Escenarios de investigación. *EMA, 6* (1), 3-26.

Spivak, M. (1996). Funciones. En M. Spivak, *Cálculo infinitesimal* (pp. 49-70). Reverté S.A

Stewart, J. (2012). Funciones y modelos. En J. Stewart, *Cálculo de una variable* (pp. 9-75). Cengage Learning.

Trigueros, M. (2009). El uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas. *Innovación Educativa, 9* (46), 75-87.

Ugalde, W. (2014). Funciones, desarrollo histórico del concepto y actividades de enseñanza aprendizaje. *Matemática, educación e internet, 14* (1), 1-48.

Villa, J. A. & Ruiz, H. M. (2009). Modelación en Educación Matemática: una mirada desde los lineamientos curriculares colombianos. *Revista virtual Universidad Católica* (27), 1-21.

EL CONCEPTO DE GRUPO BASADO EN LOS MODOS DE PENSAMIENTO: EL CASO DEL GRUPO DE ORDEN 2

THE CONCEPT OF THE GROUP BASED ON THE MODES OF THOUGHT: THE CASE OF THE ORDER GROUP 2

Samuel Campos, Marcela Parraguez
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile).
samuel.campos.c@mail.pucv.cl, marcela.parraguez@pucv.cl

Resumen:
La investigación presenta un estudio sobre las distintas maneras de comprender el concepto de grupo desde una variación de la Teoría Modos de Pensamiento, perspectiva que caracteriza las formas de ver y entender los conceptos del Álgebra Lineal, y que ahora se instala en el Álgebra Abstracta. Se presenta un análisis de las respuestas de un profesor de Matemática en su formación inicial frente a situaciones que involucraban la estructura de grupo de orden 2. Cada una de estas situaciones fue diseñada desde un modo de pensamiento particular para los grupos: modo Sintético-Geométrico (SG), modo Analítico-Aritmético (AA) y modo Analítico-Combinatorio (AC). A su vez, cada uno de estos modos fue desarrollado a partir de un estudio histórico-epistemológico del concepto de grupo y dan sustento a la variedad teórica de los modos de pensar. Las respuestas del participante permiten relacionar las distintas estrategias con determinados modos de pensar el concepto de grupo de orden 2.

Palabras clave: modos de pensamiento, grupo, comprensión

Abstract:
The research presents a study of the different ways of understanding the concept of group from a variation of the Modes of Thought Theory, a perspective that characterizes the ways of seeing and understanding the concepts of linear algebra, and that is now installed in Abstract Algebra. An analysis is presented of the responses by a mathematics teacher in his initial training to situations involving the group structure of order 2. Each of these situations was designed from a particular mode of thinking for the groups: Synthetic-Geometric (SG), Analytic-Arithmetic (AA), Analytic-Combinatorial (AC). In turn, each of these modes was developed from a historical-epistemological study of the group concept and support the theoretical variety of modes of thinking. The participant's responses allow us to relate the different strategies to specific ways of thinking about the group concept of order 2.

Key words: modes of thought, group, comprehension

Introducción

El presente trabajo reporta el análisis de los primeros datos de una investigación de corte cognitivo sobre la comprensión que tiene un estudiante de Pedagogía en Matemática durante su formación inicial, sobre el objeto matemático Grupo. Para analizar la comprensión de este objeto matemático se consideró como marco de referencia una variación de los Modos de Pensamiento propuesto por Sierpinska (2000), tal variación responde al cambio de objeto matemático estudiado –del Álgebra Lineal al Álgebra Abstracta–. Bajo esta perspectiva teórica, los estudiantes evidencian una adecuada comprensión de un concepto cuando son capaces de seleccionar y/o articular diferentes modos de pensarlo en función de las características propias de ver y entender dicho concepto en una actividad. La caracterización de tales modos de pensar los Grupos se sustentó a partir del estudio de la historia de este concepto y su epistemología. Tal caracterización será la base de esta variación teórica de los Modos de Pensamiento. Las respuestas del profesor en formación frente al instrumento de toma de datos permiten al investigador evaluar la pertinencia del modelo teórico y, a su vez, caracterizar las estrategias puestas en juego por el participante e identificar los elementos que permiten reconocer una estructura común en las distintas situaciones matemáticas presentadas (la estructura de grupo de orden 2).

Antecedentes

En Chile, la totalidad de las universidades reconocidas por el Estado que imparten la carrera de Pedagogía en Matemática tiene en su malla curricular una asignatura relacionada con el estudio de las estructuras algebraicas (datos recogidos del proceso de admisión 2020). En todos estos casos, la asignatura aborda las estructuras de grupo y de anillo, incluso algunos programas llegan a cuerpos y extensiones de cuerpos. Por otro lado, los Estándares Orientadores para carreras de Pedagogía en Educación Media (Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC], 2012) declaran explícitamente "los conocimientos mínimos e imprescindibles que cada profesor o profesora debe saber en el ámbito de su disciplina y de la enseñanza de la misma" (p. 3). En particular, en cuanto a los estándares sobre matemática, el documento define cinco grandes áreas: Sistemas Numéricos y Álgebra, Cálculo, Estructuras Algebraicas, Geometría y Datos y Azar.

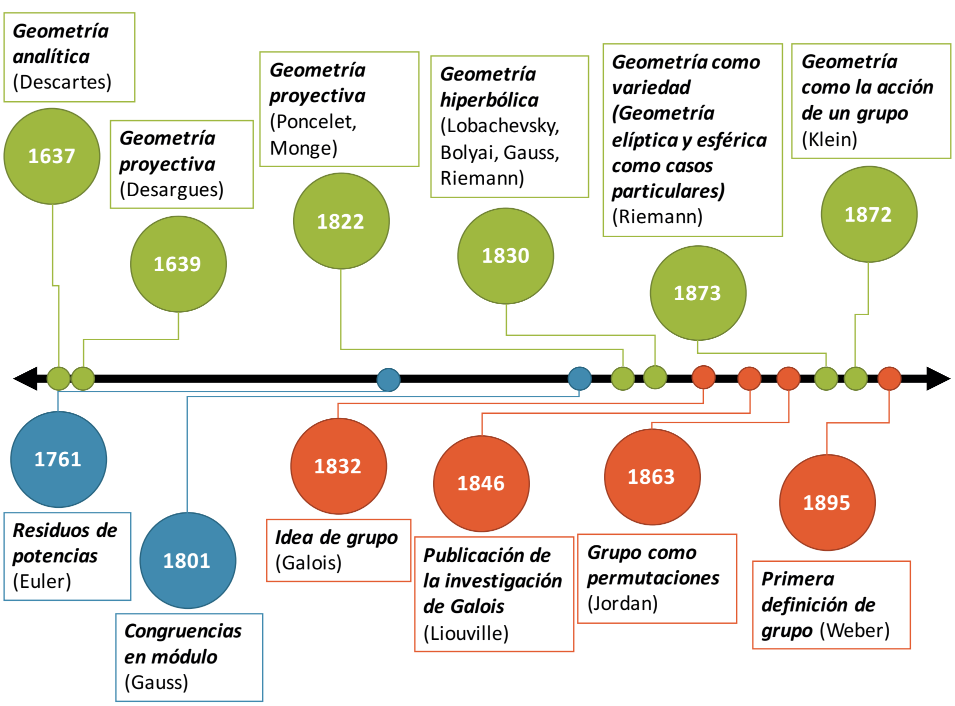
El indicador concerniente al área de Estructuras Algebraicas sostiene que el profesor "es capaz de conducir el aprendizaje de la divisibilidad de números enteros y de polinomios y demuestra competencia disciplinaria en su generalización a la estructura de anillo" (MINEDUC, 2012, p. 20).

A partir de estos hechos se puede evidenciar un claro interés (al menos a nivel nacional) en que los profesores de Matemática manejen estos conceptos básicos de Estructuras Algebraicas. Esto último coincide con lo reportado por algunas investigaciones en otros contextos educacionales. Por ejemplo, la investigación de Dubinsky, Dautermann, Leron y Zazkis (1994) sostiene que, dado que un porcentaje significativo de la audiencia de estudiantes de Álgebra Abstracta consiste en futuros profesores de Matemáticas, es particularmente importante que la profesión de Educación Matemática desarrolle estrategias pedagógicas efectivas para mejorar la actitud de los profesores de Matemáticas de secundaria hacia la abstracción matemática (p. 268).

Por otro lado, otras investigaciones dan cuenta de que el conocimiento de matemáticas avanzadas (aquellas que van más allá de lo curricular) pueden impactar positivamente la instrucción de los profesores. En este sentido, Wasserman (2016) señala que, específicamente, ese conocimiento de las matemáticas avanzadas puede transformar las propias percepciones de los profesores sobre las matemáticas escolares en el sentido de que se ve bajo una nueva luz, que el significado o la comprensión de las ideas cambia, o que el contenido en sí mismo se reorganiza, reordena o reestructura en la mente del profesor, indicativo de lo que Piaget (1952) llamó "acomodación", no solo asimilación (p. 30).

Como podemos apreciar, desde la investigación también se sugiere conectar estas nociones de matemáticas avanzadas con los conceptos matemáticos que aborda el currículo en la escuela. A pesar de lo anterior, varias investigaciones dan cuenta de la dificultad que tienen los estudiantes en adquirir estos conceptos del Álgebra Abstracta (Dubinsky *et al.*, 1994; Edwards y Brenton, 1999; Hazzan, 1999; Sepúlveda, 2016). Nuestra hipótesis es que la manera en que se presenta el estudio de los grupos en la formación inicial docente, desde un enfoque formalista, privado del proceso de abstracción que lo constituyó, suscita dificultades en la comprensión del concepto de grupo en los estudiantes. Para esto, nos planteamos como objetivo general de la investigación generar una secuencia de actividades que promuevan la conexión entre las distintas maneras de comprender el concepto de grupo. En particular, este trabajo, como un reporte de esta investigación, tiene por objetivo analizar las respuestas de un profesor de Matemáticas en formación inicial respecto a diversas situaciones matemáticas que abordaban la estructura de grupo de orden 2 de manera implícita. Tales respuestas las contrastaremos con el modelo teórico de los modos de pensar el concepto de grupo: modo Sintético-Geométrico (SG), modo Analítico-Aritmético (AA) y modo Analítico-Combinatorio (AC). Este contraste entre las respuestas a las situaciones diseñadas y el modelo teórico nos permitirá evaluar la pertinencia de la variedad del modelo y la operacionalización al analizar y clasificar las estrategias de este participante de la investigación en uno u otro modo de pensar. Es preciso mencionar que la caracterización de los tres modos de pensar el concepto de grupo se fundamenta en un estudio previo sobre la historia y epistemología del concepto de grupo, como se muestra sucintamente en la Figura 1, donde el color verde corresponde al desarrollo de las diversas geometrías que concluye con su formalización usando acciones de grupos, el color azul a los aportes de Euler y Gauss a la aritmética modular donde están implícitas varias propiedades de grupos finitos, y el color rojo al desarrollo del concepto de grupo como la composición de permutaciones de un conjunto finito.

Figura 1. Estudio histórico y epistemológico del concepto de grupo.

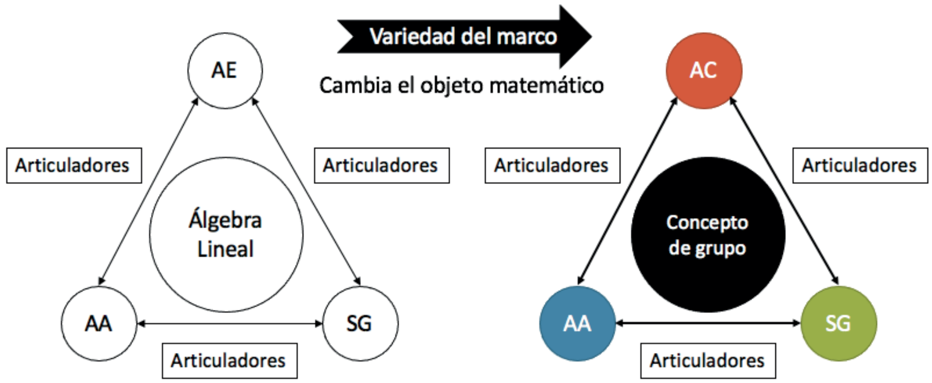


Fuente: Elaboración propia

Marco teórico

La investigación se sustenta en una variedad de la perspectiva teórica de los Modos de Pensamiento de Sierpinska (2000). Estos Modos de Pensamiento son un marco de referencia de la Didáctica de la Matemática que nos provee de elementos para investigar aspectos relacionados con los procesos de aprendizaje del Álgebra Lineal. El marco sostiene que los tópicos del Álgebra Lineal se desarrollaron bajo la coexistencia de tres modos de pensar: el modo Sintético-Geométrico (SG), el Analítico-Aritmético (AA) y el Analítico-Estructural (AE). En nuestro caso, la investigación propone una variación de este marco teórico, cambiando el objeto matemático de estudio del Álgebra Lineal, a la Estructura Algebraica de Grupo (Figura 2).

Figura 2. Variedad de los Modos de Pensamiento al concepto de grupo.



Fuente: Elaboración propia

Para construir esta variedad teórica, la investigación se basó en el análisis de la Figura 1, el que es el fundamento sobre el cual se elaboraron los tres modos de pensar los grupos.

Cada uno de los modos de pensar el concepto de grupo se elaboró basado en las raíces históricas que dieron forma dicho concepto.

> El proceso de la Formación de la noción abstracta de estructura de grupo, tuvo como raíces históricas: la teoría de ecuaciones algebraicas, la teoría de números y la geometría, a partir de las cuales surgió la noción de estructura matemática como resultado de la toma de conciencia de profundos fenómenos de isomorfismos. (Ortega, 2011, p. 268)

De estas tres raíces, la más visibilizada en los textos de estudio es la de la teoría de ecuaciones algebraicas, invisibilizando las otras dos raíces. Wussing (2007) sostiene que la existencia de dos raíces adicionales de la teoría de grupos abstractos se ha oscurecido principalmente por el hecho de que los modos de pensamiento de la teoría de grupos en la teoría de números y la geometría permanecieron implícitos hasta el final del tercio medio del siglo diecinueve; no utilizaron el término "grupo" y, al principio, prácticamente no tenían ningún vínculo con el desarrollo contemporáneo de la teoría de los grupos de permutación. Así, el historiador se ve obligado a buscar en grandes áreas del desarrollo de las matemáticas patrones de razonamiento, métodos y conceptos equivalentes a los métodos y conceptos modernos de teoría de grupos, y rastrear la evolución de dicho pensamiento teórico grupal implícito hasta la etapa de la teoría explícita de grupos (p. 17).

De este modo, a partir del desarrollo histórico epistemológico del concepto de grupo y del análisis de estas tres raíces, fue posible caracterizar tres modos de pensar el concepto, los cuales se describen a continuación:

> **Modo Sintético-Geométrico (SG):** Se basa en las transformaciones isométricas en el plano cartesiano, esto es, las estrategias que usen las rotaciones o simetrías de polígonos en el plano cartesiano o sus propiedades las entenderemos bajo la categoría de modo SG.

Modo Analítico-Aritmético (AA): Se basa en las congruencias modulares en $\mathbb{Z}$, esto es, las estrategias que usen congruencias, residuos bajo el módulo de un entero o propiedades de los múltiplos de algunos enteros las entenderemos bajo la categoría de modo AA.
Modo Analítico-Combinatorio (AC): Se basa en el conjunto de permutaciones de un conjunto finito y sus composiciones, esto es, las estrategias que usen elementos de estas permutaciones, sus composiciones o propiedades de estas composiciones (como el orden de un elemento) las entenderemos bajo la categoría de modo AC.

Metodología

La investigación se basa en una metodología cualitativa, particularmente bajo una perspectiva epistemológica hermenéutica-interpretativa. El objetivo es indagar cómo se comprende el concepto de grupo. Para esto, usaremos como estrategia metodológica el estudio de casos de tipo instrumental (Stake, 1999), pues consideramos que es un método pertinente para estudiar a fondo las diferentes comprensiones de la estructura algebraica de grupo que tienen cada uno de los sujetos de estudio, atendiendo la singularidad y complejidad de cada una de estas comprensiones.

Los sujetos de estudio fueron un grupo de 5 estudiantes de Pedagogía en Matemática durante su formación inicial, con la característica que ninguno de ellos había cursado previamente una asignatura sobre estructuras algebraicas. La participación en la investigación fue completamente voluntaria. En particular, en este reporte nos centraremos en las respuestas de uno de estos participantes sobre las preguntas que abordaban la estructura de grupo de orden 2, porque esas respuestas son representativas de lo que se realizó.

A partir de la caracterización de los modos de pensar los grupos, se elaboraron distintas situaciones que abordaban la misma estructura algebraica, pero desde diferentes modos de pensar. En total el instrumento se compuso de 7 situaciones, entre ellas algunas referidas al grupo de orden 2, otras al grupo de orden 3 y otras referidas al grupo de orden 6.

Las situaciones que analizaremos son las que involucran la estructura de grupo de orden 2. Estas son las siguientes:

Situación 1: Identificar todos los movimientos que dejan invariante la figura de una letra T.
Situación 2: Analizar los restos de la división por 2 de la suma de dos enteros. En otras palabras, si $x, y \in \mathbb{Z}$, analizar los restos de la división $(x + y) \div 2$ para los ditintos valores de x e y.
Situación 3: Analizar las permutaciones y las composiciones de estas, en un conjunto con 2 elementos.
Situación 8: Analizar los restos de la división por 2 de la suma de dos enteros. En otras palabras, si $x, y \in \mathbb{Z}$, analizar los restos de la división $(x \cdot y) \div 2$ para los distintos valores de x e y.
Situación 7: Establecer similitudes o diferencias entre las situaciones previamente estudiadas.

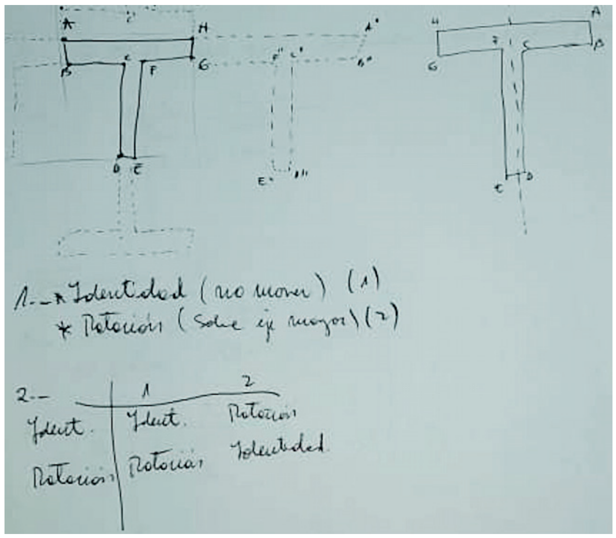
Como se puede apreciar, la numeración no es consecutiva. Esto se debe a que el instrumento, al tener siete situaciones, fue aplicado en dos sesiones. Además, posteriormente a estas sesiones llevamos a cabo una entrevista semiestructurada con el propósito de profundizar en las respuestas de los participantes. En esta entrevista propusimos dos situaciones adicionales, una de ellas es la situación 8 descrita anteriormente.

Es preciso mencionar que en cada una de las situaciones 1, 2 y 3 se le solicitaba al participante sintetizar sus hallazgos en una tabla de doble entrada, donde resumiera la forma en que estaban operando los elementos de cada situación presentada. Luego, en la situación 7 los participantes debían identificar elementos clave en las respuestas de las situaciones previamente estudiadas que les permitieran identificar o reconocer una estructura común en las distintas situaciones.

Análisis de resultados

Los resultados que se presentan pertenecen a uno de los participantes de la investigación, al que llamaremos René. Él desarrolló correctamente las tres situaciones iniciales del instrumento. La Figura 3 muestra la respuesta que entregó a la situación 1, explicitando elementos del modo SG como la rotación e identidad que hacían invariante a la letra T.

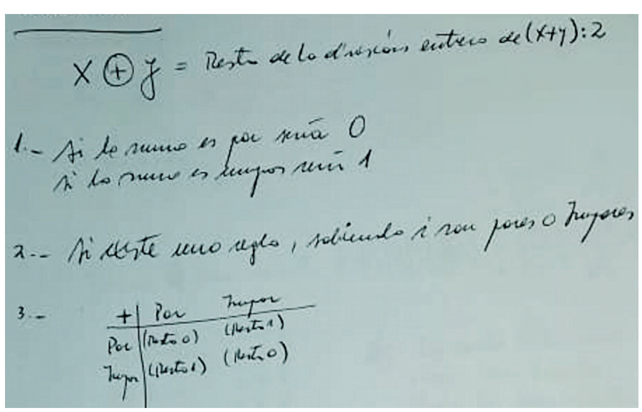
Figura 3. Respuesta de René a la situación 1.



Fuente: Elaboración propia

La respuesta de René ante la situación 2 muestra el uso de categorías como par e impar en el análisis de la situación, así como también el uso de los restos asociados a estas categorías (Figura 4). Ambas estrategias las asociamos con el modo AA.

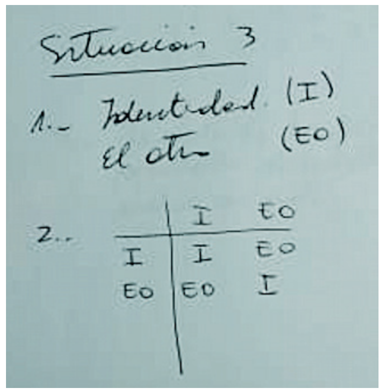
Figura 4. Respuestas de René a la situación 2.



Fuente: Elaboración propia

Siguiendo el cuestionario, la respuesta escrita de René a la situación 3 es más sintética y solo da muestras del uso de composición de las permutaciones por la tabla generada y por los nombres dados a estas composiciones (Figura 5). A partir de esta respuesta intuimos que el participante está desarrollando estrategias desde el modo AC pero hace falta una posterior entrevista para confirmarlo.

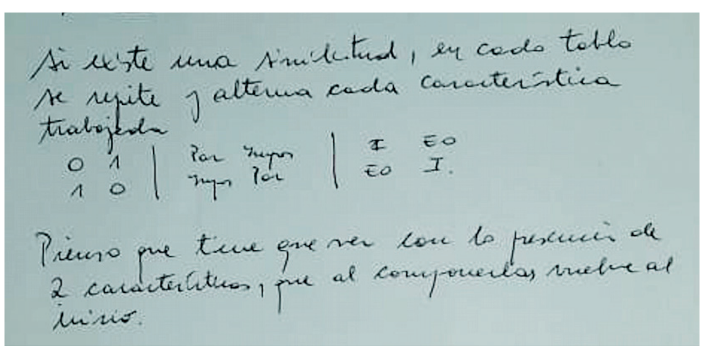
Figura 5. Respuestas de René a la situación 3.



Fuente: Elaboración propia

Al abordar la situación 7, René expone la similitud de estas primeras tres situaciones basándose en una característica común: "En cada tabla se repite y alterna cada característica trabajada". La respuesta de René ilustrada en la Figura 6 muestra la identificación de una similitud en las tablas al ponerlas una al lado de otra. Sin embargo, es interesante destacar que la primera tabla descrita en esta respuesta no pertenece a ninguna de las tres situaciones. Esta tabla con ceros y unos es más bien una primera generalización de estas tablas.

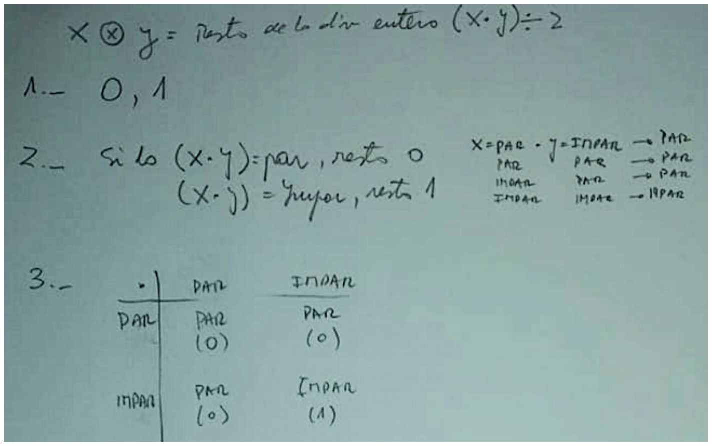
Figura 6. Respuestas de René a la situación 7.



Fuente: Elaboración propia

Observando que René asocia la similitud con la cantidad de características trabajadas y su alternancia, le propusimos resolver la situación 8. La Figura 7 muestra la respuesta de René ante esta nueva situación.

Figura 7. Respuestas de René a la situación 8.



Fuente: Elaboración propia

Al ser consultado por la semejanza entre esta nueva situación 8 y las situaciones anteriores, René expresa que: “No existe relación, ya que los resultados son distintos… tenemos 3 posibilidades que dé par versus 1 que es par, mientras que en las situaciones anteriores había 2 par y 2 impar”. Posteriormente en la entrevista, René, buscando alguna posible explicación de esta diferencia, expresa lo siguiente (E de Entrevistador y R de René):

> E27: Ya. ¿Y qué me podrías decir de la situación 8? ¿Es igual? Porque también se están relacionando dos elementos.
> R27: No [se ríe]. Y eso me generaba ruido. Entonces decía yo: **Pero por qué… por qué esto me sale distinto a los demás, si tiene esa paridad de términos. O sea, digamos tiene dos elementos también, par e impar, par e impar. Pero creo que tiene que ver con la ley de las multiplicaciones, no sé… con algo con el tema con las multiplicaciones.**

Podemos apreciar que René intuye que la razón por la cual la tabla queda diferente, incluso identificando dos elementos en juego, es por la multiplicación. Este hecho es interesante leerlo a la luz de las investigaciones de Dubinsky *et al.* (1994), quienes señalan que en la primera fase del aprendizaje del concepto de grupo, un estudiante puede interpretar un grupo principalmente en términos de sus elementos, es decir, como un conjunto. Si el individuo permanece en esta comprensión elemental de los grupos, es posible que no distinga un grupo por nada más que el número de elementos que contiene (p. 273).

El esfuerzo de René por entregar una razón que justifique esta diferencia, a pesar de que se esté trabajando con 2 características en la situación, es una muestra que está avanzando en la comprensión del concepto de grupo, dejando atrás la sola identificación de la cantidad de elementos (como conjunto) e incorporando la operación descrita al análisis de la situación. De esta manera, René se va acercando a la noción de grupo como conjunto dotado de una operación (con algunas propiedades puntuales).

Siguiendo con la entrevista, René establece una relación entre las primeras tres situaciones haciendo una correspondencia entre los elementos de cada una de estas situaciones y de la forma en que estos elementos se relacionan consigo mismo bajo la operación en cada situación.

> E33:Podrías darme un ejemplo de alguna situación que tú veas que se cumple en una y que se cumple en otra.

> R33: Eh… [balbucea] cuando yo tengo aquí la identidad… Bueno, cuando yo comparo, por ejemplo, identidad o el mismo con el mismo, no sé, **identidad con identidad, par con par, $\{a, b\}$ con $\{a, b\}$, siempre me da el mismo resultado.**
> E34: Mmm… ya.
> R34: Ya. Eh… **cuando ya, uno compara una cosa distinta de la otra, siempre da la otra.** No sé si me explico.

En términos matemáticos, René establece la identidad en cada una de las situaciones y corrobora que al componer estos elementos consigo mismo, siempre llegan a ellos mismos, es decir, que $a \circ a = a$, y que además si uno compone este elemento con el otro, siempre queda lo otro, es decir, $a \circ b = b$. Esta verbalizacion es bastante cercana a la forma como se define el grupo de orden 2.

A pesar de las evidencias anteriores, el ejemplo más claro del reconocimiento de esta estructura común es el momento cuando el propio René es quien entrega un nuevo ejemplo, desde un modo AA (punto de vista aritmético), de una situación similar a las situaciones 1, 2 y 3.

> R36: Eso es lo que veo. O sea, si yo comparo lo mismo con lo mismo me da lo que estoy comparando al principio. Si comparo alguno de ellos que son distintos, me da el otro… Es como la ley de los signos…
> E37: Es súper interesante lo que me acabas de decir.
> R37: **Es como la ley de los signos. Si yo hago + por +, me va a dar +. Si hago – con -, me va a dar +, ¿se entiende? Y si hago + con -, si alguno de ellos es distinto, me va a dar -. Tiene como esa onda, de la ley de multiplicación de signos.**

Como mencionábamos, acá el participante René entrega una nueva situación desde el modo AA, la que puede resumirse en la Figura 8.

Figura 8. Situación que propone René para explicar cómo operan los elementos de las situaciones 1, 2 y 3.

$\cdot$	$+$	$-$
$+$	$+$	$-$
$-$	$-$	$+$

Fuente: Elaboración propia

Finalizando la entrevista, René entrega una nueva verbalización más completa que resume la manera en que operan los dos elementos de las situaciones 1, 2 y 3.

> R178: **Entonces, si yo compongo al mismo elemento con el mismo, me da la identidad, si lo compongo con uno distinto, me da el otro elemento.**

Esta es exactamente la caracterización de los elementos de un grupo de orden 2. Matemáticamente tenemos un conjunto con 2 elementos, $A = \{a, e\}$ donde, siguiendo la convención, consideramos e como la identidad.

1. De la primera afirmación de René se tiene que $a \circ a = e$ y $e \circ e = e$.
2. De la segunda afirmación de René se tiene que $a \circ e = e \circ a = a$.

Todo conjunto de dos elementos dotado de una operación en la que cumplan estas dos características es *isomorfo* al grupo de orden 2.

Conclusiones

Las situaciones estudiadas que conforman el instrumento de toma de datos, en conjunto con la posterior entrevista, permitieron levantar elementos que caracterizaban cada uno de los modos de pensar el grupo de orden 2. Se evidencia además que la secuencia de situaciones le permitió al participante conectar determinados elementos de una situación con los de otra, relacionando las diversas situaciones no solo en la cantidad de elementos que involucraban, sino en la manera en que estos elementos se relacionaban con ellos mismos y con los otros a partir de la operación dada en cada situación. Esta similitud de las situaciones y conexión entre los elementos de estas no solo se evidenció en las respuestas escritas del cuestionario, sino que se pudo corroborar en las respuestas en la entrevista posterior, especialmente en el momento en que el participante entrega una nueva situación ajena al cuestionario, donde estaba implícita la estructura de grupo de orden 2. Cabe destacar que esta nueva situación propuesta por el participante está alojada en el modo AA, al relacionar los números positivos y negativos a través de operarlos mediante la multiplicación. Tanto el cuestionario como la posterior entrevista dan cuenta de la articulación que hizo el participante entre los elementos de cada situación alojada en un modo de pensamiento específico. Esta articulación comenzó desde las tablas de resumen de cada situación, pero se particularizó al conectar los elementos de las diferentes situaciones y concluir que, bajo la operación definida en cada situación, las situaciones eran *idénticas*

Por lo tanto, podemos concluir que el diseño de cada una de las situaciones, asociada a un modo de pensar el concepto de grupo de orden 2, facilitó en el participante la identificación de una estructura común que trascendía las situaciones y los objetos estudiados en cada una de ellas, logrando verlas como *la misma situación.*

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por el programa de Formación de Capital Humano Avanzado de CONICYT, a través del proyecto FONDECYT Nº1180468.

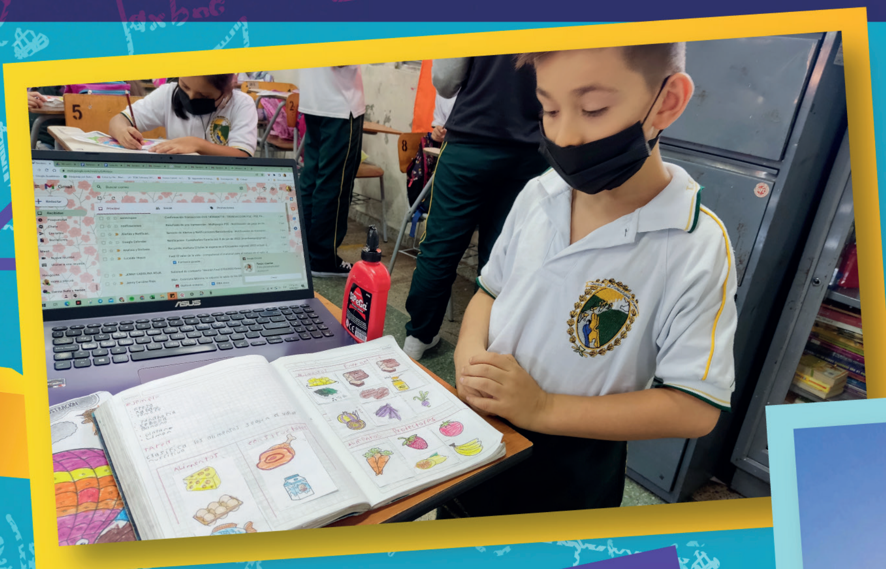
Referencias bibliográficas

Dubinsky, E., Dautermann, J., Leron, U. y Zazkis, R. (1994). On learning fundamental concepts of group theory. *Educational Studies in Mathematics*, *27*(3), 267-305.
Edwards, T. G. y Brenton, L. (1999). An attempt to foster students' construction of knowledge during a semester course in abstract algebra. *The College Mathematics Journal*, *30*(2), 120-128.
Hazzan, O. (1999). Reducing abstraction level when learning abstract algebra concepts. *Educational Studies in Mathematics, 40*(1), 71-90.
Ministerio de Educación de Chile. (2012). *Estándares orientadores para carreras de pedagogía en educación media.* Recuperado el 19 de diciembre de 2018 de https://www.cpeip.cl/wp-content/uploads/2018/09/Estándares_Media.pdf
Ortega, V. E. (2011). *Formación de la noción abstracta de estructura algebraica: a partir del estudio histórico-epistemológico de los aportes de Cantor y Dedekind.* Tesis de Maestría no publicada, Universidad del Valle. Santiago de Cali, Colombia.
Sepúlveda, D. O. (2016). *Conocimiento didáctico-matemático del profesor universitario para la enseñanza del objeto Grupo*. Tesis de Doctorado, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.
Sierpinska, A. (2000). On Some Aspects of Students' thinking in Linear Algebra. En J. L. Dorier (Ed.), *The Teaching of Linear Algebra in Question* (pp. 209-246). Dordretch: Kluwer Academic Publishers.

Stake, R. E. (1999). *Investigación con estudios de casos*. Madrid: Ediciones Morata.
Wasserman, N. H. (2016). Abstract algebra for algebra teaching: Influencing school mathematics instruction. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *16*(1), 28-47.
Wussing, H. (2007). *The genesis of the abstract group concept: a contribution to the history of the origin of abstract group theory*. New York: Dover Publications.

SECCIÓN 3

ASPECTOS SOCIOEPISTEMOLÓGICOS EN EL ANÁLISIS Y EL REDISEÑO DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR



DESARROLLO DEL SENTIDO NUMÉRICO CON EL USO DEL DIAGRAMA TRIANGULAR EN TIEMPOS DE PANDEMIA COVID-19

DEVELOPMENT OF THE NUMBER SENSE USING THE TRIANGULAR DIAGRAM IN THE COVID-19 PANDEMIC TIMES

María del Pilar Beltrán Soria, René Gerardo Rodríguez Avendaño
Instituto de Educación Media Superior de la Ciudad de México (México).
pilar.beltran@iems.edu.mx, rene.rodriguez@iems.edu.mx

Resumen
En este trabajo, discutimos la necesidad de desarrollar el Sentido Numérico en el tratamiento de información estadística que los estudiantes del nivel medio superior tienen a su disposición de los casos asociados a la pandemia de COVID-19 en México. El propósito es brindar una experiencia que permita a los estudiantes visualizar la progresión de la pandemia y adquirir competencias numéricas útiles para la vida. Se propone que dichas competencias se puedan desarrollar a través de actividades en donde se hace uso del diagrama triangular en contextos aritméticos, algebraicos y geométricos. El diagrama triangular como técnica de análisis estadístico ofrece una alternativa a las gráficas convencionales y puede revelar tendencias no fácilmente detectadas. Se presenta unacaracterización del desarrollo del Sentido Numérico, a través de cuatro fases de desarrollo y su relación con los usos del número, se muestra como el uso del diagrama triangular permite la resignificación de la asociación entre cantidades o medidas al plantearse una situación de predicción.

Palabras clave: argumentación, diagrama triangular, diseño de situación, sentido numérico

Abstract
In this paper, we discuss the need to develop NumberSense in the treatment of statistical information that high school students have at their disposal regarding cases associated with the COVID-19 pandemic in Mexico. The purpose is to provide students with an experience that allows them to visualize the progression of the pandemic and to acquire useful numerical skills for life. Numerical skills are proposed to be developed through activities that use the triangle diagram in arithmetic, algebraic, and geometric contexts.The triangular diagram as a statistical analysis technique provides an alternative to conventional graphs and can reveal trends not easily detected. A characterization of Number Sense is presented, through four phases of development and its relationship with the uses of the number; it was shown how the use of the triangular diagram allows the resignification of the association between quantities or measures when considering a prediction situation.

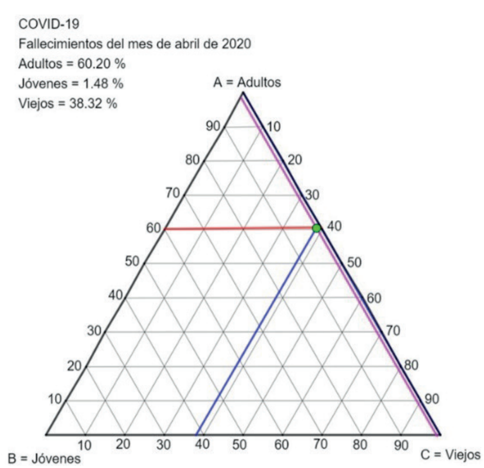
Key words: argumentation, triangular diagram, situation design, NumberSense

Introducción

Los coronavirus son una familia de virus que causan enfermedades (desde el resfriado común hasta enfermedades respiratorias más graves) y circulan entre humanos y animales. El coronavirus SARS-COV2 apareció en China y provoca una enfermedad llamada COVID-19, que se extendió por el mundo y fue declarada pandemia global por la Organización Mundial de la Salud. En este trabajo, se examina una situación de aprendizaje en la que los estudiantes usan al diagrama triangular como instrumento de análisis para estudiar los casos de fallecimientos asociados al COVID-19. Se parte de la idea que un aspecto muy importante en el empleo de tablas, gráficas y diagramas para representar fenómenos es la visualización. Se pretende que el estudiante sea capaz de identificar variables y sus relaciones al trabajar con diversos problemas, así como utilizar tablas, gráficas y diagramas para ordenar e interpretar datos. El uso del diagrama triangular permite abordar diversos problemas en donde el hilo conductor es la proporcionalidad. Este concepto se estudia desde la aritmética, el álgebra, la geometría, la probabilidad y la estadística. Se busca que la riqueza del concepto de proporcionalidad y la visualización de fenómenos en el uso del diagrama triangular, permita a los estudiantes percibir a la matemática como un todo.

Desde el punto de vista de Sánchez (1999) el diagrama de composición ternario o diagrama triangular es uno de los mejores medios para la expresión de las observaciones cuantitativas y se emplea para representar gráficamente un punto de cualquier distribución porcentual de tres variables. El diagrama triangular se puede construir sobre la figura de un triángulo equilátero, se asigna un lado a una de las variables y se marcan intervalos de 10 en 10% de manera que en cada vértice coinciden el 0% de una variable y el 100% de otra. De acuerdo con Castaño (1994) para obtener una línea que represente un porcentaje determinado de uno de los componentes (A, B o C), se traza una paralela en el lado opuesto al vértice ocupado por dicho componente de forma tal que sus extremos sean los valores deseados. La concurrencia de diferentes condiciones a cumplir, determinan diferentes lugares geométricos que las cumplan. Estos pueden ser de tres tipos: puntos, líneas o zonas. Para el caso de un punto porcentual, se requiere que tres líneas que representen un porcentaje determinado se intercepten. La Figura 1 muestra un diagrama triangular para la ubicación del punto porcentual 1) Adultos= 60.20%, 2) Jóvenes=1.48% y 3) Viejos=38.32% en el mes de abril.

Figura 1 *Ubicación de un punto de composición porcentual en un diagrama triangular.*



Nota: Beltrán y Rodríguez (2022)

De acuerdo con Gracia y Novelo (2010), se puede concebir al diagrama triangular como una representación gráfica del comportamiento de una propiedad característica con relación a la composición de un sistema de tres componentes.

Por lo anteriormente expuesto, el diagrama triangular puede proporcionar una manera complementaria para entender lo sucedido con los fallecimientos ocurridos por COVID-19. Esta técnica y su valor explicativo tiene gran utilidad cuando se presentan abundantes datos, de modo que en el triángulo del diagrama aparecen concentraciones de puntos en la zona superior, inferior derecha o izquierda. De acuerdo con Tapia y Tan (2001) el diagrama triangular como técnica de análisis se basa en proporciones relativas de sus tres variables, en lugar de números absolutos, lo que la hace más resistente a posibles errores de datos que subestiman el número real de casos. Por otro lado, destacan que, en el uso del diagrama triangular, la visualización es esencial para un apoyo eficaz de las decisiones.

Marco teórico

Con respecto al término Sentido Numérico, no hay una única caracterización, de hecho, a pesar de su importancia, no hay dos investigadores que hayan definido al Sentido Numérico exactamente de la misma manera (Gersten et al., 2005). La principal organización profesional de maestros de matemáticas de los Estados Unidos de América (National Council of Teachers of Mathematics) ha identificado al Sentido Numérico como una sensación "no algorítmica" para los números, una comprensión sólida de su naturaleza y el análisis de las operaciones, así como la necesidad de examinar la razonabilidad de los resultados (NCTM, 1989).

Por su parte, Andrews y Sayers (2015), han identificado tres “perspectivas" para el Sentido Numérico: el Sentido Numérico Preverbal (SNP), el Sentido Numérico Aplicado (SNA) y el Sentido Numérico Fundamental (SNF). El SNP, se refiere a esas ideas numéricas innatas para todos los seres humanos. El segundo, el SNA, se refiere a aquellas competencias relacionadas con el número que hacen que las matemáticas sean sensatas para todos los estudiantes y los prepara para un mundo adulto. Por último, el SNF comprende aquellos entendimientos que requieren instrucción y suelen surgir en primaria y secundaria. Whitacre et al. (2020) identificaron en la literatura tres construcciones sobre el Sentido Numérico: Sentido Numérico Aproximado; Sentido Numérico Temprano y Sentido Numérico Maduro. Estas tres construcciones se alinean con las perspectivas de Andrews y Sayers (2015).
Según Back, Sayers y Andrews (2013), el SNA se basa en el SNF, y se refiere a la comprensión relacionada con los números y es el que se requiere que poseen todos los adultos independientemente de su ocupación (McIntosh et al. 1992). Por lo tanto, se puede establecer que el Sentido Numérico no se refiere únicamente al dominio de técnicas para resolver problemas numéricos específicos, sino también a formas cualitativas de razonamiento numérico, las cuales permiten discutir, conjeturar y argumentar en asuntos relativos a las posibles soluciones numéricas de acuerdo con los contextos en los que se presentan ciertas situaciones o problemas, con lo cual, la premisa es implementar tareas o actividades que presenten características de fluidez y flexibilidad, que desarrollen el razonamiento y las habilidades numéricas”.

De acuerdo con Hernández et al. (2015) el Sentido Numérico debe incluir las dimensiones métricas, variacionales, algebraicas y geométricas además del estudio de los números, sus relaciones y operaciones. Esta versión ampliada de Sentido Numérico debe ser desarrollada en todos los grados escolares de tal manera que contribuya a la adquisición de competencias numéricas por parte de los estudiantes. Las competencias numéricas se pueden evidenciar a partir del desarrollo del Sentido Numérico, que es un proceso complejo y abarca diferentes componentes que involucran números, sus operaciones y relaciones (McIntosh et al., 1992). En este trabajo se propone caracterizar al desarrollo del Sentido Numérico mediante la adecuada lectura e interpretación de los datos de fallecimientos asociados a COVID-19 que los estudiantes realicen al usar el diagrama triangular, y su tránsito a través de 4 fases del Sentido Numérico: 1) Registrar y almacenar, 2) Facilitar la comunicación de información, 3) Analizar la distribución de datos para obtener conocimiento de su estructura, 4) Generar un juicio.

Marco conceptual

De acuerdo con Torres y Montiel (2021) un emergente de interés para la Teoría Socioepistemológica es el significado, que se considera fundamental en el entendimiento y organización de las prácticas. Con la intención de develar el significado construido o en construcción se estudia el uso del conocimiento matemático.

En Fregueiro (2014), se abordan los usos del número en la obra de René Descartes, bajo una mirada Socioepistemológica: Uso geométrico-aritmético; Uso geométrico-algebraico y Uso geométrico-analítico. El tránsito entre diversos contextos (aritmético, geométrico y algebraico) que Descartes realiza, le permite encontrar una manera de representar en lenguaje algebraico, aquellos problemas originados en el contexto geométrico y viceversa, dando evidencia de un uso estructural del número. Con lo cual, el uso del número es caracterizado a partir de la forma en que es empleada o adaptada la noción de número en un contexto específico (aritmético, algebraico o geométrico).

La teoría Socioepistemológica comparte la mirada situacional de la construcción de conocimiento y el reconocimiento de las circunstancias socioculturales que la rodean. De acuerdo con Torres y Montiel (2021) esto constituye la racionalidad contextualizada, en otras palabras, la relación del sujeto con el saber es una función del contexto donde actúa y construye conocimiento, donde el contexto se ha dimensionado en tres niveles: contexto cultural; contexto situacional y el contexto de resignificación.

Esta investigación busca dar cuenta del desarrollo del Sentido Numérico, a través del uso del número, en la resignificación de la asociación entre cantidades o medidas a través de anticipar un valor luego de realizar un análisis de los datos previos, lo que en Caballero y Cantoral (2013) es una de las estrategias variacionales, la predicción. Se emplea la noción de uso de conocimiento matemático descrito por Torres y Montiel (2021) quienes afirman que el uso se da en el ejercicio de prácticas contextualizadas, de él emergen significados que se ponen en funcionamiento en situaciones nuevas y, bajo la consideración de emergente social se resignifica.

Se busca que la situación de aprendizaje genere un interés en los estudiantes por estudiar la asociación de datos a través de predecir la ubicación de un punto porcentual a partir de conocer la distribución de datos previos en función del tiempo transcurrido. De acuerdo con Batanero et al. (2013) el razonamiento distribucional implica conectar datos (distribución de datos, la población donde se tomaron y las posibles muestras de estas) y establecer la asociación entre ellos. Este tipo de razonamiento requiere de problemas donde se planteen cuestiones relativas al cambio de una magnitud en función del tiempo (dependencia funcional) así como a la asociación de datos. En una dependencia funcional a cada valor de una variable X (independiente) corresponde un solo valor de otra variable Y (dependiente), mientras que, en el estudio de la asociación a cada valor de X corresponde una distribución de valores de Y, por lo que el concepto de distribución amplía el de dependencia funcional y se resalta la importancia del concepto de asociación en la toma de decisiones en ambiente de incertidumbre. Considerando lo anterior, la predicción guía el diseño de las acciones didácticas, donde los elementos para el diseño de las acciones didácticas serán aquellos que formen parte del marco epistemológico del conocimiento matemático (Suárez, 2014). Entonces, a partir de un trabajo deductivo en una epistemología de la predicción, se busca que la proporcionalidad ayude a los estudiantes a construir un puente entre la aritmética, el álgebra y la geometría y de esta manera establecer el uso del número asociado a la función orgánica de la predicción como epistemología, donde se presenten formas de uso del número, se construyan argumentos y se pongan en funcionamiento.

Metodología

Para dar cuenta del desarrollo del Sentido Numérico, se utiliza un “Diseño de Situación” como herramienta metodológica, ya que de acuerdo con Suárez (2014) permite la transformación entre la epistemología configurada y las acciones a desarrollarse en el sistema didáctico, a través de situaciones de aprendizaje. De esta manera una “situación de aprendizaje” es el conjunto de condiciones de un fenómeno o pregunta que propicie una problematización, con lo cual, es un conjunto de características de las tareas que realizará el estudiante. El Diseño de Situación se enmarca en la teoría Socioepistemológica en Matemática Educativa, que de acuerdo con Cantoral et al. (2014) se ocupa de estudiar el problema que plantea la construcción social del conocimiento matemático y el de su difusión institucional, al integrar una dimensión social al estudio del sistema didáctico que está constituido por el saber, el profesor, el alumno y sus relaciones.

Para la fase 1 del desarrollo del Sentido Numérico a través del uso del número, se propone en el Momento I (Establecimiento de la forma de una representación visual de datos numéricos) la producción de representaciones funcionales y producciones individuales de uso del número para registrar y almacenar datos. El trabajo de los estudiantes inicia con la elaboración de triángulos equiláteros de manera individual, en el que tienen que elaborar triángulos de diferentes tamaños con el apoyo de papel, regla y compás. Dado que el compás ya no permitirá construir triángulos de mayor tamaño, se emplea el Teorema de Pitágoras que permite obtener la altura que deben tener los triángulos equiláteros que serán utilizados en los diagramas triangulares. El Teorema de Pitágoras es funcional a los estudiantes para comprender el concepto de la proporcionalidad. Además, se presenta un tipo de procedimiento de ejecución, de acuerdo con la tipología propuesta por Sánchez (1999), que les proporciona a los estudiantes la solución de obtener la altura para cualquier triángulo equilátero de una manera puntual y específica. Posteriormente, para la fase 2 del desarrollo del Sentido Numérico en el Momento II (Construcción de argumentos en el uso del número a través de la representación visual) se requiere que se inicie el proceso de la comunicación de la información. Este momento se caracteriza por el trabajo del estudiante con el profesor o con algunos compañeros cercanos o integrantes de su equipo. El trabajo se realiza de manera grupal, en donde intervienen todos los estudiantes con el profesor y se generan debates hasta llegar a consensos.

En la fase 3 del desarrollo del Sentido Numérico, se espera que los estudiantes en el Momento II, analicen la distribución de datos, razonen, conjeturen, discutan y defiendan sus ideas. El *teorema de Viviani* establece que las perpendiculares a los lados de un punto P sobre la frontera o dentro de un triángulo equilátero suman la altura del triángulo. Los estudiantes utilizan las construcciones geométricas para comprobar que el triángulo sea equilátero. Se eligió la prueba geométrica propuesta por Kawasaki (2005) por las ventajas que proporciona para el propósito de este trabajo, como, por ejemplo, es: una demostración eficiente, fácil de visualizar para los estudiantes y que se puede realizar a través de simples rotaciones y traslaciones de triángulos generados a partir de trabajar con un punto al interior del diagrama triangular, motivo por el cual se puede establecer que es un procedimiento del tipo motriz de acuerdo a la tipología propuesta por Sánchez (1999).

Posterior a la comprobación de la obtención del triángulo equilátero para el diagrama triangular, los estudiantes están en posición de ubicar los puntos porcentuales, siguiendo una serie de pasos e indicaciones para lograr ubicar adecuadamente los porcentajes de acuerdo con cada uno de los tres componentes, con lo cual se presenta un tipo de procedimiento algorítmico de acuerdo con la tipología de Sánchez (1999), en donde, si siguen correctamente estos pasos, todos los estudiantes llegan a las mismas localizaciones de los puntos. Se realiza la búsqueda de los datos abiertos asociados al COVID-19, en donde los estudiantes analizan cada uno de los apartados que se encuentran en los informes diarios. En la ubicación de los datos de fallecimiento por COVID-19, los estudiantes trabajan con XLSTAT que es un complemento de análisis de datos de Microsoft Excel que puede ser incorporado por un cierto periodo de prueba, se analizaron los datos de enero a octubre del 2020, de acuerdo con los datos de fallecimientos en la categoría de edad presentados por la Dirección General de Epidemiología. Se recurre a la elaboración de los diagramas triangulares, con el procedimiento reportado por Calmaestra y Capote (2020) para lo cual en los ejes se dispone la población joven (0-14 años), adulta (15-64 años) y anciana (65 y más años). Los datos numéricos correspondientes a los fallecimientos por COVID-19 son ubicados en un diagrama triangular, de acuerdo con los porcentajes de jóvenes, adultos y viejos para cada uno de los meses. La distribución de los datos representados en el diagrama triangular es compartida a todo el grupo con la intención de que se lleve a cabo una coevaluación entre los estudiantes, acerca de sus contenidos, estableciendo disensos y consensos y su posible corrección.

La idea principal es que, para la construcción de un concepto, o para la superación de una dificultad, los estudiantes deben hacer frente de manera cooperativa al aportar e intercambiar sus conocimientos individuales y generar otros nuevos. Finalmente, en la fase 4 del desarrollo del Sentido Numérico, (Puesta en funcionamiento de lo aprendido, a partir de la reflexión autónoma del uso del número del Momento III) se espera que el uso del diagrama triangular permita a los estudiantes modelar la situación estudiada, se les solicita a los estudiantes realizar una predicción de lo ocurrido para el mes de noviembre de 2020, a partir de la distribución de puntos de los meses anteriores. Los estudiantes realizan un juicio al responder a la pregunta ¿Cuál es la composición porcentual que se esperaría para el mes de noviembre?

Resultados

A continuación, se presenta la confrontación de las evidencias recabadas y la situación de aprendizaje propuesta. En el Momento I de la situación de aprendizaje se espera:

- La construcción del triángulo que se utiliza como base para el diagrama triangular y asociar las características geométricas de los triángulos equiláteros. Se busca que la dimensión geométrica y métrica del Sentido Numérico esté presente.
- La construcción de triángulos equiláteros de cualquier tamaño para generar diagramas triangulares. Se busca con ello contribuir a las dimensiones geométrica y algebraica del Sentido Numérico.
- La asignación de los márgenes de variación en cada uno de los lados del triángulo equilátero. Se busca que la dimensión aritmética del Sentido Numérico esté presente.

En el Momento I de la situación de aprendizaje los estudiantes dan sentido a:

- Las características geométricas de los triángulos equiláteros, al identificar que sus ángulos y cada uno de sus lados son congruentes. El tamaño de los triángulos equiláteros está relacionado con la medida de sus lados, a mayor longitud de cada lado, mayor tamaño del triángulo. En la construcción de los triángulos equiláteros, la longitud de cada lado está relacionada con la abertura del compás. En cuanto a la congruencia de ángulos, se verifica que cada uno de ellos debe ser un invariante igual a 60°, independientemente del tamaño del triángulo, lo cual se visualiza mediante la superposición de un triángulo de menor tamaño en otro para identificar si efectivamente coinciden, es decir, si la medida es de 60°. Por lo que, el triángulo pequeño se emplea como unidad de medida en la comparación de los ángulos correspondientes del triángulo de mayor tamaño.
- La incógnita asociada a la determinación algebraica de la altura de un triángulo equilátero de cualquier tamaño. La construcción de triángulos de gran tamaño se encuentra limitada por las características físicas del compás. La abertura de un determinado compás puede ser insuficiente como medida del lado de un triángulo equilátero. La altura de un triángulo equilátero se obtiene por medio del Teorema de Pitágoras de tal manera que $h = \frac{\sqrt{3}}{2} longitud\ del\ lado$. Adicionalmente, el símbolo como elemento algebraico, aparece para la asignación de cada uno de los componentes en los vértices del triángulo equilátero.
- La escala de cada uno de los lados del triángulo equilátero. La longitud de cada lado del triángulo se subdivide en múltiplos de 10, con lo cual, quedan establecidos los márgenes de variación de cero a 100, que corresponden a los porcentajes de cada uno de los componentes del diagrama triangular. La importancia de establecer los subintervalos a partir de los márgenes de variación radica en que dan lugar a la construcción de las líneas proporcionales del diagrama triangular. En Castaño (1994) se definen las líneas de proporción como aquellas que están formadas por los puntos que configuran los lugares geométricos en los que el porcentaje de una variable se mantiene constante. Cada una de ellas es en realidad un diagrama binario que reparte entre dos variables la proporción que resta tras atribuir al tercer componente un porcentaje fijo y determinado.

El establecimiento del diagrama triangular como una forma de representación visual del número, se da a partir de que los estudiantes construyen el diagrama triangular a través de las líneas proporcionales, así como de localización de puntos al interior del diagrama y de la visualización de la distribución de puntos de los fallecimientos asociados a COVID-19 en México.

En el Momento II de la situación de aprendizaje se espera:

- La comprobación geométrica del teorema de Viviani para garantizar que se trabaja con un triángulo equilátero. El teorema de Viviani establece que, en un triángulo equilátero, la suma de las distancias desde cualquier punto interior o sobre la frontera a los tres lados es igual a la altura del triángulo. Se busca que la dimensión geométrica del Sentido Numérico esté presente.
- La comprobación aritmética del teorema de Viviani, en la que se verifica que la suma de los porcentajes es igual al cien por ciento, es decir, $\%_A + \%_B + \%_C = 100$. Se busca con ello que las dimensiones métrica y aritmética del Sentido Numérico estén presentes.
- La ubicación de los datos porcentuales del número de fallecimientos asociados a COVID-19 en México. Por lo que se busca que la dimensión estadística del Sentido Numérico esté presente.

En el Momento II de la situación de aprendizaje los estudiantes dan sentido a:

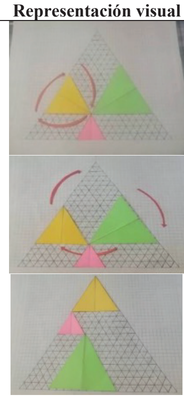
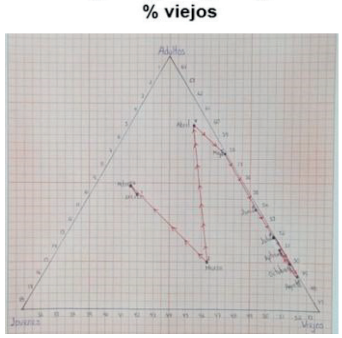
- La prueba visual a partir de rotaciones y traslaciones para demostrar el teorema de Viviani. Dado un punto cualquiera al interior del triángulo equilátero se trazan las perpendiculares a los lados del triángulo, la distancia de cada perpendicular constituye la altura de tres pequeños triángulos. La prueba visual emplea sólo rotación para demostrar el teorema. Como se puede observar en la Tabla 1, al alinear las tres alturas de cada uno de los tres triángulos pequeños, se puede verificar que su suma es igual a la altura del triángulo original. Con lo cual, se tiene que $h_A + h_B + h_C = H$. Cuando el punto se encuentra en la frontera (en uno de los lados del triángulo) se forman solamente dos triángulos pequeños cuyas alturas son las perpendiculares hacia los otros dos lados, nuevamente al alinear las dos alturas la suma es igual a la altura del triángulo. Por lo tanto, se asocia la prueba visual a la comprobación del teorema de Viviani.
- La noción de porcentaje como relación entre dos cantidades a través de una escala. El porcentaje es una razón, es decir una relación multiplicativa entre dos cantidades o conjunto de cantidades. De acuerdo con Mendoza y Block (2010) la adquisición de la noción de razón y por consecuencia del porcentaje, conlleva un paso difícil e importante en el estudio de la aritmética. Dado que el porcentaje puede ser interpretado como una fracción: 50% es "50/100 de", en el caso de la comprobación aritmética del teorema de Viviani, se puede establecer que, la suma aritmética de los tres porcentajes de un punto al interior del diagrama triangular debe ser igual a 100, o bien, la suma de las fracciones debe ser igual a uno.
- La distribución de puntos porcentuales a partir del uso de las líneas proporcionales y relacionales. Las líneas proporcionales son empleadas a través de trayectorias paralelas que ayudan a los estudiantes a argumentar acerca de que cada punto en el diagrama ternario representa la distribución de fallecimientos en un determinado mes. Adicionalmente, se argumenta acerca del cambio porcentual de cada uno de los componentes (A, B o C) en relación con cada uno de los meses analizados. El cambio porcentual se visualiza a través de la distancia del punto hacia cada uno de los vértices, lo cual, se logra a partir de las líneas relacionales (visualizadas a través de trayectorias diagonales) que se trazan siempre de un vértice al lado opuesto (son lugares geométricos en los que la proporción entre dos variables es siempre constante). Con la ubicación de las composiciones porcentuales al interior del diagrama triangular y de su relación que guarda con los vértices A, B y C, se presenta una apropiación de la idea de distribución y variabilidad de los datos de fallecimientos asociados al COVID-19 en México.

En el Momento II, el trabajar con pruebas visuales en el aula (prueba geométrica del teorema de Viviani) ayuda a los estudiantes a "ver" por qué un enunciado en particular puede ser verdadero, y también "ver" cómo se podría comenzar a trabajar para dar una demostración de que ésta es verdadera (Herrera, 2011).

En la Tabla 1, se presenta la distribución de fallecimientos en un determinado intervalo de tiempo de la pandemia de COVID-19 (la dimensión del tiempo no se representa explícitamente en el diagrama triangular. A partir del mes de abril de 2020 la composición porcentual de fallecimientos, se ubica prácticamente en el sistema binario adultos-viejos (una frontera) en donde la composición porcentual de jóvenes es muy cercana a cero, cuestión que no se presentó en los meses previos de enero a marzo del 2020, una posible explicación fue la eliminación por parte del gobierno mexicano de datos de fallecimientos ocasionadas por enfermedades que se consideró ya no estaban asociadas a COVID-19, por lo que el número de fallecimientos de jóvenes se vio disminuido. Para los meses de mayo a octubre se presentó un incremento en el porcentaje de personas mayores a 65 años, con lo cual se puede observar la vulnerabilidad de este sector ante la pandemia.

Dado que los datos se ubican en una región muy pequeña del diagrama triangular, es necesario para una mejor visualización, realizar una ampliación de tal región. En donde los nuevos ejes coordenados están asignados de la siguiente forma: para los adultos van de un 46.5 a un 65%, para los jóvenes van de cero hasta 18% y para los viejos de 35 a 53.5%. Las cantidades de cada uno de los porcentajes se trabajan como una magnitud medible, en donde los estudiantes establecen que la población mayormente afectada por COVID-19 son los adultos y viejos, siendo los jóvenes los menos afectados.

Tabla 1 *Trabajo con el diagrama triangular en el contexto de datos de COVID-19 en México.*

Representación visual	Tarea realizada	Procedimiento
	Realizar la prueba visual del teorema de Viviani empleando la rotación para establecer el teorema.	El procedimiento es del tipo Motriz: Los estudiantes para realizar la comprobación del teorema de Viviani ejecutan acciones observables de forma directa, en este caso, son las rotaciones.
	Ubicación de la composición porcentual de adultos, jóvenes y viejos, correspondiente a las defunciones asociadas a COVID-19 de enero-octubre de 2020	El procedimiento es algorítmico: Los estudiantes ejecutan los pasos que hay que realizar para la correcta ubicación de los puntos en el diagrama triangular.
	En una hoja milimétrica realizar una ampliación de la región de los fallecimientos asociados a COVID-19.	El procedimiento es heurístico: En la interpretación de lo que sucede para el mes de noviembre con respecto al análisis de los datos de los meses anteriores

Nota: Beltrán y Rodríguez (2022)

En el Momento III de la situación de aprendizaje se espera:

- La asociación entre cantidades o medidas a través de la predicción. Se busca que la dimensión estadística del Sentido Numérico esté presente.

En el Momento III de la situación de aprendizaje los estudiantes dan sentido a:

- La predicción a partir de la asociación de los datos de fallecimientos asociados a COVID-19 en México. Los puntos porcentuales de los fallecimientos desde el mes de enero hasta octubre de 2020 son asociados a una trayectoria que se traza de acuerdo con las estadísticas proporcionadas por el gobierno de México y está en función de los porcentajes de fallecimientos en las tres edades analizadas, en lugar de un recuento total. El funcionamiento que los estudiantes le dan a la trayectoria generada por los puntos es como un sistema referencial. La distribución de puntos y la trayectoria constituyen elementos que permiten realizar una predicción que se sustenta en el número de fallecimientos.
- Mediante el uso del diagrama triangular, los estudiantes son capaces de extender la idea de dependencia funcional "uno a uno" (en donde a cada valor de una variable le corresponde un único valor de la otra variable) a una concepción de distribución (en donde a cada valor de una variable le corresponde una distribución de valores de la otra variable), con lo cual, dan evidencia de la adquisición de un Sentido Numérico.

Análisis de los resultados

En la fase 1 del Sentido Numérico se presenta el uso del número asociado a la geometría del plano, con acciones tales como: ubicar puntos con respecto a puntos de referencia y relacionar puntos dentro del diagrama ternario con coordenadas (x, y) en el plano.

Por lo que, se puede establecer, el uso geométrico del número por parte de los estudiantes.
1) Al localizar puntos a lo largo de un segmento de recta,
2) Al distinguir representaciones de segmentos de recta.

Adicionalmente, se puede establecer un uso geométrico emergente que está asociado a la geometría proporcional en planos (líneas proporcionales en la construcción).

El uso aritmético-geométrico del número está asociado a lo concreto (los números para medir) y lo asociado a lo comunicativo (comunicar la idea del triángulo equilátero) lo asociado al concepto de triángulo equilátero (el triángulo equilátero visto como objeto matemático que tiene la longitud de sus lados iguales y sus ángulos de 60°) con lo cual, se puede establecer que lo aritmético se concibe mucho más allá de las simples operaciones numéricas. Además, se pueden identificar un uso aritmético-geométrico del número en lo asociado a las razones y proporciones (proporcionalidad en los lados del triángulo equilátero), así como lo asociado a la argumentación (argumentar si se obtiene un triángulo equilátero, empleando el Teorema de Viviani.

En la fase 2 del Sentido Numérico, el uso algebraico del número se presenta al trabajar con la incógnita en el teorema de Pitágoras. Además, el uso algebraico, permite distinguir a los estudiantes lo que pueden y no pueden hacer con los símbolos empleados en el diagrama triangular. Por lo tanto, el uso algebraico del número queda asociado a la literal, asociado al parámetro como cantidad variante y asociado a símbolos sin operación en el trabajo con el diagrama triangular.

En la fase 3 del Sentido Numérico, se puede establecer que aparecen argumentaciones autónomas articuladas acerca del uso del número a partir de la asociación, a partir de la distribución de los datos de fallecimientos asociados a COVID-19 en México.

En la fase 4 del Sentido Numérico, el trabajo que los estudiantes realizaron y sus juicios están en contacto e interacción con la realidad exterior, de manera que se establece un doble proceso simultáneo y continuo: en donde, a la vez, lo sucedido a nivel mundial durante la pandemia de COVID-19, influye en el juicio de los estudiantes, y la perspectiva de los estudiantes se ve influida por su propia imagen construida durante el trabajo con los datos de la Dirección General de Epidemiología.

Conclusiones

A partir del trabajo realizado por los estudiantes en los diferentes momentos de la situación de aprendizaje, se da evidencia del desarrollo del Sentido Numérico en el tránsito de las cuatro fases propuestas. Las capacidades numéricas adquiridas por los estudiantes les permiten la lectura e interpretación de los datos de fallecimientos asociados a COVID-19. Con lo cual, la situación de aprendizaje permite adquirir independencia de criterio y juicio crítico. Se concluye que el desarrollo del Sentido Numérico y el desarrollo de competencias procedimentales y actitudinales se conectan entre sí, toda vez que las actitudes son contenidos inseparables de los conceptos y procedimientos en el proceso de construcción del conocimiento. El uso del diagrama triangular a través de un uso estructural del número les permitió a los estudiantes leer, procesar e interpretar la información proveniente de la Dirección General de Epidemiología y hacerla suya, mediante un riguroso análisis crítico.

El uso aritmético, algebraico y geométrico del número que se emplea en el diagrama de composición ternario o diagrama triangular, les permitió a los estudiantes la resignificación de la asociación de los datos de fallecimientos de COVID-19 en México.

El trabajo con los diferentes usos del número en el diagrama triangular se puede considerar como una propuesta para desarrollar el SNA en los estudiantes de un nivel medio superior y su vez les ayuda a concebir al número como un elemento integrador de las matemáticas y concebirlo mucho más allá de los aritmético. El SNA es un tema de gran interés en la matemática y puede ayudar a encontrar soluciones a problemas escolares. Se puede establecer que, el diagrama triangular es una de las maneras de lograr el desarrollo del Sentido Numérico para que los estudiantes sean capaces de hacer "uso del número" en ámbitos algebraicos, geométricos y aritméticos. Es decir, que sean capaces de desempeñarse como sistemas autoorganizados y logren la autonomía necesaria para generar soluciones novedosas a problemas matemáticos, con poco o ningún antecedente. Los estudiantes lograron una integración de los datos que les ayudó a concebir de mejor manera lo sucedido durante la pandemia de COVID-19 en México, lo cual, no es posible si no se desarrollan destrezas de índole actitudinal. Este conjunto de actitudes se desarrolla a través del trabajo con los teoremas de Viviani y Pitágoras entre otros objetos matemáticos, y constituyen la base para la adquisición de nuevas competencias cognitivas. También, les ayuda a lograr la transición de soluciones convencionales preexistentes, hacia nuevas aplicaciones. Adicionalmente, este tipo de propuestas les permite a los estudiantes participar constructivamente como ciudadanos preocupados por la problemática generada por la pandemia de COVID-19.

Referencias bibliográficas

Andrews, P., y Sayers, J. (2015). Identifying opportunities for grade one children to acquire foundational number sense: Developing a framework for cross cultural classroom Analyses. *Early Childhood Education Journal*, *43*(4), 257–267.

Back, J., Sayers, J., y Andrews, P. (2013). *The development of foundational number sense in England and Hungary: A case study comparison*. Paper Presented to the Eighth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education, Antalya, Turkey., 1835–1844.

Batanero, C., Díaz, C., Contreras, J. M., y Roa. R. (2013). El sentido estadístico y su desarrollo. *Números*, *83*, 7-18.

Caballero, M. y Cantoral, R. (2013). Una caracterización de los elementos del pensamiento y lenguaje variacional. En Flores R. (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 1195-1203). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Calmaestra, J. A. N., y Capote, A. (2020). Geografía del envejecimiento en España y Portugal. *Ería: Revista Cuatrimestral de Geografía*, *40*(1), 107–122.

Cantoral, R., Reyes-Gasperini, D. y Montiel, G. (2014). Socioepistemología, Matemáticas y Realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 7*(3), 91-116. https://bit.ly/3s8r0yA

Castaño, S. (1994). Mecánica de los diagramas ternarios: Aplicación en el diagrama de clasificación de las rocas ígneas de Streckeisen. *Enseñanza de las Ciencias: Revista de Investigación y Experiencias Didácticas, 12*(3), 406-411.

Gersten, R., Jordan, N. C., y Flojo, J. R. (2005). Early identification and interventions for students with mathematics difficulties. *Journal of Learning Disabilities*, *38*(4), 293–30.

Hernández, O., López, J., Quintero, A., y Velázquez, A. (2015). *Sentido numérico: más allá de los números*. CreateSpace Independent Publishing Platform.

Herrera, A. P. (2011). Pruebas visuales y su uso didáctico. [Tesis doctoral no publicada] Facultad de Ciencias Físico Matemáticas. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. México.

Gracia, J., y Novelo, A. M. (2010). Trayectorias en diagramas ternarios. *Educación Química*, *21*(4), 300–305.

Kawasaki, K. (2005). Proof without words: Viviani´s Theorem. *Mathematics Magazine*, *78*(3), 213.

McIntosh, A., Reys, B. J., y Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics*, *12*(3), 2–8.

Mendoza, T., y Block, D. (2010). El porcentaje: lugar de encuentro de las razones, fracciones y decimales en las matemáticas escolares. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13*(4), 177-190. https://www.redalyc.org/pdf/335/33529137012.pdf

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics* (NCTM, Ed.). Reston, VA.

Sánchez, A. (1999). *Conocimiento geográfico procedimientos y técnicas para el estudio de la Geografía en secundaria*. NARCEA, S.A. DE EDICIONES.

Suárez, L. (2014). *Modelación-graficación para la matemática escolar*. Ediciones Díaz de Santos.

Tapia, J. y Tan, R. (2021). Ternary diagram for visualizing epidemic progression. *Process Integration and Optimization for Sustainability, 5*, 687-691. https://link.springer.com/article/10.1007/s41660-021-00170-x

Torres-Corrales, D. y Montiel. G. (2021). Resignificación de la razón trigonométrica en estudiantes de primer año de Ingeniería. *Educación Matemática*, 33(3), 171-199. DOI: 10.24844/EM3303.08

Whitacre, I., Henning, B. L., Romeo, J., y Shakespeare, W. (2020). Disentangling the research literature on “number sense” three constructs, one name. *Review of Educational Research*, *90*(1), 202-232.

SECCIÓN 4

EL PENSAMIENTO DEL PROFESOR, SUS PRÁCTICAS Y ELEMENTOS PARA SU FORMACIÓN PROFESIONAL

VOL 35, NÚMERO 1, AÑO 2022

CONOCIMIENTOS DEL FUTURO PROFESOR DE MATEMÁTICAS SOBRE LOS DIFERENTES SIGNIFICADOS DE LA MEDIA ARITMÉTICA

KNOWLEDGE OF THE PROSPECTIVE MATHEMATICS TEACHER ON THE DIFFERENT MEANINGS OF THE ARITHMETIC MEAN

Eulalia Calle, Adriana Breda, Vicenç Font
Universidad de Cuenca (Ecuador), Universitat de Barcelona (España)
eulalia.calle@ucuenca.edu.ec, adriana.breda@ub.edu, vfont@ub.edu

Resumen
En este estudio se caracterizan los conocimientos de futuros profesores de matemáticas de la Universidad de Cuenca acerca del objeto matemático media aritmética. El estudio de abordaje cualitativo de tipo exploratorio interpretativo indica que, de un total de veinte y dos futuros profesores participantes, veintiuno muestran poco conocimiento sobre la complejidad del objeto media aritmética (entendida como pluralidad de significados), presentando dificultades para justificar qué tipo de significado de media aritmética deben usar para resolver un determinado problema.

Palabras Clave: conocimientos matemáticos, formación inicial, media aritmética

Abstract
This study characterizes the knowledge of prospective mathematics teachers, from the University of Cuenca, about the mathematical object of arithmetic mean. This exploratory-interpretive-typed qualitative approach study indicates that, from a total of twenty-two prospective participating teachers, twenty-one show little knowledge about the complexity of the object arithmetic mean (understood as a plurality of meanings), presenting difficulties to justify what kind of meaning of arithmetic mean they must use to solve a specific problem.

Key words: mathematical knowledge, initial training, arithmetic mean

Introducción

El interés por los procesos de mejora en la formación del profesorado ha generado modelos teóricos para identificar y clasificar el conocimiento del profesor (Davis y Renert, 2013; Fernández, Llinares y Valls, 2012; Liston, 2015; Mason, 2002; Rowland, Huckstep y Thwaites, 2005). El modelo de competencias y conocimientos didáctico-matemáticos del profesor de matemáticas (CCDM), basado en el Enfoque Ontosemiótico (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2019) es uno de ellos. En el marco del CCDM, el constructo criterios de idoneidad didáctica (CI) es una de las herramientas que se enseñan en diversos dispositivos formativos para desarrollar en los profesores la competencia de análisis de la idoneidad didáctica de un proceso de instrucción (Godino, Giacomone, Batanero y Font, 2017). La Idoneidad Didáctica se compone por seis criterios con sus respectivos componentes e indicadores. Uno de los criterios es el epistémico, que sirve para valorar la idoneidad matemática de un proceso de instrucción. Dicho criterio, contempla, entre sus componentes, presentar a los alumnos una muestra representativa de la *complejidad de los objetos matemáticos*. Tener en cuenta esta complejidad, como se sostiene en Burgos et al (2018), implica, entre otros aspectos, que el profesor pueda plantear y resolver una tipología diversificada de problemas, encontrar diferentes soluciones y analizar los conocimientos involucrados en la proposición y solución de dichos problemas.

En la línea de investigar sobre la incorporación de la reflexión sobre "la complejidad del objeto matemático a enseñar" en algunas experiencias de formación de profesores, un estudio publicado en Calle, Breda y Font (2020), con 95 docentes ecuatorianos de matemáticas en ejercicio, apunta que la mayoría de ellos no lograban relacionar, de forma correcta, el significado parcial del objeto media aritmética necesario para resolver un problema con su enunciado correspondiente, demostrando poco conocimiento acerca de la complejidad de dicho objeto matemático (entendida como pluralidad de significados). Dicho de otra manera, tenían dificultades para resolver una variedad de problemas en los que alguno de los diferentes significados de la media aritmética era determinante.

Se trata de una dificultad relevante si se tiene en cuenta que: 1) en el contexto ecuatoriano, la propuesta curricular del área de Matemática manifiesta que esta área está enfocada al desarrollo del pensamiento lógico y crítico para interpretar y resolver problemas de la vida cotidiana, implicando que el estudiante egresado del bachillerato sea competente en tomar iniciativas creativas, ser proactivo, perseverante, organizado, y trabajar en forma colaborativa para resolver problemas (Ministerio de Educación, 2016). 2) los bajos resultados de las evaluaciones aplicadas a los jóvenes ecuatorianos por organismos nacionales e internacionales.

La realidad ecuatoriana, reflejada en los bajos resultados de las evaluaciones aplicadas a los jóvenes por organismos nacionales e internacionales (OCDE, 2017), requiere hacer efectiva la propuesta del Ministerio de Educación y superar las graves dificultades de los estudiantes de bachillerato, que no cuentan con conocimientos ni habilidades suficientes para participar de manera satisfactoria en la sociedad del saber. Este requerimiento del país pone en primer plano la necesidad de realizar cambios profundos en la formación inicial y continua de profesores de matemáticas, hasta alcanzar los conocimientos y las competencias didáctico matemáticas que debe tener el futuro profesor de matemáticas (Godino, 2018) para desarrollar la competencia matemática de sus alumnos.

En el marco de esta problemática, el objetivo de este trabajo es analizar los conocimientos de un grupo de futuros profesores ecuatorianos de matemáticas sobre la complejidad del objeto matemático media aritmética. Se ha seleccionado dicho objeto matemático por sus múltiples aplicaciones en contextos intra y extra matemáticos (Batanero, 2000).

A continuación, se presenta el marco teórico, la metodología utilizada, los resultados y algunas consideraciones finales.

Marco Teórico

En esta sección exponemos, de manera breve, el modelo CCDM del EOS y la subcompetencia de análisis de la idoneidad didáctica y, con más detalle, el componente "*Representatividad* de la complejidad del objeto matemático que se quiere enseñar" del criterio de idoneidad epistémica. Por último, explicamos los significados parciales que se han tenido en cuenta para describir la complejidad del objeto matemático "Media Aritmética".

El modelo CCDM y la Idoneidad Didáctica

El Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción matemática (EOS) es un sistema teórico inclusivo en la Educación Matemática que articula diversas categorías de conocimientos y competencias (CCDM), de los profesores de matemáticas consideradas necesarias para una enseñanza idónea de las matemáticas (Godino, Batanero y Font, 2019). En este modelo teórico se considera que las dos competencias clave del profesor de matemáticas son la competencia matemática y la competencia de análisis e intervención didáctica, siendo el núcleo fundamental de esta última (Breda, Pino-Fan y Font, 2017) que consiste en diseñar, aplicar y valorar secuencias de aprendizaje propias y de otros, mediante técnicas de análisis didáctico y criterios de calidad, para establecer ciclos de planificación, implementación, valoración y plantear propuestas de mejora. Esta competencia general está formada por diferentes su competencias (Breda, Pino-Fan y Font, 2017): 1) subcompetencia de análisis de la actividad matemática ─ esta subcompetencia, en Godino, Giacomone, Batanero y Font (2017), se descompone a su vez en dos (competencia de análisis de significados globales y competencia de análisis ontosemiótico de prácticas matemáticas) ─; 2) subcompetencia de análisis y gestión de la interacción y de su efecto sobre el aprendizaje de los estudiantes; 3) subcompetencia de análisis de normas y metanormas; y 4) subcompetencia de valoración de la idoneidad didáctica de procesos de instrucción. En este trabajo nos centraremos, sobre todo en esta última subcompetencia, más en concreto una de sus componentes. La subcompetencia de valoración de la idoneidad didáctica de procesos de instrucción hace hincapié en el análisis de idoneidad didáctica, como una competencia para la reflexión global sobre la práctica docente, su valoración y mejora progresiva (Giacomone, Godino y Beltrán, 2018); por lo tanto, responde a qué criterios seguir en el diseño de secuencias de tareas, cómo desarrollar y evaluar la competencia matemática de los alumnos y qué cambios hacer para conseguir metas de aprendizaje superiores.
Esta noción se descompone en los siguientes criterios parciales de idoneidad didáctica (Font, Planas y Godino, 2010):

- ✓ *Idoneidad epistémica*: se refiere al grado de representatividad e interconexión de los significados institucionales implementados (o pretendidos) respecto de un significado de referencia. Las tareas o situaciones-problemas son un componente fundamental en esta dimensión, y deben involucrar diversos objetos y procesos matemáticos.
- ✓ *Idoneidad ecológica*: grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo del centro, la escuela y la sociedad y a los condicionamientos del entorno en que se desarrolla.
- ✓ *Idoneidad cognitiva*: grado en que los significados pretendidos e implementados están en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/implementados.
- ✓ *Idoneidad afectiva*: grado de implicación (intereses, emociones, actitudes y creencias) del alumnado en el proceso de estudio.
- ✓ *Idoneidad interaccional*: grado en que las configuraciones didácticas y el discurso en la clase permiten, por una parte, identificar conflictos semióticos potenciales (que se puedan detectar a priori), y por otra, resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción.
- ✓ *Idoneidad mediacional*: grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.

En Breda y Lima (2016) y Breda, Pino-Fan y Font (2017) se aporta un sistema de componentes e indicadores que sirve de guía de análisis y valoración de la idoneidad didáctica, que está pensado para un proceso de instrucción en cualquier etapa educativa.

La idoneidad epistémica y la complejidad de los objetos matemáticos

Tanto los componentes como los indicadores de los criterios de idoneidad didáctica se han confeccionado teniendo en cuenta las tendencias, los principios y los resultados de la investigación en el área de Didáctica de las Matemáticas (Breda, Font y Pino-Fan, 2018). En particular, para la idoneidad epistémica se ha tenido en cuenta un principio fundamental del EOS que, con los matices propios de cada enfoque, es (o puede ser) asumido por otros enfoques teóricos del área. Nos referimos al principio que se puede formular de la siguiente manera: los objetos matemáticos emergen de las prácticas, lo cual conlleva su complejidad (Font, Godino y Gallardo, 2013; Rondero y Font, 2015). De este principio se deriva un componente (representatividad) cuyo objetivo es que se tenga en cuenta, dentro de lo posible, dicha complejidad en el diseño y rediseño de las secuencias didácticas (Pino-Fan, Castro, Godino y Font, 2013).

El componente *Representatividad de la complejidad de los objetos matemáticos* (entendida como pluralidad de significados parciales), se refiere al grado de representatividad e interconexión de los significados institucionales implementados (o pretendidos) respecto de un significado de referencia (Font, Pino-Fan y Breda, 2020; Giacomone, Godino y Beltrán-Pelliecer, 2018).

Cada uno de estos significados permite resolver tipos de problemas diferentes, por lo cual, si se quiere conseguir que el alumno sea competente en la resolución de una variedad de problemas, donde el objeto matemático en cuestión tenga un rol determinante, es necesario que el alumno disponga de una red de significados parciales de dicho objeto bien conectados entre sí (Font, Breda y Seckel, 2017). En esta línea, se han realizado diferentes investigaciones sobre la complejidad de la media aritmética, así como la comprensión que tienen de ella los estudiantes y profesores (Batanero, 2000, Calle, Breda y Font, 2020, Rondero y Font, 2015).

En la siguiente tabla (Font, Breda y Seckel, 2017), se recogen los indicadores del componente

Representatividad de la complejidad de los objetos matemáticos del criterio de idoneidad epistémica.

Tabla 1. *El componente Representatividad y sus indicadores.*

Componente de la Idoneidad Epistémica	Indicadores
Representatividad	✓ Los significados parciales (definiciones, propiedades, procedimientos, etc.) son una muestra representativa de la complejidad de la noción matemática que se quiere enseñar ✓ Los significados parciales definiciones, propiedades, procedimientos, etc.) son una muestra representativa de la complejidad contemplada en el currículo de la noción matemática que se quiere enseñar. ✓ Para uno o varios significados parciales seleccionados para su implementación, ¿se contempla una muestra representativa de problemas? ✓ Para uno o varios significados parciales seleccionados para su implementación, ¿se contempla el uso de diferentes modos de expresión (verbal, gráfico, simbólico…), tratamientos y conversiones entre los mismos?

Fuente: Font, Breda y Seckel (2017).

Primero hay que valorar si los significados parciales (definiciones, propiedades, procedimientos, etc.) seleccionados para su implementación son una muestra representativa de la complejidad de la noción matemática que se quiere enseñar (para ello la mirada se dirige a las matemáticas). En segundo lugar, dado que el currículo contempla parte de estos significados parciales, hay que valorar si la muestra de significados presentes en el proceso de instrucción son también una muestra representativa de los contemplados en el currículo (en el currículo en general, en la etapa o ciclo o en el curso donde se realiza la implementación). Una vez seleccionados uno o varios significados parciales para su implementación, valorar. Como mínimo, si se contempla una muestra representativa de representaciones del objeto y de problemas en los que se aplica o emerge.

Complejidad del objeto matemático Media Aritmética

Rondero y Font (2015) profundizan sobre los mecanismos de articulación de la complejidad asociada al objeto matemático media aritmética. Para ello, describen dicha complejidad en términos de diferentes significados: suma de todos los valores dividida por el número de valores; estimación de una medida de una magnitud; valor representativo de un conjunto de datos; operador que asocia a un conjunto de datos un único valor; promedio de promedios y media ponderada. Enseñando una muestra representativa de estos significados, podemos decir que el maestro estaría trabajando, a través de la resolución de problemas, la representatividad del objeto matemático media aritmética y permitiendo que el estudiante articule o conecte los diferentes significados. En esta investigación hemos utilizado tres significados distintos: La media como valor representativo de un conjunto de datos; La media como la estimación de una medida; La media como valor que compensa los excesos con los defectos.

En esta investigación, teniendo en cuenta los sujetos participantes, se consideraron tres de los significados parciales de la media aritmética contemplados en Batanero (2000): la media como *valor representativo de un conjunto de datos*; la media como la *estimación de una medida* y la media como *valor que compensa los excesos con los defectos* (equilibrio, equidad, etc.).

Metodología

En esta investigación se utilizó una metodología con un enfoque interpretativo de tipo exploratorio. Se contó con la participación de 22 futuros profesores de matemáticas que se encontraban cursando la asignatura de Álgebra en la Carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales. El proceso se inició con la presentación de tres significados parciales del objeto media aritmética: la media como valor representativo de un conjunto de datos; la media como la estimación de una medida y la media como valor que compensa los excesos con los defectos (equilibrio, equidad, etc.), significados extraídos de Batanero (2000). Una vez que se interiorizó la pluri-significación de la media aritmética, se consultó sobre la necesidad de que los estudiantes comprendan estos significados y puedan aplicar en la resolución de problema de contexto, para desarrollar competencias matemáticas. Cuando los futuros docentes, indicaron estar de acuerdo, se aplicó una prueba con tres problemas que debían resolver, relacionándolos con sus significados correspondientes y justificando su respuesta. Los significados y problemas propuestos están ubicados en un nivel acorde a su formación inicial como profesionales:

Tabla 2. *Problemas propuestos a los futuros profesores.*

Problema A: Unos niños llevan a clase caramelos. Andrés lleva 5, María 8, José 6, Carmen 1 y Daniel no lleva ninguno. ¿Cómo repartir los caramelos de forma equitativa?

Problema B: Los siguientes valores se obtuvieron al medir la altura (cm.) alcanzada al saltar por un grupo de alumnos antes y después del entrenamiento. ¿Cree que el entrenamiento es efectivo?
Altura alcanzada en cm.

Alumnos	Ana	Bea	Carol	Diana	Elena	Fanny	Laia	Hilda	Inés	Juana
Antes del entrenamiento	115	112	107	119	115	138	126	105	104	115
Después del entrenamiento	128	115	106	128	122	145	132	109	102	117

Problema C: Ocho alumnos de la misma clase miden el peso de un objeto pequeño usando el mismo instrumento, obteniendo los siguientes valores en gramos: 6,2; 6,0; 6,0; 6,3; 6,1; 6,23; 6,15; 6,2. ¿Cuál sería la mejor estimación del peso real del objeto?

Fuente: Batanero (2000).

En el análisis de los resultados se valoró el razonamiento, a través de la justificación de las respuestas brindadas.

Resultados y discusión

Los resultados obtenidos con 22 futuros profesores de Matemáticas, al relacionar significados de media aritmética con problemas propuestos, muestran que la mayoría puede hacerlo de manera correcta (Tabla 3). No obstante, el razonamiento reflejado en la justificación dada a cada problema, indica que los docentes no tienen presente la complejidad del objeto matemático "media aritmética".

Tabla 3. *Evaluación de respuestas dadas por 22 futuros profesores.*

Significados de media aritmética	Respuestas correctas	Respuestas incorrectas
1. La media como valor que compensa los excesos con los defectos	22	0
2. La media como la estimación de una medida	16	6
3. La media como valor representativo de un conjunto de datos	16	6

Fuente: Calle, Breda Font (2022).

Por un lado, las justificaciones dadas al problema A, son en su mayoría aceptables, debido a que, en el enunciado del problema, se sugiere el significado de "media aritmética" como equilibrio o equidad que representa el distribuir los caramelos entre los niños (Figura 1).

Por otro lado, los problemas B y C implican un razonamiento más exigente, más difícil de justificar. A pesar de no responder de manera aceptable, un importante porcentaje de docentes resuelven matemáticamente los problemas; es decir, obtienen la media aritmética y responden más bien a las preguntas de los problemas propuestos, más no a la relación solicitada (relacionar el tipo de problema con su significado correspondiente y justificar dicha relación) (Tabla 4).

Tabla 4. *Nivel de aceptación a las justificaciones dadas por los futuros profesores de matemáticas, cuando relacionan los significados de media aritmética con tres problemas propuestos.*

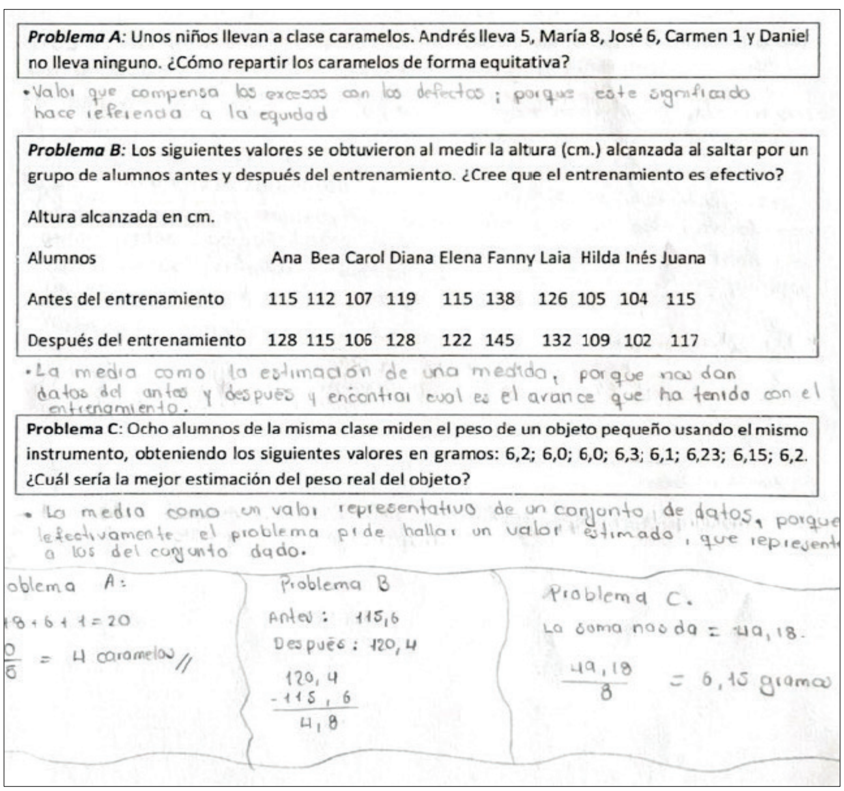
	Justificaciones de respuestas dadas	Total	Porcentaje de aceptación de resolución de los problemas.
Problema A:	Aceptables	18	82%
	No aceptables	4	
Problema B:	Aceptables	1	5%
	No aceptables	17	
	Ninguna justificación	4	
Problema C:	Aceptables	1	5%
	No Aceptables	21	

Fuente: Calle, Breda y Font (2022)

A partir de estos resultados, se puede inferir que los profesores en formación pueden resolver los problemas propuestos, pero tienen dificultades para reflexionar sobre los diferentes tipos de significados y el establecimiento de relaciones entre estos significados y los problemas que permiten resolver.

Dicho de otra manera, los futuros profesores tienen dificultad para comprender que existen varios significados de un mismo objeto matemático, entendidos como su complejidad, que pueden ayudar a resolver un amplio abanico de problemas.

Figura 1. *Respuesta de un futuro profesor.*


Problema A: Unos niños llevan a clase caramelos. Andrés lleva 5, María 8, José 6, Carmen 1 y Daniel no lleva ninguno. ¿Cómo repartir los caramelos de forma equitativa?

• Valor que compensa los excesos con los defectos ; porque este significado hace referencia a la equidad

Problema B: Los siguientes valores se obtuvieron al medir la altura (cm.) alcanzada al saltar por un grupo de alumnos antes y después del entrenamiento. ¿Cree que el entrenamiento es efectivo?

Altura alcanzada en cm.

Alumnos	Ana	Bea	Carol	Diana	Elena	Fanny	Laia	Hilda	Inés	Juana
Antes del entrenamiento	115	112	107	119	115	138	126	105	104	115
Después del entrenamiento	128	115	106	128	122	145	132	109	102	117

• La media como la estimación de una medida, porque nos dan datos del antes y después y encontrar cual es el avance que ha tenido con el entrenamiento.

Problema C: Ocho alumnos de la misma clase miden el peso de un objeto pequeño usando el mismo instrumento, obteniendo los siguientes valores en gramos: 6,2; 6,0; 6,0; 6,3; 6,1; 6,23; 6,15; 6,2. ¿Cuál sería la mejor estimación del peso real del objeto?

• La media como un valor representativo de un conjunto de datos, porque efectivamente el problema pide hallar un valor estimado, que represent[e] a los del conjunto dado.

oblema A:
[5+]8+6+1=20
$\frac{20}{5}$ = 4 caramelos //

Problema B
Antes : 115,6
Después : 120,4
$\begin{array}{r} 120,4 \\ -115,6 \\ \hline 4,8 \end{array}$

Problema C.
La suma nos da = 49,18.
$\frac{49,18}{8}$ = 6,15 gramos

Fuente: Calle, Breda y Font (2022).

Los resultados obtenidos en esta investigación, muestran que los docentes en formación inicial en el área de matemáticas, si bien pueden resolver los problemas propuestos de forma correcta (Figura 1), tienen dificultades para reflexionar sobre la complejidad del objeto matemático "media aritmética". (Rondero y Font 2015). Se trata de un resultado coincidente con la investigación de Leavy y O'Loughlin (2006), cuando analizan la comprensión procedimental y conceptual del objeto matemático media aritmética, la cual muestra, en muchos casos, la limitada comprensión conceptual de dicho objeto por parte de los futuros profesores.

Este resultado coincide con otras investigaciones que muestran que los profesores presentan dificultades en interpretar aspectos epistémicos de las tareas que proponen a sus estudiantes y de su potencial educativo (Stahnke, Schueler y Roesken-Winter, 2016).

Conclusiones

Este trabajo tenía como objetivo caracterizar los conocimientos del futuro profesor de matemáticas sobre los diferentes significados de la media aritmética. Los resultados muestran que los 22 futuros docentes de la Universidad de Cuenca pueden resolver los problemas sobre la media aritmética; sin embargo, cuando se les pide justificar sus respuestas, se infiere que tienen dificultades para relacionar el tipo de problema propuesto con el significado de la media aritmética determinante para la resolución del problema y aún más para justificar dicha relación.

Dada la importancia que tiene el desarrollo de la competencia matemática de los alumnos en el curriculum ecuatoriano y, más en general, en el curriculum de muchos países, es importante fomentar la reflexión de los futuros profesores sobre los diferentes significados de un objeto matemático, ya que presentar una muestra representativa de esta variedad de significados permite a los alumnos poder resolver una variedad de problemas extra matemáticos (Font, Breda y Seckel, 2017).

Agradecimientos

Trabajo desarrollado en el marco del proyecto de investigación PGC2018-098603-B-I00 (MCIU/AEI/FEDER, UE).

Referencias Bibliográficas

Batanero, C. (2000). Significado y comprensión de las medidas de posición central. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *25*, 41-58.

Breda, A., y Lima, V. M. R. (2016). Estudio de caso sobre el análisis didáctico realizado en un trabajo final de un máster para profesores de matemáticas en servicio. *REDIMAT - Journal of Research in Mathematics Education*, *5*(1), 74-10. Doi: 10.4471/redimat.2016.1955

Breda, A., Font, V., & Pino-Fan, L. (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. *Bolema, Rio Claro*, *32*(60), 255-278.

Breda, A., Pino-Fan, L. R., y Font, V. (2017). Meta Didactic-Mathematical Knowledge of Teachers: Criteria for The Reflection and Assessment on Teaching Practice. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 13, 1893-1918. Doi: 10.12973/eurasia.2017.01207a

Burgos, M., Beltrán-Pellicer, P., Giacomone, B., y Godino, J. D. (2018). Conocimientos y competencia de futuros profesores de matemáticas en tareas de proporcionalidad. *Educação e Pesquisa, 44,* 1-22.

Calle, E., Breda, A., Font, V. (2020). ¿Qué significado atribuyen a la media aritmética profesores de matemáticas en ejercicio? *Revista Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *33*(1), 643-652.

Davis, B., & Renert, M. (2013). Profound understanding of emergent mathematics: broadening the construct of teacher‟ disciplinary knowledge. *Educational Studies in Mathematics Education*, *82*(2), pp. 245-265. doi: 10.1007/s10649-012-9424-8

Fernández, C., Llinares, S., & Valls, J. (2012). Learning to notice students‟ mathematical thinking through on-line discussions. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education Online First*. doi: 10.1007/s11858-012-0425-y.

Font, V., Breda, A., & Seckel, M. J. (2017). Algunas implicaciones didácticas derivadas de la complejidad de los objetos matemáticos cuando estos se aplican a distintos contextos. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, *10*(2), 1-23.

Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics, 82,* 97–124.

Font, V., Planas, N., y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, *33*(1), 89-105.

Font, V., Pino-Fan, L., Breda, A. (2020). Una evolución de la mirada sobre la complejidad de los objetos matemáticos. *Revista Paradigma*, *41*(1), 107-129.

Giacomone, B., Godino, J. D., y Beltrán-Pellicer, P. (2018). Developing the prospective mathematics teachers' didactical suitability analysis competence. *Educação e Pesquisa*, *44,* e172011.

Godino, J. D., Batanero, C., Font, V. (2019). El enfoque ontosemiótico: implicaciones sobre el carácter prescriptivo de la didáctica. *For the Learning of Mathematics*, *39*(1), 37-42.

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C., y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema*, *31*(57), 90-113.

Leavy, A., O'Loughlin, N. (2006). Preservice teachers understanding of the mean: Moving beyond the arithmetic average. *Journal of mathematics teacher education*, *9*(1), 53-90.

Liston, M. (2015). The use of video analysis and the Knowledge Quartet in mathematics teacher education programmes. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *46*(1), 1-12. doi:10.1080/0020739X.2014.941423

Mason, J. (2002). *Researching your own practice. The discipline of noticing*. London: Routledge-Falmer.

Ministerio de Educación. (2016). Currículo vigente. Quito. Disponible en: << https://educacion.gob.ec/curriculo/>>

OCDE (2017), Marco de Evaluación y de Análisis de PISA para el Desarrollo: Lectura, matemáticas y ciencias.

Pino-Fan, L., Castro, W. F., Godino, J. D., y Font, V. (2013). Idoneidad epistémica del significado de la derivada en el currículo de bachillerato. *Paradigma*, *34*(2), 123 – 150.

Rondero, C., y Font, V. (2015). Articulación de la complejidad matemática de la media aritmética. *Enseñanza de las Ciencias*, *33*(2), 29-49.

Rowland, T., Huckstep, P., & Thwaites, A. (2005). Elementary teachers‟ mathematics subject knowledge: The Knowledge Quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *8*(3), 255-281. doi:10.1007/s10857-005-0853-5

Stahnke, R; Schueler, S., & Roesken-Winter, B. (2016). Teachers‟ perception, interpretation, and decision-making: a systematic review of empirical mathematics education research. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, *48*(1), 1-27. doi:10.1007/s11858-016-0775-

VOL 35, NÚMERO 1, AÑO 2022

ANÁLISIS DIDÁCTICO REALIZADO POR UN PROFESOR SOBRE UNA PROPUESTA DE ENSEÑANZA DE LA PROBABILIDAD POR MEDIO DEL USO DEL JUEGO *TEXAS HOLD'EM*

A TEACHER'S DIDACTIC ANALYSIS ON A TEACHING PROPOSAL OF PROBABILITY BY USING TEXAS HOLD'EM GAME

Adriana Breda; Gemma Sala; Danyal Farsani
Universitat de Barcelona (España), Norwegian University of Science and Technology (Norueg), Universidad Finis Terrae (Chile)
adriana.breda@ub.edu, gsala@ub.edu, danyal.farsani@ntnu.no

Resumen
Este trabajo busca identificar los criterios de idoneidad implícitos utilizados por un profesor cuándo realiza el análisis didáctico del diseño de un proceso instruccional en lo cual se ha incorporado el uso del juego de póker *Texas Hold'em* para enseñar probabilidad a estudiantes de secundaria. El análisis de contenido se realizó a partir decategorías previas relacionadas con los Criterios de Idoneidad Didáctica. Como resultado se observa que el nivel de análisis didáctico realizado por el profesor fue bajo y el mejor criterio considerado fue el ecológico, mientras que, el interaccional fue nulo. Se concluye que el nivel bajo del análisis didáctico se relaciona, sobre todo, por el hecho de que la unidad didáctica no fue implementada en el aula.

Palabras-clave: formación de profesores, análisis didáctico, enseñanza de la probabilidad

Abstract
This work seeks to identify the implicit suitability criteria used by a teacher when making the didactic analysis of an instructional process design in which the use of Texas *Hold'em* poker game has been incorporated to teach probability to high school students. The content analysis was carried out from previous categories related to the Didactic Suitability Criteria. As a result, it is observed that the level of didactic analysis carried out by the teacher was low and the best criterion considered was the ecological one, whereas the interactional one was null. It is concluded that the low level of the didactic analysis is related, above all, to the fact that the didactic unit was not implemented in the classroom.

Keywords: teacher training, didactic analysis, the teaching of probability

Introducción

Con la finalidad de formar a los profesores de matemáticas en ejercicio en Brasil, en 2010 se inició el Máster Profesional en Matemáticas en la Red Nacional (PROFMAT) que se constituye como un curso de postgrado, presencial y a distancia, ofrecido a profesores de matemáticas que trabajan en la educación básica en Brasil. Este máster tiene como objetivo principal, fomentar la mejora de la enseñanza de las matemáticas en todos los niveles (Brasil, 2013). Este trabajo forma parte de una investigación más amplia (Breda, 2020) que tiene como finalidad investigar cuáles son los criterios de idoneidad utilizados por los profesores participantes del PROFMAT, y en qué medida los utilizan, para justificar que sus propuestas de trabajo de fin de máster (TFM) implican una mejora en la enseñanza de las matemáticas en la Educación Básica. Si bien los profesores que cursan dicho máster no reciben ninguna orientación o pauta para realizar las reflexiones sobre sus procesos de instrucción, el TFM que deben realizar es un espacio valorativo dónde tienen que reflexionar sobre su propuesta didáctica y justificar que se trata de una innovación. En este sentido, el objetivo de este trabajo es presentar un estudio de caso mediante el cual se analizan cuáles son los criterios de idoneidad didáctica implícitos utilizados por un profesor (sin que él conozca dicha herramienta), al que llamaremos Ehlert (2014), cuando él reflexiona sobre su proceso de instrucción que tiene como foco la incorporación de conexiones extramatemáticas, en particular, la propuesta de enseñar probabilidad por medio del juego de póker *Texas Hold'em*.

Marco teórico

En este trabajo se parte de la suposición que el trabajo de fin de máster (TFM) es una tarea que implica un ejercicio de análisis didáctico, ya que en el TFM los profesores deben explicar una propuesta didáctica y justificar por qué esta significa una mejora para la enseñanza. En el campo de la Educación Matemática no hay un consenso sobre los "métodos para la valoración y mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas". Básicamente, existen dos maneras de afrontar esta problemática, desde una perspectiva positivista o desde una de consensual (Breda, Font y Pino-Fan, 2018). Desde la primera, la investigación científica realizada en el área de Didáctica de las Matemáticas nos dirá cuáles son las causas que hay que modificar para conseguir los efectos considerados como objetivos a alcanzar, o, como mínimo, nos dirá cuáles son las condiciones y restricciones que hay que tener en cuenta para conseguirlos. Desde la perspectiva consensual, aquello que nos dice cómo guiar la mejora de los procesos de instrucción de las matemáticas, debe emanar del discurso argumentativo de la comunidad educativa, cuando ésta está orientada a conseguir un consenso sobre "lo que se puede considerar como mejor". La noción de Criterios de Idoneidad Didáctica (CID) propuesta por el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemáticos (EOS, a partir de ahora) (Godino, Batanero y Font, 2007) se posiciona en la perspectiva consensual. Dicha noción es una respuesta parcial a la siguiente problemática: ¿Qué criterios se deben utilizar para diseñar una secuencia de tareas, que permitan valorar y desarrollar la competencia matemática de los alumnos y qué cambios se deben realizar en su rediseño para mejorar el desarrollo de esta competencia? Los criterios de idoneidad pueden servir primero para guiar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y, segundo, para valorar sus implementaciones. A *priori*, los criterios de idoneidad son principios que orientan "cómo se deben hacer las cosas". A *posteriori*, los criterios sirven para valorar el proceso de estudio efectivamente implementado. Esta noción se descompone en los siguientes criterios parciales (Font, Planas y Godino, 2010):

- ✓ *Idoneidad epistémica*: se refiere al grado de representatividad e interconexión de los significados institucionales implementados (o pretendidos) respecto de un significado de referencia. Las tareas o situaciones-problemas son un componente fundamental en esta dimensión, y deben involucrar diversos objetos y procesos matemáticos.
- ✓ *Idoneidad ecológica*: grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo del centro, la escuela y la sociedad y a los condicionamientos del entorno en que se desarrolla.

- ✓ *Idoneidad cognitiva*: grado en que los significados pretendidos e implementados están en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/implementados.
- ✓ *Idoneidad afectiva*: grado de implicación (intereses, emociones, actitudes y creencias) del alumnado en el proceso de estudio.
- ✓ *Idoneidad interaccional*: grado en que las configuraciones didácticas y el discurso en la clase permiten, por una parte, identificar conflictos semióticos potenciales (que se puedan detectar *a priori*), y por otra, resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción.
- ✓ *Idoneidad mediacional*: grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.

En Breda y Lima (2016) y Breda, Pino-Fan y Font (2017) se aporta un sistema de componentes e indicadores que sirve de guía de análisis y valoración de la idoneidad didáctica (como ejemplo en la Tabla 1 se presenta el componente Representatividad de la complejidad de la Idoneidad Epistémica y sus respectivos indicadores). Ese sistema está pensado para un proceso de instrucción en cualquier etapa educativa.

Tabla 1. *El componente Representatividad de la complejidad y sus indicadores.*

Componente de la Idoneidad Epistémica	Indicadores
Representatividad de la complejidad de la noción que se quiere enseñar	✓ Los significados parciales (definiciones, propiedades, procedimientos, etc.) son una muestra representativa de la complejidad de la noción matemática que se quiere enseñar ✓ Los significados parciales definiciones, propiedades, procedimientos, etc.) son una muestra representativa de la complejidad contemplada en el currículo de la noción matemática que se quiere enseñar. ✓ Para uno o varios significados parciales seleccionados para su implementación, ¿se contempla una muestra representativa de problemas? ✓ Para uno o varios significados parciales seleccionados para su implementación, ¿se contempla el uso de diferentes modos de expresión (verbal, gráfico, simbólico…), tratamientos y conversiones entre los mismos?

Fuente: Breda, Pino-Fan y Font (2017).

Metodología

Se realizó el estudio cualitativo de un caso donde se investiga el análisis didáctico realizado por un profesor de matemáticas en servicio cuándo este realiza su TFM. Se corrobora con Ponte (1994), que el estudio de caso se caracteriza por un análisis muy particular. En este tipo de estudio el investigador no pretende cambiar la situación, pero si comprenderla tal como se presenta. Para analizar las reflexiones realizadas por el profesor sobre cómo mejorar su práctica docente, relacionada con el diseño de la propuesta didáctica que propuso en su TFM, se realizó un análisis de contenido a partir de categorías a priori relacionadas con los CID propuestos por EOS (Breda, et al., 2018; Godino, et al., 2007), los cuales son considerados, por dichos autores, como criterios que orientan un proceso de instrucción idóneo en el contexto en que se realiza. Son los siguientes: Idoneidad Epistémica; Idoneidad cognitiva; Idoneidad interaccional; Idoneidad mediacional; Idoneidad afectiva; Idoneidad ecológica.

Para analizar el uso implícito de los CID en el TFM, se estableció un nivel de escala discreta, variando de 0 a 3, donde el resultado final de dicho valor se asignó mediante una triangulación con dos especialistas del EOS. Es decir, la asignación fue realizada mediante la implicación de investigadores del mismo campo teórico a fin de tener diferentes puntos de vista durante el análisis de los TFM − es lo que Lincoln y Guba (1985) denominan *Member Checking*. En la Tabla 2 se explica las características atribuidas para cada nivel.

Tabla 2. *Nivel de asignación para el uso de cada CID.*

Nivel de asignación para cada CI	**Características**
0	✓ En el TFM no se contempla ningún párrafo que pueda ser considerado cómo evidencia del uso implícito o explícito de algún componente o indicador del criterio de idoneidad didáctica que se está analizando.
1	✓ En el TFM se presentan, de manera esporádica, algunos párrafos que puedan ser considerados cómo evidencia del uso implícito o explícito de algún componente o indicador del criterio de idoneidad didáctica que se está analizando.
2	✓ En el TFM se contemplan algunas evidencias del uso implícito y explícito de la mayoría de los componentes y sus respectivos indicadores del criterio de idoneidad didáctica que se está analizando.
3	✓ Cuando las evidencias del nivel 2 son párrafos que presentan bastante detalle, profundidad y coherencia.

Fuente: Breda (2020)

Es importante señalar que el nivel de cada criterio fue establecido, no sólo teniendo en cuenta el número de componentes e indicadores de cada criterio usados por el autor del TFM, sino también, por el detalle y la coherencia de las evidencias de dicho uso (por ejemplo, que los comentarios de los profesores no sean superficiales o intranscendentes).

Resultados

Ehlert (2014) inicia el TFM argumentando que el estudio de la probabilidad, desde su enfoque histórico, está ligado a los juegos de azar, justificando que el juego de póquer, aunque presenta un concepto ambiguo−porque, por un lado, algunos lo consideran un juego de azar, mientras que otros lo consideran un deporte−enriquece el aprendizaje y conduce a un conocimiento más significativo de la probabilidad para los estudiantes. Por estas razones, el autor argumenta que el contexto del póquer es apropiado para enseñar probabilidad. El autor también comenta que, en los parámetros curriculares de Brasil, los contextos de juego son importantes y deben ser considerados para posibilitar el enfoque de resolución de problemas en la Educación Básica.

En el segundo capítulo del TFM explica a qué público estará dirigida la actividad (estudiantes de tercer año de secundaria) y los recursos necesarios para llevarla a cabo. Destaca que la propuesta sirve para profundizar en los siguientes contenidos: Principio fundamental del conteo; Combinaciones simples; Experimento aleatorio; Espacio muestral; Evento; Definición clásica de probabilidad; Propiedades de la probabilidad y probabilidad condicional. En cuanto a cómo se abordarán estos contenidos, el autor explica que no es necesario conocer las reglas de *Holed'em* y que las actividades refuerzan los conceptos de combinatoria y probabilidad. Además, explica que se debe trabajar la propuesta, preferentemente, con el uso de calculadora, y que las probabilidades se deben presentar en notación porcentual. El autor también comenta posibles dificultades previstas para la realización de la propuesta, como, por ejemplo, la complejidad del tema probabilidad. Por otro lado, sostiene que el póquer no tiene problemas, dada la facilidad con la que se puede trabajar este tipo de juego con los estudiantes.

En el tercer capítulo, el autor pone a disposición del lector una colección de problemas que tiene como objetivo profundizar en el conocimiento de la combinatoria y la probabilidad en el contexto del juego de póquer, como, por ejemplo, calcular el número de combinaciones posibles para cada mano de póquer, calcular la probabilidad de que el *river* sea favorable, calcular la probabilidad de que las cartas comunitarias sean favorables, calcular la probabilidad de recibir determinadas cartas y calcular la probabilidad de que cada jugador gane la partida.

En el cuarto capítulo, el autor comenta que su propuesta presenta conexiones interdisciplinarias con la Sociología, con la Educación Física y con la Lengua Inglesa, respectivamente. Explica que, en la Sociología, el profesor asumiría el papel de mediador del debate, complementando y sensibilizando a los alumnos sobre los beneficios de los juegos que utilizan la estrategia y el razonamiento lógico, alertando a los alumnos sobre los posibles riesgos asociados al mundo de los juegos. Sostiene que la Educación Física podría contribuir al estudio o fomentar la investigación entre los estudiantes sobre los llamados deportes mentales. Con relación a la Lengua Inglesa, el autor cree que se podría realizar un trabajo centrado en las expresiones que se utilizan en el póquer, ya que estas se encuentran en el idioma inglés.

El autor finaliza el TFM justificando que su propuesta es una innovación, ya que se relaciona con los contextos cotidianos de los estudiantes, es decir, es una propuesta contextualizada. Además, el autor cree haber construido una propuesta de intervención pedagógica que permite lograr la participación de los estudiantes, el interés por los cálculos de probabilidad y el gusto por estudiar matemáticas. También comenta que no se aplicó la propuesta, pero presenta referencias de que su propuesta despierta interés y la trata como un deporte mental que sirve como un buen instrumento para la resolución de problemas.

Luego de presentar un resumen del TFM de Ehlert (2014), mostraremos cuáles y en qué medida los CID propuestos por el EOS son contemplados implícitamente por el autor en el intento de justificar que la propuesta didáctica presentada en su TFM representa una mejora en la enseñanza de las matemáticas.

Idoneidad Epistémica

Errores

En las descripciones de Ehlert (2014), no hay comentarios sobre posibles errores que pueda cometer el docente desde el punto de vista matemático.

Ambigüedades

El autor del TFM, al evaluar de manera general la actividad planificada, no considera la posibilidad de que un enfoque particular de algunas de las actividades planificadas pueda causar ambigüedades o entendimientos confusos en los estudiantes.

Riqueza de procesos

El autor del TFM justifica la calidad de su propuesta innovadora argumentando que este tipo de tareas, es decir, el uso del juego de póquer *Texas Hold'em*, incentiva a los estudiantes a realizar procesos matemáticos relevantes, en particular, el proceso de resolución de problemas, sin embargo, al verificar las actividades propuestas por el autor, existe una baja exploración de los procesos que argumenta en su TFM, ya que las actividades se repiten y que, en su mayoría, se resuelven utilizando el algoritmo número de casos favorables por el número de casos posibles.

> Durante este trabajo asociamos el juego con la resolución de problemas. Creemos que la resolución de problemas es una metodología indispensable para enseñar matemáticas de calidad. Cuando desarrollamos una enseñanza basada en la resolución de problemas, con aplicaciones de los contenidos estudiados, estamos valorando la importancia de las matemáticas en el contexto sociocultural, estamos motivando a los alumnos a estudiar y, simultáneamente, los estamos preparando para la ciudadanía. En contraste con la simple reproducción de procedimientos y la acumulación de información, los educadores matemáticos apuntan a la resolución de problemas como el punto de partida de la actividad matemática. Esta opción trae implícita la convicción de que el conocimiento matemático tiene sentido cuando los estudiantes se enfrentan a situaciones desafiantes y trabajan para desarrollar estrategias de resolución. (Brasil, 1998 citado en Ehlert, 2014, p. 60).

Representatividad

Varios autores han analizado la complejidad del objeto probabilidad matemática y la han caracterizado de diferentes formas: intuitiva, clásica (Laplace), frecuencial, axiomática (matemática) y subjetiva (Batanero, 2005). Según este mismo autor, estos diferentes significados históricos de probabilidad son los que aún persisten y se utilizan en la enseñanza de la probabilidad. Según Batanero, (2005), de todas las acepciones parciales que componen el objeto matemático probabilidad, el autor de TFM presenta reflexiones sobre la noción clásica de Laplace y sobre la idea de "azar" y no sobre las demás nociones. Lo que nos lleva a entender que no se exploró la complejidad del objeto probabilidad y, en ese sentido, concluimos que hubo poca reflexión sobre el componente relacionado con la representatividad de la complejidad de la noción que se quiere enseñar.

> Definición clásica de probabilidad: cuando en un experimento aleatorio, con espacio muestral finito, considerando que todo evento elemental tiene la misma "posibilidad" de ocurrir (el espacio es equiprobable), la probabilidad de que ocurra el evento A, indicada por $P(A)$, es un número que mide esta posibilidad y viene dado por:
> $\mathrm{P(A)} = \frac{númerodeelementos\ de\ A}{númerodeelementos\ de\ \Omega} = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$, (Ehlert, 2014, p. 27).

Dada la baja reflexión relacionada con los componentes y descriptores que componen el criterio de idoneidad epistémica, evaluamos su uso en 1.

Idoneidad Cognitiva

En este TFM se observa que el autor realiza comentarios, reflexiones, etc. lo que nos permite concluir que tiene en cuenta, en la mayoría de los casos, de forma implícita, algunos indicadores de idoneidad cognitiva.

Conocimiento previo

El autor no presenta detalles sobre los conocimientos previos que deben tener los estudiantes para trabajar su propuesta didáctica. Sin embargo, argumenta que las actividades son de refuerzo y, por lo tanto, sugiere implícitamente que los estudiantes deben tener algún conocimiento de combinatoria y probabilidad clásica.

> Las actividades asociadas al póker desarrolladas en este trabajo son propuestas pedagógicas para madurar y profundizar el conocimiento de la combinatoria y, principalmente, el conocimiento de la teoría de la probabilidad. Para aplicar esta propuesta, no es necesario que el profesor y los alumnos conozcan todas las reglas o sepan jugar al *Texas Hold'em.* Solo se recomienda utilizar algunos conceptos básicos del juego, como el ranking de manos y la composición de la baraja de cartas. Con estos conocimientos mínimos, ya es posible aplicar las actividades en el aula. (Ehlert, 2014, p. 28).

Adaptación curricular a las diferencias individuales

En el informe del autor, no hay argumentos que puedan identificar actividades de expansión o refuerzo. Además, consideramos que no se puede concluir que el autor haya pensado en abordar la diversidad a la hora de plantear su propuesta.

Aprendizaje

El autor evidencia haber planeado realizar algún tipo de evaluación con los estudiantes, ni argumenta cómo la actividad mejora su aprendizaje en torno al tema de probabilidad.

Alta demanda cognitiva

El autor justifica la calidad de su propuesta, ya que considera, aunque sea implícitamente, que responde a una alta demanda cognitiva en sus alumnos, una vez que las actividades propuestas activan procesos cognitivos relevantes como la resolución de problemas.

> Durante este trabajo asociamos el juego con la resolución de problemas. Creemos que la resolución de problemas es una metodología indispensable para enseñar matemáticas de calidad. (Ehlert, 2014, p. 60).

Dada la poca reflexión del autor sobre los conocimientos previos, la adaptación curricular a las diferencias individuales y el aprendizaje, evaluamos la utilización del criterio de idoneidad cognitiva en 1.

Idoneidad Interaccional

En general, el autor no presenta ningún comentario y no da evidencia de haber tenido en cuenta los componentes contemplados en la idoneidad interaccional. En este caso, dada la ausencia de argumentación en este criterio, consideramos que la reflexión con relación a la idoneidad interaccional fue nula.

Idoneidad Mediacional

Recursos materiales (Manipulativo, calculadora, computadora)
En cuanto al uso de recursos, el autor argumenta la preferencia por la calculadora y el material manipulativo (la baraja de cartas) en su proceso de instrucción. Además, explica, en su TFM, dónde y cómo se pueden utilizar dichos recursos.

> [...] se recomienda permitir el uso de la calculadora a los estudiantes, pues, de esta manera, tienen la oportunidad de familiarizarse con este equipo. (Ehlert, 2014, p. 28). Una baraja de 52 cartas consta de 4 naipes (corazones, diamantes, picas y tréboles). Cada naipe tiene 13 cartas, del 2 al 10, J (jota), Q (reina), K (rey) y A (as).

Número de alumnos, horario y condiciones del aula
Respecto a este componente, el autor no hace ningún comentario, por lo que implícitamente se entiende que no asumió o no encontró ningún problema en este aspecto.
Tiempo (De la enseñanza colectiva, tiempo de aprendizaje)
El autor no reflexiona sobre el tiempo y/o el número de clases previstas para realizar la actividad.
Dado el poco uso de los indicadores que forman los componentes explicados anteriormente, evaluamos el uso del criterio de idoneidad mediacional en 1.

Idoneidad Afectiva

Intereses y necesidades
En cuanto a los componentes relacionados con la idoneidad emocional, el autor presenta argumentos únicamente sobre el tema de los intereses y necesidades, cuando justifica que su propuesta incluye una selección de tareas interesantes, que forman parte del cotidiano de los estudiantes.

> De esta forma, estamos fomentando la enseñanza de acuerdo con las directrices vigentes de la educación matemática y, sobre todo, buscamos despertar la atención, el interés y la motivación de los alumnos por el cálculo de probabilidades y por el estudio de las matemáticas. (Ehlert, 2014, p. 18).

El único componente que el autor considera en su TFM relacionado con la idoneidad afectiva son los intereses y necesidades. Sin embargo, aun contemplando este componente, es claro que el autor no tiene en cuenta una apertura a los posibles intereses y necesidades que puedan surgir de los estudiantes. Por estas razones, evaluamos el uso de la idoneidad emocional en 1.

Idoneidad Ecológica

Innovación didáctica
De acuerdo con los lineamientos establecidos por el PROFMAT, los docentes deben justificar que sus propuestas son una innovación para la enseñanza de las matemáticas en la Educación Básica. En este caso, el autor considera que su innovación pasa por realizar actividades que, a través de la resolución de problemas, sean más atractivas para los alumnos y les conduzcan a un aprendizaje más eficiente.

> Así, las actividades pedagógicas propuestas en este trabajo se basan en metodologías que se sostienen en varios lineamientos para la enseñanza de las matemáticas. También pensamos que nuestra búsqueda de alternativas didácticas que reemplacen metodologías tradicionales y desalentadoras por un estudio más atractivo, que desafíe a los estudiantes a través de la resolución de problemas, son indicios de que estamos conduciendo las matemáticas hacia una enseñanza más significativa y eficiente. (Ehlert, 2014, p. 60).

Adaptación al currículo

La propuesta analizada se adapta al currículo de la Educación Básica, pues por un lado se trata de un tema -la probabilidad- que ya está incluido en los parámetros curriculares nacionales y, por otro lado, es un enfoque de estudio a través de la resolución de problemas generado a través del juego. Constituye, por tanto, una forma de enseñar matemáticas, defendida también por los parámetros curriculares.

> En este sentido, la inclusión de juegos representa una importante herramienta pedagógica para despertar el interés de los estudiantes por el estudio de las matemáticas. Según los Parámetros Curriculares Nacionales de Matemáticas (PCN), del Ministerio de Educación (MEC), consideran: la resolución de problemas y la búsqueda de soluciones. (Brasil, 1998 apud Ehlert, 2014, p. 18).
>
> Así, también pretendimos explorar los objetivos de estos contenidos dentro de las matemáticas, los cuales, según lineamientos didácticos complementarios, se basan en: identificar datos y relaciones involucradas en una situación-problema que involucre razonamiento combinatorio, utilizando procesos de conteo; reconocer el carácter aleatorio de los fenómenos y eventos naturales, científico-tecnológicos o sociales, entendiendo el significado y la importancia de la probabilidad como medio de predicción de resultados; cuantificar y hacer predicciones en situaciones aplicadas a diferentes áreas del conocimiento y de la vida cotidiana que involucran el pensamiento probabilístico; identificar en diferentes áreas científicas y otras actividades prácticas, modelos y problemas que hagan uso de la estadística y las probabilidades. (Brasil, 2002 apud Ehelert, 2014, p. 18-19).

Es importante subrayar que el autor justifica que su propuesta se ajusta a los parámetros curriculares cuando asume que el uso de juegos en el aula facilita el aprendizaje de los estudiantes, sin embargo, en ningún documento curricular se fomenta el uso de juegos de azar en el contexto escolar.

Conexiones intra e interdisciplinares

El autor explica en su TFM que su propuesta permite establecer conexiones interdisciplinarias, pues le preocupa que la actividad propuesta sea abordada en las clases de Sociología, Educación Física e Inglés. En cuanto a las conexiones interdisciplinares, como argumentado en el ítem Representatividad de la complejidad, se considera que el autor no reflexionó sobre el significado parcial clásico de probabilidad con los demás significados o con otros contenidos matemáticos.

> En esta propuesta, desde la Sociología, el docente asumiría el papel de mediador del debate, complementando e instigando a los estudiantes a tomar conciencia de los beneficios de los juegos que utilizan la estrategia y el razonamiento lógico. Corresponde también al docente no omitir del debate la advertencia de los posibles riesgos asociados al mundo de los juegos. Riesgos como ser adicto al juego o ser un jugador compulsivo hasta el punto de comprometer las finanzas personales. La disciplina de la Educación Física podría contribuir al estudio o coordinar la investigación entre los estudiantes sobre los llamados deportes mentales o deportes de la mente. En esta tarea se caracterizarían los principales deportes de esta modalidad, como el ajedrez, las damas y el póquer. En cuanto a la interdisciplinariedad con el idioma inglés, se podría realizar un trabajo basado en las expresiones inglesas utilizadas en el póker. Como *Texas Hold'em* se originó en los Estados Unidos, todas las nomenclaturas originales están en inglés. En Brasil, la traducción al portugués de muchos de estos términos no es habitual, por lo que continúan usándose en el idioma original. (Ehlert, 2014, p. 57).

Utilidad social y laboral

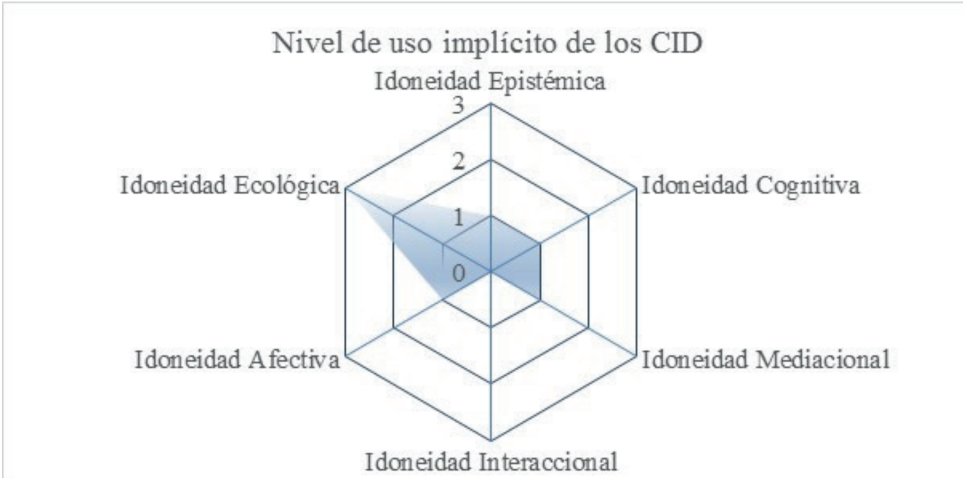
El autor presenta argumentos en cuanto a la utilidad sociolaboral de su propuesta innovadora, en especial que su propuesta se inserta en el contexto sociocultural del estudiante y lo prepara para la ciudadanía.

> Cuando desarrollamos una enseñanza basada en la resolución de problemas, con aplicaciones de los contenidos estudiados, estamos valorando la importancia de las matemáticas en el contexto sociocultural, estamos motivando a los alumnos a estudiar y, simultáneamente, los estamos preparando para la ciudadanía. (Ehlert, 2014, p. 60).

> En contraste con la simple reproducción de procedimientos y la acumulación de información, los educadores matemáticos apuntan a la resolución de problemas como el punto de partida de la actividad matemática. Esta opción trae implícita la convicción de que el conocimiento matemático cobra sentido cuando los estudiantes tienen situaciones desafiantes para resolver y trabajan para desarrollar estrategias de resolución. (Brasil, 1998 apud Ehlert, p.60).

La propuesta aquí analizada tiene en cuenta la mayoría de los componentes que componen la idoneidad ecológica, con excepción de las conexiones intradisciplinares y, por ello, evaluamos el uso del criterio ecológico en el nivel 3. En la Figura 1, se presenta una gráfica del nivel de uso implícito de cada uno de los CID en las reflexiones que hace el profesor con elación a la propuesta de enseñanza que presenta en su TFM.

Figura 1. *Nivel de uso implícito de cada CID.*



Fuente: Breda, Salay Farsani (2022)

Conclusiones

En términos generales, el nivel de análisis didáctico de este TFM que realizó el profesor puede considerarse bajo, y el criterio mejor contemplado por el autor fue el ecológico. Aunque el autor justifique que su propuesta es innovadora mediante el uso del juego *Texas Hold'em* para enseñar la probabilidad estableciendo el proceso de conexión extramatemática, se entiende que, en la propuesta presentada, esta conexión se materializa superficialmente, explorando muy poco los procesos relevantes para la actividad matemática, tal como se describe en los criterios de idoneidad epistémica. El hecho de que esta propuesta no hubiera estado implementada, influye en que presente una baja reflexión en relación a las idoneidades afectiva y cognitiva y que la reflexión acerca a la idoneidad interaccional fuese nula. Se concluye que la propuesta presenta un desequilibrio en el uso de idoneidades, resultado que se corrobora con el encontrado en (Breda et al., 2017).

Un aspecto, difícil de explicar, es la razón por la cual los CID funcionan implícitamente como regularidades en el discurso de los profesores, sin habérsele enseñado el uso de esta herramienta para pautar su reflexión. Una posible explicación es que la formación recibida en el PROFMAT los ha llevado a realizar este tipo de análisis. Sin embargo, la investigación de Caldatto, Pavanello y Fiorentini (2016) nos lleva a creer que las características de la formación recibida en el PROFMAT no promueven en los profesores participantes este tipo de reflexión. Por tanto, una explicación plausible de que los criterios, sus componentes e indicadores funcionen como regularidades en el discurso del profesor es que reflejan consensos sobre cómo debe ser una buena enseñanza de las matemáticas ampliamente asumidos en la comunidad de educadores matemáticos; y es plausible pensar que el uso implícito que hace el profesor de los criterios de idoneidad didáctica se debe a su formación y experiencia previa, la cual le hace partícipe de dichos consensos (Breda, 2020).

Agradecimientos

Este trabajo se desarrolló en el marco de proyectos de investigación en formación docente: PGC2018-098603-B-I00 (MINECO / FEDER, EU), PID2021-127104NB-I00 y Competencias y conocimientos del docente de primaria y secundaria para la enseñanza de las matemáticas en modalidad híbrida (SENACYT/FIED21-002).

Referencias

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME*, *8*(3), 247-263.

Brasil. (2013). Un análisis cualitativo y cuantitativo de los perfiles de los candidatos a la Maestría Profesional en Matemáticas en la Red Nacional (PROFMAT).

Breda, A. (2020). Características del análisis didáctico realizado por profesores para justificar la mejora en la enseñanza de las matemáticas. *Bolema*, *34*(66), 69-88. Doi: https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a04

Breda, A., Font, V., Lima, V. M. R., y Madruga, Z. E. F. (2017). Análisis didáctico realizado por un profesor en su trabajo de fin de master. In *Anais del VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (pp. 277-284). Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

Breda, A., Font, V., Pino-Fan, L. R., (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica, *Bolema, 32*(60), 255-278. Doi: https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a13

Breda, A., y Lima, V. M. R. (2016). Estudio de caso sobre el análisis didáctico realizado en un trabajo final de un máster para profesores de matemáticas en servicio. *REDIMAT - Journal of Research in Mathematics Education*, *5*(1), 74-10. Doi: 10.4471/redimat.2016.1955

Breda, A., Pino-Fan, L. R., y Font, V. (2017). Meta Didactic-Mathematical Knowledge of Teachers: Criteria for The Reflection and Assessment on Teaching Practice. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 13, 1893-1918. Doi: 10.12973/eurasia.2017.01207a

Caldatto, M. E., Pavanello, R. M., & Fiorentini, D. (2016). O PROFMAT e a Formação do Professor de Matemática: uma análise curricular a partir de uma perspectiva processual e descentralizadora. *Bolema, 30*(56), 906-925. Doi: https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n56a03

Ehlert, S. J. (2014). *A matemática no pôquer: explorando problemas de probabilidade*. Dissertação de mestrado. Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande.

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39*(1), 127-135.

Lincoln, Y. S. y Guba, E. G. (1985). *Naturalistic inquiry*. Beverly Hills: Sage.

Ponte, J. P. (1994). O estudo de caso na investigação em educação matemática. *Quadrante, 3*(1), 3-18.

VOL 35, NÚMERO 1, AÑO 2022

COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE EQUIVALENCIA LÓGICA A TRAVÉS DEL MODELO DE PIRIE Y KIEREN

UNDERSTANDING THE CONCEPT OF LOGICAL EQUIVALENCE THROUGH THE PIRIE AND KIEREN MODEL

Eduardo Adam Navas-López
Universidad de El Salvador (El Salvador)
eduardo.navas@ues.edu.sv

Resumen

En este artículo se analiza el proceso que sigue un grupo de alumnos universitarios para determinar una equivalencia lógica. Para ello se analiza la actividad de dichos alumnos cuando resuelven en el aula de clases la tarea de determinar si una expresión lógica es lógicamente equivalente a otra. Esto ha permitido describir el crecimiento, progreso o evolución de su comprensión a través de los diferentes niveles de comprensión siguiendo el modelo propuesto por Pirie y Kieren. Las interacciones entre los alumnos les permiten avanzar desde el nivel de Conocimiento Primitivo hasta el nivel de Observación.

Palabras clave: pirie y kieren, modelo mental, equivalencia lógica, demostración matemática

Abstract

This article analyzes the process followed by a group of university students to determine a logical equivalence. The activity of these students is analyzed when they solve, in the classroom, the task of determining whether a logical expression is logically equivalent to another. This has made it possible to describe the growth, progress or evolution of their understanding through the different levels of understanding, following the model proposed by Pirie and Kieren. Interactions between students allow them to advance from the primitive knowledge level to the observation level.

Key words: pirie and kieren, mental model, logical equivalence, mathematical proof

Introducción

El estudio de las demostraciones formales es fundamental para los estudiantes de carreras con fuerte carga matemática. Entre otras cosas, es necesario formar adecuadamente el conocimiento de la naturaleza de las demostraciones matemáticas, y particularmente la noción de Validez Lógica, para lo cual es necesario el conocimiento del concepto de Equivalencia Lógica (Alfaro Carbajal, Flores Martínez y Valverde Soto, 2019). Por ello es importante que los primeros cursos de carreras como Licenciatura en Matemática y Licenciatura en Estadística enfaticen la importancia del concepto de Equivalencia Lógica.

El profesor formador de matemáticos debe conocer los rudimentos de la evolución de la comprensión de un concepto tan elemental. Por ello nos preguntamos, ¿cómo se caracteriza la evolución o el crecimiento de la comprensión del concepto de Equivalencia Lógica en los alumnos de primer año de carreras como las mencionadas?

Así es como en este estudio se explora el crecimiento de la comprensión del concepto de Equivalencia Lógica en un grupo de alumnos basándose en el modelo de Crecimiento de la Comprensión Matemática de Pirie y Kieren (1989, 1994).

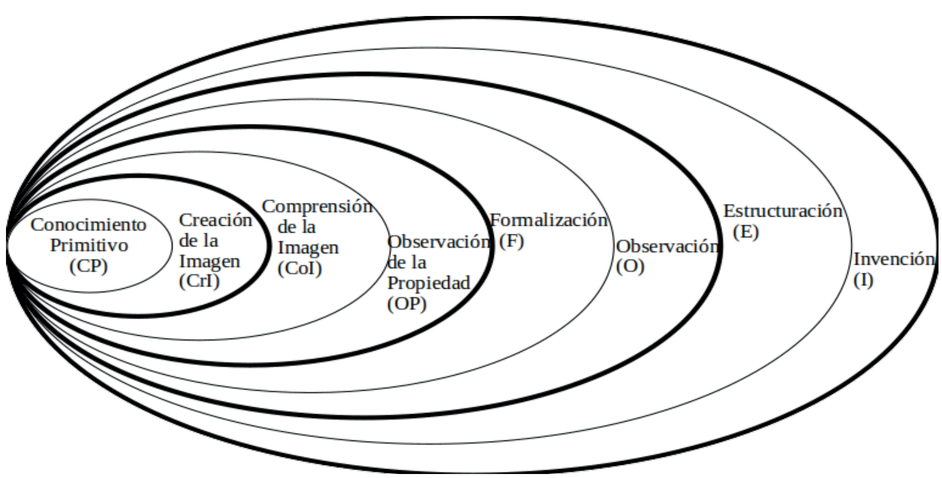
Marco teórico

Existen múltiples aproximaciones al concepto Comprensión (Meel, 2003). Una de estas aproximaciones es la base del modelo de Pirie y Kieren (1989):

La comprensión matemática se puede definir como estable pero no lineal. Es un fenómeno recursivo, y la recursión parece ocurrir cuando el pensamiento cambia los niveles de sofisticación. De hecho, cada nivel de comprensión se encuentra contenido dentro de los niveles subsiguientes. Cualquier nivel particular depende de las formas y los procesos del mismo y, además, se encuentra restringido por los que están fuera de él. (p. 8)

El de Pirie y Kieren (1989) es un modelo de ocho niveles: Conocimiento Primitivo, Creación de Imagen, Comprensión de la Imagen, Observación de la Propiedad, Formalización, Observación, Estructuración, e Invención. Se han tomado las traducciones de Meel (2003). Ver Figura 1.

Figura 1: *Esquema del Modelo de Pirie y Kieren (1989, 1994)*



A continuación, se presentan brevemente las descripciones de los niveles:

«Conocimiento Primitivo» (CP) se refiere al conocimiento previo que el alumno tiene. Es el punto inicial, posiblemente una gran cantidad de información que puede o no dar forma a la evolución de la comprensión. Está formado por todo lo que el estudiante sabe y puede hacer excepto el conocimiento sobre el concepto considerado. Lo que el estudiante ya sabe sobre el concepto objeto de estudio forma parte del resto de niveles del modelo.

«Creación de Imagen» (CrI) es el nivel donde se desarrollan las conexiones entre los referentes y los símbolos, formando imágenes (no necesariamente pictóricas). Cuando el estudiante precisa de actividades concretas para representar de algún modo el concepto matemático objeto de estudio, se encuentra en este nivel.

«Comprensión de la Imagen» (CoI) es cuando se desarrollan las imágenes mentales. Si el alumno es capaz de utilizar una construcción mental sobre el concepto sin necesidad de realizar actividades concretas o trabajar con ejemplos particulares, el alumno se encontrará en este nivel.

«Observación de la Propiedad» (OP) es cuando se desarrollan las propiedades que relacionan que Vinner (1983) llama Imagen de Concepto. Es decir que se alcanza este nivel cuando el estudiante trabaja con las imágenes que ya posee y es capaz de reflexionar buscando propiedades y tratando de generalizarlas.

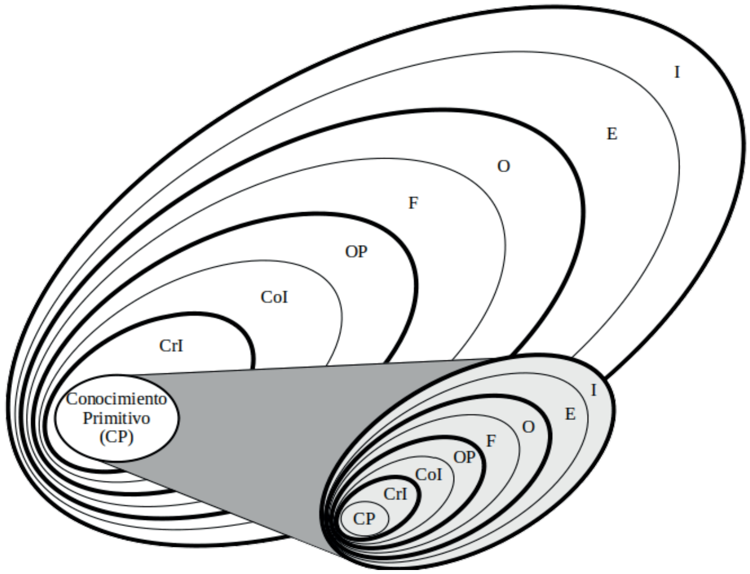
«Formalización» (F) es cuando se forman propiamente las Definiciones de Concepto de Vinner (1983) donde las definiciones generales proporcionadas por los estudiantes deben ser equivalentes a una definición matemática adecuada, aunque el lenguaje utilizado para describir el concepto no tiene necesariamente que ser un lenguaje matemático formal. Es cuando el alumno tiene la capacidad de pensar sobre las propiedades ya generalizadas y trabajar con el concepto como objeto formal, sin hacer referencia a una acción o imagen particular.

«Observación» (O) es el nivel en el que el estudiante es capaz de observar, estructurar y organizar los procesos de pensamiento personales y reconocer las ramificaciones de los procesos de pensamiento. Además es cuando puede combinar las definiciones, ejemplos, teoremas y demostraciones para identificar los componentes, las conexiones y los medios para cruzar en tales conexiones.

«Estructuración» (E) es cuando el estudiante puede explicar propiedades mediante un sistema axiomático. En este momento el estudiante es capaz de concebir las demostraciones de las propiedades asociadas al concepto.
«Invención» (I) es el nivel en el que el alumno tiene la capacidad de liberarse del conocimiento estructurado que representa la comprensión total y puede crear preguntas totalmente nuevas que tendrían como resultado el desarrollo de un concepto nuevo. Es decir, cuando el alumno es capaz de preguntarse ¿qué pasaría si…?

Como describen Pirie y Kieren (1990, 1994), este es un modelo de naturaleza fractal, ya que los niveles externos crecen en forma recursiva desde los niveles internos, pero el conocimiento a un nivel externo permite y retiene los niveles internos. Los niveles externos se insertan y envuelven a los internos. Ver Figura 2.

***Figura 2:** Naturaleza recursiva de los niveles del modelo de Pirie y Kieren*



Una característica muy importante del modelo es el *Redoblado* (Pirie y Kieren, 1994). Cuando el alumno se encuentra con un problema cuya solución no se puede encontrar en forma inmediata, es necesario volver a doblar para llegar a un estrato más interno y luego extender la comprensión actual e inadecuada a partir de ahí. Esto provoca la re-examinación de la comprensión de forma diferente a como se hizo previamente.

Otra característica del modelo son los *Límites de Falta de Necesidad* (Pirie y Kieren, 1994). Estos límites ocurren cuando el estudiante pasa a una comprensión más elaborada y estable que no requiere necesariamente los elementos de los estratos más bajos. Estos límites son tres: (a) entre los niveles Creación de Imagen (CrI) y Comprensión de la Imagen (CoI), (b) entre los niveles de Observación de la Propiedad (OP) y Formalización (F), y (c) entre los niveles de Observación (O) y Estructuración (E). Estos límites pueden verse en las Figuras 1 y 2 como líneas divisorias más gruesas.

Este modelo se ha utilizado en múltiples investigaciones para explorar y caracterizar la comprensión de diferentes conceptos matemáticos.

Meel (2003) hace una revisión de la evolución reciente de algunos marcos teóricos sobre la comprensión matemática, como las teorías de Pirie y Kieren (1989, 1990, 1992, 1994), la APOE de Dubinsky (1991), Dubinsky y Mcdonald (2001), los obstáculos cognitivos de Cornu (1991) y Sierpińska (1987) sobre el concepto de límite, la definición de concepto e imagen de concepto de Tall y Vinner (1981), y Vinner (1983, 1991), las representaciones múltiples de Kaput (1985) y sobre las concepciones operacionales y estructurales de Sfard (1991). Principalmente el artículo analiza y compara las definiciones de Comprensión Matemática propuestas por el modelo de Pirie y Kieren y el de Dubinsky, que según Meel (2003) son ambos de origen constructivista.

La tesis doctoral de Gallardo Romero (2004) analiza la comprensión del conocimiento del algoritmo estándar para la multiplicación de números naturales en estudiantes de primaria utilizando dos modelos, uno de ellos es el de Pirie y Kieren (1989, 1994).

El artículo de Martin (2008) desarrolla en mayor profundidad el marco teórico del proceso de redoblado, que es clave en el modelo de Pirie y Kieren (1989, 1994).

La tesis doctoral de Villa Ochoa (2011) estudia la comprensión de la tasa de variación de funciones reales en un curso de precálculo como una manera de ofrecer una interpretación variacional de la derivada antes de estudiar el concepto de derivada, utilizando este modelo.

Los artículos de Codes Valcarce, Delgado Martín, González Astudillo y Monterrubio Pérez (2013) y Delgado Martín, Codes Valcarce, Monterrubio Pérez y González Astudillo (2014) estudian la comprensión por parte de estudiantes universitarios del concepto de serie numérica y otros conceptos asociados, como límite, infinito y sumas parciales, utilizando también el modelo de Pirie y Kieren (1989, 1994).

Más recientemente, Plazas Alvarado (2020) reporta el uso el modelo de Pirie y Kieren (1989, 1994) para desarrollar una unidad didáctica sobre el cálculo de áreas de regiones delimitadas por sectores circulares y cuerdas de circunferencia en un curso de geometría para estudiantes de ingeniería.

Carmona Correa (2020) en su tesis de maestría realiza un estudio de casos en alumnos de quinto grado de primaria sobre su comprensión de los conceptos de paralelismo y perpendicularidad basándose en el modelo de Pirie y Kieren (1989, 1994). En este estudio hubo tres grupos con avances diferentes, unos lograron llegar al nivel de Creación de Imagen (CrI), otro logró llegar al nivel Comprensión de la Imagen (CoI), y un tercer grupo logró llegar al nivel de Observación de la Propiedad (OP). Con esto se muestra que los resultados individuales de la comprensión de conceptos matemáticos, incluso sencillos, son bastante heterogéneos a pesar de tratarse de un mismo grupo de alumnos más o menos homogéneo.

Angulo Vergara, Arteaga Valdés y Carmenates Barrios (2020) analizan teóricamente la relación entre los modelos de desarrollo de razonamiento geométrico de van Hiele y de comprensión de conceptos matemáticos de Pirie y Kieren (1989, 1994) con el nivel de desarrollo del lenguaje y del pensamiento de los alumnos de primaria.

Metodología

En este estudio se analizan las conversaciones grabadas de unos alumnos universitarios de primer año mientras resuelven una serie de ejercicios de equivalencias lógicas. La grabación fue transcrita y analizada posteriormente para identificar cada intervención junto con el avance logrado en la demostración hasta ese momento y el nivel de comprensión del concepto según el modelo de Pirie y Kieren.

En las clases teóricas se ha explicado previamente los fundamentos de la lógica proposicional, identificación de proposiciones, los conectivos lógicos, conversión de representación verbal a representación simbólica (y viceversa) de expresiones lógicas, concepto de equivalencia lógica, y propiedades del álgebra de Boole o álgebra proposicional (leyes de DeMorgan, idempotencia, doble negación, etc.) resumidas en la Tabla 1. En teoría todo esto forma parte del Conocimiento Primitivo (CP) para el concepto de Equivalencia Lógica.

Tabla 1. *Tabla de Equivalencias Lógicas.*

Doble negación	$\neg\neg p \Leftrightarrow p$
Leyes conmutativas	$(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$ $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$ $(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \leftrightarrow p)$
Leyes asociativas	$[(p \vee q) \vee r] \Leftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$ $[(p \wedge q) \wedge r] \Leftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$
Leyes distributivas	$[p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$ $[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$
Leyes de idempotencia	$p \vee p \Leftrightarrow p$ $p \wedge p \Leftrightarrow p$
Leyes de identidad	$p \vee 0 \Leftrightarrow p$ $p \wedge 1 \Leftrightarrow p$
Leyes de dominación	$p \vee 1 \Leftrightarrow 1$ $p \wedge 0 \Leftrightarrow 0$
Leyes de negación	$p \vee \neg p \Leftrightarrow 1$ $p \wedge \neg p \Leftrightarrow 0$
Leyes de De Morgan	$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$
Leyes de absorción	$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$ $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$
Contrarrecíproca	$(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$
Implicación	$(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$ $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$
O exclusivo	$(p \oplus q) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$
Si y sólo si	$(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$ $(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)]$ $(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow \neg(p \oplus q)$

Fuente. Elaboración propia.

El álgebra proposicional se estudia en el primer ciclo del primer año de la carrera de Licenciatura en Matemática y Licenciatura en Estadística en la primera unidad de la materia Lógica Matemática. Los conocimientos previos de los estudiantes antes de comenzar la unidad son los adquiridos en la educación media.

La actividad fue diseñada para lograr que los alumnos, agrupados por afinidad, adquirieran una comprensión más completa del concepto de equivalencia lógica a través de la demostración de que una cierta proposición es lógicamente equivalente a otra. Para resolver la actividad, los alumnos disponían de sus apuntes de clase de la materia, una tabla de resumen de las propiedades del Álgebra de Proposicional (Tabla 1) previamente explicada, y de asistencia de parte del profesor.

Este ejercicio se llevó a cabo con todos los alumnos del curso, pero la grabación sólo contiene la discusión completa de tres alumnos en primera matrícula en la materia (es decir que es la primera vez que cursan la materia), que estuvieron de acuerdo con dejar que el profesor los grabara con la condición de mantener el anonimato.

El ejercicio era el siguiente:

"Demuestre por medio de la aplicación de propiedades del Álgebra Proposicional que se cumplen las siguientes equivalencias lógicas:

1. $(p \vee q) \wedge \neg p \Leftrightarrow \neg p \wedge q$
2. $p \rightarrow (q \rightarrow r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \rightarrow r$
3. $(p \vee q) \rightarrow r \Leftrightarrow (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$"

Resultados y análisis de resultados

Se analizan las conversaciones, los razonamientos expresados y las acciones realizadas, a la luz del modelo de Pirie y Kieren (1989, 1994) de los alumnos A, B y C. Se han incorporado entre corchetes los niveles de comprensión que la conversación induce a creer que tienen los alumnos en los momentos clave. También si incluyen las intervenciones del profesor (P). Se dividirá esta sección según los ejercicios que el grupo iba resolviendo secuencialmente, luego de la conversación de cada ejercicio se incluye una tabla con el procedimiento realizado por los alumnos, y al final se presentará un gráfico con los avances de cada alumno de acuerdo a cada ejercicio resuelto.

Ejercicio 1

Primero los alumnos proceden a leer el enunciado.
A: (Lee). – Demuestre por medio de la aplicación …
B: – Ah, tenemos que usar la tabla. [Se refiere a la tabla de propiedades del Álgebra Proposicional (ver Tabla 1)] [CrI]
C: – ¿La que nos dio el Profe? [CP]
B: – Sí, esa.
C: – ¿No lo podemos hacer por Tablas de Verdad? [CoI]
P: – No. En esta ocasión deben hacerlo usando las propiedades de la tabla (ver Tabla 1)
C: – Vaya.
B: – Veamos la tabla … [CrI]
A: – Tenemos que partir de un lado de la doble flecha y llegar al otro lado, [se refiere al operador $\Leftrightarrow$ que indica que su operando izquierdo es lógicamente equivalente al operando derecho] ¿Verdad Profe? [CoI]
P: – Así es.
B: – El Profe nos dijo que normalmente deberíamos empezar del lado más grande, [se refiere a partir del operando del operador $\Leftrightarrow$ con más conectivos] ¿Verdad? [CoI]
P: – Casi siempre es más fácil así.
A: – Entonces [partimos] del lado izquierdo. [Se refiere a la expresión $(p \vee q) \wedge \neg p$]
C: – ¿Y qué propiedad tenemos que aplicar? [CP]
A: – Distributiva [F]
B: – Pero primero Conmutativa. [CrI]
A: – Sí, es cierto. Primero la Conmutativa. [Consciente que sus compañeros necesitan ver paso a paso] Entonces $(p \vee q) \wedge \neg p \Leftrightarrow \neg p \wedge (p \vee q)$. [escribe el primer paso justificado por la propiedad Conmutativa para darle la forma que tiene en la Tabla 1 la propiedad Distributiva]
B: – Ahora sí podemos aplicarle la [propiedad] Distributiva. [CrI]
A: – Sí. [lo escribe, es el segundo paso. Ver Tabla 2, paso 2]
C: – Pero se hizo más grande… [CrI]
A: – Sí, pero aquí podemos aplicar la ley de Negación… y se va a simplificar. [Aplica ley Conmutativa y de Negación, ver Tabla 2, pasos 3 y 4] [F]

B: – ¿Y ahora?
C: – «Cero [Falso] o otra cosa es otra cosa», ¿verdad? [se refiere a la propiedad de Identidad] [CoI]
B: – Sí, ¿pero no hay que darle vuelta? [se refiere a poner la expresión en el orden en que aparece en la Tabla 1, $p \vee 0 \Leftrightarrow p$]. [CrI]
A: – Es cierto, no hace falta darle vuelta. Se puede aplicar así, ¿verdad Profe? [OP]
P: – Exacto, debido a que la disyunción y la conjunción son conmutativas.
B: – Entonces ya estuvo. [lo señala en el papel] [OP]
A: – Ajá, entonces aplicamos Identidad.

Tabla 2. *Resumen de Procedimiento del Ejercicio 1.*

Paso 1:	$(p \vee q) \wedge \neg p$	$\Leftrightarrow \neg p \wedge (p \vee q)$	Conmutativa
Paso 2:		$\Leftrightarrow (\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge q)$	Distributiva
Paso 3:		$\Leftrightarrow (p \wedge \neg p) \vee (\neg p \wedge q)$	Conmutativa
Paso 4:		$\Leftrightarrow 0 \vee (\neg p \wedge q)$	De Negación
Paso 5:		$\Leftrightarrow (\neg p \wedge q)$	Identidad

Fuente: Navas (2022)

Ejercicio 2

B: – Ahora vamos con el [ejercicio] 2.
C: – Los dos lados tienen la misma cantidad de conectivos… [duda de qué lado partir] [CrI]
A: – Comencemos del lado izquierdo.
B: – Entonces Implicación. [lo escriben. Ver Tabla 3, paso 1] [CoI]
C: – ¿Y ahora?
A: – Hay otra implicación. [CoI]
C: – ¿Se puede así? [duda ante el hecho de que el consecuente del resultado del paso 1 en la Tabla 3 no es una proposición simple] [CrI]
B: – Sí, se puede.
C: – ¡Ahh!! [lo escriben, ver Tabla 3, paso 2] [CoI]
A: – ¿Y ahora qué hacemos? [los tres se quedan en silencio un momento] [CoI]
B: – La r tiene que quedar al final, sola. [OP]
A: – Es cierto. [OP]
C: – ¿Distribución? [CP]
P: – No. La distribución es de la disyunción sobre la conjunción, y de la conjunción sobre la disyunción. Y ahí las dos son disyunciones.
B: – Entonces hay que agrupar la p con la q. [realizan el paso 3, Tabla 3] [CoI]
P: – Sí, hay que agruparlas, pero deben planificar hacia dónde quieren llegar… y no aplicar las propiedades sólo porque sí.
C: – Yo ya vi eso… [señala el resultado del paso 3, Tabla 3] Está en las de DeMorgan, pero está del lado derecho. [insinúa que no se puede aplicar la propiedad «al revés»] [CrI]
P: – Pero hemos estudiado que las equivalencias lógicas funcionan en ambas direcciones. Así que también podemos sustituir algo que tiene la forma del lado derecho [señalando en la Tabla 1] por su correspondiente del lado izquierdo.
A: – Entonces aplicamos DeMorgan. [realizan el paso 4, Tabla 3] [OP]
B: – Y ahora Implicación otra vez. [lo escriben, ver paso 5, Tabla 3] [CoI]
C: – Ah, ya. [CoI]

Tabla 3. *Resumen de Procedimiento del Ejercicio 2.*

Paso 1:	$p \to (q \to r)$	$\Leftrightarrow p \to (\neg q \vee r)$	Implicación
Paso 2:		$\Leftrightarrow \neg p \vee (\neg q \vee r)$	Implicación
Paso 3:		$\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \vee r$	Asociatividad
Paso 4:		$\Leftrightarrow \neg(p \wedge q) \vee r$	DeMorgan
Paso 5:		$\Leftrightarrow (p \wedge q) \to r$	Implicación

Fuente: Navas (2022)

Ejercicio 3

A: – Hoy vamos con el tercero. [Dice emocionado]
C: – Con este también comenzamos por el lado izquierdo, ¿verdad? [CoI]
B: – Sí, es más corto. [O sea que tiene menos conectivos] [OP]
A: – Aquí hay que desarmar la implicación. [Se refiere a convertir la implicación en una disyunción]
B: – Ajá.
C: – O sea que aplicamos Implicación, ¿va? [CoI]
A: – Cabal. [Lo escriben, ver paso 1, Tabla 4]
B: – Ahora [hay que aplicar] DeMorgan. [Ver paso 2, Tabla 4]
C: – Ahora sí es para adelante. [Hace el gesto de movimiento hacia la derecha. Se refiere a aplicar la propiedad de izquierda a derecha según la Tabla 1. Parece haber comprendido que pueden aplicarse las propiedades en ambas direcciones] [OP]
P: – Sí.
A: – Ahora distribuimos. [F]
C: – Pero de este lado, ¿va? [Se refiere a que si se aplicará la distribución por el lado derecho. Ver transición del paso 2 al 3, Tabla 4] [OP]
B: – Sí, también se puede. [Señala la Tabla 1 y hace el gesto de movimiento en ambas direcciones con la mano sobre la propiedad Distributiva] [F]
C: – Ajá. [Asiente con la cabeza mientras ve lo que A escribió, el paso 3 de la Tabla 4] Y no importa que tenga negaciones, ¿verdad Profe? [F]
P: – Exacto. Esas [$(\neg p \wedge \neg q)$] podrían ser expresiones compuestas más grandes, o sea, con más conectivos.
B: – ¿Y ahora? Implicación dos veces.
A: – Cabal. [Lo escriben, paso 4 de la Tabla 4]
C: – Y ahora del otro lado. [Se refiere a aplicar la definición de Implicación «al revés» al operando derecho de la conjunción del paso 4, Tabla 4. Es decir, de una disyunción a una implicación]
A: – Exacto. [Escriben el paso 5, Tabla 4]
P: – Muy bien.
A: – Profe. Este último ejercicio [se refiere al enunciado del ejercicio 3] parece una distribución de la implicación [se refiere al operador condicional] sobre el «o» [la disyunción]. [O]
P: – Así es, pero sólo por el lado derecho. Habría que demostrar que también se pueda por el lado izquierdo. En una materia [curso] posterior van a estudiar diferentes álgebras, y algunas de ellas tienen propiedades distributivas sólo por un lado, otras por ambos lados, y otras no tienen operadores con distributividad entre sí.

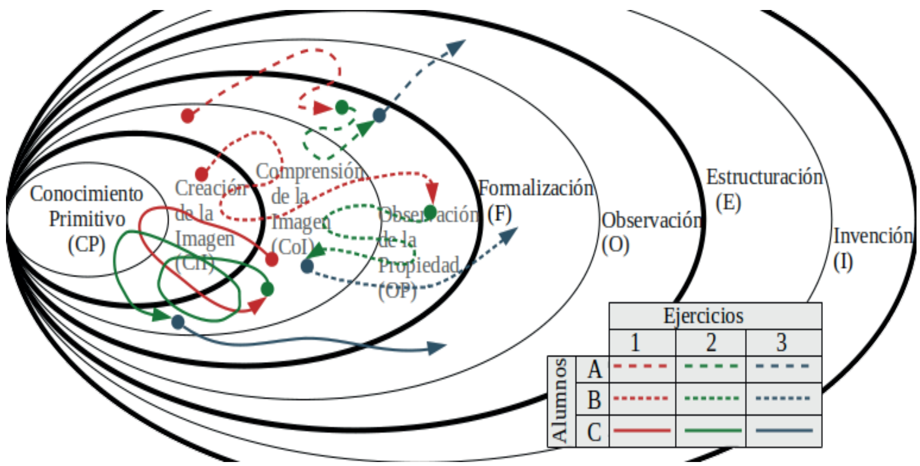
Tabla 4: Resumen de Procedimiento del Ejercicio 3

Paso 1:	$(p \vee q) \rightarrow r$	$\Leftrightarrow \neg(p \vee q) \vee r$	Implicación
Paso 2:		$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee r$	DeMorgan
Paso 3:		$\Leftrightarrow (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$	Distribución
Paso 4:		$\Leftrightarrow (p \rightarrow r) \wedge (\neg q \vee r)$	Implicación
Paso 5:		$\Leftrightarrow (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$	Implicación

Fuente: Navas (2022)

En la Figura 3 se presenta el resumen de los avances en los niveles de comprensión de los tres alumnos analizados según el modelo de Pirie y Kieren (1989, 1994) incluyendo los procesos de redoblado.

Figura 3: *Resultado del análisis de la grabación*



Esta investigación ilustra cómo los alumnos se enfrentan a cuestiones aparentemente muy simples para la resolución de una actividad, como la identificación del procedimiento de solución; cómo han recurrido a sus conocimientos previos sobre las propiedades del álgebra de proposiciones; cómo van aclarando la aplicación de estas propiedades, volviéndose conscientes de que pueden ser aplicadas de diferentes formas, e iniciando la capacidad de formular estrategias de solución.

Los estudiantes han realizado diferentes ejercicios que les han ayudado a crearse una idea matemática del concepto (CrI). Una vez creada esta idea, se pueden liberar de las acciones concretas sin necesidad de recurrir a las propiedades de la Tabla 1 para avanzar en la resolución de la actividad (CoI). Este proceso los lleva a darse cuenta de que los objetos que están manipulando, las proposiciones, tienen ciertas propiedades generalizables (OP) y, finalmente, recurren a algunas generalizaciones para resolver la actividad (F).

En este estudio, se ha constatado que este proceso no es lineal, no se asciende de un nivel de comprensión del conocimiento matemático inferior a otro superior acumulando información. Más bien es una construcción recursiva como indican Pirie y Kieren (1989, 1994) que implica necesariamente uno o más «saltos hacia atrás» (redoblados), a formas más sencillas de conocer los diferentes elementos matemáticos en niveles interiores y que, apoyándose en ellas, se puede seguir avanzando hacia niveles exteriores del modelo en el que el conocimiento se hace más sofisticado y también más consolidado.

Aunque los redoblados puedan parecer un problema cognitivo, en realidad son procesos importantes y necesarios para lograr un avance hacia una forma más consolidada de comprensión matemática, ya que permiten ir «rellenando» y/o complementando aspectos conceptuales y procedimentales que no estaban bien afinados previamente.

Además, se pudo constatar que luego de estos procesos de redoblado, aunque sólo regresaran al mismo nivel, en realidad había ocurrido un aprendizaje, más estable a partir del cual se puede seguir avanzando.

Algunos redoblados fueron más exitosos y efectivos gracias a la confirmación de algunas dudas de los alumnos por parte del profesor, y otros gracias a la seguridad mostrada por alguno de los alumnos más aventajados.

También se observa que en un grupo de trabajo el hecho de que los diferentes miembros alcancen niveles de razonamiento distintos y a diferente ritmo es algo normal (igual que en la tesis de Carmona Correa (2020)), así como que las dudas y los fallos en la comprensión de alguno de los miembros conduzcan a un redoblado hacia niveles inferiores en la compresión del conocimiento, a los que se ven arrastrados otros miembros del grupo.

Conclusiones

Se encontró que los alumnos transitan un proceso que no es lineal para alcanzar la comprensión. Se observa que es un proceso en el que no se asciende de nivel en nivel acumulando conocimiento o información, y tal como apuntan Pirie y Kieren (1989) es un proceso de naturaleza recursiva, en la que se dan los procesos de Redoblado, que les permite a los alumnos sofisticar y consolidar su conocimiento y sus habilidades.

Es importante en este tipo de actividades, orientar a los alumnos de la manera apropiada para no impedir que los alumnos transiten los redoblados. Tal como ocurrió en la investigación de Codes Valcarce y otros (2013), en general hay que dejar que los alumnos resuelvan por sí mismos algunos conflictos cognitivos y no darles directamente la solución, ya que esto impidió que algunos de sus alumnos realizaran el redoblado exitosamente.

Además, se observó que todos los alumnos vivieron un tránsito a diferente ritmo por los diferentes niveles de comprensión.

Es importante seguir investigando el proceso de comprensión de conceptos fundamentales como las Equivalencias Lógicas, los Argumentos Lógicos sin y con Cuantificadores para mejorar los procesos de enseñanza de algunas herramientas fundamentales de la matemática como lo son las demostraciones formales. Particularmente las equivalencias lógicas tienen sus complicaciones debido a las dificultades cognitivas inherentes de algunas propiedades del álgebra proposicional, como las de DeMorgan (Macbeth, Sosa y Genovese, 2010).

Coincidimos con Pirie y Kieren (1989) en que estudiar la comprensión de un concepto por parte de los estudiantes es un proceso muy dificultoso y difícil de generalizar debido a que son necesarias las entrevistas (y no sólo los exámenes tradicionales) para poder descubrir la cambiante comprensión de los alumnos.

Referencias bibliográficas

Alfaro Carbajal, C., Flores Martínez, P., y Valverde Soto, G. (2019). El conocimiento de la práctica matemática sobre las demostraciones en profesores de matemática en formación inicial. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 32*(1), 497–504.

Angulo Vergara, M. L., Arteaga Valdés, E. y Carmenates Barrios, O. A. (2020). La formación de conceptos matemáticos en el proceso de enseñanza- aprendizaje de la Matemática. *Revista Conrado, 16*(74), 298–305.

Carmona Correa, M. C. (2020). *La enseñanza del concepto de paralelismo y perpendicularidad mediante la implementación de un proyecto de aula*. Tesis de Maestría no publicada, Universidad Nacional de Colombia. Medellín, Colombia. Descargado de https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/78753.

Codes Valcarce, M., Delgado Martín, M. L., González Astudillo, M. T. y Monterrubio Pérez, M. C. (2013). Comprensión del concepto de serie numérica a través del modelo de Pirie y Kieren. *Enseñanza de las Ciencias, 31*(3), 135–154.

Cornu, B. (1991). Limits. En D. Tall (Ed), Advanced Mathematical Thinking (pp. 153–166). Dordrecht: Kluwer.

Delgado Martín, M. L., Codes Valcarce, M., Monterrubio Pérez, M. C., y González Astudillo, M. T. (2014). El concepto de serie numérica. Un estudio a través del modelo de Pirie y Kieren centrado en el mecanismo "folding back". *Avances de Investigación en Educación Matemática*, (6), 25–44.

Dubinsky, E. (1991). Constructive Aspects of Reflective Abstraction in Advanced Mathematics. En: Steffe L.P. (eds), *Epistemological Foundations of Mathematical Experience. Recent Research in Psychology*. Springer, New York, NY. doi: 10.1007/978-1-4612-3178-3_9

Dubinsky, E., Mcdonald, M. A. (2001). APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research. En: Holton D., Artigue M., Kirchgräber U., Hillel J., Niss M., Schoenfeld A. (eds), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level*. New ICMI Study Series, vol 7. Springer, Dordrecht. doi: 10.1007/0-306-47231-7_25

Gallardo Romero, J. (2004). *Diagnóstico y evaluación de la comprensión del conocimiento matemático. El caso del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales.* Tesis de Doctorado no publicada, Universidad de Málaga. Málaga, España.

Kaput, J. J. (1985). Representation and problem solving: Methodological issues related to modeling. En E. A. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives* (pp. *381*–398). Hillsdale, NJ: Erlbaum. doi: 10.4324/9780203063545-30

Macbeth, G., Sosa, R. A., y Genovese, I. E. (2010). Asimetría cognitiva de las leyes de DeMorgan. *Calidad de Vida y Salud, 3*(2), 71-81.

Martin L. C. (2008). Folding back and the dynamical growth of mathematical understanding: Elaborating the Pirie–Kieren Theory. *The Journal of Mathematical Behavior, 27*(1), 64-85. doi: 10.1016/j.jmathb.2008.04.001.

Meel, D. E. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: Comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la Teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME, 6*(3), 221-278.

Pirie, S. E. B. y Kieren, T. E. (1989). A recursive theory of mathematical understanding. *For the Learning of Mathematics, 9*(3), 7–11.

Pirie, S. E. B. y Kieren, T. E. (1990). A recursive theory of mathematical understanding: some elements and implications. *Annual Meeting of the American Educational Research Association* (Boston, Massachusetts).

Pirie, S. E. B. y Kieren, T. E. (1992). Watching Sandy's understanding grow. *The Journal of Mathematical Behavior, 11*(3), 243–257.

Pirie, S. E. B. y Kieren, T. E. (1994). Growth in Mathematical Understanding: How Can We Characterise It and How Can We Represent It?. En P. Cobb (Ed.), *Learning Mathematics* (pp. 61–86). Springer, Dordrecht. doi: 10.1007/978-94-017-2057-1_3.

Plazas Alvarado, J. R. (2020). La comprensión en trigonometría en el marco de la teoría de Pirie y Kieren. Universidad de Los Andes, Colombia. Descargado de http://funes.uniandes.edu.co/22723/1/Plazas2020Comprension.pdf

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics*, *22*(1), 1-36. doi: 10.1007/BF00302715

Sierpińska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics,* 18, 371–397. doi: 10.1007/BF00240986

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics,* 12, 151–169. doi: 10.1007/BF00305619

Villa Ochoa, J. A. (2011). *La comprensión de la tasa de variación para una aproximación al concepto de derivada: un análisis desde la teoría de Pirie y Kieren.* Tesis de Doctorado no publicada. Universidad de Antioquia. Medellín, Colombia. Descargado de http://hdl.handle.net/10495/16849.

Vinner, S. (1983). Concept Definition, Concept Image and the Notion of Function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 14*(3), 293-305. doi: 10.1080/0020739830140305.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En D. Tall (Ed), Advanced Mathematical Thinking (pp. 65–81). Dordrecht: Kluwer.

COMPRENDER PROCESOS DE EVALUACIÓN A PARTIR DE LA EXPERIENCIA PROPIA

UNDERSTANDING EVALUATION PROCESSES FROM YOUR OWN EXPERIENCE

Sofía Noemí Gutiérrez Méndez
Universidad de San Carlos de Guatemala, Escuela de Profesores de Enseñanza Media
Guatemala
sofigutierrezm@gmail.com

Resumen
En los primeros años de formación docente universitaria algunos estudiantes cuentan con experiencia en el aula y existen en ellos algunos presaberes en cuanto a evaluación que fueron adquiridos en una mala práctica, uno de ellos es el proceso de mejoramiento de los aprendizajes. La mejor opción para la comprensión de cualquier concepto es experimentarlo, por lo que se realizó una investigación-acción con los estudiantes del profesorado en matemática directamente en una de las pruebas objetivas que ellos sustentan, en ítems de lectura de gráficas. Con el objetivo de realizar un proceso de mejoramiento en este aprendizaje, se establecieron dos grupos de estudiantes que permitieran una comparación, en uno de ellos se realizó incidencia a partir de una tarea y en el otro no. Se aplicó un cuestionario como instrumento de análisis comparativo entre pre y post intervención y se realizó una reflexión grupal, lo cual permitió obtener datos cualitativos y cuantitativos en los que se visualizaron cambios sustanciales en la percepción de los estudiantes sobre este proceso evaluativo.

Palabras claves: mejoramiento de aprendizajes, Lectura de gráficas

Abstract
In the early years of university teaching training, some students have experience in the classroom and they have some pre-knowledge in terms of evaluation that were acquired in bad practice; one of them is the process of learning improvement. The best option for understanding any concept is to experience it, so research-action was conducted with students of mathematics teaching, directly in one of the objective tests that they support, in graphic reading items. In order to carry out a process of improvement in this learning, two groups of students were established to make a comparison; in one of them, evidence was shown from a task, but in the other, it was not. A questionnaire was applied as an instrument of comparative analysis between pre and post-intervention and a group reflection was carried out. It allowed obtaining qualitative and quantitative data where substantial changes in students' perception of this evaluation process were visualized.

Key words: learning improvement of learning, graph reading

Introducción

La Escuela de Formación de Profesores de Enseñanza Media EFPEM de la Universidad de San Carlos de Guatemala forma docentes de doble especialidad en física y matemática, uno de los objetivos de dicha carrera es establecer relación entre los cursos pedagógico, matemáticos y físicos que permitan a partir de la práctica la formación del estudiante en el campo docente donde se desarrollará profesionalmente. Para este caso, se pretende ejemplificar con la práctica los procesos de evaluación, específicamente el proceso de mejoramiento de los aprendizajes, utilizando como medio los fenómenos físicos que requieren de la lectura e interpretación de gráficas. Si bien es cierto, a estos estudiantes se les brinda un curso de evaluación, este aborda de manera muy general la temática del proceso de mejoramiento de los aprendizajes por lo que se hace necesario practicarlo en el área de la ciencia.

Estos docentes en formación deberán incorporarse, y en algunos casos ya están dentro, de un sistema educativo con normas establecidas y regidas por el Ministerio de Educación; por lo tanto, deben estar preparados para actuar ante estas reglas utilizando su especialidad como medio para cumplirlas. Como anécdota, surge en clase un cuestionamiento por parte de un estudiante en el que luego de una prueba objetiva pregunta si se realizará un proceso de mejoramiento, sabiendo que este proceso no está legislado en los estudios universitarios; sin embargo, esto da la pauta para demostrar cómo se realiza este proceso muchas veces sin que ellos lo noten.

Algunas preguntas surgieron por parte del catedrático hacia los estudiantes del profesorado, por ejemplo, ¿qué es el proceso de mejoramiento?, ¿por qué se hace este proceso?, ¿para qué y cómo se hace?, ¿se puede hacer en los cursos de matemática y física? Para sistematizar la información, se aplicó un instrumento con el fin de conocer a través de las respuestas la percepción de los estudiantes sobre este tema.

Para este análisis se tomó como referencia el Módulo de aplicación del proceso de mejoramiento de los aprendizajes elaborado por la Dirección General de Currículo del Ministerio de educación de Guatemala, este documento fue creado para la comprensión en cuanto a la aplicación del proceso de mejoramiento establecido en el Acuerdo Ministerial 1171-2010, Reglamento de evaluación de los Aprendizajes. Esta referencia se tomó por ser la legislación vigente en el ámbito donde los docentes en formación se desenvuelven o lo harán en un futuro inmediato.

También se utilizó como referencia la construcción de las pruebas que realiza la Dirección General de Evaluación siempre del Ministerio de Educación de Guatemala. Para ellos se analizó el informe de la construcción de pruebas para el Nivel de Educación Media, Ciclo Básico, ya que se busca incidir en temas y habilidades en los que se presenta problema en el ciclo educativo en el que se enfoca el profesorado.

La pregunta que lleva a esta situación es ¿qué percepción tienen los estudiantes sobre el mejoramiento de los aprendizajes en matemática?, y actuar sobre esa percepción para resignificar su conceptualización de evaluación matemática.

Fundamento

Este estudio se fundamenta en la teoría socioepistemológica ya que “sostiene que las matemáticas y las ciencias, así como su educación están ligadas a prácticas socialmente compartidas y culturalmente valoradas” (Cantoral, 2016, p. 11). En el caso de los estudiantes las concepciones surgen también de las prácticas sociales a las que han sido sometidos o bien a sus propias prácticas aprendidas en los procesos educativos. Para el caso de la evaluación y la mejora de los aprendizajes en matemática, se puede afirmar que en general parte de la experiencia y la actitud docente, ya “que la incorporación de la evaluación al proceso de enseñanza encuentra obstáculos que provienen en su mayor parte de las actitudes del profesor” (Camilloni, s.f., p.5). En este sentido se realizó una reflexión del problema planteada en tres fases, el conocimiento, la significación y la resignificación de los conceptos.

La resignificación se realizó en dos vías, en cuánto al proceso de mejoramiento de los aprendizajes en matemática, como en concepto de pendiente en lectura de gráficas. Para este caso se utilizó la siguiente definición: "Resignificación del presente o futuro en función del pasado, esto es, comprender mediante la reflexión cómo funciona alguna situación pasada para aprovechar el conocimiento obtenido y restructurarlo en beneficio de la práctica presente o la planeación futura" (Cerecero, 2016, p.95).

Para la resignificación matemática específicamente en el desarrollo de la habilidad de lectura de gráficas se utilizó como fundamento lo citado por Dolores (2007) sobre (Cordero, 2005; Buendía & Cordero, 2005; Domínguez, 2003; Campos, 2003, Rosado, 2004; Flores, 2005), quienes han realizado estudios bajo una perspectiva socioepistemológica que parte de una premisa fundamental que dice que la matemática funcional es aquel conocimiento que debe integrarse a la vida para transformarla (Dolores & Cuevas, 2007,p.73).

La investigación realizada es de corte mixta ya que se aborda la temática desde lo cuantitativo numérico (notas de la prueba) y de cualitativo (comentarios de estudiantes), definiéndolo Hernández, et. al (2008) citado por Hernández et. al (2010) como "un conjunto de procesos sistemáticos, empíricos y críticos de investigación e implican la recolección y el análisis de datos cuantitativos y cualitativos, así como su integración y discusión conjunta, … y lograr un mayor entendimiento del fenómeno bajo estudio" (p.426) y se fundamenta en los principios de la investigación acción, siendo ésta la que permite una autorreflexión llevada a cabo por participantes en situaciones sociales como lo establece Berrocal (s.f.) al citar a Kemmis en 1983, "la I-A es poner en práctica una idea, con vistas a mejorar o cambiar algo, intentando que tenga un efecto real sobre la situación." (Berrocal, s.f., p.3).

Como sigue citando Berrocal (s.f.) la caracterización realizada por Kemmis y Mc Taggart 1988:

> a) La I-A se plantea para cambiar y mejorar las prácticas existentes, bien sean educativas, sociales y/o personales. b) La I-A se desarrolla de forma participativa, es decir, en grupos que plantean la mejora de sus prácticas sociales o vivenciales. c) Metodológicamente se desarrolla siguiendo un proceso en espiral que incluye cuatro fases: Planificación, Acción, Observación y Reflexión. d) La I-A se convierte en un proceso sistemático de aprendizaje ya que implica que las personas realicen análisis críticos de las situaciones (clases, centros o sistemas) en las que están inmersos; (Berrocal, s.f., p.3).

Metodología

Por lo antes descrito se consideró para este estudio que la mejor metodología para ser aplicada era la investigación-acción, para lo cual se realizó una etapa de diagnóstico (aplicación de un cuestionario), aplicación de un instrumento de medida (prueba objetiva), incidencia en un grupo control (tarea), segunda aplicación del mismo instrumento de medida, para realizar el análisis de resultados de los ítems con todos los estudiantes involucrados en el estudio, y así regresar al cuestionario que se utilizó durante el diagnóstico y poder revisar los cambios que surgen en él.

En la etapa de diagnóstico se diseñó un cuestionario que pretendía dar respuesta a las preguntas que dan lugar a esta investigación.
¿Qué describe mejor a un proceso de mejoramiento en el aula?
¿Qué debe mejorarse en el proceso de mejoramiento?
¿Para qué realiza el estudiante el proceso de mejoramiento?
¿Para qué realiza el docente el proceso de mejoramiento?
¿Qué se debe hacer en el proceso de mejoramiento?

Estas preguntas cumplieron con la función de formar una línea base en la evaluación, para determinar si estas percepciones cambian luego de una incidencia. Se procedió a la construcción de una prueba objetiva que respondiera a la temática desarrollada en el curso, también que cumpliera con la norma de la institución para cumplir con la evaluación sumativa.

Considerando que "la evaluación mantiene un proceso de retroalimentación con el aprendizaje, ya que los resultados de los aprendizajes de sus alumnos le permiten al profesor reorientar, en caso necesario, su forma de proceder en la enseñanza y en la evaluación" (Castillo y Cabrerizo, 2010, p.442). En esa misma línea, Granados (2020) afirma que "al terminar un ciclo y previo a iniciar uno nuevo, se da la fase de reflexión. Con ella, se obtiene un conocimiento de la intervención didáctica y los avances, estancamientos, retrocesos de los estudiantes y la oportunidad de hacer cambios". Es por ello por lo que se utilizó el feedback o la retroalimentación, siendo este un proceso de comunicación y ajuste de resultados, como lo plantea una estrategia de entrega de estos, que no se quede como una simple información, sino que produzca mejoras en la percepción de los estudiantes de profesorado.

Previo de la realización de la prueba se llevaron dos procesos, el primero fue la construcción de la tabla de diseño de la prueba en el cual se distribuyen los temas de acuerdo con la taxonomía de Marzano, para luego crear la tabla de especificaciones definida como "un plano bidimensional, presentado como un cuadro de doble entrada que, en su parte horizontal, enumera los niveles y dominio de los aprendizajes y en su eje vertical, indica la lista de temas y subtemas del contenido" (Galo, 2006, p.20).

Tabla 1 *Diseño de la prueba objetiva.*

Ítems	Conocimiento	Comprensión	Análisis	Utilización
Tema 1	2	2	3	
Tema 2	1	1	2	3
Total	3	3	5	3
Porcentaje	22%	22%	34%	22%

Fuente: Gutiérrez (2022)

En la Tabla 1 se muestra como la prueba se distribuye mayoritariamente en el análisis, asignando la misma carga a los indicadores del conocimiento y comprensión, con ello se construye una prueba de forma equilibrada tanto en su contenido como en grado de dificultad.

Tabla 2 *Especificaciones de la prueba objetiva.*

No. De ítem	Contenido	Descripción	Nivel	Punteo
1	Tema 2	Pendiente de la recta	Conocimiento	5
2	Tema 1	Suma por método gráfico	Comprensión	5
3	Tema 1	Representación del vector unitario	Análisis	5
4	Tema 1	Componentes de un vector	Análisis	5
5	Tema 1	Vectores: Operaciones combinadas	Comprensión	5
6	Tema 1	Concepto de vector	Conocimiento	5
7	Tema 1	Suma por método gráfico	Análisis	5
8	Tema 1	Componentes de un vector	Análisis	5
9	Tema 2	Lectura de gráficas	Comprensión	5
10	Tema 2	Aplicación de gráficas en la resolución de problemas	Utilización	20
11	Tema 2	Lectura de gráficas	Utilización	10
12	Tema 2	Lectura de gráficas	Análisis	10
13	Tema 2	Lectura de gráficas para dos eventos	Utilización	10
14	Tema 2	Opinión y complemento	Conocimiento	5
		Nota total	100	

Fuente Gutiérrez (2022)

En la Tabla 2 se puede apreciar que los ítems del 9 al 13 son base para el presente estudió ya que se aborda el tema de lecturas de gráfica presentando un 36% del total de la prueba.

Se procedió a la construcción de la prueba, ésta se elaboró con ítems de selección múltiple y respuesta abierta. Los estudiantes estuvieron en contacto con ella dos veces, a la primera se le denomina Proceso A, a partir de los resultados se determinó que los errores de los estudiantes en la prueba estaban concentrados en la habilidad de la lectura de gráficas. Esto daba pauta para aplicar un proceso de mejoramiento de los aprendizajes y para ello la tarea que se diseñó fue en función de la resignificación del concepto de pendiente de la recta en la velocidad dentro de un movimiento rectilíneo uniforme.

Los estudiantes del profesorado están divididos en dos grupos por lo que, con un grupo se preparó una tarea que abordara los aspectos temáticos en los que deben mejorar y se permitió que esta tarea fuera atendida en grupo de 3 y 4 compañeros, ésta propiciaba la solución del problema solicitando respuestas paso a paso hasta llegar a la solución, los problemas estaban enfocados en el análisis y la utilización del conocimiento y la aplicación de la lectura de gráficas. El otro grupo no tuvo una incidencia por parte del docente, sin embargo, sí se dio respuesta a las preguntas que ellos realizaron con respecto a la prueba, por lo que no se considera una incidencia que fuera con intención.

Los dos grupos de estudiantes tuvieron la opción de realizar de nuevo la prueba objetiva, a lo que se identifica como proceso B, con la única variante que los ítems cambiaron de posición con respecto a la prueba inicial, pero no con el análisis. Además, a ninguno de los grupos se les informó de esta opción con antelación para que no tuvieran una ventaja más que la programada en el grupo control, solamente se les dejó elegir en sustentar la prueba de nuevo o no. También se explicó que su nota ya obtenida en ningún momento sería afectada y que sí tenían opción a cambiarla si esta mejoraba.

En la siguiente reunión con los dos grupos de estudiantes se analizaron los resultados obtenidos para escuchar las interpretaciones que ellos daban a estos con el fin de lograr la observación, análisis y comprensión de los cambios que surgieron después del proceso.

También se entrevistó a estudiantes que obtuvieron cambios positivos relevantes y cambios negativos muy evidentes, esto con el fin de recabar información que permitiera analizar de forma cualitativa la causa de los resultados obtenidos en la actividad de mejora.

Los resultados obtenidos se pueden observar en las tablas que se presentan a continuación. Se utilizaron dos colores para establecer los cambios, uno para los cambios positivos que son los que estaban en cero y cambiaron a un mayor punteo en el proceso B, y otro color para los cambios negativos que son los que pasaron de tener una nota a cero. Las casillas que no están marcadas tienen la misma calificación tanto el proceso A como en el B.

Resultados

La Tabla 3 presenta los resultados de la prueba para los estudiantes que tuvieron incidencia, cabe mencionar que el ítem 14 no aparece ya que este era un ítem de opinión, el cual no era malo o bueno y es ajeno a la investigación. En esta tabla se puede observar que se obtuvieron cambios tanto positivos como negativos en general, sin embargo, la atención del estudio está en los ítems del 10 al 13, en los cuales se presentan la mayoría de los cambios positivos, incluso en el ítem 9 que no pertenece al estudio.

Para el ítem 1, existe una incidencia solo que no fue intencionada, en este caso, en el tema siguiente se utilizó como presaberes y esto permitió resolver dudas de los estudiantes, por lo que es posible que esto influyó el cambio en ese ítem en el momento de la aplicación del proceso B.

La Tabla 4 muestra los resultados de la prueba tanto en el proceso A como en el B de los estudiantes sin incidencia. En ella se describen los resultados de los ítems 1 al 13, al igual que el caso anterior el ítem 14 no es parte del estudio. En esta tabla se hacen evidentes los cambios tanto negativos como positivos que surgieron, el ítem 1 refleja la misma condición del grupo anterior, sin embargo, en esta tabla los cambios no están concentrados en los ítems de estudio como se visualiza en la Tabla 3 de resultados del grupo con incidencia.

Se invitó a los estudiantes del grupo con incidencia que obtuvieron cambios a sostener una entrevista, de los que accedieron, el estudiante código 200511452 con cambio positivo en el proceso B expresó que: “el haber realizado la tarea de gráficas junto con otros compañeros me ayudó a hacerlo en el examen”. El estudiante código 201740309 tuvo un resultado negativo al realizar el proceso B, dijo: “…me metí al examen para ver qué pasaba, pero yo no estuve el día de la tarea y ya se me habían olvidado algunas cosas”.

También se entrevistó a dos personas del grupo sin incidencia el estudiante con código 202007066 dijo: “…después del examen busqué en mi cuaderno lo que no puede responder y en la segunda vez ya lo hice bien”. El estudiante código 201045799 dijo: “me puse muy nerviosa, y como usted no avisó nada, no estudié, yo ya no sabía ni lo que estaba haciendo”.

A manera de retroalimentación (feedback), todos estos resultados fueron expuestos y discutidos en clase, incluso las respuestas de las entrevistas guardando el anonimato en todo momento, esto produjo una discusión y reflexión en conjunto. Algunos reclamaron el no haber participado en la tarea que permitió mejorar, otros mencionaron los beneficios que obtuvieron al resolver en grupo y algunos coincidieron en que los hizo reflexionar sobre cómo están evaluando en la clase de matemática.

Tabla 3. *Resultados del grupo de estudiantes con incidencia.*

	Cod. De est.	item 1	item 2	item 3	item 4	item 5	item 6	item 7	item 8	item 9	item 10	item 11	item 12	item 13
Proceso A	201740309	5.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	5.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 20	10.00 / 10	0.00 / 10	10.00 / 10
Proceso B	201740309	0.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	5.00 / 5	5.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 20	10.00 / 10	0.00 / 10	10.00 / 10
Proceso A	202005633	5.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	5.00 / 5	5.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	20.00 / 20	0.00 / 10	0.00 / 10	0.00 / 10
Proceso B	202005633	0.00 / 5	5.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	5.00 / 5	5.00 / 5	20.00 / 20	10.00 / 10	10.00 / 10	10.00 / 10
Proceso A	9211367	0.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	5.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 20	0.00 / 10	0.00 / 10	0.00 / 10
Proceso B	9211367	0.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	5.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 20	10.00 / 10	0.00 / 10	0.00 / 10
Proceso A	202002448	0.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 20	10.00 / 10	0.00 / 10	0.00 / 10
Proceso B	202002448	5.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	5.00 / 5	5.00 / 5	20.00 / 20	10.00 / 10	0.00 / 10	10.00 / 10
Proceso A	201740518	0.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	5.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 20	0.00 / 10	0.00 / 10	0.00 / 10
Proceso B	201740518	5.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	5.00 / 5	5.00 / 5	20.00 / 20	10.00 / 10	10.00 / 10	0.00 / 10
Proceso A	202005350	0.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 20	0.00 / 10	0.00 / 10	10.00 / 10
Proceso B	202005350	5.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	5.00 / 5	5.00 / 5	20.00 / 20	10.00 / 10	0.00 / 10	10.00 / 10
Proceso A	202005316	0.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 20	0.00 / 10	0.00 / 10	0.00 / 10
Proceso B	202005316	0.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 20	10.00 / 10	10.00 / 10	0.00 / 10
Proceso A	200511452	0.00 / 5	5.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 20	0.00 / 10	0.00 / 10	0.00 / 10
Proceso B	200511452	5.00 / 5	5.00 / 5	5.00 / 5	5.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	20.00 / 20	10.00 / 10	0.00 / 10	10.00 / 10
Proceso A	200419526	0.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	5.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 20	0.00 / 10	0.00 / 10	0.00 / 10
Proceso B	200419526	5.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 20	10.00 / 10	10.00 / 10	0.00 / 10
Proceso A	202003533	0.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 20	0.00 / 10	0.00 / 10	0.00 / 10
Proceso B	202003533	5.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	5.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 20	10.00 / 10	0.00 / 10	0.00 / 10
Proceso A	202005287	5.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	5.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 20	0.00 / 10	0.00 / 10	0.00 / 10
Proceso B	202005287	5.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	5.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	5.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 20	10.00 / 10	10.00 / 10	10.00 / 10
Proceso A	201409980	0.00 / 5	0.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	5.00 / 5	5.00 / 5	5.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 20	0.00 / 10	0.00 / 10	0.00 / 10
Proceso B	201409980	5.00 / 5	0.00 / 5	5.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	5.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 20	0.00 / 10	0.00 / 10	0.00 / 10
Proceso A	200218157	0.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	5.00 / 5	5.00 / 5	5.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 20	0.00 / 10	0.00 / 10	0.00 / 10
Proceso B	200218157	5.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	5.00 / 5	5.00 / 5	5.00 / 5	20.00 / 20	10.00 / 10	0.00 / 10	10.00 / 10
Proceso A	201222321	5.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	5.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 20	10.00 / 10	0.00 / 10	10.00 / 10
Proceso B	201222321	5.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	20.00 / 20	10.00 / 10	10.00 / 10	10.00 / 10

Fuente: Gutierrez (2022)

Tabla 4. *Resultados del grupo de estudiantes sin incidencia.*

Código de est.	ítem 1	ítem 2	ítem 3	ítem 4	ítem 5	ítem 6	ítem 7	ítem 8	ítem 9	ítem 10	ítem 11
Proceso B	202007066	5.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	5.00 / 5	5.00 / 5	5.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 20
Proceso A	202006491	0.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 20
Proceso B	202006491	5.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	5.00 / 5	5.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 20
Proceso A	201504806	0.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 20
Proceso B	201504806	5.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	5.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 20
Proceso A	201908796	0.00 / 5	0.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	20.00 / 20
Proceso B	201908796	0.00 / 5	5.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 20
Proceso A	202007134	5.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 20
Proceso B	202007134	5.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 20
Proceso A	202005297	0.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	5.00 / 5	5.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 20
Proceso B	202005297	5.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	5.00 / 5	5.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 20
Código de est.	ítem 1	ítem 2	ítem 3	ítem 4	ítem 5	ítem 6	ítem 7	ítem 8	ítem 9	ítem 10	ítem 11
Proceso A	201980015	0.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	5.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 20
Proceso B	201980015	0.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	5.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 20
Proceso A	202006232	5.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 20
Proceso B	202006232	0.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 20
Proceso A	202005147	0.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	20.00 / 20
Proceso B	202005147	5.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 20
Proceso A	201045799	0.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	5.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 20
Proceso B	201045799	0.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	5.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 5	0.00 / 20

Fuente: Gutiérrez (2022)

El estudiante código 200218157 expresó ante sus compañeros, "…a mí sí me cambió la percepción que tenía, para mí solo se trataba de mejorar la nota y a veces uno piensa que le repitan el examen de nuevo y realmente, si no se hace algo como lo que la licenciada hizo con la hoja de trabajo, no hubiera logrado nada, aunque no fueron las mismas gráficas del examen…”. Otro estudiante, código 201115867 compartió en la discusión general diciendo lo siguiente: “… en lo personal, yo cuando tenía que dejarles el mejoramiento a los estudiantes les ponía a que hicieran todo de nuevo y resulta que volvían a tener error en lo mismo, con estas actividades comprendí que la idea es que aprendan lo que no habían aprendido y para eso, yo sí debo pensar muy bien que les voy a poner a hacer…”.

Luego de estas actividades se solicitó que respondieran un cuestionario, mismo que se aplicó durante el diagnóstico y los resultados obtenidos se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 5. *Resultados de cuestionario pre y post incidencia.*

Pregunta	Opción 1		Opción 2		Opción 3		Opción 4	
¿Qué describe mejor a un proceso de mejoramiento en el aula?	Una tarea de recuperación		Una oportunidad de mejorar la nota		Una oportunidad de aprender		Una tarea extra	
	Pre	Post	Pre	Post	Pre	Post	Pre	Post
	38%	14%	32%	12	17%	70%	13%	4%
¿Qué debe mejorarse en el proceso de mejoramiento?	Notas		Respuestas		Aprendizajes			
	Pre	Post	Pre	Post	Pre	Post		
	68%	9%	5%	0%	27%	91%		
¿Para qué realiza el estudiante el proceso de mejoramiento?	Para ganar el curso		Para desarrollar la conceptualización		Para cumplir con el requisito			
	Pre	Post	Pre	Post	Pre	Post		
	70%	17%	10%	83%	20%	0%		
¿Para qué realiza el docente el proceso de mejoramiento?	Para cumplir con el requisito		Para mantener su empleo		Para que no pierdan los estudiantes.		Para que los estudiantes aprendan	
	Pre	Post	Pre	Post	Pre	Post	Pre	Post
	21%	2%	2%	2%	65%	8%	17%	88%
¿Qué se debe hacer en el proceso de mejoramiento?	Dejar la misma tarea de nuevo		Dejar más actividades del tema		Realizar actividades similares a las que no pudo hacer			
	Pre	Post	Pre	Post	Pre	Post		
	78%	10%	10%	7%	12%	83%		

Fuente: Gutiérrez (2022)

Analizando la información de la tabla 5 se puede apreciar cómo surgen cambios en los resultados del pretest con el postest por ejemplo, en la pregunta número uno ¿Qué describe mejor un proceso de mejoramiento?, en el postest el 70% considera que se puede definir como una oportunidad de aprender. De igual forma se muestra un cambio en la percepción sobre ¿Qué debe mejorar?, inclinándose más de un 90% de los estudiantes por la opción de mejorar el aprendizaje. Entonces, según los datos el 83% de los estudiantes indican que se debe realizar el proceso de mejoramiento para la conceptualización por lo que, debe hacer que los estudiantes realicen actividades similares a las que no pudo hacer, no las mismas.

Conclusiones y reflexiones finales

La percepción previa de los estudiantes con relación a las actividades de mejora se enfocaban en la nota (pregunta 1, opción 2, 32%) y en no hacer perder a los estudiantes (pregunta 4, opción 3, 65%) por lo que, para lograr el mejoramiento según ellos, era necesario dejar la misma tarea de nuevo (pregunta 5, opción 1, 78%). Luego de la incidencia y reflexión colectiva, los estudiantes se enfocan en que se debe mejorar el aprendizaje (pregunta 2, opción 3, 91%), por lo que ven este proceso como una oportunidad que se tiene para aprender (pregunta 4, opción 4, 88%) y conceptualizar (pregunta 3, opción 2, 83%) o resignifiquen los conocimientos matemáticos implícitos en todo este proceso y determinan que el profesor debe hacer este tipo de acciones en función de que los estudiantes realmente aprendan.

El realizar esta actividad dentro de su propia experiencia de aula permitió la sensibilización ante el tema de la evaluación de los aprendizajes en el área de matemáticas, que por mucho tiempo ha sido muy cerrada entre las opciones de bueno o malo, sin que el estudiante pueda reflexionar sobre sus errores. Cambiando con ello también la comprensión del proceso de medición de los aprendizajes a un concepto de evaluación, entendiéndose este como un proceso integral.

En un país que cuenta con legislación en cuanto a evaluación y específicamente en un proceso de mejoramiento de los aprendizajes, es necesario permitir la reflexión docente para lograr la comprensión y resignificación de estos conceptos y para ello los ejemplos deben ser propuestos en el área de conocimiento, para este caso la matemática.

En el tema de la habilidad de lectura de gráficas, la incidencia de tareas en el contexto de la resignificación de conceptos matemáticos aplicados en la física es eficaz y produce cambios positivos, como se puedo observar en el grupo que tuvo incidencia. Por lo que darle otro sentido a un concepto, en este caso el concepto de pendiente de la recta se ubicó en el movimiento rectilíneo como velocidad, permite el desarrollo de la habilidad lectora específicamente aplicada en las gráficas.

Como reflexión de la autora, el docente en formación o en servicio activo, necesita de espacios de reflexión que le permita resignificar sus conceptos en todo momento, porque la educación no es estática, es un proceso social en una sociedad de constantes cambios, requiere de cambios paradigmáticos, por lo que el docente debe dudar de los que sabe para servir de ejemplo y promover con ello un juicio crítico dentro del aula.

Referencias bibliográficas

Berrocal, E. &. (s.f.). *El Proceso de Investigación Educativa II: Investigación-Acción.* Granada, España: Facultad de Ciencias de la Educación Universidad de Granada.

Camilloni, A. (s.f.). *La función de la evaluación. En Curso de Docencia Universitaria. Módulo 4: Programas de enseñanza y Evaluación de los aprendizajes.* Obtenido de Universidad de Buenos Aires: http://23118.psi.uba.ar/academica/cursos_actualizacion/recursos/funcioncamillioni.pdf

Cantoral, R. (2016). *Teoría Socioepistemología de la Matemática Educativa.* Mèxico: Gedisa.

Castillo, S., & Cabrerizo, J. (2010). *Evaluación educativa de aprendizajes y competencias.* Madrid: Pearson Education.

Cerecero, I. (2016). *Teorización de los procesos de resignificación de la práctica educativa del docente de lenguas.* Obtenido de Universidad Autónoma del Estado de México : http://ri.uaemex.mx/bitstream/handle/20.500.11799/65347/TESIS%20Ingrid%20FINAL-split-merge.pdf?sequence=3&isAllowed=y

Dirección General de Currículo. (2017). *Módulo de aplicación del proceso de mejoramiento de los aprendizajes.* Guatemala: Ministerio de Educación . Obtenido de https://cnb.mineduc.gob.gt/wiki/M%C3%B3dulo_de_aplicaci%C3%B3n_del_proceso_de_mejoramiento_de_los_aprendizajes

Dolores, C., & Cuevas, I. (2007). Lectura e interpretación de gráficas socialmente compartidas. *RELIME*, 69-96. Obtenido de http://www.scielo.org.mx/pdf/relime/v10n1/v10n1a4.pdf

Educarchile. (2020). *Feedback efectivo y evaluación progresiva.* Obtenido de DocPlayer: https://docplayer.es/40293617-Feedback-efectivo-y-evaluacion-progresiva.html

Galo, C. (2006). *Evaluación de los aprendizajes.* Guatemala: Piedra Santa.

Granados, R. (2020). *Evaluación de los aprendizajes en Matemática.* Guatemala: R&S Education.

Gutiérrez, S. (s.f.). *Informe de diseño y elaboración de pruebas nacionales tercero básico.* Guatemala: Minsterio de Educación. Obtenido de Ministerio de Educación de Guatemala: http://cnbguatemala.org/wiki/M%C3%B3dulo_de_aplicaci%C3%B3n_del_proceso_de_mejoramiento_de_los_aprendizajes

Hernández, R., Fernandez, C., & Baptista, P. (2010). *Metolología de la Investigación.* México: McGraw Hill.

Minsterio de Educación de Guatemala. (2013). *Herramientas de evaluación en el aula.* Guatemala: USAID.

Morales, P. (2017). *Evaluación y aprendizaje de calidad.* Guatemala: Universidad Rafael Landívar.

Piloña, G. (2018). *Guía práctica sobre métodos y técnicas de investigación documental y de campo.* Guatemala: Gp editores.

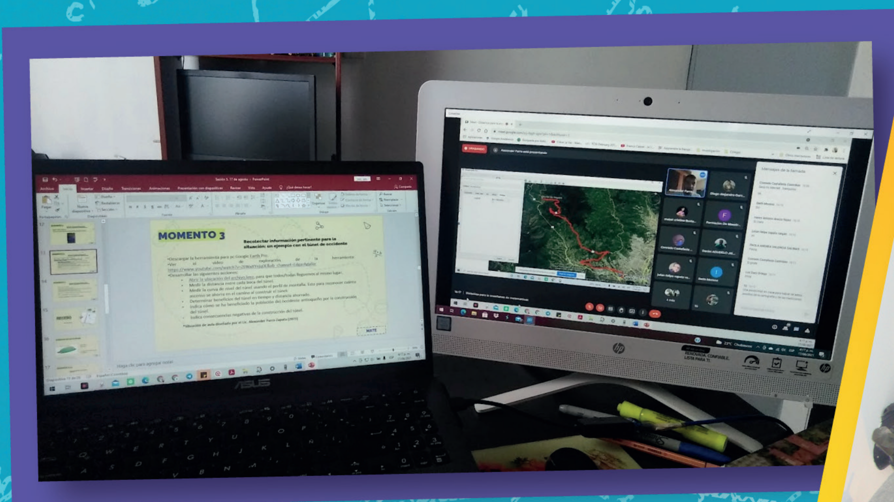
Pimienta, J. (2008). *Evaluación de los aprendizajes en competencias.* México: Pearson Prentice Hall. Obtenido de http://biblioteca.udgvirtual.udg.mx:8080/jspui/bitstream/123456789/2645/1/Evaluaci%C3%B3n%20de%20los%20aprendizajes.%20Un%20enfoque%20basado%20en%20competencias.pdf

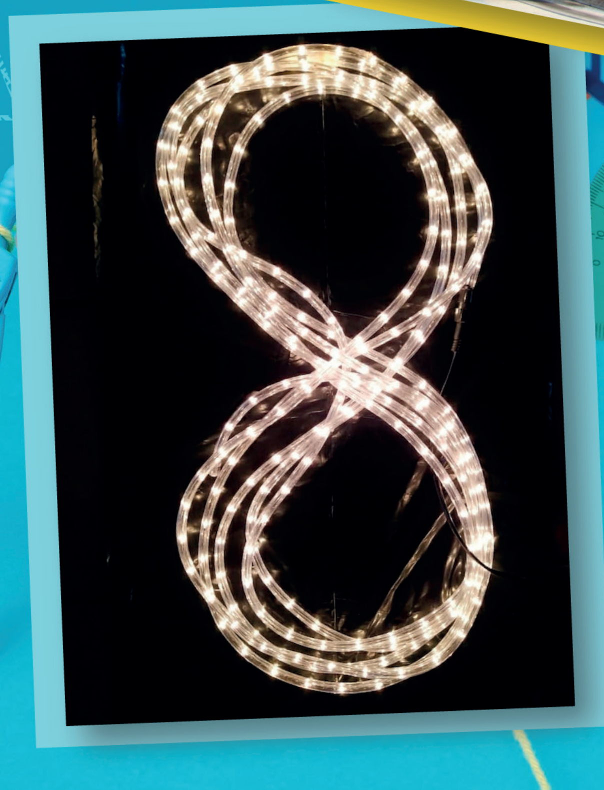
Rodiguez, A. (2020). *Instrumentos de evaluación educativa: tipos y características*. Obtenido de Lifeder: https://www.lifeder.com/instrumentos-evaluacion-educativa/

Vásquez, C., Pincheira, N., Chandia, E., Alsina, Á., & Gea, M. (2020). Construcción y validación de un instrumento de observación de clases de probabilidad. *Enseñanza de las ciencais*, 25-43. Obtenido de https://ensciencias.uab.es/article/view/v38-n2-vasquez-alsina-pincheira-etal/2820-pdf-es.

SECCIÓN 5

USO DE LOS RECURSOS TECNOLÓGICOS EN EL PROCESO DE APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS





VOL 35, NÚMERO 1, AÑO 2022

DE LA PRESENCIALIDAD A LA VIRTUALIDAD. UNA MIRADA DE MATEMÁTICOS EDUCATIVOS EN FORMACIÓN UNIVERSITARIA

FROM FACE TO FACE EDUCATION TO THE VIRTUAL CLASSROOM; A LOOK OF MATHEMATICS TEACHERS IN TRAINING

Rita Guadalupe Angulo-Villanueva, Nehemías Moreno-Martínez, Isnardo Reducindo-Ruiz
Universidad Autónoma de San Luis Potosí (México)
rita.angulo@uaslp.mx, nehemias.moreno@uaslp.mx, isnardo.reducindo@uaslp.mx

Resumen
Se presentan los resultados de la experiencia de practicantes en la enseñanza de las matemáticas en voz de 9 estudiantes universitarios en matemática educativa. El *problema* elegido fue la respuesta afectiva y curricular de practicantes en la enseñanza de las matemáticas, el *objeto de estudio* se enfocó a las estrategias didácticas y curriculares implementadas en el aula virtual y la respuesta afectiva ante la relación: estrategias virtuales - objeto matemático – vivencias. Mediante el análisis de autobiografías por teoría fundamentada se identificaron 7 categorías: Herramientas, Interacciones, Efectividad de herramientas, Medio de interacción, Forma de evaluación, Emociones y Experiencias. Los hallazgos relevantes evidencian intensas modificaciones en las identidades y los procesos de auto identificación.

Palabras clave: experiencia, prácticas curriculares, enseñanzas matemática

Abstract
This paper presents the outcomes of mathematics student-teachers' experience, from the voices of nine university students majoring in mathematics education. The chosen problem was the affective and curricular answer of mathematics student-teachers. The object of study was focused on the didactic and curricular strategies implemented in the virtual classroom; and on the affective answer to the relationship: virtual strategies- mathematics object- experiences. Seven categories were identified by analyzing student-teachers' autobiographies, using reasoned theory. Such categories are: tools, effectiveness of tools, interaction environment, type of evaluation, and emotions and experiences. Relevant findings show intense modifications in identities and the self-identification processes.

Key words: experiences, curriculum practices, mathematics education

Problemática

En el contexto de la Pandemia provocada por el virus SARS COV 2 y el confinamiento consecuente fue necesario reestructurar a nivel planetario la vida social. Los gobiernos, las economías, las comunidades, las instituciones y, por supuesto la escuela como institución social, tuvieron que dar respuestas inmediatas y emergentes a la situación (Gaudiano y De Alba, 2020). Lo que pareció haber quedado congelado, inmovilizado fue el currrículum oficial o pensado, queremos conjeturar que quedó rebasado. Todo aquello que el currrículum proponía para realizar en un proyecto formativo fue superado por la realidad, al menos los perfiles profesionales y muchos contenidos fueron reconfigurados sino eliminados. Es decir, se dio necesariamente la actualización curricular continua, por supuesto en el ámbito del currrículum vivido.

El carácter inédito de la situación demandó para los profesores en general y en particular de matemáticas desplegar estrategias didácticas y curriculares no conocidas y habilitarse para su manejo en un escenario nuevo y distinto: la virtualidad. El tránsito de la presencialidad hacia la "nueva normalidad" ha significado para maestros y alumnos una problemática diversa: la percepción – conocimiento – manejo del objeto de conocimiento virtual (Hui, 2017; Coll y Monereo, 2008), la reconfiguración del vínculo profesor - alumno (Buenfil, 2020), la insoslayable participación de la familia en la vida escolar y la irrupción de la escuela en el hogar (Pla, 2020), el escandaloso desnudamiento de las desigualdades sociales (Gaudiano y de Alba, 2020), el fuerte aumento de las brechas cognitiva y digital (Brailovsky, 2020), la desaparición del tiempo libre (Plá, 2020), el congelamiento de la escuela como espacio democratizador y el trastocamiento de la escuela como institución de intercambio social (Plá, 2020), el desplazamiento de la presencialidad hacia la virtualidad pone en riesgo el vínculo pedagógico que ya se ha desplazado a lo privado y se ha descorporeizado. Brailovsky (2020) advierte sobre el peligro de que el uso de la tecnología en esta situación se convierta en un plan de negocios (2020) y da cuenta de la necesidad de que la sociedad toda, la población, se apropien de la virtualidad y las plataformas que la promueven.

La investigación y la enseñanza en matemática educativa no fue la excepción y la comunidad mexicana (Cantoral et al; 2020) aludió a la importancia del pensamiento matemático en el contexto de pandemia, consideró las posibilidades de la transversalidad y el aula extendida, cabe destacar que ambas estrategias son prácticas curriculares por excelencia; desde Chile apuntan a la necesidad de la probabilidad y estadística para el análisis de datos (Vazquez, Ruz y Martínez, 2020) y, Sánchez (2020) desde Perú hace un análisis de los recursos tecnológicos empleados entre 2016 y 2020.

Desde la mirada de jóvenes potosinos de México, matemáticos educativos y practicantes de la enseñanza de las matemáticas en el nivel de bachillerato se enfrentaron al desafío de dar una respuesta inmediata, sobre la marcha. En la interacción con ellos y las apreciaciones sobre sus prácticas concretas se detectó como importante la celeridad de la demanda y la respuesta y la presión que ellos manifestaban sentir, es decir, nos propusimos mirar nuestra propia subjetividad y reflexionar sobre ella. En el sentido de Radford (2015) aprender matemáticas es encontrar algo que no es mío (objeto matemático) y ahí encuentro al otro, en el objeto. Se decidió entonces (marzo, 2020) documentar -para reflexionarlo- su experiencia a partir de su propia mirada, es decir, desde su proceso de subjetivación de la experiencia.

El objetivo de este documento es presentar los resultados en torno al *problema* de la respuesta afectiva y curricular de practicantes en la enseñanza de las matemáticas, el *objeto de estudio* se enfocó a las estrategias didácticas y curriculares implementadas en el aula virtual y la respuesta afectiva ante la relación: estrategias virtuales - objeto matemático – vivencias. La *pregunta* que se planteó fue ¿Qué implicaciones ha tenido en las personas (alumnos y profesores) la dinámica de confinamiento en la enseñanza de las matemáticas? Entre las *hipótesis* que se plantearon, en este documento se reportan los datos sobre las subjetividades de alumnos y profesores que se han visto trastocadas y las evidencias se hallarán en las narrativas personales de dicha vivencia, así como, el surgimiento de prácticas curriculares en cuanto la adecuación de los contenidos que de hecho forman parte de la actualización curricular continua.

Elementos teóricos

Se describen tres elementos que integran la perspectiva teórica que orientó nuestro análisis: enseñanza aprendizaje tradicional, híbrido y a distancia. Las razones para integrar estas tres dimensiones dan cuenta del trayecto vivido por los autores de este documento. Todos se han desempeñado y transitado como maestros y como maestros/alumnos en el período enero-agosto de 2020. Se han desempeñado en un muy corto tiempo en los tres modelos: el presencial que los alumnos han cursado (13 enero-17 marzo, 2020); el modelo híbrido fue puesto en marcha mediante el método de aula invertida en las prácticas de docencia que llevaron a cabo en escuelas de educación media superior para la enseñanza aprendizaje de diversas temáticas de la matemática (17 de febrero-17 marzo, 2020); y el modelo a distancia fue implantado abruptamente a partir de la contingencia sanitaria (17 marzo-29 mayo, 2020).

El aislamiento se ha exacerbado con la contingencia sanitaria producida por el virus SARS Cov 2 y la enfermedad COVID 19. Este nuevo aislamiento ha trastocado la esencia de la educación escolar y ha producido, de momento, un desplazamiento y –quizás- una dislocación en la estructura social que no sólo se expresa en el sector educativo sino en las subjetividades de los maestros y alumnos.

Los cambios producidos a partir de la masificación de internet y el surgimiento de las redes sociales como expresión de las relaciones que prohíjan las TICs contribuyen a la modificación de la forma de percibir el tiempo y el espacio y trastocan las bases de la percepción (Amado, 2015), el navegante de la red está en todas partes (Machado, 2009 en Amado, 2015). Hoy más que nunca, en el escenario de confinamiento por la contingencia sanitaria la percepción del tiempo y el espacio en el aislamiento se está alterando de maneras aún no conocidas.

La exhibición de la intimidad en las redes denota un cierto desplazamiento de los ejes de la subjetividad moderna: exteriorización del yo y debilitamiento del pasado como eje de ese yo (Sibila, 2012, p. 131 en Amado, 2015). La fabricación masiva de subjetividad es un mecanismo que produce al individuo en tanto que le proporciona modelos o patrones de comportamiento para actuar como protagonista (Brea, 2007). Particularmente hoy, en aislamiento o <con conciencia de la necesidad de confinarse> la subjetividad colectiva está configurándose a través de una pantalla como en las más ficticias narraciones orwellianas, pero, a la vez (como siempre) lejos de ella. Esta dualidad es el intersticio que la educación y el currrículum vivido han de aprovechar en la pantalla, a través de ella y más allá de ella.

Metodología

Fue una investigación de carácter cualitativo y hermenéutico con un estudio de caso (Stake, 1998) mediante la recopilación de 9 autobiografías del tipo relatos cruzados (Feixa, 2011) que se están analizando mediante Teoría Fundamentada (Strauss y Corbin, 2002) y el análisis se llevó a cabo mediante las estrategias de codificación abierta, codificación selectiva y codificación axial. La elección de la Teoría fundamentada obedece a la posibilidad de analizar discurso o narrativas de un contexto específico que se valida mediante la saturación de la teoría que surge en los datos de campo y no de una teoría preexistente. Ofrece también la alternativa epistémica de la comprensión del fenómeno y no su verificación, de ahí que este tipo de teoría sea de carácter cualitativo.

Se construyeron 7 categorías: Herramientas, Interacciones, Efectividad de herramientas, Medio de interacción, Formas de Evaluación y Emociones y Experiencias. Las categorías se generaron a través de un proceso de transcripción de las autobiografías, la codificación abierta mediante la elección de fragmentos relevantes (FR) y palabras clave (PC); la codificación selectiva mediante la agrupación de FR y PC en temas o tópicos comunes y nominación de categorías a partir de tópicos comunes; finalmente, la codificación axial mediante la identificación de temas comunes que tocan a varias categorías.

Resultados

La tendencia de pensamiento en cuanto a las emociones que se atestiguan en las autobiografías da cuenta de nueve *emociones* compartidas (Tabla 1) que evidencian el trastocamiento de la percepción del tiempo (Amado, 2015) como la *incertidumbre* y la *esperanza* de regresar a la normalidad. La incertidumbre y la *añoranza* dan cuenta de los efectos del aislamiento como la exhibición de la intimidad (Sibila, 2012 en Amado, 2015) y la *preocupación* deja entrever la desconfianza en la masificación del internet y la enseñanza en línea, por un lado, y, por otro, el reconocimiento de la fabricación masiva de subjetividad a través de las pantallas (Brea, 2007).

Tabla 1. *Categoría Emociones. Codificación axial de fragmentos discursivos en autobiografías.*

Conjuntos Temáticos	Fragmentos discursivos	Interpretación
Tristeza	4	Planes frustrados, pérdida de convivencia, exposición al contagio de familiares que trabajan
Stress y enojo	5	Imposibilidad de responder a demandas diversas
Incertidumbre	5	¿Cuándo acabará?
Miedo, temor, pánico	4	Temor al contagio
Preocupación	4	Por los alumnos y su aprendizaje
Positividad y esperanza	5	Respecto a regresar a “la normalidad”
Angustia	3	Por perder seres queridos
Amor filial	2	Cariño y apego a la familia
Añoranza	3	Convivencia y contacto físico.

Fuente*:* Angulo, Moreno y Reducindo (2022).

En el análisis de la Categoría Emociones, hemos constatado su importancia en confinamiento, tanto si se está dentro como fuera; las implicaciones en alumnos y profesores dejan ver el trastocamiento tanto de las subjetividades como de la escuela misma. Ésta se enfrenta al desafío de su desaparición en condiciones de excepcionalidad o su auto transformación para reconfigurarse en interacción sustancial con una sociedad educadora, hoy más que nunca en su historia reciente, productora de saberes socialmente productivos (Puigross, 2003) y comunidad en dónde se construye la unidad en común (Chul Han, 2020). La matemática y la matemática educativa enfrentan el reto de difundir la matemática como un lenguaje y forma de pensamiento común a toda la sociedad y evitar la razón histórica instrumental que concede a unos pocos su manejo y dominio.

Tabla 2. *Categoría Experiencias. Codificación axial de fragmentos discursivos en autobiografías.*

Conjuntos Temáticos	Fragmentos discursivos	Interpretación
Esfuerzo y adaptación	4	Poco esfuerzo en matemáticas a pesar de ser importante para la vida, adaptación paulatina a virtualidad
Autodidactismo	4	Se toma conciencia de la dificultad que conlleva ser autodidacta, ha habido “tropezones”, se ha reorganizado tiempo, vida y prácticas, se ha construido por escrito.
Cambio de rutina (distracciones)	3	Se menciona que llevar a cabo una rutina es de gran utilidad para el orden y la disciplina, de igual forma llevar a cabo actividades físicas y de distracción ayudan a alejarse de posibles problemas que provoca el encierro
Afectación e incertidumbre	8	Se expresa lo difícil de la situación actual y las pérdidas humanas reales de las personas. Se expresa la incertidumbre de los estudiantes de cuando todo volverá a la normalidad
Economía y labor social	3	Se tiene lo justo para subsistir, hay quien ha abandonado las clases para trabajar. Como practicante de docencia auxilio a profesor titular resolviendo dudas de alumnos y elaborando material tecnológico para el docente.
Enseñanza	2	Una preparación anticipada del uso de la tecnología permitió que exportar la enseñanza de modo presencial a virtual no fuese un problema.
Experiencia	4	Facilidad de adaptar la enseñanza virtual gracias a las experiencias anticipada en su empleo, se está aprendiendo en el proceso. Amanecer con nueva actitud.
Limitaciones y seguridad	3	Reducción del tiempo de sesiones de clase debido a limitaciones de la tecnología, la seguridad de su empleo y la gratuidad

Fuente*:* Angulo, Moreno y Reducindo (2022)

Por su parte, la categoría Experiencias (entendidas como la adquisición y dominio de habilidades, conocimientos y destrezas a partir de vivencia concretas) se aprecia en la opinión de los practicantes la consideración de que sus alumnos se esfuerzan poco, pero se han ido adaptando a través del establecimiento de rutinas, reorganización del tiempo, la vida diaria y las prácticas escolares lo cual los ha llevado a construir y hacer suyo el autodidactismo. Por otro lado, ha sido necesario resolver dudas de los alumnos en una relación uno a uno, digamos en una práctica personalizada. Fue también necesario elaborar materiales tecnológicos de apoyo a los docentes de grupo y el manejo previo de las TICS (en los practicantes –jóvenes entre 21 y 23 años) facilitó el tránsito a la virtualidad. Otra característica dominante en la narrativa fue la reducción del tiempo de las sesiones de clase, lo cual se interpretó como una mejoría en la metodología docente ya que se hacía espacio para la consulta personalizada. Una constante en esta dinámica fue el aumento en los lapsos de preparación de planificaciones, materiales y corrección de trabajos. Por último, a pesar de que se estaba aumentando la experiencia en la enseñanza a distancia prevaleció en los practicantes las sensaciones de incertidumbre y tristeza.

Tabla 3. *Categoría Efectividad de las herramientas. Codificación axial de fragmentos discursivos en autobiografías.*

Conjuntos Temáticos	Fragmentos discursivos	Interpretación
Suspensión de actividades programadas	3	Los estudiantes tenían planes para el semestre por ejemplo examen de titulación, finalizar el servicio social, prácticas, etc. Las herramientas dispuestas (fundamentalmente correo) no dieron respuesta a las demandas
Presencialidad	3	La utilización de herramientas virtuales y TICS puso de manifiesto, más que su utilidad, la necesidad y añoranza por la presencia.
Virtualidad	5	Dificultad para adaptarse por trabajo o conectividad, igualmente por la accesibilidad de profesores. La experiencia previa en manejo de Google drive, Facebook, WhatsApp, y Google docs facilitó la adaptación. Se señala con insistencia la falta de interacción.
Falta de recursos	5	No todos cuentan con los recursos para asistir a clases en línea ya que no cuentan con luz eléctrica y buena señal donde viven, o sus ingresos son destinados para necesidades básicas
Experiencia y adaptación	7	Los docentes y practicantes tienen dudas sobre si sus alumnos están aprendiendo y comprendiendo los temas, si les gusta la forma de trabajo, si se han adaptado a la forma de trabajo, como se les va a evaluar, si les gusta aprender por ellos mismos o si necesitan de alguien que les dé respuesta a sus preguntas.
Tiempo y seguridad	2	Corren el riesgo en la privacidad de los datos de su computadora o celular debido a la gran demanda de estudiantes y docentes en las plataformas
Pena ajena	1	Una parte de la sociedad mexicana no comprende de manera adecuada los datos presentados en los informes de gobierno diarios, deberían ser más sencillos.

Fuente*:* Angulo, Moreno y Reducindo (2022)

La categoría Efectividad de las herramientas muestra que los cambios institucionales dados para responder a la virtualidad (plataformas síncronas y asíncronas, gestores de aprendizaje, redes sociales, correo electrónico, etcétera) no dieron respuesta a las demandas tanto de alumnos como profesores; evidenciaron imposibilidades para la conectividad fundamentalmente por condiciones desiguales (Gaudiano y De Alba, 2020) de acceso tanto a la conectividad como a los dispositivos así como el desconocimiento de profesores y alumnos tanto en el manejo de herramientas como de la producción de contenidos en línea. Por otro lado, se aprecia una imposibilidad de evaluar y certificar que el aprendizaje se esté dando. No obstante, cabe señalar que las viejas costumbres de evaluar punitivamente se vieron desplazadas y el desconocimiento de otras formas de aprendizaje y construcción de conocimiento (Hui, 2017; Coll y Monereo, 2008) que están surgiendo, aún no han sido reconocidas por la comunidad educativa.

Tabla 4. *Categoría Interacciones. Codificación axial de fragmentos discursivos en autobiografías.*

Conjuntos temáticos	Fragmentos discursivos	Interpretación
Virtualidad	5	En el discurso se aprecia una conciencia acerca de la importancia de la tecnología, cinco fragmentos discursivos se refieren a ello; en conjunto muestran que la virtualidad se ha tornado en la forma de comunicación definitoria de la relación maestro alumno. Misma que se desplaza entre gestores de aprendizaje, redes sociales, repositorios y transmisión en tiempo real. El sentimiento prevaleciente es que es difícil la adaptación de las personas a ello.
Presencialidad	3	La presencialidad, curiosamente, se manifiesta porque se extrañas las relaciones humanas; vagamente se expresa añoranza por el aprendizaje y/o el debate académico.
Profesores	2	Acerca de los profesores se da cuenta de su ausencia como mediadores del aprendizaje; se considera la dificultad de que implica la comunicación con sus alumnos.
Familia y comunidad	2	En el conjunto temática “Familia y comunidad” se reconoce la importancia de la familia y las personas que realizan actividades sustanciales en cuarentena.

Fuente: Angulo, Moreno y Reducindo (2022)

Con respecto a la Categoría interacciones fue notorio cómo la virtualidad se ha tornado en la forma de comunicación definitoria de la relación maestro alumno. Misma que se desplaza entre gestores de aprendizaje, redes sociales, repositorios y transmisión en tiempo real, ambas situaciones evidencias la transformación del vínculo pedagógico (Buenfil, 2020). Se extraña la presencialidad por las relaciones humanas que posibilita, pero no por el aprendizaje o el debate académico. Se extraña a los profesores como mediadores en el aprendizaje y, hoy más que nunca, se reconoce y manifiesta explícitamente la importancia de la familia durante el confinamiento, como bien lo ha expresado Plá (2020).

Tabla 5. *Categoría Evaluación. Codificación axial de fragmentos discursivos en autobiografías*.

Conjuntos temáticos	Fragmentos discursivos	Interpretación
Calificaciones	2	En el discurso se aprecia el interés por obtener un número que medianamente refleje el desempeño de los alumnos. Se muestra un intento por poner mas empeño en la carrera motivados por obtener una buena calificación. Es de gran preocupación obtener la mejor calificación. Dicha preocupación es fuente de actitudes de rebeldía o negligencia.
Examen virtual	3	Se extrañan las relaciones humanas. Se puede observar como la aplicación del examen virtualmente afectó a los alumnos y les costó adaptarse en poco tiempo. Además, se muestra un cierto interés en recopilar los elementos para poder brindar una calificación basada en tareas, evidencias, etc.
Incertidumbre	3	El destino del próximo semestre preocupa a las personas, los profesores y alumnos. ¿Se seguirá haciendo uso de las plataformas virtuales? A partir de una primera experiencia los alumnos saben que el examen puede resultar complejo De antemano se sabe que habrá opinión de distintos bandos, por ejemplo, a los que les gusta, a los que no tienen los recursos para llevar a cabo las evaluaciones, etc.

Fuente*:* Angulo, Moreno y Reducindo (2022)

A pesar de los sustanciales cambios en la dinámica escolar (desplazamiento a la virtualidad, modificación del currrículum y cambios en las formas de interacción) la preocupación por la calificación, más que por una evaluación, sigue vigente; los alumnos muestran cierta rebeldía, a la vez que negligencia, por las formas de calificación en formato virtual. A pesar de ello, el examen como elemento protagónico de control siguió vigente, si bien de forma virtual. Se aprecia un incipiente debate entre alumnos y profesores acerca de la pertinencia de plataformas y exámenes virtuales.

Primeras aproximaciones a una lectura conclusiva

Las dinámicas que se han descrito muestran el nacimiento de otros saberes y prácticas socialmente productivas (Puigross, 2003), antes inexistentes. Dichos saberes habrán de reconocerse y fundirse con los saberes previos y, constituyen ya una cultura emergente. Esto es, el saber y la forma de conocerlo han sido alterados, situación que –de facto- exige respuestas del currrículum -que ya ha sido rebasado- y evidencia que hay otro currrículum dándose en la cotidianeidad, en el más estricto sentido, se trata de un currrículum vivido.

El currrículum oficial se ha deslizado del lugar físico de la escuela a otro escenario: la virtualidad. El deslizamiento del currrículum ha propiciado que maestros y alumnos elaboren práctica y conceptualmente otras formas de planificación y realización de las actividades de enseñanza aprendizaje, es decir, la operación pedagógica (De Alba, 2018) se está reconstruyendo simultáneamente al currrículum vivido. Finalmente, la afectividad y las subjetividades se han constituido en circunstancias nodales, hoy más que nunca, a ser consideradas, analizadas y atendidas si se quiere lograr el éxito educativo tanto para las instituciones como para las personas.

Con respecto a la respuesta afectiva y curricular de maestros en formación, los resultados que hemos considerado ponen de manifiesto un cambio profundo en las relaciones escolares, en concreto se observó una menor centralidad de los profesores y un autodidactismo incipiente en los alumnos.

Ante la pregunta ¿Qué implicaciones ha tenido en las personas (alumnos y profesores) la dinámica de confinamiento en la enseñanza de las matemáticas? Encontramos que están caracterizadas por la incertidumbre como superficie de inscripción, la añoranza de la presencialidad y una profunda transformación de las identidades tanto de profesores como alumnos, hoy por hoy, caracterizada por la tristeza, el stress, el enojo, miedo, pánico y preocupación pero, también, actitudes positivas, una conciencia esperanzadora y el protagónico amor filial. Se aprecia también, en el terreno de lo escolar, el crecimiento del autodidactismo y el estableciminto de rutinas de trabajo propias, siempre diferentes de un sujeto a otro pero que hablan de un incremento de la independencia en los alumnos con respecto al profesor. Así también, en el profesor se detectó una mayor preparación de la enseñanza ante las nuevas circunstancias así como el aprendizaje en el manejo de nuevas tecnologías, además, una pérdida de centralidad en la relación pedagógica, lo cual redeunda en la independencia de los alumnos.

Finalmente, con respecto a la hipótesis de trastocamiento de las identidades, pudieron levantarse evidencias discursivas acerca de los cambios identitarios en los participantes en la investigación.

Referencias bibliográficas

Amado, S. (2015). Tecnologías digitales y subjetividad en el sistema educativo actual. *XI Jornadas de Sociología*, Facultad de Ciencias Sociales. Buenos Aires: Universidad de Buenos Aires. Recuperado de https://www.aacademica.org/000-061/984

Angulo, R. (2021). Curriculum latinoamericano y tecnologías: prácticas y procesos ante la pandemia de COVID19. *XVII Congreso Nacional de Investigación Educativa*, COMIE, 15 al 19 de noviembre de 2021.

Brailovsky, D. (2020). Escuelas y tecnologías. ¿Quién usa a quién? *Educar en Córdoba*, 15 (37), 1-7.

Brea, J. (2007). *Cultura_RAM. Mutaciones de la cultura en la era de su distribución electrónica*. Barcelona: Gedisa.

Buenfil, R. (2020). Aprendizajes virtuales más allá de los programas y las asignaturas. En Plá, S., Buenfil Burgos, R., Zabalgoitia Herrera, M., Gallardo Gutiérrez, A., Constante, A., de la Cruz Flores, G., González Gaudiano, E., y Orozco Fuentes, B. (2020). La educación entre la COVID-19 y el emerger de la nueva normalidad. *Perfiles Educativos*, *42*(170), 14-21. Recuperado de https://doi.org/10.22201/iisue.24486167e.2020.170.60181

Cantoral, R., et al. (2020). Matemática Educativa, transversalidad y COVID-19. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 23 (1), 1-19. Recuperado de http://www.scielo.org.mx/pdf/relime/v23n1/2007-6819-relime-23-01-00006.pdf

Coll, C. y Monereo, C. (Eds.) (2008). *Psicología de la educación virtual. Aprender y enseñar con las Tecnologías de la Información y la Comunicación*. Madrid, España: Morata.

De Alba, A. (2018) "Operación pedagógica" en su *Archivo conceptual*. Ingreso: 9 de marzo Morelos, Colegio de Morelos (inédito).

Feixa, C. (2011). La imaginación autobiográfica, *Acta Sociológica 56* (septiembre-diciembre), 135-158.

Gaudiano, E. y De Alba, A. (2020). Presentación, en Plá, S., Buenfil Burgos, R., Zabalgoitia Herrera, M., Gallardo Gutiérrez, A., Constante, A., de la Cruz Flores, G., González Gaudiano, E., y Orozco Fuentes, B. La educación entre la COVID-19 y el emerger de la nueva normalidad. *Perfiles Educativos*, *42*(170), 3-4. Recuperado de https://doi.org/10.22201/iisue.24486167e.2020.170.60181

Hui, Yuk (2017). ¿Qué es un objeto digital? *Virtualis*, 7 (15, enero – junio), 81-96.

Feixa, Ch. (2006). La imaginación autobiográfica. *Perifèria*. Revista de recerca i formació en antropología, 5, 1-45.

Plá, S. (2020). Apología por la escuela, en Plá, S., Buenfil Burgos, R., Zabalgoitia Herrera, M., Gallardo Gutiérrez, A., Constante, A., de la Cruz Flores, G., González Gaudiano, E., y Orozco Fuentes, B. (2020). La educación entre la COVID-19 y el emerger de la nueva normalidad. *Perfiles Educativos*, *42*(170), 5-13. Recuperado de https://doi.org/10.22201/iisue.24486167e.2020.170.60181

Puiggros, A. (2003). *El lugar del saber*: *conflictos y alternativas entre educación, conocimiento y política*. Buenos Aires: Galerna.

Radford, L. (2015). Methodological Aspects of the Theory of Objectification. *Perspectivas da Educação Matemática*, 8(18), 547-567. Recuperado de http://luisradford.ca/publications/

Sánchez, C. (2020). Herramientas tecnológicas en la enseñanza de las matemáticas durante la pandemia COVID-19. *Hamut´ay*, 7 (2), 46-57. Recuperado de http://dx.doi.org/10.21503/hamu.v7i2.2132.

Stake, R. E. (1998). *Investigación con estudio de caso.* Madrid: Ediciones Morata.

Strauss, A. y Corbin, J. (2002). *Bases de la investigación cualitativa. Técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada*. Colombia: Editorial Universidad de Antioquia.

Vazquez, C., Ruz, F. y Martínez, V. (2020). *Tangram. Revista de Educação Matemática, Dourados.MS*. 3 (2), 159-183.

REVISTA ACTA LATINOAMERICANA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA - ALME

Principios:

La revista Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (en lo sucesivo ALME), es uno de los proyectos académicos del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa – CLAME, en el que se conjuga el respeto a la pluralidad de formaciones, tradiciones y acercamientos educativos, concebida y desarrollada con la función de difundir la Matemática Educativa en un marco en el que pueden relacionarse autores que comparten este interés común, además de nuclear investigadores y profesores de Latinoamérica, y a partir de su divulgación, promover acciones que fomenten la investigación, la actualización, el perfeccionamiento y la profesionalización para el desarrollo científico y social de la región.

La revista ALME se configura como el instrumento de la CLAME para la difusión de trabajos de carácter científico, experiencias, convocatorias e información bibliográfica, dentro del ámbito de la enseñanza/aprendizaje en matemática educativa en sus diferentes formulaciones y presentaciones.

La revista ALME es una revista científica arbitrada por pares y que se atiene a los estándares internacionales de calidad propios de las publicaciones científicas de prestigio.

Misión y objetivos:

La misión de la revista ALME es la difusión de la investigación relativa a la Matemática Educativa, persiguiendo los siguientes objetivos:

- ✓ Difundir, preferentemente en lenguas española y portuguesa, relevantes y rigurosos trabajos de carácter científico, en el ámbito de la matemática educativa.
- ✓ Ofrecer experiencias innovadoras, siempre relativas al ámbito de la matemática educativa.
- ✓ Potenciar la accesibilidad y visibilidad del conocimiento, favoreciendo el entorno de acceso abierto a la literatura científica en matemática educativa.

Política editorial:

- ✓ *Idioma de los trabajos*. Podrán presentarse trabajos en lengua española, portuguesa e inglesa.
- ✓ *Trabajo original*. Los trabajos enviados a ALME para su publicación deberán constituir una colaboración original no publicada previamente en soporte alguno, ni encontrarse en proceso de publicación o valoración en cualquiera otra revista o proyecto editorial.
- ✓ *Normas de redacción y presentación*. Los trabajos deberán atenerse a las normas de redacción y presentación de carácter formal de ALME. Las colaboraciones enviadas a ALME que no se ajusten a ellas serán desestimadas.

- ✓ *Recepción de originales*. Los editores de ALME acusarán la recepción del manuscrito enviado por el autor/es. El Comité editorial revisará el artículo enviado informando al autor/es, en caso necesario, si se adecua al campo temático de la revista y al cumplimiento de las normas y requisitos formales de redacción y presentación. En el caso de que todos los aspectos sean favorables, se procederá a la revisión del artículo.
- ✓ *Proceso de revisión.* Los artículos propuestos serán evaluados en forma "ciega" por dos integrantes del comité de científico. En el proceso de evaluación se garantizará tanto el anonimato de los autores, así como de los evaluadores.
- ✓ *Información*. Los editores de ALME informarán a los autores de la decisión de aceptación, modificación o rechazo de cada uno de los artículos.
- ✓ *Política de privacidad*. Se mantendrá y preservará en todos los casos y circunstancias el anonimato de los autores y el contenido de los artículos desde la recepción del manuscrito hasta su publicación. La información obtenida en el proceso de revisión y evaluación tendrá carácter confidencial.
- ✓ *Fuentes*. Los autores citarán debidamente las fuentes de extracción de datos, figuras e información de manera explícita y tangible tanto en la bibliografía, como en las referencias. Si el incumplimiento se detectase durante el proceso de revisión o evaluación se desestimará automáticamente la publicación del artículo.
- ✓ *Responsabilidad*. ALME no se hará responsable de las ideas y opiniones expresadas en los trabajos publicados. La responsabilidad plena será de los autores de los mismos.
- ✓ *Formatos*. ALME se presentará en dos formatos, electrónico y CD, que contendrán idénticos contenidos en cada número. El formato electrónico se ofrece desde la página oficial de Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (https://clame.org.mx/actas.html) y será de acceso libre y gratuito.
- ✓ *Periodicidad.* ALME tendrá una periodicidad semestral.
- ✓ *Secciones:* Las secciones de la revista ALME son las siguientes:
  1. Análisis del discurso matemático escolar
  2. Propuesta para la enseñanza de las matemáticas
  3. Aspectos socioepistemológicos en el análisis y el rediseño del discurso matemático escolar
  4. El pensamiento del profesor, sus prácticas y elementos para su formación profesional
  5. Uso de recursos tecnológicos en el proceso de aprendizaje de las matemáticas

Directrices generales para los autores:

1. El trabajo correspondiente debe haber sido aceptado para presentarse durante RELME 34. Es por ello que se solicita **enviar certificado de aprobación de la ponencia**.
2. Todo trabajo debe ser inédito y no estar en proceso de evaluación de ninguna otra revista u órgano editorial.

3. Todos los artículos deberán estar escritos en procesador de texto Microsoft Office Word 2007 o superior, tipo de letra Times New Roman, tamaño 12, interlineado sencillo márgenes superior: 2,5 cm; inferior: 2,5 cm; izquierdo: 3,5 cm; derecho: 2,5 cm. Para las expresiones matemáticas debe usarse el **editor de ecuaciones**.
4. Extensión: máximo 12 cuartillas en hoja tamaño carta. Las páginas deben estar **sin numerar**.
5. Las referencias (deben aparecer bajo ese título, por orden alfabético) habrán de colocarse en estilo APA, 6ª edición (American Psychological Association).
6. Las figuras, tablas e imágenes que se incluyan en el artículo deben ser claras, legibles e incluir epígrafes con fuente Times New Roman tamaño 10 que indiquen referencia de las mismas.
7. La estructura base del artículo debe dar cuenta de: Un planteamiento del problema, revisión de literatura de Matemática Educativa, indicaciones generales sobre la estructura teórica (marco teórico o conceptual o fundamentos teóricos), metodología implementada, desarrollo de algunos ejemplos, análisis de los resultados, conclusiones y referencias bibliográficas. Cabe aclarar, que si lo que se está reportando es una investigación en curso, se debe hacer explícito en el escrito para que esto sea considerado en el momento de hacer la evaluación del documento.
8. También se podrán publicar artículos que no son productos de investigaciones, como puede ser: reporte de experiencia en aula, curso corto, taller, grupo de discusión o de laboratorio. Para los casos anteriores la estructura del escrito debería de reportar mínimamente: introducción, desarrollo del tema en donde se hará mención del planteamiento de un problema, así como los fundamentos teóricos y las conclusiones. El artículo deberá mostrar evidencia de revisión de referencias bibliográficas de Matemática Educativa.
9. Cada uno de los manuscritos recibidos, pasa por una evaluación doblemente ciega (se retiran los nombres y datos de filiación de los autores de los documentos) y se envía a dos árbitros de nuestra comunidad, cuyos resultados, de manera anónima, son devueltos a los autores. En caso haya controversia entre los dos árbitros, se dará la propuesta a un tercer árbitro. La decisión de los árbitros es inapelable. Las evaluaciones pueden tener tres resultados posibles: Aceptado, Aceptado condicionado a modificaciones o Rechazado.

Normas para la publicación del artículo:

- ✓ Primer renglón: Título del trabajo en mayúscula en español o portugués (**sin punto al final**).
- ✓ Segundo renglón: Nombre de los autores separados por comas si hay más de un autor
- ✓ (**Nombre y Apellido** en ese orden, **sin títulos de grado**).
- ✓ Tercer renglón: Nombre de la institución y país al que pertenecen. **(No se considera válido el uso exclusivo de siglas).**
- ✓ Cuarto renglón: Dirección electrónica de los autores, separados por coma si hay más de uno y **sin hipervínculos**.
- ✓ Quinto renglón: Resumen de no más de 10 renglones de extensión en fuente Times New Roman, tamaño 10.

- ✓ Sexto renglón: palabras clave (a lo sumo cinco). Si son frases, verificar de no extenderse de las cinco palabras.
- ✓ Séptimo renglón: Abstract en inglés, en fuente Times New Roman tamaño 10.
- ✓ Octavo renglón: key words, traducción al inglés de las palabras clave.
- ✓ Noveno primer renglón: Inicia la primera sección del documento.
- ✓ Consideración para citaciones:

Citas dentro del texto. Las referencias a artículos o libros figurarán en el texto entre paréntesis, indicando el apellido del autor y el año, separados por una coma (Peters, 2001). En el caso de que en una misma referencia se incluyan varios libros o artículos, se citarán uno a continuación del otro por orden alfabético y separados por un punto y coma (García Aretio, 2002; Sarramona, 2001). Si en la referencia se incluyen varios trabajos de un mismo autor bastará poner el apellido y los años de los diferentes trabajos separados por comas, distinguiendo por letras (a, b, etc.) aquellos trabajos que haya publicado el mismo año (Casas Armengol, 1990, 1995, 2000a, 2000b, 2002, 2004). Si el nombre del autor forma parte del texto sólo irá entre paréntesis el año de publicación [Keegan (1992) afirmó que...].

Citas textuales. Las citas textuales con una extensión menor de 40 palabras irán entrecomilladas y, a continuación y entre paréntesis, se indicará el apellido del autor del texto, el año y la página o páginas de la que se ha extraído dicho texto. Ejemplo: “por educación a distancia entendemos [...] contacto ocasional con otros estudiantes” (Blanco, 1986, p. 16). Si el nombre del autor forma parte del texto, sería así: Como Martínez Sanz (2001, p. 102) señalaba “...”. Las citas de 40 o más palabras deberán aparecer en un bloque de texto independiente, sin comillas y ajustado a la misma altura que la primera línea de un nuevo párrafo. Al final se indicará entre paréntesis, el autor, año y página/s.

- ✓ Consideración para referencias:

Únicamente se incluirán aquellas que se citan en el texto y deberán ordenarse por orden alfabético en un solo listado, tanto las de formato impreso como electrónico.

El formato será el siguiente:

- *Libro:* Apellidos del autor/es, Iniciales. (Año). Título del libro. Lugar de publicación: Editorial.

  Brzezinski, Z. (1970). La era tecnotrónica. Buenos Aires: Paidós.

- *Revistas:* Apellidos del autor/es, Iniciales. (Año). Título del artículo. Nombre de la Revista, número o volumen (número), páginas que comprende el artículo dentro de la revista, si es que existen.

  García Aretio, L. (1999). Historia de la educación a distancia. RIED. Revista Iberoamericana de Educación a Distancia, 2 (1), 11-40.

- *Capítulo o artículo en libro*: Apellidos del autor, Iniciales. (Año). Título del artículo o capítulo. En Iniciales. Apellidos del autor/es, (Ed. o Coord., si es el caso), Título del libro. (páginas que comprende el artículo o capítulo dentro del libro). Ciudad: Editorial.

Oettinger, A. G. (1971). Compunications in the national decision-making process. En M. Greenberger, (Ed.), Computers, communication, and the public interest (73-114). Baltimore: Johns Hopkins Press.

Referencias de formatos electrónicos:

- *Documentos electrónicos:* autor/es (fecha publicación). Título [tipo de medio]. Lugar de publicación: editor. Recuperado de: especifique URL.

  Martín, S. (2011). Educación Aumentada: Realidad o Ficción. Blog CUED. Recuperado de http://goo.gl/w46mpA.

- *Artículos en publicaciones periódicas electrónicas* (Revistas electrónicas)

  Apellidos del autor/es, Iniciales. (Año). Título del artículo. *Nombre de la Revista*, número o volumen y (número), páginas que comprende el artículo dentro de la revista. DOI o en su defecto, recuperado de URL

✓ La información actualizada sobre la forma de citación puede ser consultada en la página de APA (American Psycological Association).

✓ Los esquemas, gráficos, tablas y fotografías deberán ser claros y se presentarán titulados, numerados e insertos en el cuerpo del texto.


Z
X
Y