Clame Comite Latinoamericano de Matematica Educativa

# Acta Latinoamericana de Matemática Educativa

VOLUMEN 36 » NÚMERO 1 » AÑO 2023 » ISSN 2448-6469

# ALME 36

---

ACTA LATINOAMERICANA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA, Volumen 36, Número 1, febrero 2023, es una publicación semestral editada por el Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, Av. Universidad 1900, Oxtopulco Universidad, Delegación Coyoacán, C.P. 04460, Ciudad de México, www.clame.org.mx, articulos.alme@gmail.com. Reserva de Derechos al Uso Exclusivo 04-2015-082710244200-203, otorgado por el Instituto Nacional del Derecho de Autor, ISSN: 2448-6469. Se autoriza la reproducción total o parcial, previa cita a la fuente:

Autor(es) (2023). Nombre del artículo. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 36 (1).* México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

---



Traducciones al inglés de títulos y resumenes realizada por Norma Moredo (Cuba). Apoyo técnico editorial por Lina Coral Villota y Karen Melisa Ospina (Colombia).

# Comité Científico de Evaluación

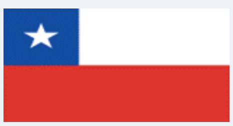
## ARGENTINA

Elisa Silvia Oliva Díaz

## BRASIL

Aline Silva De Bona Aline
Juliana Silva de Andrade

## CHILE



Patricia Vásquez Saldìas

## COLOMBIA

Maria Denis Vanegas Vasco
Paola Alejandra Balda Álvarez

## CUBA

Olga Lidia Pérez González

## ESPAÑA

Carmen López Esteban

## MÉXICO

Adriana Gómez Reyes
Alfonso Escorza Morales
Carlos Daniel Prado Peréz
Edgar Ponciano Bustos
Elena Nesterova
Horacio Saul Sostenes Gonzalez
Karla Liliana Puga Nathal
María de la Luz Huerta Ramírez
María del Carmen Fajardo Araujo
María Isabel Segura Gortáres
María Graciela Treviño Garza
María Teresa Martinez Acosta
Nilda Iglesias Domecq
Niurys Lázaro Alvarez
Saúl Ezequiel Ramos Cancino
Silvia Ibarra Olmos
Silvia Guadalupe Maffey García
Vivian Libeth Uzuriaga López

## PERÚ

Daysi Julissa García Cuéllar

## VENEZUELA

Ivonne Coromoto Sanchez Sanchez
Luis Andrés Castillo Bracho

# PRESENTACIÓN

Para este número la Revista Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (ALME) continúa como publicación semestral editada por un equipo editorial conformado por investigadoras e investigadores en Matemática Educativa procedentes de distintos países latinoamericanos que trabajan arduamente por visibilizar las acciones y la producción académica de la comunidad.

En este número de ALME continuamos como comunidad Latinoamericana y como nueva Junta aunando esfuerzos para alcanzar los propósitos académicos. El número visibiliza propuestas de investigación y enseñanza en el campo de la Matemática Educativa hacia el trabajo con diferentes recursos metodológicos, desde la evaluación y el seguimiento para fortalecer cada acción realizada en la comunidad.

En el ALME número 1 del volumen 36 presentamos 27 artículos de diversas posturas metodológicas y teóricas, agrupados en temáticas relacionadas con el análisis del discurso matemático escolar, las propuestas para la enseñanza de las Matemáticas, los aspectos socioepistemológicos para el análisis y el rediseño del discurso matemático escolar, el pensamiento del profesor, sus prácticas y su formación profesional, y el uso de recursos tecnológicos en el proceso de aprendizaje de las Matemáticas. Los documentos hicieron parte de las distintas ponencias y actividades académicas realizadas en la RELME 35.

Este número es fruto del trabajo arduo que realizaron las autoras y los autores y el equipo editorial para contribuir a la profesionalización de la Comunidad Latinoamericana de Matemática Educativa, y al fortalecimiento del desarrollo del pensamiento matemático en un contexto de retos e incertidumbres de la época actual.

Carmen Evarista Matías Pérez  
Presidenta del Consejo Directivo CLAME  
(2022-2026)

# TABLA DE CONTENIDOS

## SECCIÓN 1:
## ANÁLISIS DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR



## SECCIÓN 2:
## PROPUESTAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

# TABLA DE CONTENIDOS

# TABLA DE CONTENIDOS

## SECCIÓN 3

### ASPECTOS SOCIOEPISTEMOLÓGICOS EN EL ANÁLISIS Y EL REDISEÑO DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR



## SECCIÓN 4:

### EL PENSAMIENTO DEL PROFESOR, SUS PRÁCTICAS Y ELEMENTOS PARA SU FORMACIÓN PROFESIONAL

# SECCIÓN 5:

## USO DE LOS RECURSOS TECNOLÓGICOS EN EL PROCESO DE APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

# SECCIÓN 1

## ANÁLISIS DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR

# ANÁLISE DE UMA CARTA DE GORCEIX AO IMPERADOR BRASILEIRO DOM PEDRO II EM 1876: HISTÓRIA DA (EDUCAÇÃO) MATEMÁTICA NO BRASIL

# ANALYSIS OF A LETTER FROM GORCEIX TO THE BRAZILIAN EMPEROR DOM PEDRO II IN 1876: HISTORY OF MATHEMATICS EDUCATION IN BRAZIL

**Davidson Paulo Azevedo Oliveira**

**Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais. (Brasil)**

davidson@cefetmg.br

**Resumo:**

A historiografía atual considera diversas fontes como históricas, sobretudo cartas. Assim, questionamos o que se pode inferir sobre a História da (Educação) Matemática no Brasil a partir do conteúdo de uma carta de Gorceix (1842-1919) ao imperador Dom Pedro II (1825-1891) do dia 14 de setembro de 1876, ano em que a Escola de Minas de Ouro Preto iniciou suas atividades. Para tanto, nos baseamos em Barros (2019) sobre fontes históricas e História Cultural. Analisamos as influências francesas no país e críticas ao ensino secundário bem como o alto grau de matemática na instituição, tal como o cálculo diferencial.

**Palavras-chave**: história da matemática, escola de minas, historiografia

**Abstract**

The current historiography considers several sources as historical ones, especially letters. Thus, we question what can be inferred from the History of Mathematics Education in Brazil based on the content of a letter from Gorceix (1842-1919) to Emperor Dom Pedro II (1825-1891) from September 14, 1876, the year the School of Minas of Ouro Preto started its activities. Therefore, we base on Barros (2019) about historical sources and Cultural History. We analyze the French influences in the country and criticism of secondary education as well as the high degree of mathematics in the institution, such as differential calculus.

**Keywords**: history of mathematics, school of Minas, historiography

## Introducción

O trabalho de pesquisa em história é baseado em fontes sendo que os arquivos e museus podem ser comparados com o laboratório do historiador. Contudo, o que pode ser considerado como fonte histórica vem sendo modificado ao longo dos últimos anos, sendo também, considerados documentos iconográficos, fontes de cultura material, principalmente a partir dos Annales de 1929 (Barros, 2019). Inclusive a denominação de fontes (históricas) no lugar de documentos (históricos) se deu a partir da transformação do que pode ser considerado nas pesquisas em história. Documento refere-se mais a materiais escritos, ao passo que fontes possuem uma conotação mais ampla, indo além de produções textuais.

Além disso, as fontes, segundo a metáfora utilizada por Barros (2020) representam "máquinas do tempo" ou podem ser consideradas o "visor do tempo" por meio do qual o historiador pode ter acesso ao passado. Nosso veículo para o transporte no tempo é uma correpondência enviada ao Imperador Dom Pedro II por Gorceix no final dos oitocentos.

Entretanto, não existem muitos trabalhos historiográficos no território brasileiro nos quais as cartas são consideradas como documentos e analisadas de modo profundo.

Nesse sentido, nossa investigação caminha na direção de responder a seguinte questão: o que se pode inferir sobre a História da (Educação) Matemática no Brasil a partir do conteúdo de uma carta do geólogo francés Claude-Henry Gorceix (11842-1919) ao imperador brasileiro Dom Pedro II (1825-1891) datada de 14 de setembro de 1876, ano em que a Escola de Minas de Ouro Preto iniciou suas atividades?

## Marco teórico

De modo a responder a esta questão nos baseamos em Barros (2019) e sua definição de fontes históricas e História Cultural. Sendo fonte histórica "tudo aquilo que, por ter sido produzido pelos seres humanos ou por trazer vestigios de suas ações e interferência, pode nos proporcionar um acesso significativo à compreensão do passado humano e de seus desdobramentos no Presente" (p.15)

De acordo com este historiador os termos fontes primárias, secundárias e terciárias estão em desuso. Ele destaca, ainda, que uma classificação nesse sentido depende do objeto em análise e uma mesma fonte pode ser tanto direta e indireta, a depender do olhar do pesquisador. As fontes indiretas podem se situar em uma cadeia documental ou informativa entre o historiador e a fonte a ser analisada (Barros, 2019).

O estudioso sugere algunas questões que os historiadores deveriam colocar às fontes:

> (1). Qual a sua posição em relação ao proceso ou conjunto de acontecimentos os quais se refere?, (2) De que material físico e tipo de linguagem é feita? (3) Foi producida intencionalmente para falar sobre certos acontecimentos? E, por fim: (4) Está isolada, ou pode ser conectada a otras fontes da sua mesma especie? (Barros, 2019, p .29)

Essas perguntas direcionarão a análise apresentada no decorrer deste texto, embora não destacadamente, pois são respondidas concomitantemente e intrelaçadas. São retomadas de modo mais explícito nas considerações finais, especialmente a conexão com outras fontes, tanto diretas quanto indiretas, e estudos já realizados sobre o asunto.

## Resultados

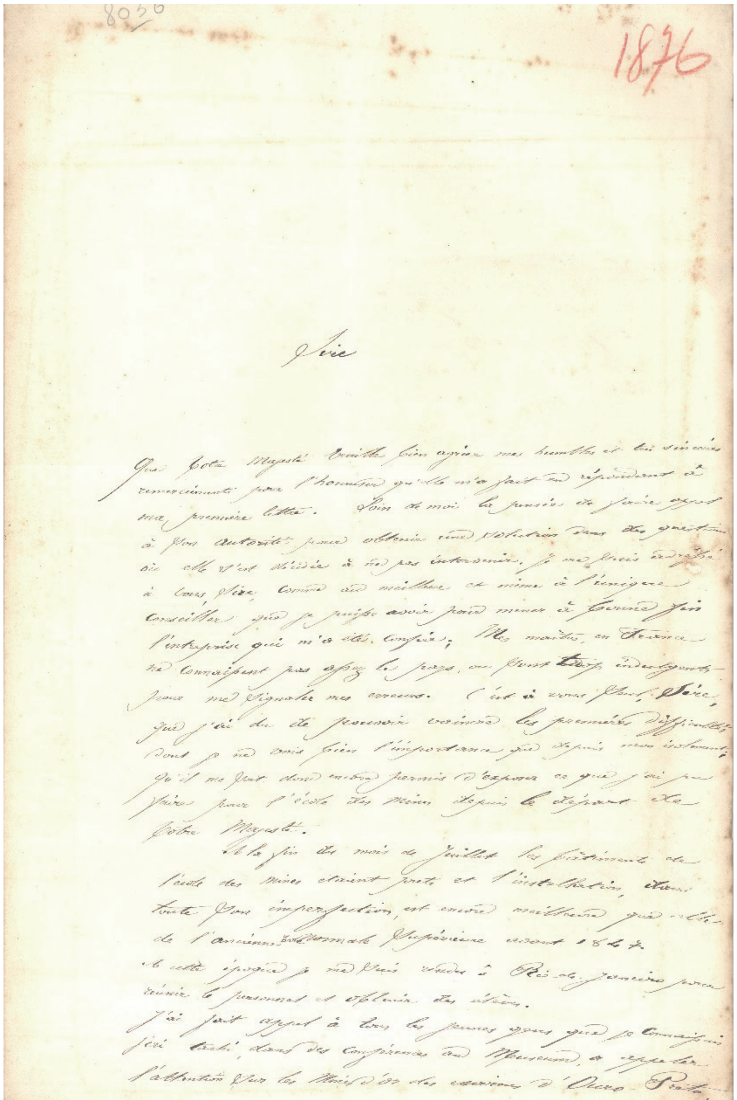
A carta analisada está disponível no Museu Imperial de Petrópolis, Rio de Janeiro, em meio digital e nos foi enviado por email. O código utilizado pelo museu é Museu Imperial/Ibram/MinC/nº785/2017 maço176, doc 8056.

Para a análise a que nos propusemos o primeiro passo foi a transcrição do documento que está escrito em língua francesa e com caneta de cor azul em um total de seis páginas (figura 1).

Ao iniciar a leitura da carta é possível perceber a proximidade existente entre Dom Pedro II e o francés Gorceix, que chega ao Brasil em 1874 por convite do imperador para fundar uma escola de estudos mineralógicos no país.

A instituição, Escola de Minas de Ouro Preto (EMOP), caracteriza-se por ser a primeira no Brasil dedicada a área e teve como objetivo principal alinhar teoría e prática sendo, portanto, um modelo híbrido baseado em duas instituições francesas, a Escola de Minas de Paris e a Escola de Minas de Saint Etiénne (Oliveira, 2020).

**Figura 1.** *Primeira página da carta analisada.*



8056

1876

Sire

Que Votre Majesté veuille bien agréer mes humbles et bien sincères remerciements pour l'honneur qu'elle m'a fait en répondant à ma première lettre. Loin de moi la pensée de faire appel à Son autorité pour obtenir une solution dans des questions où elle s'est décidée à ne pas intervenir, je me suis adressé à Vous, Sire, comme au meilleur et même à l'unique conseiller que je puisse avoir pour mener à bonne fin l'entreprise qui m'a été confiée; Mes maîtres, en France ne connaissent pas assez le pays, ou sont trop indulgents pour me signaler mes erreurs. C'est à Vous seul, Sire, que j'ai dû de pouvoir vaincre les premières difficultés dont je ne vois bien l'importance que depuis mon isolement; qu'il me soit donc encore permis d'exposer ce que j'ai pu faire pour l'école des Mines depuis le départ de Votre Majesté.

A la fin du mois de Juillet les bâtiments de l'école des Mines étaient prêts et l'installation, dans toute son imperfection, est encore meilleure que celle de l'ancienne école Normale Supérieure avant 1847.
A cette époque je me suis rendu à Rio-de-Janeiro pour réunir le personnel et obtenir des élèves.
J'ai fait appel à tous les jeunes gens que je connaissais j'ai tâché, dans des conférences au Museum, d'appeler l'attention sur les Mines d'or des environs d'Ouro Preto.

**Fonte:** Museu Imperial/Ibram/MinC/nº785/2017 maço176, doc 8056.

Na continuação, Gorceix destaca que, en julho de 1876, o estabelecimento dedicado às instalações escolares estaba em condições melhores e preparado para iniciar as atividades de ensino e pesquisa. Nas palavras dele:

No final de Julho os edifícios da Ecole des Mines estavam prontos e as instalações, em toda a sua imperfeição, são ainda melhores do que as da antiga Ecole Normale Supérieure antes de 1847.

Nessa altura, fui ao Rio de Janeiro para reunir o pessoal e conseguir estudantes.

Ademais, o geólogo francés informa ao imperador brasileiro que deveria dar conferências no Museu para divulgar a instituição. Se trata do Museu Nacional localizado no Rio de Janeiro, cidade onde se localizava a corte.

Apelei a todos os jovens que conhecia. Tentei, em palestras no Museu, chamar a atenção para as minas de ouro nas proximidades de Ouro Preto. Os meus esforços não foram completamente em vão. 7 estudantes da Ecole Polytechnique, dos quais vários tinham terminado os cursos gerais, inscreveram-se para participar no concurso de admissão.

A conferência para divulgação foi necessária pelo fato de não ter havido candidatos inscritos para o primeiro concurso de admissão à escola. Segundo Oliveira (2020), Gorceix, ao estabelecer o regulamento da instituição, exigia uma seleção de entrada por meio de provas orais e inscritas, de acordo com Silva e Thiengo (2003), a falta de candidatos era porque este requisito era uma novidade no território brasileiro.

Na correspondência analisada, como pode ser visto no trecho traduzido anteriormente, o diretor comenta que sete alunos se inscreveram, após a palestra no Museu Nacional, sendo todos formandos da Escola Politécnica do Rio de Janeiro. Os professores que constituíram o comité de avaliação, em termos de conteúdo matemático, foram o próprio Gorceix, M. P. Reis, Luiz P. Drago e Francisco Van Erven. A carta também revela as dificuldades de Gorceix na seleção de professores brasileiros, uma vez que ele considerava que eles não tinham capacidade técnica suficiente.

No trecho a seguir podemos ver como ele informa a Dom Pedro II em relação à seleção de professores.

Como composição escrita, o candidato teve que lidar, em 4 horas de andamentos, sem livros, com as seguintes questões: Lei de atração e repulsão magnética, sua retificação por meio da balança de Coulomb. Carbono, monóxido de carbono, ácido carbônico.

Como testes práticos: em física era muito fraco, o de química incompleto, mas bem tratado. Os testes práticos de física são bons, os preparativos de química são bons, mas a análise é mal feita.

Apesar disso, o júri considerou necessário propor o candidato a nomeação, e o Ministro ratificou a decisão, nomeando o Sr. Leonidas Damazo Botelho preparador da École des Mines.

Quanto à mineralogia e geologia, não podia contar com nenhum candidato sério, já que o meu ex-aluno Magalhães tinha casado e, creio, desistido dos estudos científicos. Então levei temporariamente o Sr. Medrado que, no ano passado, trabalhou por algum tempo comigo e depois no laboratório do Sr. Guignet. Ele tem o grande mérito de ter sempre, com a ajuda de seu trabalho, criado recursos para estudar na École Polytecnique. Conheço seu ardor no estudo. Ele é muito forte em matemática e substituirá o professor de mecânica até que o Sr. Daubrée decida nos enviar um. No ano que vem, ele entrará na competição.

Portanto, podemos verificar que houve um concurso para Formador de Física e Química com um único candidato, sendo a comissão de avaliação composta por docentes da EMOP, Escola Politécnica e Faculdade de Medicina.

A duração de quatro horas para a seleção de professores se assemelha ao que era realizado na França, na Escola de Minas de Paris e Escola Politécnica de Paris. Do mesmo modo que

a segunda fase prática para a qual foi selecionado o brasileiro Leônidas Damazo Botelho.

Para as cadeiras de mineralogia e geologia Gorceix selecionou o brasileiro Archias Euripedis da Rocha Medrado, conforme explicado na correspondência a Dom Pedro II, sendo considerado pelo diretor francês forte em matemática e com aptidões para aulas de mecânica até que Gabriel Auguste Daubrée (1814-1986) indicasse outro professor. Sr. Daubrée foi o contato principal do Imperador Dom Pedro II em sua viagem a europa nos anos de 1871 e 1872 com o objetivo de convidá-lo a se fundar no Brasil uma escola superior de estudos de mineralogia e geologia. A recusa de Daubrée se debe ao fato de ter recém assumido a direção da Escola de Minas de Paris (1872) permanecendo até sua aposentadoria em 1884. Destaca-se, também, que ele foi estudante da Escola Politécnica de Paris e da Escola de Minas de Paris onde, antes de ser diretor, foi professor desde 1862.

Gorceix ressalta em sua correspondência a necessidade de contratar o Professor Medrado, Archias Eurípedes da Rocha Medrado para a cadeira de mecânica, sendo responsável, também, pelas cadeiras de Complementos de Álgebra e Geometria Analítica.

Nesse sentido, Medrado pode ser considerado como o primeiro professor de conteúdos relacionados às matemáticas na Escola de Minas de Ouro Preto (Oliveira, 2020). A formação do professor se deu na Escola Central com Bacharelado em Ciências Físicas e Matemáticas lecionando no Colégio do Mosteiro de São Bento, no Rio de Janeiro. Na EMOP ele se torna Repetidor de Matemáticas oficialmente em 1880 e realiza concurso para professor efetivo em 1886. A confiança de Gorceix no Senhor Archias Medrado era tamanha que se torna o segundo diretor da instituição, com a saída do diretor francês em 1891, até o ano de 1900. Gorceix e Medrado foram os únicos diretores não formados pela instituição, a partir de 1900 com Joaquim Cândido da Costa Sena, até os dias atuais somente ex alunos assumiram a direção.

Uma análise de Cunha e Hering (2012) evidencia a não coincidencia desse fato.Os autores ressaltam que Gorceix contrata professores estrangeiros e ex-alunos para garantir a endogenia da instituição e construir um espírito de corpo. Isso aumentaria a possibilidade de continuidade das concepções de ensino e pesquisa do seu fundador, Gorceix. Eles afirmam que o geólogo francês

> Foi cuidadoso na contratação de professores que pudessem sustentar o 'espírito' impresso na criação da Escola. Enquanto não pôde contar com ex-alunos, contratava professores estrangeiros e brasileiros nos quais ele pudesse confiar. A cuidadosa seleção e o tempo de permanência dos professores foi fator importante na criação e manutenção de um estilo homogêneo de trabalho, contribuindo para o 'espírito de corpo' da Escola, marca da sua constituição (Cunha e Hering, 2012, p. 252).

Esse espírito e qualidade pode ser visto no rigor exigido nos exames de seleção constituídos de provas orais e escritas, do mesmo modo que nas instituições superiores francesas. As provas escritas valiam de 0 a 20 pontos sendo três exames distintos: (a) Composição de matemática, com peso 10; (b) Desenho de descritiva, peso 5; e (c) Cálculo Trigonométrico, peso 3. Os resultados não foram satisfatórios, na visão de Gorceix, segundo ele:

A composição da geometria analítica, a discussão da equação geral do 2º grau com duas variáveis, e uma curva a ser construída, foi bem feita por todos. Mas o esboço de geometria descritiva, secção inter-secção de uma pirâmide hexagonal, num caso particular, por um plano, o cálculo trigonométrico, resolução numérica de um triângulo, deixou muito a desejar.

De fato, a média da composição de Geometria Analítica foi 16,5. Ao passo que as demais foram 5,25 em Trigonometria e 4 em Desenho de Geometria Descritiva, o que corrobora com a insatisfação informada ao Imperador Brasileiro na correspondencia que analizamos.

Os resultados das provas orais foram melhores, eram quatro componentes a serem avaliadas: (a) Aritmética, Geometria Analítica e Álgebra; (b) Geometria Elementar e Trigonometria; (c) Física, Química, Zooloia e Botânica; (d) Lingua Estrangeira (Inglês, Alemão ou Francês). O trecho a seguir retrata a opinião do diretor em relação aos testes orais, ressaltando que em matemática o resultado foi melhor, a pesar de serem questões que demandavam mais da memória do que do raciocínio.

Os exames orais confirmaram as ideias a que estas primeiras provas deram origem. As questões de matemática pura, bem especificadas, colocadas nos termos utilizados pelos autores onde os estudantes estão habituados a estudar, foram, em geral, bem tratadas. Mas nas ciências aplicadas, física e química, as respostas foram sempre inadequadas. Foi muito difícil seguir um raciocínio rigoroso. Ideias vagas sobre atomicidade, sobre como formular, eram o que restava do ensino seguido pelos estudantes. Alguns deles, porém, mostraram um certo espírito de investigação e, dado o novo modo utilizado nos exames, o pouco hábito dos candidatos de responder imediatamente no quadro, o resultado não foi mau. Devo mesmo dizer que os achei mais abertos, mais dispostos a tirar partido do ensino do que os candidatos em várias das nossas escolas em França.

As matérias utilizadas pelos autores onde os alunos estão habituados a estudar foram geralmente bem tratadas. Mas nas ciências aplicadas, física e química, as respostas foram sempre inadequadas. Foi muito difícil seguir um raciocínio rigoroso. Ideias vagas sobre atomicidade, sobre como formular, eram o que restava do ensino seguido pelos estudantes. Alguns deles, porém, mostraram um certo espírito de investigação e, dado o novo modo utilizado nos exames, o pouco hábito dos candidatos de responder imediatamente no quadro, o resultado não foi mau. Devo mesmo dizer que os achei mais abertos, mais dispostos a tirar partido do ensino do que os candidatos em várias das nossas escolas em França.

Segundo Belhoste (2008), a Escola Politécnica de Paris influenciava os exames de admissão nas demais escolas francesas (Escola Normal, Escola de Minas de Paris, Escola de Minas de Saint-Étienne), o que não foi diferente para a EMOP, que seria dirigida por um francês. Os conteúdos da Escola Politécnica de Paris e da Escola de Minas de Ouro Preto eran semelhantes (Oliveira, 2020). As notas dos estudantes variavam de 0 a 20, nos dois países.

Na primeira seleção da instituição criada por Gorceix sete candidatos se inscreveram, sendo que dois desistiram, um deles reprovado por não realizar a prova de Física e quatro aprobados, conforme anunciados a Dom Pedro II na carta:

Na sequência destas provas, o júri apresentou 4 candidatos para nomeação como Ministro, na seguinte ordem de mérito:

1. Léandro Dupré Júnior
2. Francisco de Paula Oliveira
3. Luiz Adolpho Correa da Costa
4. Antonio Veríssimo de Mattos Junior

Nas três semanas desde que os exames foram concluídos, ainda não consegui obter, apesar dos meus esforços diários, a assinatura do Ministro do Império ratificando estas nomeações, uma decisão sobre a hora da abertura dos cursos e, sobretudo, a fixação do orçamento da escola.

Para completar a lista dos sete inscritos apresentamos os candidatos Herácio Rodrigues Antunes e José Baptista de Azevedo que não compareceram a nenhum dos exames escritos ou orais. Além do candidato reprovado, Alfredo Teixeira, conforme pode ser lido no trecho a seguir, transcrito a partir da Acta do concurso de admissão à Escola de Minas de Ouro Preto, Anno 1876. O portugués da época foi mantido como no original, portanto, há divergencias da norma culta atual.

Todo o processo como regularmente; ha somente a notar que o candidato Alfredo Teixeira de Carvalho, tendo-se dado por inconvidado [?] no dia 24 do corrente por ocasião de exame de Physica e pedido adiamento, a comissão lh’a concedeo. Não se tendo apresentado dentro do prazo marcado nem justificado de qualquer modo a sua ausência, a postos considerou nullas as provas por elle já prestadas, julgando-o excluído do concurso.

Gorceix, portanto, comunicou ao imperador brasileiro as dificuldades que os candidatos apresentaram nas provas, principalmente as relacionadas aos conhecimentos matemáticos. O geólogo francês critica o ensino secundário brasileiro da época que, de acordó com ele, era dedicado à memorização e os alunos não demonstravam espírito investigativo.

Diante dos resultados insatisfatórios, decidiu criar um curso preparatório, semelhante ao das instituições francesas, como aponta Oliveira (2020). Além disso, segundo Oliveira (2021), o primeiro curso preparatório teve início em 1877, sendo reformulado em 1880 e 1885 para incluir discussões sobre o cálculo de máximos e mínimos de expressões algébricas com o uso de técnicas de derivação, ou seja, era necessário o estudo diferencial cálculo antes de ingressar no ensino superior.

Os exames provaram-me a utilidade do curso preparatório que pode servir de modelo para o ensino secundário especial, já que a Escola de Minas, se não for demasiado orgulhosa da minha parte, deve ser para a das ciências aplicadas.

Cada dia estou mais convencido da necessidade de introduzir melhores métodos no ensino secundário e superior e de criar professores que amem os seus deveres. Vossa Majestade já viu a Ecole Normale Superieure em Paris. É a ela, não creio que seja possível duvidar, que a nossa educação secundária deve o seu valor. Os professores foram formados no estabelecimento vizinho, enquanto os missionários eram formados no estabelecimento vizinho. O seu regime, erroneamente na minha opinião, tornou-se menos severo. Não perdeu nada por ter uma disciplina quase monástica.

Mas vou parar aqui, Majestade, pedindo perdão a Vossa Majestade por o ter incomodado com cartas tão longas. Tomarei a liberdade de lhe dirigir o meu último apelo para o curso preparatório que, durante dois meses, foi entregue ao Ministério.

O desejo de responder com dignidade a toda a benevolência que Vossa Majestade me mostrou, de cumprir o meu dever da melhor forma possível, pode por si só sustentar-me nas fraquezas da minha luta diária.

O curso preparatório de 1877 era constituído de três materias com um ano de duração, enquanto que o de 1880 foi aumentado para dois anos, mantendo a duração em 1885, mas aumentando as disciplinas lecionadas.

Outro aspecto destacado na correspondência que podemos notar é a opinião de Gorceix quanto a necessidade de melhorar o ensino secundário e superior no Brasil. De acordo com Lima (1977), o director indica os livros de Rebiére e Combette para utilização em todo o Brasil, pois foram indicados ao Gorceix por amigos professores franceses como os mais atualizados da época.

Os autores indicados por ele vieram a partir de uma viagem de Gorceix a Paris no ano de 1881 devido ao falecimento de seu amigo Monsieur Delesse e diretor da Escola Normal de Paris que o queria como sucesor da instituição, desejo anunciado no leito de morte. Mesmo estando longe fisicamente da Escola de Minas de Ouro Preto, ele se mostrava preocupado com o ensino e a instituição e conversa com com professores franceses do ensino secundário e recebeu as sugestões de livros indicados anteriormente.

As indicações são encaminhadas ao Ministro do Império e na correspondencia de 1880 Gorceix compara os dois autores como pode ser visto a seguir:

Rebière se dirige às crianças e procura fazêlas entender aritmética e geometria. Eu acho que ele se sai muito bem. Combette, o mais brilhante de nossos professores do ensino médio, quer dar a esse ensino um papel de destaque. Sua aritmética, Geometria, como Mecânica (em voto da publicação) são muito superiores ao que foi feito até agora. Ele não busca fazer boa ciência, mas uma ciência clara ao alcance dos estudantes. Sabendo o quanto sua Majestade está interessada nessas perguntas e me lembrando que ela teve a gentileza de me permitir cuidar disso no Brasil, eu tenho o dever de me colocar em posição de prestar alguns serviços ao país e cobrarei Sena para traduzir, para os jornais, minha apreciação por esses trabalhos.

Em resposta à Gorceix em relação ao envio dos livros indicados por ele, o imperador Dom Pedro II, em 1881, se compromete com a leitura deles. Entretanto, não sabemos, até o momento, quais as influências destes autores (Rébiére e Combette) no Brasil, pois não encontramos trabalhos brasileiros sobre livros didáticos no país no século XIX que citem os autores indicados por Gorceix. Também não há referencias a eles nos planos de ensino e programas de curso das escolas secundárias do período.

Em carta enviada de Ouro Preto no dia 15 de junho de 1883 a Dom Pedro II, Gorceix reafirma os questionamentos dele em relação ao ensino básico no Império Brasileiro e à falta de esforço ou inteligência dos alunos brasileiros. Ele retrata a necessidade de se ensinar Cálculo Diferencial aos alunos nesse nível de ensino. E, novamente, tece críticas ao ensino secundário.

Ainda no final do trecho anterior podemos ver que Gorceix diz solicitar a tradução dos livros a Sena. Se trata do ex aluno, Joaquim Cândido Costa Sena (1852 – 1919). Ele é visto por Gorceix como o primeiro estudante com capacidade para se tornar professor da instituição foi também agraciado com uma bolsa de estudos, prevista no regulamento da EMOP, e dono de uma carreira brilhante, tanto acadêmica quanto política. Mineiro, nascido em Conceição do Mato Dentro no ano de 1852, formou-se na Escola de Minas no ano de 1880. Mas sua relação com a escola não se restringiu a vida de estudante, como previsto por Gorceix, foi professor de Mineralogia e Geologia, Física e Química, além de ter ocupado o cargo de diretor da Escola de Minas de Ouro Preto por dezenove anos, de 1900 a 1919, ano de seu falecimento. Além disso, foi membro efetivo de diversas sociedades ligadas à geologia e mineralogia. Na política assumiu o cargo de Deputado, Senador de Minas e Presidente do Estado de Minas Gerais (nome dado ao que é atualmente o Governador do Estado) de fevereiro a setembro de 1902.

## Conclusiones

Por meio desta carta podemos perceber que a criação e instalação de uma escola de ensino superior no Brasil em 1876 teve a influência francesa de Gorceix e dos professores que ele convidou para trabalhar na instituição, especialmente franceses.

Como Gorceix defende que no Brasil não há professores com saberes suficientes para serem docentes na escola que ele propunha, ele convida franceses para assumirem as cadeiras. Não há indícios que apontam para a obrigatoriedade dos professores terem domínio da Língua Portuguesa ao chegaram ao Brasil. No entanto as provas eram no idioma falado no Brasil. Além disso, a Lingua Francesa foi o exame de admissão escolhido pelos primeiros candidatos, com notas altas, o que pode indicar que os discentes tinham familiaridade pelo idioma falado pelos professores estrangeiros.

A vinda de Gorceix e de professores que ele convida pode ser considerada um ponto de inflexão na investigação geológica brasileira porque o ensino se baseava na investigação e na prática e o trabalho de campo tinha de ser feito pelos estudantes durante as férias.

Além disso, a crítica e a mudança sugerida pelo Gorceix em relação ao ensino e investigação na própria matemática superior, por exemplo com técnicas de derivação no ensino secundário, retrata a constituição da investigação em geologia e mineralogia no país, bem como conhecimentos matemáticos de ordem superior. Neste sentido, a relação de amizade entre Gorceix e Dom Pedro II podia ser percebida através desta correspondência.

Retomando as questões propostas por Barros (2019) destacamos a intencionalidade de Gorceix em retratar os acontecimentos ocorridos na criação e organização da primeira instituição brasileira de ensino superior de geologia e mineralogia. Essa intenção chega até os dias atuais por meio da carta servindo de veículo para o passado, uma máquina do tempo. Além disso, para que essa viagem possa ocorrer de modo mais profundo possível, foi conectada a outras fontes históricas, como outras correspondências escritas por Gorceix, legislação relativa ao regulamento da instituição e estudos historiográficos que tratam do mesmo tema, mas que não discutem a importância de cartas nos estudos históricos da (educação) matemática.

**Agradecimientos:** O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento- 001.

## Referencias bibliográficas

Barros, J. A. (2019). Fontes Históricas: Introdução aos seus usos historiográficos. Petrópolis: Editora Vozes.

Barros, J. A. (2020). Fontes Históricas: Introdução à sua definição, à sua função no trabalho do historiador, e à sua variedade de tipos. *Cadernos do Tempo Presente*. São Cristóvão. SE. V. 11. N.02. p. 03-26.

Belhoste, B. (2008) Anatomie d’un concours. L’organization de l’examen d’admission à l´École polytechnique de la Révolution à nos jours. *Histoire de l’Éducation*. p. 1-30.

Cunha, M. A. A. Hering, F. A. (2012). Com o Martelo e com o Espírito: ciência prática, reprodução das elites e espírito de corpo na Escola de Minas de Ouro Preto. Revista Brasileira de história & Ciência Sociais. V.4. n.8.

Lima, M. R. (1977). *D. Pedro II e Gorceix: a fundação da Escola de Minas de Ouro Preto.* Ouro Preto: Fundação Gorceix.

Oliveira, Z. V.; Barbosa, G. (2020). Sobre a Importância da Tradução na Pesquisa em História da Matemática. *Revista Brasileira de História da Matemática*, *[S. l.]*, v. 18, n. 36, p. 01-09. DOI: 10.47976/RBHM2018v18n3601-09. Disponível em: https://www.rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/17. Acesso em: 9 out. 2022.

Oliveira, D. P. A. (2020). *Um estudo de avaliações de matemática na Escola de Minas de Ouro Preto de 1876 a 1891* [Doctoral dissertation, Unesp – Rio Claro].

Oliveira, D. P. A. (2021). Zum mathematischen Unterricht in der Anfangsphase der ersten Bergbauhochschule Brasiliens. Em H. Fischer, T. Sauer, Y. Weiss (Ed.), *Exkursionen in die Geschichte der Mathematik und ihres Unterrichts* (pp. 235-245). Munster: WTM-Verlag.

Silva, C. M. S. Thiengo, E. R. (2003). Claude-Henri Gorceix: Trabalho e competência na criação de uma escola e na formação de discípulos. *Episteme*. Porto Alegre, n. 17, p.69-99.

# NIVELES DE VAN HIELE SOBRE TRIÁNGULOS Y CUADRILÁTEROS EN ESTUDIANTES DE QUINTO GRADO DE PRIMARIA

# VAN HIELE LEVELS ON TRIANGLES AND CUADRILATERALS IN FITH GRADE PRIMARYSCHOOL STUDENTS

**Lourdes Rodríguez Soto, Elizabeth Advíncula Clemente**
**Pontificia Universidad Católica del Perú. (Perú)**
lourdes.rodriguezs@pucp.edu.pe, eadvincula@pucp.edu.pe

**Resumen**:
El modelo de Van Hiele aporta a la enseñanza y el aprendizaje de la geometría e incluye dos dimensiones: niveles de razonamiento geométrico y fases de aprendizaje. El objetivo de esta investigación es identificar los niveles de razonamiento geométrico respecto a triángulos y cuadriláteros en estudiantes de quinto grado de primaria de un colegio particular en Perú. Este estudio es cuantitativo, descriptivo, no experimental y transversal. Se encontró que el razonamiento geométrico entre los estudiantes es diverso y complejo puesto que cada uno mostró habilidades de razonamiento geométrico que los ubicaron en distintos grados de adquisición de los niveles de Van Hiele.

**Palabras clave**: pensamiento geométrico, primario, investigación cuantitativa y descriptiva

**Abstract**:
The Van Hiele model contributes to geometry teaching and learning. This model includes two dimensions: the Van Hiele levels of geometric thinking, and the learning phases of Van Hiele. The aim of this research is to identify the levels of geometric thinking related to triangles and quadrilaterals in fifth-grade primary school students from a private school in Peru. This is a quantitative, descriptive, non-experimental and cross-sectional study. It was found that the geometric thinking among the students is different and complex since each one showed geometric reasoning skills that placed them in different acquisition grades with respect to the Van Hiele levels.

**Keywords**: geometric thinking, primary, quantitative and descriptive research

## Introducción

La presente investigación surge al observar las dificultades que presentan los estudiantes de educación primaria al desarrollar actividades vinculadas con contenidos geométricos.

Asimismo, responde al interés de conocer el razonamiento geométrico de estos estudiantes

dada la presencia que tiene la geometría en nuestras actividades, sea de manera directa o indirecta. Este estudio se enmarca en la línea de investigación denominada Pensamiento geométrico, y parte por reconocer a la geometría como una ciencia que promueve el desarrollo de habilidades y destrezas de razonamiento geométrico tales como habilidades visuales, de razonamiento, interpretativas, de clasificación, de lenguaje, de dibujo, entre otras. Asimismo, al conocer cuál es el desarrollo del pensamiento geométrico en los niños, es posible conocer las dificultades que encuentran ante ciertos conceptos y relaciones geométricas. De esta manera, los docentes tendrán un punto de partida para saber de qué manera acompañar a sus estudiantes en su proceso de aprendizaje. La investigación responde a la siguiente pregunta: ¿Cuál es el nivel de razonamiento geométrico que alcanzan los estudiantes de quinto grado de primaria de una institución educativa particular de Lima al desarrollar un test sobre triángulos y cuadriláteros? Para ello, se propone tener como marco de referencia de la investigación los Niveles del Modelo de Van Hiele, los cuales permiten conocer el razonamiento geométrico de los estudiantes al identificar las habilidades del nivel en el que se encuentran.

## Marco teórico

### *Modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele*

El modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele o la Teoría de Van Hiele se remonta al año 1957 en la Universidad de Utrecht, Holanda. Este modelo fue presentado por la pareja de esposos conformada por Dina van Hiele-Geldof y Pierre van Hiele. Según De Villiers (2012), Pierre van Hiele presentó una investigación basada en los problemas de aprendizaje de sus estudiantes en el área de geometría; mientras que Dina van Hiele se enfocó en estudiar un experimento de enseñanza para la geometría. A partir de estas dos investigaciones y las experiencias recogidas por ambos autores surgió el modelo de Van Hiele.

Los Van Hiele se percataron que, al igual que hoy en día, muchos alumnos no comprenden lo que estudian, debido, probablemente, a la ausencia de actividades que permitan a los estudiantes demostrar una afirmación o un ejercicio. Tal y como señala Corberán et al. (1994), “es difícil encontrar cursos de Primaria, ni siquiera del Ciclo Superior, en los que se realicen demostraciones más o menos rigurosas, aunque sean intuitivas, de las propiedades o resultados que se están estudiando” (p. 12).

### *Descripción de los niveles de razonamiento geométrico de Van Hiele*

Los niveles de Van Hiele o niveles de razonamiento geométrico agrupan distintas habilidades geométricas, que a su vez se organizan de acuerdo con su complejidad. Estos niveles son una “descripción de los distintos tipos de razonamiento geométrico de los estudiantes a lo largo de su formación matemática, que van desde el razonamiento intuitivo de los niños hasta el formal y abstracto de los estudiantes de las licenciaturas de Matemáticas” (Guillén, 2004, p.105). De igual manera, estos niveles de razonamiento geométrico son secuenciales, progresivos y específicos de acuerdo con el tema geométrico a trabajar.

Los niveles de Van Hiele por los que atraviesa el estudiante respecto a su razonamiento geométrico son cinco: Visualización, Análisis, Clasificación, Deducción y Rigor. Cada uno de los cinco niveles de Van Hiele presenta características particulares, sin embargo, guardan relación uno del otro. De acuerdo con Gamboa y Vargas (2013), la relación que existe entre los niveles es tal que para que un estudiante domine su nivel y alcance el siguiente nivel deberá cumplir con ciertos aprendizajes del nivel anterior.

En la educación escolar primaria y secundaria se pueden distinguir los cuatro primeros niveles de razonamiento de Van Hiele. Estos son: Visualización; Análisis; Clasificación y Deducción. El quinto nivel, el nivel de "Rigor", demanda del estudiante una alta capacidad de abstracción. Para Gamboa y Vargas (2013) y Gutiérrez y Jaime (1991), este último nivel solo se desarrolla en estudiantes de universidades con buena capacidad y comprensión de la geometría.

A continuación, se describen los niveles del 1 al 4, ya que son aquellos que, según Gamboa y Vargas (2013), los estudiantes de colegio pueden alcanzar.

*Nivel 1: Visualización*

El nivel 1 denominado con el nombre de "Nivel de visualización" o "Nivel de reconocimiento", es aquel en el que los objetos se perciben por su totalidad o como unidades (Guillén, 2004). Los estudiantes en este nivel perciben las figuras geométricas "centrando sus descripciones en el aspecto físico de las figuras […]. No son capaces de generalizar características de una figura a otra" (Aravena y Gutiérrez, 2016, p.110).

*Nivel 2: Análisis*

En el nivel 2 o "nivel de análisis", los conceptos de los cuadriláteros y triángulos se entienden a través de los elementos que los componen, identificando y generalizando propiedades de los mismos, las cuales se utilizan independientemente sin establecer relaciones entre ellas.

*Nivel 3: Clasificación*

Para Gutiérrez y Jaime (citados por Uribe, Cárdenas y Becerra, 2014), en el nivel 3 o "Nivel de Clasificación", se realizan clasificaciones lógicas de los objetos, descubriendo nuevas propiedades en base a relaciones o propiedades ya conocidas y por medio del razonamiento informal. Así mismo, se comprenden los pasos individuales de un razonamiento lógico en una forma aislada pero no se comprende el encadenamiento de estos pasos ni la estructura de una demostración.

*Nivel 4: Deducción*

El nivel 4 o "Nivel de Deducción", los estudiantes comprenden la estructura axiomática de la matemática y se emplea el razonamiento lógico formal para construir demostraciones, comprendiendo la posibilidad de obtener el mismo resultado siguiendo distintas premisas. Sin embargo, los estudiantes en este nivel aún no han adquirido un 34 conocimiento global de los sistemas axiomáticos, por lo cual no se comprende la necesidad del razonamiento riguroso (Gutiérrez y Jaime, 1996).

***Procesos de pensamiento claves en los niveles de razonamiento geométrico de Van Hiele***

En su "Diseño para evaluar los niveles de Van Hiele", Gutiérrez y Jaime (1994) consideran diferentes "key thinking process" ("procesos de pensamiento clave") por cada nivel de razonamiento propuestos en el modelo de Van Hiele. Según estos autores, los procesos de pensamiento clave que caracterizan a los niveles de Van Hiele son: Identificación, Definición, Clasificación y Prueba. Al igual que los niveles de razonamiento de Van Hiele, estos procesos claves se explican según el tema geométrico que se busca evaluar.

A partir del tema de triángulos y cuadriláteros, el primer procedimiento se refiere a la "identificación" de la familia a la que pertenece cada objeto geométrico; el segundo procedimiento se enfoca en la "definición" de un concepto, el cual puede darse como una repetición o lectura de un concepto dado o aquella que formula una definición para una clase de figuras geométricas; el tercer procedimiento apunta a la "clasificación" de objetos geométricos en diferentes familias; y el último proceso indica la "prueba" de propiedades o afirmaciones a manera de convencer a alguien sobre la veracidad de dichas afirmaciones.

Como señalan Gutiérrez y Jaime (1994), los niveles de razonamiento geométricos están integrados por procesos de pensamiento clave, y a su vez estos están conformados por distintas habilidades matemáticas como: identificar, comparar, demostrar, clasificar, entre otras. Sin embargo, no todos estos procedimientos y habilidades forman parte de todos los niveles. En la siguiente tabla (tabla 1) se observa la distribución de los procesos de pensamiento por cada nivel de Van Hiele.

**Tabla 1.** *Procesos de pensamiento clave en cada nivel de razonamiento de Van Hiele.*

| | **Identificación** | **Definición** | **Clasificación** | **Prueba** |
|---|---|---|---|---|
| **Nivel 1** | ✓ | ✓ | ✓ | x |
| **Nivel 2** | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| **Nivel 3** | x | ✓ | ✓ | ✓ |
| **Nivel 4** | x | ✓ | x | ✓ |

**Fuente:** Tomado y adaptado de Gutiérrez y Jaime (1994, p. 43).

***Descripción de las propiedades de Van Hiele***

En su descripción de los niveles de Van Hiele, Corberán et al. (1994) resaltan que estos niveles de razonamiento geométrico presentan propiedades que explican el recorrido de los estudiantes a través de los niveles hasta demostrar la comprensión de aquello que están aprendiendo. Las propiedades resaltadas por Corberán et al. son:

*Secuencialidad*

Los niveles guardan relación uno con el otro, es decir, la adquisición de un nivel no supone dejar de lado las habilidades de razonamiento conseguidas en el nivel precedente. Según los autores mencionados anteriormente, los estudiantes utilizan de manera implícita o inconsciente ciertas habilidades, las cuales cuando llegan a usarse de manera explícita o consciente en los próximos niveles significan el "paso al siguiente nivel".

*Continuidad*

Es decir, conforme los estudiantes van adquiriendo destrezas irán desenvolviéndose en situaciones sencillas hasta llegar a situaciones complejas. Tal y como señalan Corberán et al. (1994) "el aprendizaje de una nueva forma de razonar no se realiza de golpe. La experiencia en la realización de actividades y la resolución de problemas hace que poco a poco se vayan adquiriendo esas nuevas destrezas" (p. 23).

*Lenguaje específico*

Van Hiele (citado por Corberán et al., 1994) afirma que "dos personas que razonan en diferentes niveles y que, por lo tanto, interpretan los argumentos expuestos de formas diferentes, no podrán entenderse" (p. 23). El lenguaje que se use en cada nivel varía no solo por el vocabulario matemático que empleen los alumnos, sino también por la comprensión de términos matemáticos.

***Evaluación de los niveles de Van Hiele***

La evaluación de los niveles de Van Hiele tiene como propósito identificar el nivel o los niveles de razonamiento geométrico que presentan los estudiantes respecto a un determinado tema relacionado a la geometría. Según Aravena, Gutiérrez y Jaime (2016) evaluar la adquisición de los niveles de Van Hiele implica evaluar razones, argumentos, explicaciones y demostraciones que están detrás de las respuestas que los niños brinden en un test u otra prueba. De acuerdo a Jaime (1993), no se puede determinar un nivel de razonamiento único en un niño. Es así que, para la evaluación de los niveles de Van Hiele esta investigación empleará la "metodología del cálculo de los grados de adquisición de los niveles de razonamiento" y de la corrección matemática de las respuestas propuestas por Fortuny, Gutiérrez y Jaime (1991).

*Grados de adquisición de los niveles de Van Hiele*

Al hablar de grados de adquisición se hace referencia al porcentaje o dominio de un nivel de razonamiento respecto a otro (en un mismo estudiante). La determinación del grado de adquisición va desde el "dominio nulo" hasta el "dominio completo". Jaime (1993) explica así los grados de adquisición que pueden encontrarse por cada nivel de Van Hiele:

**Tabla 2.** *Grados de adquisición de los niveles de razonamiento de Van Hiele.*

| Grado de Adquisición | Descripción |
|---|---|
| **Adquisición nula** | No se emplean las características de un nivel de razonamiento determinado. |
| **Adquisición baja** | Empieza la conciencia de las características, métodos y exigencias propios del nivel, sin embargo, es muy pobre el uso de los mismos. |
| **Adquisición media** | El empleo de las características y métodos de este nivel es más frecuente y preciso. No obstante, todavía no se domina el nivel, por lo que suele haber saltos frecuentes entre dos niveles consecutivos de razonamiento. |
| **Adquisición alta** | Dominio de características y métodos del nivel. En ocasiones se hace uso inadecuado de las herramientas propias del nivel de razonamiento. |
| **Adquisición alta y completa** | Dominio total de las herramientas y métodos de trabajo propios del nivel de razonamiento. |

**Fuente**: Tomado y adaptado de Jaime (1993).

Los grados de adquisición permiten la buena lectura y comprensión de las respuestas al test de razonamiento geométrico. Para ello, es importante conocer los tipos de respuestas que se pueden obtener en el test de razonamiento geométrico. A continuación, se describen los siete tipos de respuesta que desarrolla Jaime (1993) para comprender y saber identificar el grado de adquisición de los niveles de razonamiento. Es preciso mencionar que los tipos de respuestas varían de acuerdo con el tema geométrico a evaluar.

**Tabla 3.** *Tipos de respuestas.*

| Tipo de respuesta | Descripción |
|---|---|
| **Tipo 1** | Sin respuestas o con respuestas que indican que el estudiante no está en un determinado nivel de razonamiento. |
| **Tipo 2** | Respuestas matemáticas incorrectas y muy incompletas que no contestan directamente a la pregunta planteada, pero en las que se reconocen indicios de utilización de cierto nivel de razonamiento. |
| **Tipo 3** | Respuestas matemáticas correctas pero muy incompletas, en las que se reconocen indicios de utilización de cierto nivel de razonamiento. Respuestas breves y pobres, aunque no contienen errores matemáticos. |

| | |
|---|---|
| **Tipo 4** | Respuestas que reflejan claramente características de dos niveles de razonamiento consecutivos. Estas pueden ser matemáticamente correctas o incorrectas, pero deben ser bastante completas. |
| **Tipo 5** | Respuestas bastante completas, pero matemáticamente incorrectas, que reflejan claramente la utilización predominante de un nivel de razonamiento determinado. |
| **Tipo 6** | Respuestas bastante completas y matemáticamente correctas, que reflejan claramente la utilización predominante de un nivel de razonamiento determinado. No obstante, no llegan a resolver el problema totalmente. |
| **Tipo 7** | Respuestas matemáticamente completas y correctas, que reflejan claramente la utilización de un nivel de razonamiento determinado. |

**Fuente**: Tomado y adaptado de Jaime (1993).

En la tabla 4 se aprecia la correlación entre la "corrección matemática" y el "uso del nivel de Van Hiele" por cada tipo de respuesta. Así, por ejemplo, una respuesta tipo 2 significa que es matemáticamente incorrecta y que por lo que se observa el nivel de razonamiento es bajo; mientras que una respuesta tipo 5 puede ser matemáticamente incorrecta, sin embargo, se observa un nivel de razonamiento alto.

**Tabla 4.** *Características de los tipos de respuestas.*

| | **Corrección Matemática** | |
|---|---|---|
| | Incorrecta | Correcta |
| **Alto** | 5 | 6, 7 |
| **Medio** | 4 | |
| **Bajo** | 2 | 3 |

**Fuente**: Tomado de Jaime (1993).

Asimismo, una vez determinado el tipo de respuesta al test de razonamiento, el siguiente paso para asignar el grado de adquisición es la ponderación de dichas respuestas. Jaime (1993) propone una ponderación en porcentaje que va del 0% al 100% y que responde a cada tipo de pregunta. En la siguiente tabla se aprecia lo anteriormente mencionado:

**Tabla 5.** *Ponderación de los diferentes tipos de respuestas.*

| **Tipo** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Ponderación (%)** | 0 | 20 | 25 | 50 | 75 | 80 | 100 |

**Fuente**: Tomado de Jaime (1993).

## Metodología

***Objetivos de la investigación***

El objetivo principal de la investigación es "Caracterizar el nivel de razonamiento geométrico respecto a los triángulos y cuadriláteros en estudiantes de quinto grado de primaria de una institución educativa particular en Perú". Este objetivo busca responder a la siguiente pregunta de investigación: "¿Cuál es el nivel de razonamiento geométrico respecto a los triángulos y cuadriláteros que alcanzan los estudiantes de quinto grado de primaria de una Institución Educativa particular de Lima Metropolitana?".

Asimismo, los objetivos específicos del estudio son: "Describir los niveles de razonamiento geométrico según Van Hiele, respecto a los triángulos y cuadriláteros que se espera alcancen los estudiantes de quinto grado de primaria" e "Identificar el nivel de razonamiento geométrico según Van Hiele, respecto a los triángulos y cuadriláteros en estudiantes de quinto grado de primaria de una Institución Educativa particular de Lima Metropolitana".

**Metodología de la investigación**

Este estudio es de tipo descriptivo, no experimental de diseño transversal y cuantitativo. Según su nivel, el presente estudio es "descriptivo", es decir, se centra en caracterizar a un grupo o cualquier fenómeno con el objetivo de establecer su comportamiento, estructura o rasgos particulares (Arias, 2012). De acuerdo a su diseño, esta investigación es "no experimental de diseño transversal". Es una investigación no experimental, ya que no hay manipulación intencional de las variables o categorías de estudio ni asignación al azar de la muestra (Fernández, Hernández y Baptista, 2010). También es de diseño transversal, puesto que se "[…] recolectan datos en un solo momento, en un tiempo único. Su propósito es describir variables y analizar su incidencia e interrelación en un momento dado" (Fernández et al. 2010, p. 151). Por último, de acuerdo al enfoque de investigación, el presente estudio es de corte cuantitativo. Para Suárez (2017), Fernández et al. (2010), el enfoque cuantitativo, busca predecir, controlar y confirmar hipótesis, apoyándose de estudios previos y de la medida de variables, así con este enfoque se construirán creencias propias para un grupo determinado de personas.

***Población y muestra***

La población de la presente investigación la conforman los estudiantes de quinto grado de primaria de una IE particular de Lima Metropolitana, Perú. De igual manera, la muestra la conforman cuatro estudiantes con alto rendimiento académico ubicados en quinto grado de primaria de institución educativa particular de Lima Metropolitana.

***Técnica e instrumento de investigación***

La técnica para la recogida de información fue la prueba. Fernández et al. (2010) consideran que las pruebas o inventarios miden variables específicas, como la inteligencia, la personalidad, el razonamiento matemático, el tipo de cultura organizacional, el estrés preoperatorio, entre otros. En particular, la prueba en esta investigación permitirá conocer el grado de adquisición del nivel o niveles de razonamiento geométrico que los estudiantes alcancen.

Asimismo, el instrumento usado fue una prueba abierta, la cual fue adaptada del modelo de test para evaluar los niveles de van Hiele propuesta por Gutiérrez y Jaime (1994). De acuerdo con estos autores, para medir el nivel de razonamiento geométrico hay que tener presente los niveles de Van Hiele, de manera que en la prueba abierta se propongan actividades o preguntas que den la oportunidad a los estudiantes de explicar y argumentar las razones de sus respuestas matemáticas.

## ■ Resultados

A partir de la aplicación de la prueba o test encontramos que el vocabulario geométrico que presentan los alumnos va desde el uso de palabras coloquiales hasta el uso de palabras matemáticas establecidas por convención. En su mayoría los estudiantes que participaron de la investigación tienen un vocabulario geométrico apropiado y manejan criterios correctos para clasificar los triángulos y cuadriláteros. También se observó que la mayoría de los argumentos que emplean para justificar sus respuestas están relacionados a propiedades elementales de los triángulos y cuadriláteros. De igual manera, encontramos que algunos argumentos se apoyan en la percepción global o características físicas relacionadas a los triángulos y cuadriláteros.

**Tabla 6.** *Grado de adquisición de los Niveles de Van Hiele por estudiante.*

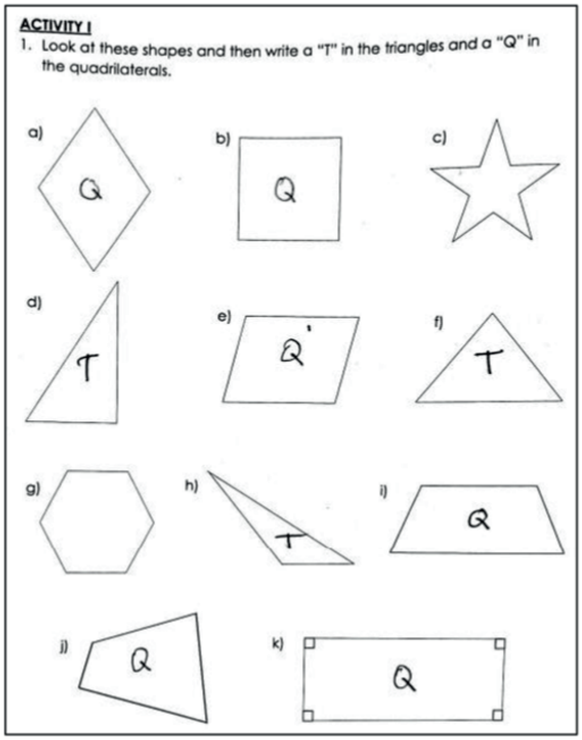
| *Ejercicio* | *OS* | | | *LH* | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | **Nivel 1** | **Nivel 2** | **Nivel 3** | **Nivel 1** | **Nivel 2** | **Nivel 3** |
| **I.1** | 100 | - | - | 100 | - | - |
| **I.2** | 100 | 80 | - | 100 | 80 | - |
| **II.1** | 80 | - | - | 75 | - | - |
| **II.2** | - | 75 | - | - | 75 | - |
| **II.3** | - | 75 | - | - | 75 | - |
| **III.1** | - | 50 | - | - | 75 | - |
| **IV.1** | - | 100 | 75 | - | 100 | 25 |
| **IV.2** | - | - | 25 | - | - | 25 |
| **Grado** | **93%** | **76%** | **50%** | **92%** | **81%** | **25%** |
| | **Completa** | **Alta** | **Media** | **Completa** | **Alta** | **Baja** |

| **Ejercicio** | **CM** | | | **JO** | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | **Nivel 1** | **Nivel 2** | **Nivel 3** | **Nivel 1** | **Nivel 2** | **Nivel 3** |
| **I.1** | 100 | - | - | 100 | - | - |
| **I.2** | 100 | 80 | - | 100 | 75 | - |
| **II.1** | 80 | - | - | 80 | - | - |
| **II.2** | - | 80 | - | - | 75 | - |
| **II.3** | - | 80 | - | - | 75 | - |
| **III.1** | - | 80 | - | - | 75 | - |
| **IV.1** | - | 100 | 75 | - | 100 | 25 |
| **IV.2** | - | - | 75 | - | - | 80 |
| **Grado** | **93%** | **84%** | **75%** | **93%** | | **52%** |
| | **Completa** | **Alta** | **Alta** | **Completa** | **Alta** | **Media** |

**Fuente:** Tomado y adaptado de Jaime (1993)

Respecto al nivel 1, se aprecia en la tabla 6 que todos los estudiantes presentaron un grado de adquisición completo, mostrando así dominio de su percepción global para identificar y caracterizar triángulos y cuadriláteros, empleando definiciones para estas figuras que parten de sus atributos generales. De acuerdo a Gutiérrez y Jaime (1994), las respuestas de estos alumnos demuestran manejo de percepción global de los triángulos y cuadriláteros en base a sus características físicas. A continuación, en la figura 1 se aprecia un ejemplo de adquisición completo del nivel 1.

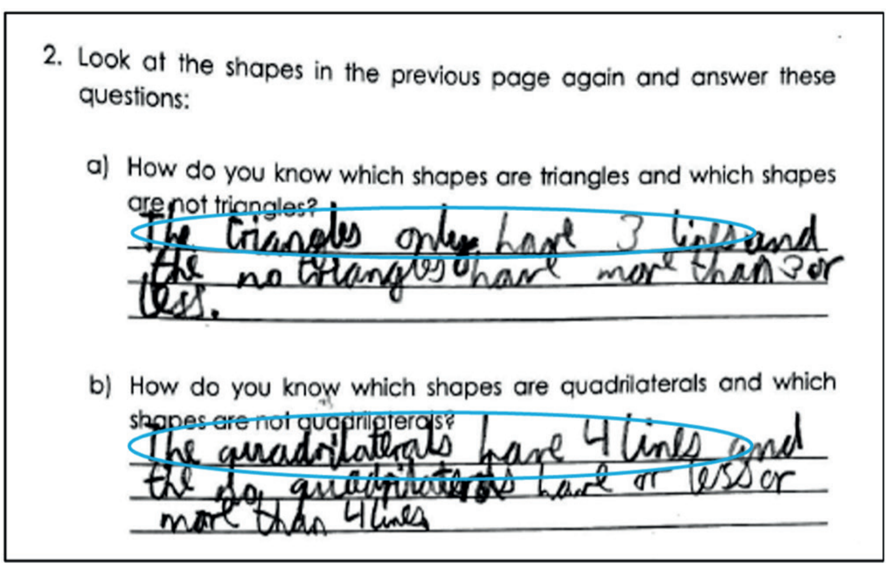
**Figura 1.** *Ejercicio resuelto por estudiante.*




**Fuente:** Tomado de Rodríguez (2019).

Se observa en la tabla 6 que los estudiantes alcanzaron un grado de adquisición alto respecto al nivel 2. Este grado de adquisición significa que los estudiantes son capaces de identificar los triángulos y cuadriláteros en base a algunas propiedades matemáticas, de igual manera, emplean dichas propiedades con cierto grado de dificultad al definir los triángulos y cuadriláteros (Gutiérrez y Jaime, 1994). La figura 2 muestra un ejemplo de grado de adquisición alto respecto al nivel 2.

**Figura 2.** *Ejercicio resuelto por estudiante.*



2. Look at the shapes in the previous page again and answer these questions:

a) How do you know which shapes are triangles and which shapes are not triangles?

The triangles only have 3 lines and the no triangles have more than 3 or less.

b) How do you know which shapes are quadrilaterals and which shapes are not quadrilaterals?

The quadrilaterals have 4 lines and the no quadrilaterals have or less or more than 4 lines

**Fuente:** Tomado de Rodríguez (2019).

Por último, respecto al nivel 3, se aprecia en la tabla 6 que los niños alcanzan distintos grados de adquisición, entre un grado bajo, medio y alto. Se observa que el estudiante que alcanza un grado de adquisición "bajo" apoya sus justificaciones en percepciones globales sobre los triángulos y cuadriláteros. Quienes alcanzan un grado "medio" del nivel 3 emplean algunas propiedades elementales relacionadas a los triángulos y cuadriláteros para justificar sus respuestas. Se observa como en muchas de sus respuestas estas propiedades son memorizadas pues pese a que son correctas las emplean erróneamente. El único estudiante que alcanzó un grado de adquisición alto en relación al nivel 3 mostró en su mayoría un uso correcto de las propiedades de los triángulos y cuadriláteros para sus justificaciones. En la figura 3 se puede observar lo mencionado anteriormente.

**Figura 3.** *Ejercicio resuelto por estudiante.*

| Sentence | T/F | Justification | |
|---|---|---|---|
| a) The sum of all angles in a triangle is 90°. | F | Every side is 60°. | No, cada lado (ángulo) es 60°. |
| b) Equilateral triangles have two angles that are the same. | F | No because it has all the sides the same and it doesn't have 2 sides, it has 3 sides. | No porque tienen todos los ángulos iguales. |
| c) All squares are rectangles. | F | No because rectangles doesn't have all the sides equal. | No porque los rectángulos no tienen todos los lados iguales. |
| d) All rhombuses are squares | F | No because rhombuses have acute and obtuse angles. | No porque los rombos tienen ángulos agudos y obtusos. |
| e) All equilateral triangles are isosceles triangle | F | No because Isosceles doesn't have all the sides equal. | No porque los triángulos isósceles no tienen todos los lados iguales. |
| f) All parallelograms are trapeziums. | F | No because it is not same shaped. | No porque no son la misma figura. |

**Fuente:** Tomado de Rodríguez (2019).

## Conclusiones

En primer lugar, se observaron las propiedades de los niveles de Van Hiele, sobre todo, se aprecia como la continuidad de los niveles permite a los niños poseer distintos grados de adquisición, y cómo el lenguaje geométrico varía de niño a niño, desde usar un vocabulario cotidiano a usar un vocabulario más especializado.

En segundo lugar, a partir de los resultados de la presente investigación, se concluye también que es importante para los docentes conocer los grados de adquisición de los niveles de razonamiento geométrico o niveles de Van Hiele. De tal manera que pueda enfatizar en posibles errores, dificultades o asegurar la comprensión de propiedades relacionadas, por ejemplo, a los polígonos.

Por último, en el presente estudio se aprecia la diversidad y complejidad del razonamiento geométrico en cada estudiante, quienes pese a pertenecer al mismo grado y compartir ciertas características, desarrollan habilidades de razonamiento geométrico en distintos grados de acuerdo con los niveles de Van Hiele.

## Referencias bibliográficas

Arias, F. (2012). *El proyecto de Investigación. Introducción a la metodología científica.* Editorial Episteme, C.A. https://abacoenred.com/wp-content/uploads/2019/02/El-proyecto-de-investigaci%C3%B3n-F.G.-Arias-2012-pdf-1.pdf

Aravena, M., Gutiérrez, A. y Jaime, A. (2016). Estudio de los niveles de razonamiento de Van Hiele en alumnos de centros de enseñanza vulnerables de educación media en Chile. *Educación de las Ciencias*, 34(1), 107-128. http://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/306639/396634

Corberán, R., Gutiérrez, A., Huerta, M., Margarit, J., Pascual, A., Pastor A. y Ruiz, E. (1994). *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en enseñanza secundaria basada en el Modelo de razonamiento de Van Hiele.* Ministerio de Educación y Ciencias. https://redined.educacion.gob.es/xmlui/handle/11162/62241

De Villiers, M. (2012). Some Reflections on the Van Hiele theory. *National Mathematics Congress.* Conferencia llevada a cabo en Swakopmund, Namibia. https://www.researchgate.net/publication/264495589_Some_Reflections_on_the _Van_Hiele_theory

Hernández, S., Fernández, C. y Baptista, L. (2010). *Metodología de la investigación*. McGraw-Hill. https://www.uca.ac.cr/wp-content/uploads/2017/10/Investigacion.pdf

Fortuny, J., Gutiérrez, A. y Jaime, A. y (1991). An alternative paradigm to evaluate the acqusion of the van hiele levels. *Journal for research in Mathematics Education, 22*(3), 237-251. https://www.uv.es/angel.gutierrez/archivos1/textospdf/GutJaiFor91.pdf

Gamboa, R. y Vargas, G. (2013). El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría. *Uniciencia, 27(1),* 74-94. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4945319

Guillén, G. (2004). El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos: describir, clasificar, definir y demostrar como componentes de la actividad matemática. *Educación Matemática*, 16(3), 103-125. http://www.redalyc.org/html/405/40516306/

Gutiérrez, Á., y A. Jaime (1991). El modelo de razonamiento de Van Hiele como marco para el aprendizaje comprensivo de la geometría. Un ejemplo: Los giros*.* *Educación Matemática*, *3*(2), 49-65. http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/vol3/vol3-2/vol3-2-5.pdf

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1994). A model of test design to assess the Van Hiele levels. *Proceeding of the 18 th PME conference, Lisboa, (2)*, 41-48. https://www.researchgate.net/publication/237561733_A_model_of_test_design_ to_assess_the_Van_Hiele_levels

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1996). *El Grupo de las Isometrías del Plano.* Editorial Síntesis.

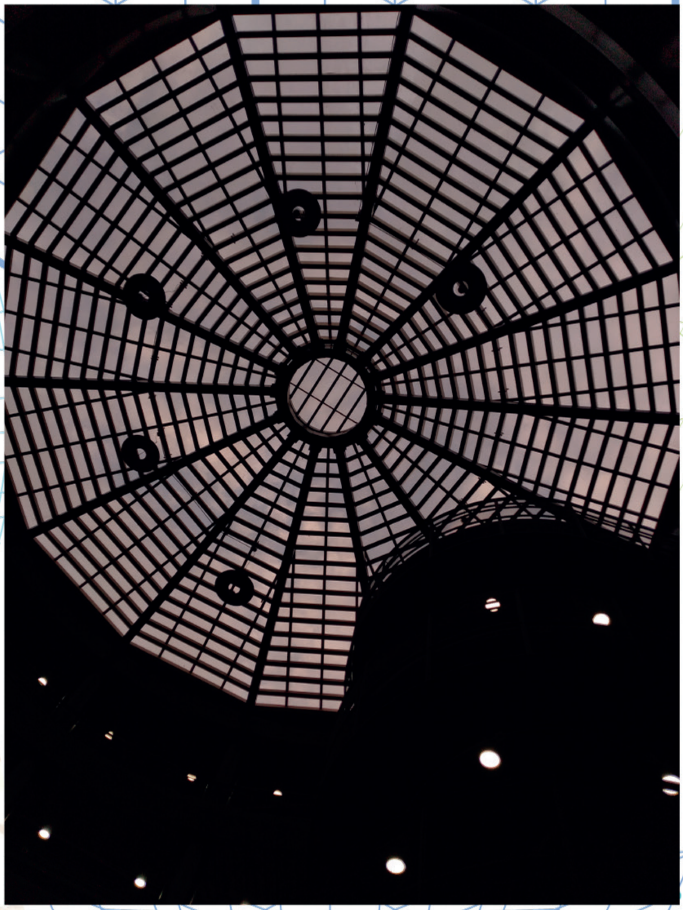
Jaime, A. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de van hiele: la enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento.* [Tesis Doctoral, Universidad de Valencia]. https://www.uv.es/gutierre/archivos1/textospdf/Jai93.pdf

Suárez, M. (2017). Módulo 4: Desarrollo de la Investigación. *Seminario de Tesis 2. Estudios empíricos.* Lima: Maestría en Integración e Innovación Educativa de las TIC.

Uribe, S.; Cárdenas, O. y Becerra Martínez, J. (2014). Teselaciones para niños: una estrategia para el desarrollo del pensamiento geométrico y espacial de los niños. *Educación Matemática,* 26(2), 135-160. http://somidem.com.mx/descargas/Vol26-2-5.pdf

# SECCIÓN 2

## PROPUESTAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS



# BUSCANDO LAS FRACCIONES
# LOOKING FOR THE FRACTIONS

**Manuel Fdo. Alva-Alejos**
**Universidad Autónoma de Chiapas. (México)**
manu3l.alva@gmail.com

**Resumen**:
Se reporta la experiencia del taller llevado a cabo en la XXXV Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (Relme 35) en forma síncrona y virtual; sobre las fracciones, la manera de cómo fomentar dicho conocimiento a través de una secuencia didáctica (diseñada y propuesta). Los resultados de las producciones obtenidas muestran como una posibilidad viable, para fortalecer el conocimiento y el proceso del aprendizaje de las fracciones -cómo enseñar- en distintos momentos (introductoria, complementaria o al finalizar) debido a los objetivos cumplidos. Las producciones muestran el surgimiento de las fracciones, además de poner en práctica conocimientos matemáticos (medir, comparar, equivalencia, etc.) durante el desarrollo de las actividades.
También se reporta la metodología, la teoría empleada (Ingeniería Didáctica y la Teoría de Situaciones Didácticas), los ejercicios dinámicos propuestos, las Tecnologías de la Información disponibles empleadas ad-hoc en el taller para fomentar el pensamiento numérico y generar de manera natural e intuitiva el surgimiento de las fracciones.

**Palabras clave**: Fracciones, pensamiento numérico, secuencia didáctica

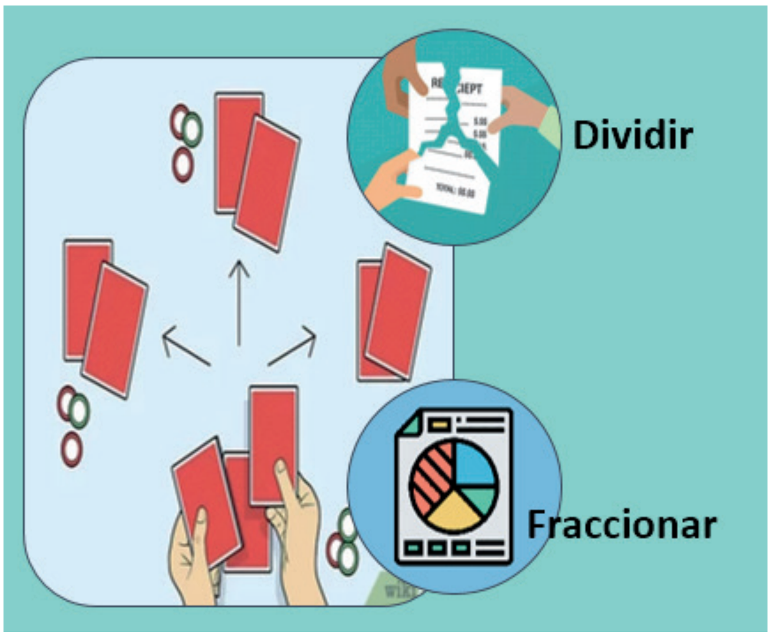
**Abstract**:
This paper reports the experience of the workshop about fractions; how to promote such knowledge through a (designed and proposed) didactic sequence. It was carried out, in a synchronous and virtual way, in the XXXV Latin American Meeting of Educational Mathematics (Relme 35). The results of the obtained productions show as a viable possibility to strengthen the knowledge and the process of learning fractions, -how to teach- at different times (introductory, complementary or at the end) due to the objectives achieved. The productions show the appearance of fractions, in addition to putting into practice mathematical knowledge (measuring, comparing, equivalence, etc.) while developing the activities. The paper also reports the methodology and the theory used (Didactic Engineering and the Theory of Didactic Situations); the proposed dynamic exercises; and the available information technologies used *ad-hoc* in the workshop, to promote numerical thinking and to generate the emergence of fractions in a natural and intuitive way.

**Keywords**: fractions, numerical thinking, didactic sequence

## Introducción

El presente documento aborda una manera de potencializar el pensamiento numérico a través de las fracciones y una secuencia didáctica, para generar el surgimiento de dicho concepto matemático. Con la premisa que al dividir y fraccionar (conceptos matemáticos distintos) se realiza la misma acción; es decir, repartir (figura 1). Esta situación puede provocar confusión en el alumno (estudiante) al no diferenciar la aplicación (uso) entre un concepto y otro (fraccionar versus dividir) al momento de resolver un problema.

**Figura 1.** *Ilustración que ejemplifica la acción de repartir en la división y la fracción.*




**Fuente:** Elaboración propia 2022.

En la secuencia didáctica se aborda si dividir o fraccionar es igual, parecido, similar o son totalmente diferentes. Al iniciar el taller con la pregunta detonadora ¿existe diferencia entre dividir y fraccionar? Permite generar una disyuntiva entre la fracción y la división, para dotar de significado a la fracción, dar argumentos válidos a cada participante para determinar si son conceptos distintos o no.

Se descarta de un inicio por ser evidente, que son palabras distintas y por ende conceptos (términos) diferentes o los procesos (algoritmos) para obtener el resultado. Dicha disyuntiva va más allá de esto. La contraparte ante la interrogante es, si el alumno tiene esa claridad y certeza para distinguir dichos conceptos en lo práctico; más allá de la teoría.

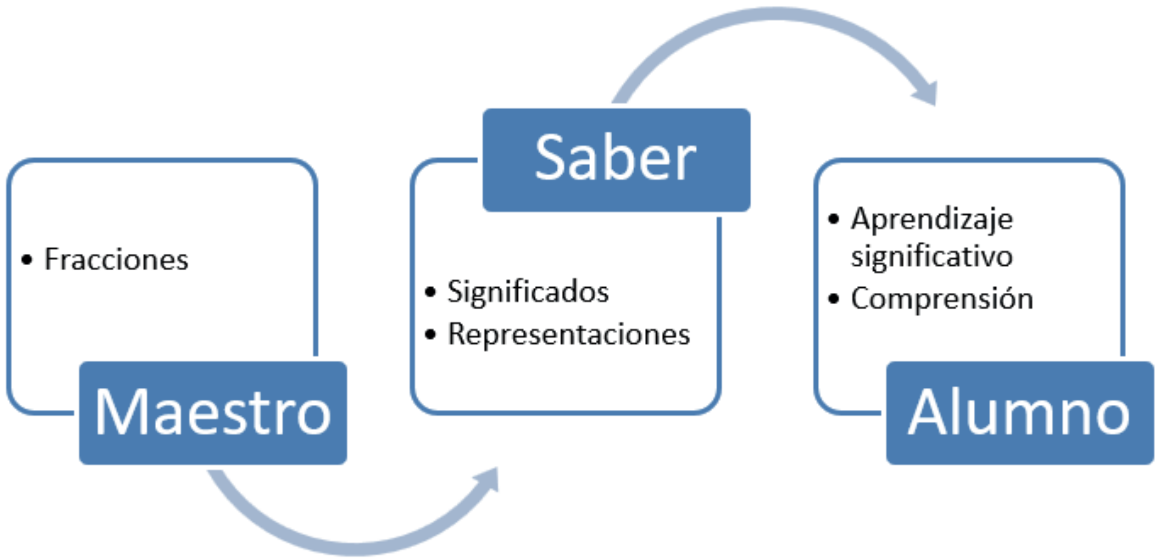
Encontrar las fracciones con ayuda de la secuencia didáctica es la finalidad y objetivo del taller, pero no sólo esto; también se pretende recuperar el cómo surgen (necesidad) para robustecer el concepto matemático (fracciones) y distinguir de la división. El cómo emplear el conocimiento adquirido al momento de comparar, medir o determinar equivalencias.

El por qué es importante recuperar cómo surgen las fracciones -desde su contexto mismo hasta su utilidad (uso)- es lo que motivó el diseño del taller. La claridad del concepto, para enseñar al estudiante y en segundo facilitar el entendimiento a los alumnos, para adquirir un conocimiento significativo.

Tener claro el concepto matemático (conocimiento a enseñar) ayuda a que exista un flujo de información (intercambio) entre el maestro (profesor) y alumnos (estudiante) para adquirir el saber con plenitud, estos elementos son fundamentales en el triángulo didáctico (figura 2).

Enseñar las fracciones tiene un grado de dificultad particular, pues están inmersos componentes como los diferentes significados de las fracciones (cociente, medida, porcentajes, parte-todo, por citar algunos), las maneras en cómo se pueden representar (numérica, literal, continua y geométrica).

**Figura 2.** *Ilustración para ejemplificar el flujo de información (conocimiento) del saber y el triángulo didáctico*.




**Fuente:** Elaboración propia 2022.

En esencia el flujo de información del conocimiento matemático (concepto matemático específico) se puede considerar como un mensaje que debe trasmitirse de manera correcta; es decir, el mensaje debe interpretarse de manera idéntica del maestro al alumno. Entonces los elementos fundamentales en el triángulo didáctico están intrínsecamente asociados en el proceso enseñanza-aprendizaje.

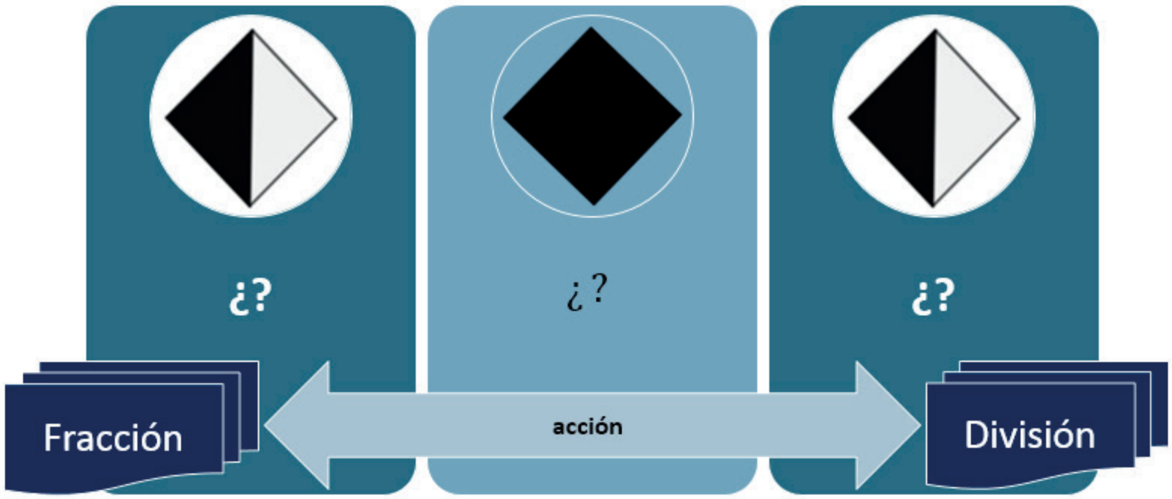
Si nos vamos a la parte formal y análoga de lo expuesto en el párrafo anterior; se tiene un emisor, receptor, mensaje y un medio de transmisión. Bajo este hecho, el emisor será el maestro (profesor), el receptor (los o el alumno), un mensaje (concepto matemático) y el medio de trasmisión puede variar según las herramientas o material disponible para la enseñanza.

Al emplear el término “transmitir” se hace alusión a que no siempre se emplean de manera correcta los recursos disponibles (como maestro) para transmitir el mensaje (concepto matemático) en cuyo caso particular nos referimos a las fracciones.

Para entender lo anterior debemos considerar que, al recurrir a la representación de las fracciones en su forma gráfica, la acción de repartir no tiene sentido. Como se aprecia en figura 3, la acción es la misma al fraccionar o dividir.

Con lo anterior, la pregunta ¿Cómo diferenciar una división de una fracción en forma gráfica? ¿Cuál es la distinción o connotación adecuada? para acentuar las diferencias entre ambos conceptos en la forma gráfica y la acción de repartir la unidad -adquiere relevancia-.

**Figura 3.** *Representación gráfica o geométrica de la división y la fracción.*




**Fuente:** Elaboración propia 2022.

Todo esto se considera en la secuencia didáctica (propuesta) para potencializar el pensamiento numérico, a fin de vislumbrar las fracciones de manera lúdica, intuitiva y natural. Recuperando así en primer lugar el origen, que privilegia y dota de sentido a la fracción. Dando esta utilidad y la razón del concepto mismo en las matemáticas.

## Antecedentes

Existen trabajos e investigaciones que abonaron de manera significativa, específica o general a los elementos que intervienen en el taller (el origen de las fracciones, los diferentes significados de las fracciones y las representaciones de las fracciones) como la investigación de Fandiño (2009), Lamon (1999) y Flores (2011), el trabajo de Llinares y Sánchez (1996) de las fracciones y la complejidad (mega concepto), Hincapié (2011) con la construcción del concepto fracción y sus diferentes significados; por citar algunos ejemplos. Dichos elementos son relevantes en la enseñanza-aprendizaje de las fracciones.

## Marco teórico

Un reto como maestro, es saber enseñar un tema (cualquiera) en función a las matemáticas y que los alumnos tengan una buena actitud (predisposición de aprender). Una manera de lograrlo es por medio del uso de la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau (1986), debido a que el "*alumno aprende adaptándose a un medio*" y la razón de ser, es la construcción del conocimiento.

Puede existir una situación didáctica, donde el alumno interactúa con el medio, produce un conocimiento con el docente o sin la mediación del docente (situación a-didáctica). Para confrontar, rechazar o poner en juego sus propios conocimientos e incluso crea nuevos frente a la problemática presentada.

Panizza (2003) distinguen tres tipos de situaciones didácticas: 1.- De acción: donde el alumno debe actuar sobre un medio (material, o simbólico), la situación requiere la puesta en acto de conocimientos implícitos, 2.- Formulación: donde un alumno (o grupo de alumnos) emisor debe formular explícitamente un mensaje destinado a otro alumno (o grupo de alumnos) receptor, comprender el mensaje y actuar (sobre un medio, material o simbólico) en base al conocimiento contenido en el mensaje y 3.- La validación: cuando dos alumnos (o grupos de alumnos) deben enunciar aserciones y ponerse de acuerdo sobre la verdad o falsedad de las mismas. Las afirmaciones propuestas por cada grupo de alumnos son sometidas a consideración del otro grupo, que debe tener la capacidad de sancionarlas; es decir, debe aceptarlas, rechazarlas, etc. las aserciones expuestas.

Estos momentos se encuentran en las actividades, la primera (acción) se realiza con el material didáctico (tapas de botellas del mismo tamaño) y los conocimientos necesarios e implícitos son: el conteo, sumar y estimar para dar respuesta a las preguntas planteadas en la actividad inicial.

La formulación se encuentra inmersa en la segunda actividad, a pesar de ser las mismas indicaciones a la primera actividad. Se cambia el medio (tapas de botellas con distintos tamaños) y ellos mismos determinan los elementos involucrados en la actividad, ponen a prueba su conocimiento, para reformular sus hipótesis o supuestos. Es decir, emerge el conocimiento que al inicio no tenían o no habían notado. Los números enteros y racionales que al final de la actividad serán validados con preguntas específicas para poder cumplir con el objetivo.

Se realiza un comparativo con las actividades; ya que son iguales en su esencia y sólo cambia el material lúdico empleado (tapas de las botellas). Lo que permitirá la institucionalización del conocimiento (las fracciones) en la actividad final.

Además, se considera el fortalecimiento del pensamiento numérico; pero ¿qué es? De acuerdo con Castro (2008) es *"… la comprensión del significo de los números, sus diferentes interpretaciones y representaciones…"*. El reconocer un medio ($1/2$ ó $0.5$) sin importar como este expresado y vislumbrar a la fracción o el número racional que representa, así como inferir el significado algebraico, ya sea la raíz (√) o la potencia (^) –según sea el caso- es parte del pensamiento numérico.

Al escribir $2/3$ se tiene una interpretación dependiendo cómo se encuentre expresada $(125)^{2/3}$o la forma convencional $\left(\sqrt[3]{125}\right)^2$. Por ello se requiere inducir el conocimiento aprendido, para utilizar en forma reflexiva; es decir, por ellos mismos y no porque el docente, maestro o profesor lo plantea –implica fortalecer el pensamiento numérico-.

Otra definición del pensamiento numérico es la expuesta por McIntosh (1992)

> *….la comprensión en general que tiene una persona sobre los números y las operaciones junto con la habilidad y la inclinación a usar esta comprensión en formas flexibles para hacer juicios matemáticos y desarrollar estrategias útiles al manejar números y operaciones.*

En la figura 3 se puede apreciar esto (significado de los números, sus interpretaciones y representaciones) al considerar como unidad el rombo, puede surgir de manera natural el término “mitad”, con ello emerge el concepto matemático de equivalencias - pese a no ser el tema principal del taller-.

El pensamiento numérico puede considerarse un talento, algunos tienen una facilidad (talento) pero, no implica que les agraden las matemáticas. Ante la ausencia del talento (pensamiento numérico) se puede practicar y ejercitar, a tal grado de adquirir cierta destreza y necesaria para ser buenos o expertos.

Sin embargo, existe la posibilidad de distorsionarse, a tal grado que el alumno aprenda un algoritmo y no comprenda el concepto matemático. Como el caso de un compañero… participó en un concurso de matemáticas -nivel de secundaria- y externó no haber entendió cómo encontrar la raíz de un número, sólo mecanizó el procedimiento (algoritmo), lo que permitió que ganará el concurso.

## Metodología

Se emplea a la Ingeniería Didáctica como metodología, la cual surge en los años 80´s en Francia, dicha metodología tiene dos vertientes: la primera al ser una metodología de investigación y la segunda en la producción de situaciones de enseñanza y aprendizaje. Esta última por obvias razones se utiliza para fortalecer el pensamiento numérico hacia las fracciones; por ello se puede definir como:

> *... conjunto de secuencias de clase concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo de forma coherente por un profesor-ingeniero para efectuar un proyecto de aprendizaje de un contenido matemático dado para un grupo concreto de alumnos. A lo largo de los intercambios entre el profesor y los alumnos, el proyecto evoluciona bajo las reacciones de los alumnos en función de las decisiones y elecciones del profesor.* (Douday, 1996, p 241)

Al conjuntar la metodología y el marco teórico en la situación didáctica propuesta, se desarrolla y fortalece el pensamiento numérico. Con la selección de ejercicios propuestos, las tapas de botellas (mismo tamaño y diferente tamaño) y el conocimiento inmerso (saber matemático) de las fracciones (tabla).

**Tabla 1.** *Diseño del taller y las etapas contempladas en cada actividad.*

| Actividad | Tapas de botellas | Momento | Acciones |
|---|---|---|---|
| 1 | Mismo tamaño | Inicio | Hacer |
| 2 | Diferente tamaño | Desarrollo | Analizar |
| 3 | Cierre del taller | Conclusión | Validar |

**Fuente:** Elaboración propia 2022.

El taller se desarrolló en dos sesiones virtuales síncronas, hubo participación de más de 10 personas, pero sólo cinco terminaron o enviaron de manera completa la actividad (producciones). Para realizar el taller se empleó un formulario en línea adaptado con cada una de las actividades contempladas, a fin de que los participantes pudieran trabajar en las dos sesiones programadas. De manera adicional se empleó un programa ofimático para dar las indicaciones -instrucciones- con la ayuda de una presentación (diapositivas) como se muestra en la siguiente figura.

**Figura 4.** *Secuencia de las actividades previstas en el taller.*


**Fuente:** Elaboración propia 2022.

Para resolver cada una de las actividades se destinó un tiempo aproximado de 15 a 20 minutos, con la finalidad de fomentar la participación y hacer dinámico el taller. Con ello se evitaría un taller soso, tedioso o aburrido –riesgo considerado al no ser taller presencial- por la falta del material lúdico necesario o material didáctico complementario (hojas blancas, y hojas impresas con las indicaciones de cada actividad), corriendo el riesgo de no cumplirse los objetivos del taller.

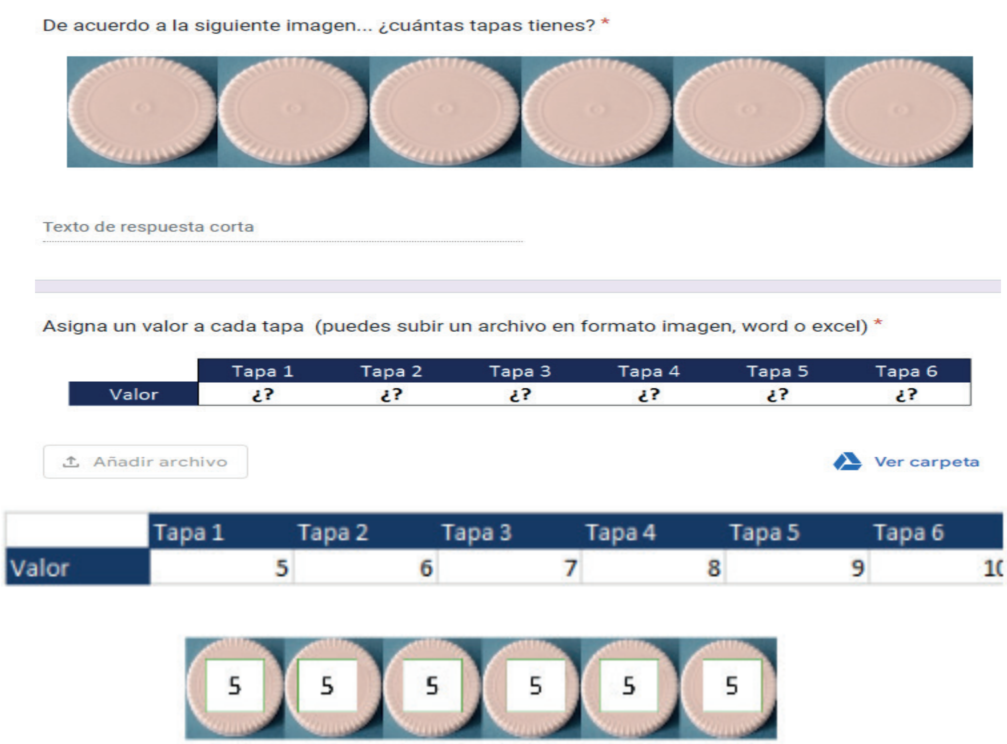
Otro aspecto importante en el diseño de la secuencia fue buscar material asequible para trabajar y que los alumnos puedan manipular para generar la génesis necesaria para el surgimiento del conocimiento, en este caso de las fracciones. Para ser replicado en un momento posterior por cada participante en su día a día como maestro, sino de forma igual; con variantes, pero con elementos necesarios y suficientes para recrear en forma similar o modificar la secuencia propuesta en el taller.

## Resultados y producciones de los participantes

A pesar de que los participantes no contaron con el material lúdico necesario (tapas de plástico de botellas del mismo y diferente tamaño) se tuvo una participación activa. Si bien no fue en la totalidad de las producciones de cada participante, se logró cumplir acorde a lo esperado.

Para suplir la ausencia del material se recurrió a la imagen de las tapas (material virtual) necesarias para el desarrollo de la actividad inicial (tapas de botellas del mismo tamaño) para dar origen a los números naturales (figura 5). Se emplean los números enteros, porque no existe una diferencia entre ellas. Es decir, la unidad es la misma; se puede asignar el valor de “1” a cada tapa e ir incrementando el valor o asignar un valor arbitrario de cada tapa.

**Figura 5.** *Asignación del valor a cada tapa (mismo tamaño).*


De acuerdo a la siguiente imagen... ¿cuántas tapas tienes? *

Texto de respuesta corta

Asigna un valor a cada tapa (puedes subir un archivo en formato imagen, word o excel) *

| | Tapa 1 | Tapa 2 | Tapa 3 | Tapa 4 | Tapa 5 | Tapa 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Valor | ¿? | ¿? | ¿? | ¿? | ¿? | ¿? |

Añadir archivo

Ver carpeta

| | Tapa 1 | Tapa 2 | Tapa 3 | Tapa 4 | Tapa 5 | Tapa 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Valor | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 1( |

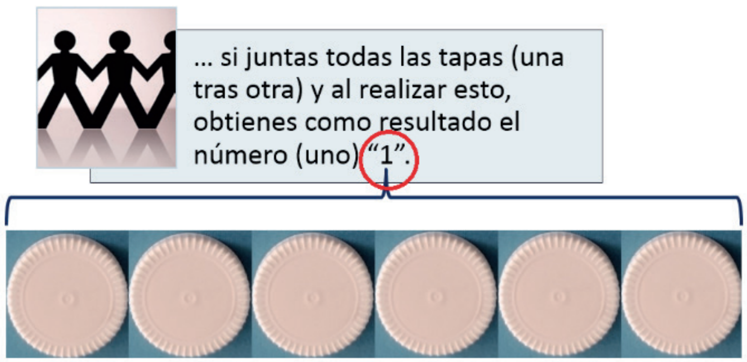


**Fuente:** Producción de los participantes 2022.

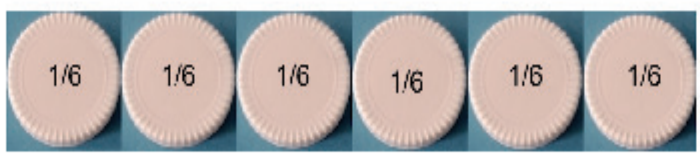
Dentro de los objetivos establecidos en el taller, se consideró el surgimiento natural e intuitivo de las fracciones para fortalecer el pensamiento numérico. En la figura 6, el participante emplea la forma fraccional $(1/6)$ y el número racional (0.166) cuando se solicita asignar un valor a las tapas, previa acción de considerar juntar las tapas y formar el número uno –que representa el todo–.

**Figura 6.** *Asignación del valor a cada tapa al formar la unidad (mismo tamaño).*

Si juntas las tapas (como se muestra en la imagen) ¿cuánto vale cada tapa? - puedes realizar *
una tabla (archivo en formato imagen, word o excel) -




| | Tapa 1 | Tapa 2 | Tapa 3 | Tapa 4 | Tapa 5 | Tapa 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Valor | 0.166 | 0.166 | 0.166 | 0.166 | 0.166 | 0.166 |

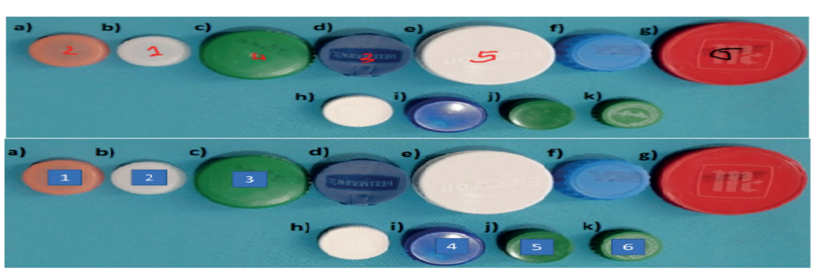



**Fuente:** Producción de un participante 2022.

Al apreciar la forma fraccional y racional, es significativo; ya que puede dar una pauta para trabajar las equivalencias de los números –aunque no es el objetivo, ni el tema principal del taller– pero se puede emplear para abordar el tema en el aula escolar.

Lo importante del material lúdico en la actividad es utilizar y potencializar el tamaño de las tapas (mismo tamaño) para trabajar en un segundo momento con tapas de botellas diferentes (figura 7).

**Figura 7.** *Asignación del valor a cada tapa de botella (diferente tamaño).*



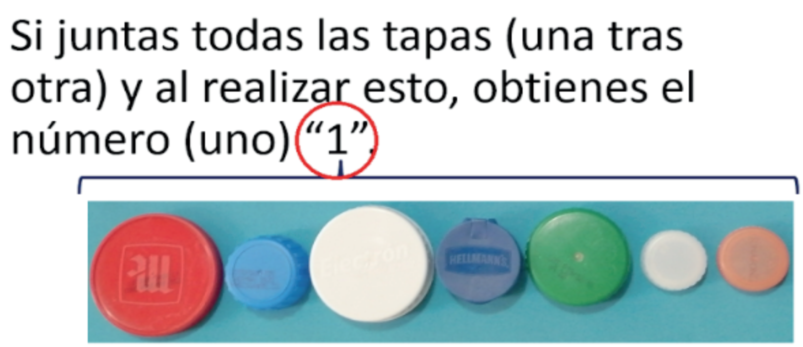
**Fuente:** Producción de un participante 2022.

Como se mencionó, en ambas actividades se realizan las mismas acciones (asignar valor de manera individual, juntar las tapas para formar la unidad y determinar el valor, etc.) pero con distinta intencionalidad (momentos) para potencializar la reflexión en el desarrollo y análisis del mismo.

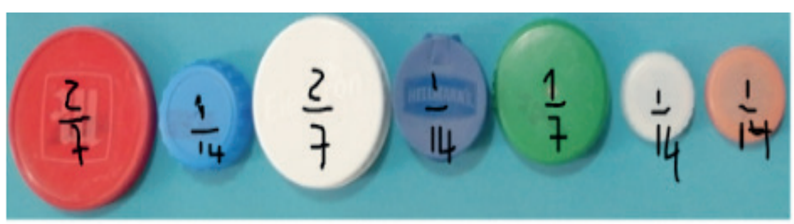
El uso de las fracciones surge con la interacción, manipulación del conocimiento y la ayuda del material lúdico (al formar la unidad) además, de comparar cada tapa de botella y los diferentes tamaños.

**Figura 8.** *Asignación del valor a cada tapa de botella (diferente tamaño).*

De las tapas que elegiste previamente, si las juntas (como se muestra en la imagen) ¿cuánto vale cada tapa? - puedes realizar una tabla (archivo en formato imagen, word o excel) - *




Añadir archivo




| | Tapa 1 | Tapa 2 | Tapa 3 | Tapa 4 | Tapa 5 | Tapa 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Valor | 0.02 | 0.01 | 0.5 | 0.38 | 0.06 | 0.03 |

**Fuente:** Producción de un participante 2022.

Para crear una génesis artificial (surgimiento) del conocimiento en relación con las fracciones, que está implícito en la secuencia didáctica diseñada. En el taller estaba explícito desde el mismo título "Buscando las fracciones", pero al momento de poner en acción la situación cada una de las actividades en el aula con los estudiantes estaría totalmente implícito el tema.

## Conclusiones

A modo de conclusión se cumplieron los objetivos del taller (buscando las fracciones) durante la secuencia surgen de manera intuitiva y natural las fracciones, ya sea su representación; formal y tradicional $\frac{número}{número}; \frac{a}{b}$ al considerar sus elementos (numerador, denominador y línea intermedia o diagonal) o de forma racional.

A pesar de no llevarse como un taller presencial y la ausencia de los recursos didácticos (material lúdico) se obtuvo buenos resultados. Sin embargo, es una realidad que el uso de las Tecnologías de la Información y Comunicación

(TIC), el uso del Internet, programas interactivos, material complementario a bajo costo (tapas de las botellas) ayudan a enriquecer la enseñanza de las matemáticas en los alumnos cuando se integran de manera funcional.

Lo visto (secuencia didáctica) se puede emplear o retomar a modo de introducción como un primer acercamiento a las fracciones o para reforzar lo visto (ciclo escolar) para los alumnos del nivel básico. Sin olvidar, ni perder en todo momento cuál es saber matemático (fracciones) a enseñar. La secuencia didáctica propuesta da pauta para abordar otros temas como la equivalencia, tipos de representaciones de un número, etc.

Ante la ausencia de los materiales tangibles, el taller fue virtual síncrono (vía remota) con el uso de las TIC; permitió llevar a cabo la dinámica necesaria para interactuar y mostrar las bondades de la secuencia didáctica empleada y diseñada. Dando pauta a que, al llevarse de manera presencial (con los alumnos) los resultados pueden ser más prometedores.

Con los materiales lúdicos tangibles; es decir, al manipular se puede desarrollar con mayor claridad -lo que una imagen logró a través de un formulario- participación y producciones de los participantes.

Para finalizar las actividades lúdicas y dinámicas pueden ser útiles para despertar la curiosidad por el mundo de las matemáticas en los alumnos, al no ser un problema tradicional de reparto, de fracciones o actividad del libro de matemáticas típico. Ayuda a romper un esquema rutinario dentro del aula de clases.

## ■ Referencias bibliográficas:

Brousseau, G. (1986). *Théorie des Situations Didactiques*, Grenoble, La Pensée Sauvage.

Castro, E. (2008). *Pensamiento numérico y educación matemática*. En J.M. Cardeñoso y M. Peñas Conferencia en XIV Jornadas de investigación en el aula de matemáticas (p 1-32), Granaga.

Fandiño, I. (2009). *LAS FRACCIONES: Aspectos conceptuales y didácticos*. Bogotá: MAGISTERIO.

Flores, R. (2011). Los significados asociados a la noción de fracción en la Escuela Secundaría. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 24-31.

Gómez, A., y Pérez, A. (2016). *TRES ENFOQUES PARA LA ENSEÑANZA DE LOS NÚMEROS RACIONALES*. Redalyc, 1-10.

Hincapié, C. (2011). *Construyendo el concepto de fracción y sus diferentes significados, con los docentes de primaria de la Institución Educativa San Andrés de Girardota*. Recuperado el 22 de marzo de 2022, de http://www.bdigital.unal.edu.co/6084/1/43701138.2012.pdf.

Lamon, S. (1999). *Teaching fractions and ratios for understanding. Essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. Marquette University. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Llinares, S., y Sánchez, Ma. (1996). ensech.edu.mx. Recuperado el 22 de febrero de 2022. http://ensech.edu.mx/documentos/antologias/par/SEMESTRE%20PAR2-12/4semes/ESPECIALIDAD/LOS%20NUMEROS%20Y%20SUS%20RELACIONES%20%2010/Los%20numeros%20y%20sus%20relaciones%2010.pdf

McIntosh, A., Reys, B., y Reys, R. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. 12(2), 2-8.

Panizza, M. (2003). II *Conceptos básicos de la Teoría de Situaciones Didácticas*. Recuperado el 7 de marzo de 2022, de http://www.crecerysonreir.org/docs/matematicas_teorico.pdf

# ALGUNAS HABILIDADES QUE DEBE TENER UN ESTUDIANTE DE INGENIERÍA, COMO PENSADOR CRÍTICO, DESDE LA MATEMÁTICA

# SOME SKILLS THAT AN ENGINEERING STUDENT, AS A CRITICAL THINKER, SHOULD HAVE, FROM MATHEMATICS

**Luis Fernando Plaza Gálvez, Efraín Vásquez Millán, Jorge Enrique De Los Ríos Giraldo**
**Unidad central del Valle del Cauca. (Colombia)**
**lplaza@uceva.edu.co, emillan@uceva.edu.co, jdelosrios@uceva.edu.co**

**Resumen**:
El futuro ingeniero se enfrenta a la solución de los problemas planteados según los objetivos del milenio, declarados por la ONU en el año 2000. Por lo que se convierte en un desafío, para los docentes, al tratar de instruir las habilidades que sus alumnos deben adquirir para enfrentarse a la resolución de estos problemas usando para ello principios éticos debidamente argumentados. Al presentarse un problema se espera que los estudiantes de ingeniería hayan obtenido los fundamentos matemáticos necesarios para su identificación y formulación, relacionando los conocimientos y técnicas respectivas, habilidades e ideas necesarias, aplicando modelos matemáticos. Por medio de la matemática, se coadyuva en la solución de estos problemas aplicando un razonamiento cuantitativo y emitiendo juicios bien fundamentados derivados de la información en diversos contextos. El estudio evidencia que, al poner en práctica desde el aula, las habilidades de pensamiento crítico (PC) a través de una serie de proyectos de intervención, con soporte matemático, se llegan a soluciones óptimas de ingeniería, lo cual redundan en un perfil competitivo tal como o exige hoy el sector productivo.

**Palabras clave**: ingeniería, Matemáticas, Pensamiento crítico, Resolución de Problemas

**Abstract**:
The future engineer faces the solution of the problems raised according to the millennium objectives, declared by the United Nations Organization in 2000. Therefore, it becomes a challenge, for teachers, trying to teach the skills that their students must acquire to face the solution of these problems by using properly argued ethical principles. When a problem takes place, engineering students are expected to have obtained the mathematical foundations necessary for its identification and formulation, relating the respective knowledge and techniques, and the necessary skills and ideas, by applying mathematical models. Through Mathematics, it is possible to give solution of these problems by applying quantitative reasoning and making well -founded judgments derived from information in various contexts. The study shows that when putting into practice, from the classroom, critical thinking skills (PC) through a series of intervention projects, with mathematical support, optimal engineering solutions are reached, which result in a competitive profile as demanded by the productive sector today.

**Keywords**: engineering, mathematics, critical thinking, problem solving

## Introducción

El presente reporte de investigación establece algunas habilidades en el estudiante de ingeniería, como pensador crítico, desde la matemática. Estas habilidades de pensamiento crítico (PC en adelante) permiten que los alumnos se enfrenten a desafíos y resuelvan problemas mediante el análisis de su pensamiento para tomar decisiones y sacar conclusiones. Este reporte permitió responder la pregunta: ¿Qué tipo de habilidades y destrezas cognitivas debe tener un estudiante de ingeniería, para pensar críticamente, desde la matemática?

Para lograr responder la pregunta planteada, este documento se estructura partiendo de una serie de referentes clásicos como Ennis (1985), Facione (1990), Halpern (1998) y finalmente Paul y Elder (2004) en los cuales se fundamentará las habilidades de PC a partir de la enseñanza de la matemática. El método usado será el de análisis y síntesis de dichos referentes, en las que las habilidades cognitivas que serán implementadas son las de análisis, interpretación, inferencia, explicación, evaluación y autorregulación. La mayor recomendación es el plantear desde el aula una serie de estrategias que permita poner en práctica dichas habilidades a través de proyectos de intervención como la emisión de concepto, la toma de una decisión y/o resolver un problema con argumentos del tipo matemático. Finalmente se evidencia las ventajas de poder contar con futuros profesionales de la ingeniería, pues estos podrían suplir los perfiles que el sector productivo hoy demanda pues tendrá mayores criterios al resolver problemas dando la mejor solución del tipo ambiental, económica y social.

La mayoría de los estudiantes están habituados a realizar actividades de aprendizaje con memorización de conceptos, fórmulas y resolución de problemas matemáticos, sin que vayan acompañados del desarrollo de habilidades de PC de un problema al que se enfrentan en la vida real. Al respecto, Lim (2021), afirma que los ingenieros a pesar de gozar de excelente fundamento lógico adolecen de pensar críticamente al resolver problemas cotidianos de ingeniería. El tratamiento de destrezas para este tipo de pensamiento permite que los estudiantes se acostumbren a enfrentar desafíos y resolver problemas mediante la reflexión y así poder tomar decisiones y emitir juicios. El PC es una habilidad importante de orden superior desde la matemática, para resolver situaciones problema, planteamiento de inferencias, estimación de probabilidades y es un fuerte soporte para la toma de decisiones, para lo que no se necesita la adquisición de habilidades especializadas (Piette, 2010, como se citó en Díaz y Montenegro, 2010).

Algunas acreditadoras como ABET (Acreditadora Internacional de programas de Ingeniería), por medio de los Resultados de Aprendizaje, indaga en que los programas de Ingeniería cumplan las competencias ideales a través de las habilidades, y entra ellas se tiene el PC, la cual se busca sea aplicada y estimulada a través de la matemática, siendo esta la principal justificación de esta investigación.

## Marco teórico

En el desarrollo de este artículo, serán tenidas en cuenta las teorías clásicas expuestas por Ennis (1985), Facione (1990), Halpern (1998) y Paul y Elder (2004), así como su implementación de las habilidades de PC en la enseñanza de las matemáticas para ingeniería. La importancia de pensar críticamente desde la matemática permite desarrollar ideas, pues puede: verificar la veracidad de la información, producir decisiones racionales y respaldar un logro de aprendizaje. Además, contribuir en la reducción de errores, encontrar fallas en la resolución de problemas matemáticos y la capacidad de aplicación en nuevos problemas (Syafril et al., 2020).

Aunado a lo anterior, se hace patente la necesidad de desarrollar competencias específicas (vistas como herramientas) basadas en las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC), como Macro datos (Big Data), Computación en la nube (Cloud Computing), Internet de las cosas (IOT) y Simulación, con el propósito de interactuar con los ambientes inteligentes que propone la Industria 4.0., siendo esto una implementación ineludible de la matemática en contexto, según lo recomiendan González-Hernández y Granillo-Macías (2020). Además, es importante, y a propósito de los objetivos del milenio, resaltar que a través de la ingeniería se busca brindar soluciones a un mundo sostenible, para ello se utiliza la denominada ingeniería sostenible, la cual se enfoca en los países en vía de desarrollo, a través de una educación coordinada entre la industria y la universidad como lo recomiendan Achebe et al. (2022).

## Metodología

El trabajo ha consistido en métodos de análisis y síntesis de los contenidos de las publicaciones científicas y metodológicas sobre el tratamiento de algunas habilidades de PC. El estudio es del tipo documental cualitativo con un corte descriptivo y un enfoque deductivo, el cual permite identificar las principales habilidades sobre PC y su posterior implementación desde los cursos de matemáticas en los programas de ingeniería a través de varios escenarios vistos como estrategias en proyectos de intervención, de tal manera que se busque el fomento desde la matemática, y así contribuya a mejorar el pensamiento especialmente al resolver problemas.

## Resultados

Para poder alcanzar el estatus de pensador crítico, el futuro ingeniero, debe propender por lograr las siguientes habilidades cognitivas, las cuales hacen parte de dicha formación integral, según lo expone Facione (1990) y son analizadas desde la matemática, así:

***Habilidades cognitivas***

Las Habilidades cognitivas son definidas como acciones ágiles de tipo mental que les permite a las personas realizar procedimientos con datos obtenidos o de algún problema en particular que se pueda presentar y que conlleven a generar en él aprendizajes autónomos y comprender los desarrollos de los pensamientos que se puedan originar y así poder ponerlos en práctica en algún momento.

Las habilidades cognitivas se constituyen en pericias indispensables y pueden ser puestas es práctica, a través de la educación basada en competencias. Por medio de estas habilidades, el pensador crítico tiene conexiones conceptuales con el juicio reflexivo, la formulación y resolución de problemas, el pensamiento de orden superior, el pensamiento lógico, la toma de decisiones, el método científico, para formar ese juicio y monitorear y mejorar la calidad de ese juicio (Giancarlo y Facione, 2001).

***Habilidades que debe tener un pensador crítico en ingeniería***

La literatura sobre la temática de PC no tiene muchos estudios orientados a la educación en ingeniería, lo cual es preocupante (Özyurt, 2015). Es importante resaltar que no existe una relación entre los estilos de aprendizaje y las habilidades de PC de los estudiantes de ingeniería (Leyva, 2019), por lo que la enseñanza en ingeniería de cualquier asignatura debe incluir la impartición de conocimientos y el desarrollo de habilidades de PC, teniendo como objetivo el cultivar pensadores críticos con actitudes y hábitos de PC, de modo que estén dispuestos y sean buenos en PC cuando la profesión lo amerite (Forawi, 2016). Según Willingham (2019), el análisis, la síntesis y la evaluación vistos como capacidades del PC, tienen un significado diferente en las diferentes especialidades de la ingeniería.

La importancia de la capacidad de pensar en el aprendizaje crítico matemático es poder desarrollar y comunicar ideas en ese aprendizaje, pues puede verificar la veracidad de la información, puede producir decisiones racionales y puede respaldar un mayor logro de aprendizaje, puede contribuir en reducir la presencia de errores, ayuda a encontrar fallas al resolver problemas matemáticos, la capacidad de aplicar conceptos a nuevos problemas. Al tener la capacidad de pensar críticamente, una persona puede regular, cambiar su mente, para que pueda decidir actuar con mayor precisión. Aquí el estudiante puede actuar de una forma racional y lógica, ser capaz de proporcionar conclusiones alternativas apropiadas capaces de examinar varios problemas presentes en la vida cotidiana (Syafril et al., 2020).

Es fundamental, retomar las palabras de Peña et al. (2022), los cuales mencionan que el objeto principal del ingeniero es la resolución de problemas por medio de herramientas y tecnologías que involucren la matemática, la lógica, la abstracción, la física, la modelación, la simulación, el análisis gráfico (como diagramas de flujo multifuncionales, diagramas de bloque, mapas conceptuales y mentales, etc.) y sistemas de iteraciones u otras técnicas de solución como la prueba de ensayo y error.

Se desea que los futuros ingenieros desde la matemática posean fuertes habilidades analíticas, exhiban ingenio práctico, dominen los principios de los negocios y la gestión, comprendan los principios de liderazgo, dinámico, ágil, resistente y flexible a los cambios, y sean capaces de aplicar el conocimiento a nuevos problemas y nuevos contextos (NAE, 2005; Duderstadt, 2008).

Si se tiene en cuenta que las habilidades cognitivas (o estrategias de pensamiento), son el conjunto de aptitudes que le permite al ser humano el procesamiento de la información de todo aquello que lo rodea y así poder tomar un concepto de su entorno, por lo tanto, para poder alcanzar el estatus de pensador crítico, el futuro ingeniero, debe propender por lograr las siguientes habilidades cognitivas, las cuales hacen parte de dicha formación integral, según lo expone Facione (1990):

*Análisis*

Debe estar en capacidad de detallar y caracterizar los argumentos, las solicitudes, requerimientos, exigencias y/o las evidencias que se presentan en una temática en especial al tratar de resolver un problema, por medio del estudio de las ideas expuestas. Cuando se esboza un problema de matemática básica, Cálculo Diferencial e Integral o Ecuaciones diferenciales, el estudiante debe tener la capacidad suficiente para comprender el argumento expuesto, los reclamos o exigencias, identificar las variables, los parámetros, las constantes, las ideas, así como los preconceptos y los resultados que involucren el problema objeto de solución, así como la capacidad de identificar la relación entre los datos proporcionados y los argumentos proporcionados por el razonamiento y tratar de descubrir nuevas relaciones y conexiones de todos los elementos e información que participa en el problema de matemáticas objeto de solución. Según la taxonomía de Bloom (1956), implica el desglose de todos los conceptos en sus componentes, para poder distinguir entre hecho e inferencia.

Incluye simultáneamente con los datos suministrados, su diferencia, claridad, la formulación de hipótesis (incluyendo sus componentes, tiempos, reconocimientos, así como la identificación y validez de las más adecuadas), sacar conclusiones. Es importante, que el estudiante logre identificar y reconocer los supuestos inmersos en el desarrollo de la resolución del problema matemático. Algunas evidencias de la presencia de esta habilidad se dan cuando se identifican las analogías y contrastes entre dos orientaciones distintas al resolver un problema en cuestión, cuando se organiza gráficamente una declaración establecida, etc.

Según Atabaki et al. (2015), con el análisis, se tiene un doble significado:

- Expresar significado y enfatizar experiencias, situaciones, información, eventos, ideas y criterios. Incluye componentes tales como clasificación, recodificación y claridad de significado;
- Reconocer una relación interpretativa real entre los enunciados, preguntas, conceptos, descripciones, juicios, experimentos, razones, información e ideas. Incluye componentes como la prueba de ideas, la investigación y el análisis de debates.

Para un mejor estudio de la indagación, es importante recurrir a otros datos complementarios que ayuden con una mejor comprensión y poder identificar los conceptos e ideas centrales de la información objeto de análisis. Ya con un buen análisis hecho, se pueden organizar y articular los pensamientos de forma concisa y coherente. Esta habilidad, cuenta con las siguientes sub-habilidades: ordenar ideas, examinar las ideas, identificar los argumentos, analizar los argumentos, dimensionar la información, validar la información.

*Interpretación*

Debe tener claridad en la información suministrada, así como un correcto manejo al traducir de un lenguaje coloquial a un lenguaje matemático y viceversa dicha comunicación. Además, esta debe ser categorizada por orden de importancia, en otras palabras, la capacidad de comprender o expresar el significado de los datos o situaciones que se presentan en un problema matemático.

En esta comprensión se debe distinguir lo primordial como, reseñas, raciocinios, sucesos, manifestaciones, etc. Esta habilidad le permite al estudiante, entender y manifestar el sentido de muchas pruebas, seleccionándolas, organizándolas, diferenciando lo importante de que no lo es, para finalmente estructurar toda esta averiguación. Es importante para saber si la capacidad de considerar y decidir si la evidencia y las conclusiones obtenidas pueden generalizarse. Una buena interpretación de la información conduce a una buena claridad y no a pesar en ambigüedades, así como conducir a un buen enfoque del problema, así como lograr identificar la relación causa efecto a la que hubiere lugar. Esta habilidad, cuenta con las siguientes sub-habilidades: Clasificar y categorizar la información, descifrar la transcendencia, aclarar el significado, tal como lo sustenta Facione (1990).

*Inferencia*

Debe estar en capacidad de sacar conclusiones razonables y/o hipótesis (diferenciar entre verdaderas y falsas de los datos proporcionados) basadas en hechos, aspectos importantes, creencias, juicios, principios, conceptos u otras formas de representación bien sea del tipo algebraico con forma simbólica matemática, gráfico de funciones o de un sistema variacional, o de tablas de valores a partir de información suministrada, la cual será destacada, evaluada y desmenuzada y no en suposiciones, ni adivinanzas. Dicha información puede corresponder a los datos de un problema a resolver o la solución de uno y, ayudará a deducir consecuencias de la información suministrada. Lo anterior se hará por medio de un razonamiento inductivo o deductivo (Ennis, 1985; Paul, 1992), o por juicio de valor.

Durante la inferencia, se debe asegurar la evidencia apropiada para el problema, las conjeturas a las hipótesis, juicios, creencias, ideas, conceptos, explicaciones preguntas y soluciones alternativas, y a su vez sacar las conclusiones y opiniones apropiadas sobre el tema o problema (Facione, 1990). Por ejemplo, cuando se maneje una serie de posibilidades y de opciones de solución para confrontar un problema, se estaría haciendo uso de esta destreza. Adicionalmente Ennis (1989) señala que, en matemáticas, la prueba deductiva es el estándar de oro para la razón. Es importante que los ingenieros apliquen principios matemáticos de tal manera que puedan explicar sus razonamientos. Esta habilidad, cuenta con las siguientes sub-habilidades: Inducir, Deducir, consulta de pruebas, suponer alternativas, Generalizar, sacar conclusiones.

*Explicación*

Aquí se espera que el estudiante, pueda justificar los resultados, los argumentos y/o los procedimientos, los fundamentos de prueba, ideales, metodologías usadas, de criterio o de contexto en las que se soportaron sus juicios y efectos; y presentar el razonamiento de uno en forma de explicaciones contundentes. Esta habilidad de la explicación está directamente relacionada con la comunicación y la expresión de los estudiantes, pues es la forma en que expresan sus pensamientos. Este proceso se ha formalizado en la tradición retórica del equipo académico de debate, con su enfoque en la argumentación, la lógica probatoria y la capacidad de raciocinio. Un enfoque holístico del PC (Heaslip, 2005) debe incluir los conceptos de escucha crítica, pensamiento, escritura, lectura y expresión oral. Por lo tanto, la idea de Schoenfeld (1985) de *hacer matemáticas* parece sugerir una congruencia significativa con las habilidades de PC de Facione (2007), cuando incluyó la capacidad de presentar de manera convincente y coherente los resultados del razonamiento propio y de enunciar y justificar ese juicio en la forma de argumentos convincentes como elementos esenciales de explicación del PC.

Además de esta habilidad, los expertos de Delphi (Facione et al., 1998) identificaron un conjunto de tres sub–habilidades que revelan la explicación. Estos incluyen declarar los resultados, como indicar los resultados de un problema a resolver o escribir el pensamiento actual sobre un asunto complejo; procedimientos de justificación, lo que podría implicar presentar todas las consideraciones utilizadas para formarse una opinión sobre algo; y presentar argumentos, como al escribir un documento de defensa que defiende una posición o política particular basada en evidencia e inferencia.

*Evaluación*

Es la capacidad que tiene el estudiante de valorar la credibilidad, las declaraciones, proposiciones u otras representaciones que son relatos o descripciones de la percepción, experiencia, situación, juicio, creencia u opinión de una persona (sea su compañero de aula, su profesor o un autor específico); y para evaluar los argumentos técnicos, los datos y las apreciaciones de autoridades académicas, así como la fuerza lógica de las relaciones inferenciales reales o previstas entre declaraciones, descripciones, preguntas u otras formas de representación (Facione, 1990). La evaluación, por lo tanto, por lo tanto, es vista como la capacidad de encontrar y probar errores en un problema matemático.

El valor del juicio de ingeniería enfatiza la evaluación crítica y ayuda a los estudiantes a reconocer material externo pero relevante, evaluar técnicas propias y reconocer cómo usar diferentes técnicas juntas (Shaw et al., 2005**).** Los estudiantes deben ser competentes para evaluar la fuerza lógica de las declaraciones, descripciones o preguntas (Facione et al., 1998). Cuando el docente hace la exposición de una temática en particular, el estudiante debe tener la capacidad y competencia necesarias para comprender, avalar ese nuevo conocimiento y a partir de allí iniciar una retroalimentación a procesos futuros, donde se requiera la aplicación de dicho conocimiento. Esta habilidad, cuenta con las siguientes sub-habilidades: evaluar afirmaciones, evaluar los argumentos y probar resultados.

*Autorregulación*

Es la capacidad de evaluar juicios con la intención de valorar, corroborar, ratificar o modificar la reflexión y análisis de sus propias conclusiones. En otras palabras, es lo bien que son capaces los estudiantes de justificar o corregir con su juicio, autoevaluación y reflexión (Stedman**,** 2006).

A manera de ejemplo se tiene cuando el estudiante examina sus propias opiniones; monitorea a qué nivel está entendiendo lo que está en su cuaderno de notas o las notas dejadas por su profesor en el tablero; acordarse de diferenciar sus opiniones y aspiraciones personales de las de sus compañeros o docente o escrito de un libro de texto; asegurarse de recalcular nuevamente las operaciones y cifras; reconsiderar su interpretación o juicio en busca de realizar un análisis más profundo de los desarrollos algorítmicos y analíticos; revisar sus respuestas con base en los errores que haya podido descubrir en su reflexión; cambiar su concepto al darse cuenta de que ha juzgado equivocadamente la categoría de algunos parámetros en su decisión inicial (López-Novoa et al., 2020).

La autorregulación no funciona por sí sola; Está respaldada por dos habilidades secundarias, el autoexamen y la autocorrección. Estas dos habilidades secundarias complementarias requieren que los estudiantes reflexionen sobre su raciocinio y luego corrijan este en función de las deficiencias identificadas. Según Facione (2007), es la habilidad más importante, pues caracteriza el monitoreo, control y evaluación de nuestros propios procesos.

## Recomendaciones

- Para implementar la comprensión del PC en los cursos de ingeniería, es importante revisar los currículos de las áreas básicas de ingeniería, componente profesional y humanística para incorporar contenido relacionado con la teoría crítica, el juicio reflexivo y los análisis de tecnología y ciencia. El PC en y sobre la ingeniería provocará que los estudiantes cuestionen el contenido del curso, los procesos de aprendizaje y la ingeniería en la sociedad.

- Se debe estimular e inculcar en el estudiante una serie de actitudes mentales, por medio de disposiciones, hábitos y rasgos o disposiciones intelectuales que probablemente mejoren tanto su capacidad de pensar críticamente como su tendencia a hacerlo.

- Asumiendo que los estudiantes de ingeniería son profesionales emergentes, se debe buscar que dichos estudiantes sientan la relevancia del conocimiento y las habilidades matemáticas y, por lo tanto, el pensamiento matemático y el PC en el aprendizaje de las matemáticas, a manera de ejemplo, mediante la introducción de conceptos matemáticos en el contexto de las aplicaciones de la ingeniería.

- La promoción del PC permite a los estudiantes examinar, evaluar, explicar y reconstruir su pensamiento, reduciendo el riesgo de asumir, actuar o pensar con una creencia errónea.

- Es importante colocar a consideración de los estudiantes, una serie de lecturas críticas sobre un tópico en especial (así la matemática sea una ciencia exacta, más que humanística, pero que se pueda articular), donde se les brinde las herramientas como el tiempo necesario, para que estimulen el análisis reflexivo, y al final se les proponga preguntas de tipo abierto, en la cual los alumnos puedan sustentar sus respuestas, y estén en capacidad de defender sus propuestas y si es el caso aceptar las de otros cuando sea necesario, además sean capaces de diferenciar la información relevante, de la que no lo es. Aparte de las respuestas esperadas, se desea que ellos también formulen preguntas sin temor alguno a través de un ambiente de libre expresión y propiciando el debate.

- Se debe proponer en el aula, proyectos complejos (resolución de un problema, estudio de un fenómeno y/o proceso), para ser analizados por grupos de estudiantes, en la que estos con el apoyo de la matemática y las habilidades antes expuestas, puedan implementar la administración de una solución, postulen conjeturas, emitan juicios y conceptos, analicen y verifiquen las diferentes soluciones que se presenten, así como las consecuencias e implicaciones a las que haya lugar por medio de la operación de las diferentes variables, diversos parámetros y cambio en las constantes, condiciones iniciales y de frontera, a través de las diferentes simulaciones que se pudieran presentar. Al crear un nuevo conocimiento en el análisis de un proyecto, el estudiante, partiendo de sus presaberes puede llegar a confrontar sus argumentos y supuestos. Esta solución luego de ser debatida y discutida al interior de su grupo de trabajo debe ser comunicada al resto, donde exponen las diferentes posiciones y el por qué llegaron a la mejor solución luego de un consenso, permitiendo así una retroalimentación. Adicionalmente, al escuchar las respuestas de los demás grupos de estudio, pueda extraer lo más significativo y adoptarlo como una estrategia de solución a un futuro problema.

- Para perfeccionar el conocimiento, las habilidades y las disposiciones de PC de los alumnos, los docentes pueden generar una pedagogía educativa con acciones de aprendizaje productivas que fomenten las habilidades de PC.

- A los futuros profesionales de la ingeniería, se les debe enseñar a pensar críticamente, y el docente que modele las habilidades de PC.

- Es importante crear un ambiente en el aula, donde se promueva la colaboración, el diálogo abierto y la aceptación de diversos valores, creencias y perspectivas.

## Conclusiones

- Es muy necesario, que los estudiantes manifiesten de forma abierta sus propios conceptos sin temor a ser juzgados, censurados o reprochados, y sus docentes puedan estimular comportamientos y actitudes de PC óptimas a través del modelado efectivo de esos comportamientos.

- Se han examinado y hasta cierto punto implementados métodos para cultivar el PC dentro de la educación en ingeniería. Esencialmente se han producido tres innovaciones principales, la primera es el establecimiento de un curso inicial para los estudiantes sobre qué significa este tipo de pensamiento, por qué es importante que un ingeniero tenga tal habilidad y cómo incorporar esta habilidad en la práctica diaria de ingeniería. La segunda innovación fue la creación de un seminario / grupo de discusión para la facultad sobre la integración del PC en sus respectivos módulos de ingeniería. La tercera innovación es el desarrollo de un método para evaluar el PC durante varias fases de tareas abiertas en ingeniería. El método está diseñado para seguir el desarrollo del pensamiento a medida que el estudiante progresa a través del plan de estudios de pregrado. La retroalimentación de los estudiantes hasta ahora ha pedido un curso inicial más simplificado y ha alentado el material del curso en cada módulo para incluir oportunidades para un pensamiento más crítico.

- Con el PC como habilidad desde la matemática, puede ayudar a un pensamiento estructurado, al tomar la mejor decisión, para expresar un concepto, a atreverse a sacar conclusiones bajo un pensamiento lógico alternativo y a su vez ser capaz de examinar y descartar varios complejos en el aprendizaje de la matemática.

- Las habilidades de PC en ingeniería se pueden desarrollar a través de intervenciones de aula, como por ejemplo en: estudios de casos, ABP, debates argumentativos por medio de discusiones en conferencias, análisis del impacto de situaciones en el mundo real.

- La implementación del PC desde la academia, a los futuros ingenieros, les garantiza contribuir en cerrar la brecha que se da al ejercer su profesión, cuando el mercado laborar le demanda actuar bajo el PC, según se evidencia por parte de los empleadores.

- Se debe mejorar la conexión entre el concepto percibido sobre PC, por parte del docente de ingeniería y un empleador de ingeniería, pues lo que se instruye en los casos académicos difieren con la realidad, al poner en práctica el PC, especialmente al resolver problemas mal estructurados en el sitio de trabajo y que poseen objetivos en conflicto, al valorar los datos disponibles de la situación problema en cuestión, al tener que seleccionar la mejor opción, al medir los impactos de la tecnología, varias formas de solución, varios indicadores de éxito y el enfrentarse a restricciones ajenas a la ingeniería.

- El PC en matemáticas para ingeniería, le permite al estudiante la capacidad de aplicar su razonamiento y sus herramientas adquiridas para poder atender la resolución de un problema por medio de su descripción correcta, la interpretación adecuada de la información inmersa, así como la contribución a la solución y estudio del fenómeno y/o proceso en contexto. Le permitirá emitir juicios con fundamento, reflexionar sobre los resultados obtenidos matemáticamente, así como la interpretación de la concordancia que se da entre los conceptos previos y su implementación.

## Referencias bibliográficas

Achebe, C., Ozor, P., & Sukdeo, N. (2022). Enhancing Sustainable Engineering Education and Practice in the Developing Countries Through University-Industry Collaboration: A Nigeria Perspective. En *Proceedings of the International Conference on Industrial Engineering and Operations Management Nsukka*, Nigeria. https://ieomsociety.org/proceedings/2022nigeria/141.pdf (consulta: 22/oct/2022).

Atabaki, A., Keshtiaray, N., & Yarmohammadian, M. (2015). Scrutiny of Critical Thinking Concept. *International Education Studies*, *8*(3), 93-102.

Bloom, B. (1956). *Taxonomy of educational objectives: The classification of educational goals.* New York: David McKay Company, 1956, pp. 201-207. [Online]. Available: http://www.icomoscr.org/m/investigacion/%5BMETODOS%5DObjetivosTaxonomiaBloom.pdf

Díaz, L. y Montenegro, M. (2010). Las prácticas profesionales y el desarrollo del pensamiento crítico. En *XXXII Simposio de Profesores de Práctica Profesional.* Simposio llevado a cabo en Rosario, Argentina.

Duderstadt, J. (2008). Engineering for a Changing World-A Roadmap to the Future of Engineering Practice, Research, and Education (Flexner).

Ennis, R. (1985). A logical basis for measuring critical thinking skills. *Educational leadership*, *43*(2), 44-48.

Ennis, R. (1989). Critical thinking and subject specificity: Clarification and needed research. *Educational Researcher, 18*(3), 4–10.

Facione, P. (1990). *Critical thinking: A statement of expert consensus for purposes of educational assessment and instruction (Executive Summary)*. Millbrae, CA: The California Academic Press.

Facione, P., Facione, N. & Giancarlo, C. (1998). *The California critical thinking disposition inventory test manual* (Revised). Millbrae, CA: California Academic Press. Facione, P.A., Giancarlo [Sanchez], C.A.

Facione, P. (2007). *Pensamiento crítico: ¿qué es y por qué es importante?* Chicago: Loyola University.

Forawi, S. (2016). Standard-based science education and critical thinking. *Thinking skills and creativity*, *20*, 52-62. https://doi.org/10.1016/j.tsc.2016.02.005

Giancarlo, C. & Facione, P. (2001). A look across four years at the disposition toward critical thinking among undergraduate students. *The Journal of General Education*, 29-55.

González-Hernández, I., y Granillo-Macías, R. (2020). Competencias del ingeniero industrial en la Industria 4.0. *Revista electrónica de investigación educativa*, *22*. https://doi.org/10.24320/redie.2020.22.e30.2750

Halpern, D. F. (1998). Teaching critical thinking for transfer across domains: Dispositions, skills, structure training, and metacognitive monitoring. *American Psychologis*t, 53, 449–455.

Heaslip, P. (2005). *Critical thinking: to think like a nurse*. Retrieved July 21, 2005 from the Critical Thinking in Nursing Education web site: http://www.cariboo.bc.ca/nursing/faculty/heaslip/nrsct.htm

Leyva, P. (2019). Caracterización del estilo de pensamiento: Caso alumnos de ingeniería inscritos en cursos BAOC (Big Academic Online Course). *Instituto de Arquitectura Diseño y Arte*.

Lim, E. (2021). Technology enhanced learning of quantitative critical thinking. *Education for Chemical Engineers, 36*, 82-89. https://doi.org/10.1016/j.ece.2021.04.001

López-Novoa, I., Padilla-Guzmán, M., Gallarday-Morales, S., y Uribe, Y. (2020). Pedagogía Universitaria Basada en Competencias Genéricas para Desarrollar Habilidades del Pensamiento Crítico en Estudiantes de la Universidad Nacional de San Martín. *Propósitos y Representaciones*, *8*(3). http://www.scielo.org.pe/pdf/pyr/v8n3/2310-4635-pyr-8-03-e561.pdf

National Academy of Engineering (2005). *Educating The Engineer of 2020: Adapting Engineering Education to the New Century*. Washington, DC: The National Academies Press.https://doi.org/10.17226/11338.

Özyurt, Ö. (2015). Examining the critical thinking dispositions and the problem solving skills of computer engineering students. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *11*(2), 353-361. Disponible en: https://www.ejmste.com/download/examining-the-critical-thinking-dispositions-and-the-problem-solving-skills-of-computer-engineering-4370.pdf

Paul, R. (1992). Critical thinking: What, why, and how? *New Directions for Community Colleges, 1992*(77), 3–24.

Paul, R., & Elder, L. (2004). Critical thinking . . . and the art of close reading, Part III. *Journal of Developmental Education, 28*(1), 36–37. Retrieved from Academic Search Premier database. (AAT 14576885).

Pérez, A., Rodríguez, M., Lozada, J., Rangel, M., & González, Y. (2021). Necesidad de valorizar el desarrollo del pensamiento lógico en la enseñanza de la ingeniería. *Revista Referencia Pedagógica, 9*(1), 3-14p. https://rrp.cujae.edu.cu/index.php/rrp/article/view/223

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Academic Press INC (London) Ltd. ISBN 0-12628870-4

Shaw, M., Herbsleb, J., Ozkaya, I., & Root, D. (2005, May). Deciding what to design: Closing a gap in software engineering education. In International *Conference on Software Engineering* (pp. 28-58). Springer, Berlin, Heidelberg.

Stedman, N. (2006). Helping Students Regulate Through Reflection. *AGRICULTURAL EDUCATION MAGAZINE, 78*(6), 23. Disponible en: https://www.naae.org/profdevelopment/magazine/archive_issues/Volume78/v78i6.pdf#page=23

Syafril, S., Aini, N., Pahrudin, A., & Yaumas, N. (2020, February). Spirit of Mathematics Critical Thinking Skills (CTS). In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1467, No. 1, p. 012069). IOP Publishing. doi:10.1088/1742-6596/1467/1/012069

Willingham, D. (2019). How to teach critical thinking. Education Future Frontiers. Available online: https://prod65.education.nsw.gov.au/content/dam/main-education/teaching-and-learning/education-for-a-changing-world/media/documents/How-to-teach-critical-thinking-Willingham.pdf

Clame Acta Latinoamericana de Matemática Educativa

**SECCIÓN 2** / PROPUESTAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

VOL 36, NÚMERO 1, AÑO 2023

# ORIENTACIONES DIDÁCTICAS PARA ENSEÑAR LA RELACIÓN DE ORDEN EN LAS FRACCIONES

# DIDACTIC GUIDELINES TO TEACH THE RATIO OF ORDER IN FRACTIONS

**Noelia Londoño Millán, Adolfo Galindo Borja, Bernabé Solís de la Rosa, Samantha Analuz Quiroz Rivera**
**Universidad Autónoma de Coahuila. (México) , Instituto GeoGebra Tolima. (Colombia)"**
**noelialondono@uadec.edu.mx, agalindotabletas@gmail.com, bsolis@uadec.edu.mx, Samanthaquiroz@uadec.edu.mx**

**Resumen**:
La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas se ha constituido en un reto particularmente para aquellos que carecen de gusto por ellas y definitivamente los discursos de aula no son la mejor opción, es por lo que se presentan un conjunto de orientaciones didácticas que sirvan de apoyo para que el maestro cuente con una variedad de herramientas que le permita diversificar su práctica educativa al enseñar fracciones, particularmente lo referente a la relación de orden. Se ofrece el diseño de varias actividades que incluyen actividades lúdicas, actividades con lápiz y papel, así como como también recursos denominados *auto evaluables* diseñados con el software *GeoGebra* con el propósito que redunden y beneficien la enseñanza y aprendizaje del tema.

**Palabras clave**: GeoGebra, enseñanza, relación de orden de fracciones

**Abstract**:
Mathematics teaching and learning has become a challenge, especially for those who don’t like math; and definitively, classroom discourses are not the best option. That’s why a set of didactic guidelines are presented to serve as support so that teachers have a variety of tools that allow them to diversify their educational practice when teaching fractions, particularly regarding order ratio. The design of several activities is offered, including playful activities, pencil and paper activities, as well as resources called self-assessing, designed with the GeoGebra software with the purpose of being to the advantage of teaching and learning the subject.

**Keywords**: GeoGebra, teaching, ratio of order of fractions

## Introducción

La idea de ofrecer una educación matemática cada vez más consciente, contextualizada y el empleo de varias herramientas que permitan que la práctica educativa sea exitosa y perenne, es y seguirá siendo objeto constante de búsqueda, particularmente en lo referente a las fracciones, son varios los aspectos que centran la atención como son las diferentes representaciones, conceptualización y operabilidad.

(Ávila, 2019; Fuentes et al., 2019; Ramírez, 2021; Valdemoros, 2010) han encontrado en las fracciones y sus algoritmos áreas de oportunidad para reflexionar entorno a ellas, particularmente en lo referente a sus diferentes representaciones. Existe una resistencia por parte del alumno para abordarlas y asimilarlas cuando su instinto y sus conocimientos previos le han enseñado a contar con números naturales. Por lo que adaptarse a las nuevas reglas de procesamiento aritmético le representa nuevas dificultades y estas persisten hasta niveles avanzados de su formación académica.

Este documento surge de un proyecto de investigación sobre fracciones que se ha venido desarrollando en los últimos años y como consecuencia de los resultados parciales se presentan un conjunto de orientaciones didácticas que serán de gran utilidad tanto a alumnos como a docentes en formación y en ejercicio que impartan clase de matemáticas en el nivel básico (primaria, secundaria) o en el nivel medio superior (bachillerato). Se espera que cada una de las actividades que se ofrecen ayude a los lectores a que conozcan diferentes herramientas tanto tecnológicas como tradicionales que les permitan implementarlas en las aulas y también dado el caso, puedan servir para cada uno de los momentos de la clase e incluso pudieran constituirse en herramientas que ayuden al proceso de evaluación y el autoestudio.

## Referentes teóricos

El estudio de la fracción en la educación básica inicia en el tercer grado de primaria, asociándolo con los términos “mitad de, tercera parte de”, posteriormente la idea de fracción viene acompañada de representaciones figurales, y se introducen fracciones con diferentes denominadores, hasta llegar a las operaciones básicas, estas últimas, pese a ser del mismo campo de la aritmética, tienen procesos que difieren de forma considerable de las operaciones básicas con números naturales. Pareciera ser que es precisamente en esas diferencias, donde radican las mayores dificultades tanto en la operabilidad como en la ubicación de fracciones en la recta numérica y la resolución de problemas que implican el uso de estas.

En el nivel de secundaria se proporciona una definición más formal y completa de los números racionales y se puede identificar sus usos en contextos geométricos como es el caso de la proporcionalidad. En este contexto y de forma más general, de acuerdo con (Figueras,1988, cómo se citó en Ortiz, 2009) el estudio de las fracciones debe permitir a los estudiantes:

- Reconocer disecciones de un todo en partes iguales.
- Producir diferentes equiparticiones en una misma unidad.
- Reconstruir una unidad conociendo la forma y el tamaño de la parte. Cabe destacar que estos ejercicios de reconstrucción del todo son propuestos no sólo para situaciones discretas sino también continuas.
- Promover la partición de situaciones discretas a partir de la consideración de la equidad del área de las partes y no sólo de la congruencia de estas.
- Hacer uso del lenguaje común, algebraico y gráfico de las fracciones.
- Promover la partición de situaciones continuas y discretas a partir de diferentes unidades de partición, para identificar una misma parte.
- Producir diferentes distribuciones cuyos resultados sean el mismo que el de un reparto justo dado y describirlas por medio de un pictograma.

Es preciso indicar que, si se privilegia el uso exclusivo de algunas representaciones solamente, se limita el aprendizaje e imposibilita la adquisición del concepto cuando de fracciones se trata, en este sentido sobre la construcción de fracciones en solamente cuadrados y círculos Pazos (2009) expresa:

> Esta presentación deja de lado otros posibles contextos de uso de las fracciones, cuyo recorrido es necesario para que los alumnos se acerquen a la construcción del concepto. Entre estos contextos de uso podríamos señalar el de reparto, el de medida y aquellas situaciones que implican el establecimiento de relaciones entre fracciones. (p. 40).

También se hace pertinente reconocer que la enseñanza de las fracciones implica conocer la conexión de los símbolos matemáticos con referentes concretos (Llinares y Sánchez, 1999) ya que los varios tipos de representaciones harán posible que los alumnos se puedan familiarizar con cada uno y puedan apropiarse de un conocimiento, generado desde un referente más cercano y conocido por el estudiante. Así mismo, se sugiere que se identifiquen diferentes significados que pueden verificarse en las fracciones como el cociente, la medida, el operador multiplicativo y la razón (Álvarez, 2010).

***Algunas recomendaciones didácticas***

Varias de las recomendaciones que propone Streefland (2000, como se citó en Ortiz, 2009), que deben tenerse en cuenta a la hora de abordar el tema de las fracciones en el aula, estas tienen como eje principal la enseñanza centrada en el estudiante además de reconocer sus saberes, habilidades y estrategias. Esas recomendaciones a las cuales se hace referencia se enlistan a continuación:

- Lo importante es la "construcción" de las operaciones con las fracciones por los propios alumnos.
- Construcción que se basa en la propia actividad del alumno, como estimación, desarrollo del sentido del orden y tamaño, etc.
- Valorar las actividades de los estudiantes, así como los métodos y procedimientos que utilizan para resolver problemas, aunque difieran de la formalidad propia de la materia.
- Que el alumno sea capaz de formular sus propias reglas y generalizaciones para adquirir su conocimiento.
- Se deben utilizar los saberes previos del escolar, como base para empezar la secuencia de la enseñanza de fracciones (ideas relativas a mitades, tercios, cuartos, etc.), los procesos básicos de dividir, repartir.
- Se sugiere buscar situaciones en las que los alumnos construyan procedimientos de solución por medio de procesos de dividir, ordenar, medir, componer…
- Utilizar modelos de apoyo (regiones o segmentos, recta numérica, tablas de razones) y situaciones problemáticas (de la vida diaria que sirvan de "puente" entre las situaciones problema en diferentes contextos y el trabajo numérico)

## Aspecto metodológico

Cada una de las orientaciones didácticas para enseñar el orden en las fracciones que se proponen en el presente documento fueron extraídas de la experiencia con estudiantes de dos escuelas primarias públicas federales, ubicadas en el norte de México, con ellas se realizó investigación-acción participativa, con un alcance descriptivo y los resultados se obtuvieron a través de los reportes de práctica que entregaban los estudiantes de licenciatura, una vez terminaba cada una de las clases, así como también de las evaluaciones iniciales y finales aplicadas a 143 alumnos de sexto año de dos grupos por escuela que fueron analizados. En estas evaluaciones se indagó sobre el uso del lenguaje en las fracciones, la relación de orden con fracciones en diferentes representaciones (dibujos, recta numérica, números mixtos, fracciones propias e impropias).

Los reportes de práctica se realizaron de forma anticipada y se adecuaron a un formato y debían contener los siguientes aspectos: nombre de quien hace el reporte, grupo y sección, fecha y lugar donde se realizó la actividad, tema que se desarrolló, objetivo de la práctica, dificultades que hubieras detectado con los niños, percepción respecto a las actividades, dificultades para desempeñar la práctica, sugerencias que tengas respecto a las actividades, propuestas que tengas para futuras intervenciones de clase.

Es preciso resaltar que el interés de este documento es compartir varias de las acciones didácticas que se pusieron en práctica durante el desarrollo del proyecto de las cuales se obtuvieron los mejores resultados y fueron de gran aceptación por los niños de primaria. También es pertinente indicar que se mantuvieron los procesos éticos durante la ejecución de cada una de las actividades en varios sentidos: se solicitaron los permisos debidos para el ingreso a las escuelas; los alumnos de licenciatura fueron convocados y participaron de forma voluntaria, además fueron instruidos para la realización de las actividades; así mismo se mantuvo el anonimato de los alumnos de primaria que participaron en las actividades.

## Desarrollo de la propuesta

A continuación, se proporciona un conjunto de orientaciones didácticas, sustentadas en varias de las indicaciones de los autores arriba mencionados, las cuales han sido diseñadas y complementadas con varios ejemplos donde se describe la actividad, se orienta respecto al uso y se indica como puede construirse, con la finalidad de que el lector con ciertos criterios y reglas pueda elaborar sus propios materiales o que use los que se encuentran disponibles en línea. En este contexto y por motivo de espacio solo se han sugerido tres tipos de actividades denominadas así: *lúdicas*, con *lápiz y papel,* así como también actividades con uso de tecnología denominadas *auto evaluables,* para lo cual se usará el software *GeoGebra* que se ha constituido en una herramienta de alto valor para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en tiempos recientes.

***Actividades lúdicas***

Cada maestro decide de forma razonada el peso que puede darle a las actividades lúdicas, eso va a depender de sus intereses en la clase de matemáticas, por lo que conviene encontrarle sentido a la siguiente idea “Hay maneras más lúdicas que otras de proponer la misma tarea cognitiva. No es indispensable que el trabajo escolar parezca un vía crucis, se puede aprender riendo, jugando, disfrutando” (Perrenoud, 2004, p. 53).

En este mismo sentido Black et al. (2015) señalan que, si bien es cierto que la enseñanza tradicional realizada en entornos formales se mantiene vigente, también es cierto que los entornos informales y el juego se han constituido en fuentes de aprendizaje y han recobrado gran relevancia en los tiempos actuales. El quehacer educativo debe promover el desarrollo de habilidades fundamentales, en particular las que se muestran en la figura 1, Cada una de esas habilidades aportan a la formación de ciudadanos de calidad, dispuestos para la convivencia sana en un mundo que los forme tal cual los requiere. Atendiendo a estos autores, las actividades que se proponen también involucran el uso de diferentes juegos y competiciones que ayudan a que el alumno tome decisiones, se relacione con otros, que aprenda a seguir un conjunto de reglas, sea empático, tolerante, se anime a situaciones de convivencia que son muy importantes desarrollar, a la par de que se genere un aprendizaje.

**Figura 1.** *Habilidades educativas transformadoras.*


**Fuente:** Imagen tomada de Jaramillo et al. (2022).

Como actividades lúdicas se ha incluido un juego que consiste en ir diseñando un camino con fracciones, este juego se ha llamado *Carreras fraccionarias*. Los materiales son: 5 tarjetas, con una fracción, se sugiere usar varios tipos de fracciones (propias, mixtas e impropias), no equivalentes. Para su ejecución se divide a los alumnos en equipos, se entrega a cada equipo las 5 tarjetas. La actividad consiste en construir un camino humano el cual debe tener el orden (ascendente o descendente) que haya dada el maestro siempre que se respete la relación de orden de las fracciones dadas en las tarjetas, Esta actividad puede proponerse como un concurso y ganará el grupo que emplee el menor tiempo posible haciendo el ordenamiento. Si los alumnos son de primaria superior se considera que 10 minutos son suficientes, si son de menor grado puede extenderse el tiempo o disminuir la cantidad de tarjetas. En caso de que el equipo que emplee menos tiempo tuviera alguna equivocación, el ganador será aquel que haya empleado el segundo menor tiempo y que tenga bien construido el camino respetando la relación de orden.

Lo recomendable es realizar esta actividad en un espacio amplio, de preferencia una cancha, un patio de juegos, salir del salón de clases ayudará a formar los caminos sin hacinamientos y sin darse cuenta el alumno estará aprendiendo y jugando a la vez. Para el proceso de revisión conviene hacerlo en presencia de los alumnos para explicar el procedimiento que se usará, también debe tenerse una solución anticipada para que el proceso de revisión sea más eficiente. También es factible utilizar el error como un medio de aprendizaje indicando donde estuvo el equívoco y explicar cuál sería la corrección, tratando en todo momento de no promover la penalización ni avergonzar a los alumnos con la carrera equivocada.

***Actividades con lápiz y papel***

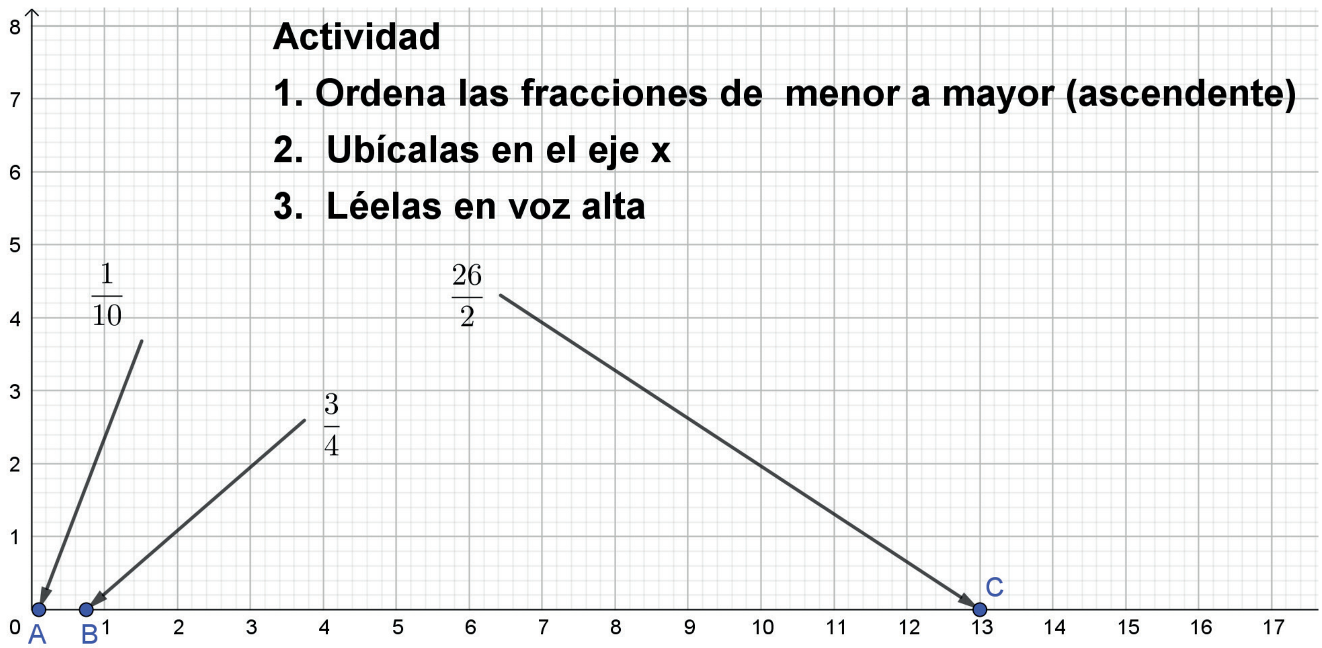
Planteamiento de la actividad**.** Aunque es una tarea sencilla se pretende ubicar las fracciones sobre una recta numérica construida en un rectángulo de papel bond de 5 cm de ancho por un metro de largo. La escala la decide el docente, puede ser que represente una unidad con una longitud de 5 o 10 centímetros, también se deben elaborar 5 tarjetas pequeñas con fracciones propias e impropias, que estén pegadas a un palillo, con la idea que el alumno las ubique sobre la recta numérica; específicamente se pretende que al manipular estos objetos se pueda aplicar la estrategia: “el mayor siempre ocupa la posición de la derecha” y así construir la relación de orden de las fracciones dadas. Se sugiere que además de ubicarlas en la recta numérica se haga una lista de parejas de fracciones y se determine si es mayor que o menor que otra.

Desde luego que esta actividad debe ser solamente en la fase inicial, porque durante su vida escolar no siempre el alumno tendrá de posibilidad de ubicar las fracciones en la recta numérica para compararlas. El valor agregado de esta actividad es que es ajena a cualquier algoritmo matemático, le ayudará a introducirse al tema y además le dará una herramienta importante para el futuro. Se propone esta actividad porque ubicar fracciones en la recta numérica, ha resultado ser uno de los elementos que mayor dificultad tienen los estudiantes de primaria y otros niveles escolares (Llinares y Sánchez, 1997; Londoño et al. , 2015). Se considera que realizar varias actividades diferentes contribuirá a un acercamiento más preciso, además ayudará a que el alumno se familiarice mejor con ellas.

Como actividad complementaria se recomienda usar el software GeoGebra, “que es un ambiente dinámico de libre acceso, para todos los niveles educativos y reúne geometría, álgebra, hojas de cálculo, gráficas, estadísticas y cálculo en un solo motor” (International GeoGebra Institute, sf). Para representar en la recta numérica las fracciones dadas en las tarjetas y enseñar a los alumnos a hacerlo, se requiere usar la barra de entrada y la vista gráfica, habilitando solo la parte positiva del eje $x$, donde cada pareja ordenada tiene la particularidad de que su segunda componente es 0. Como se muestra en la Figura2 donde aparecen ubicados los puntos representados por las binas $\left(\frac{1}{10},0\right)$; $\left(\frac{3}{4},0\right)$; $\left(\frac{26}{2},0\right)$.

Se recomienda esta actividad para promover el uso de la recta numérica y ayudar a la ubicación de fracciones, preferentemente para la primaria superior (quinto y sexto grado). Es pertinente que el alumno lea las fracciones en voz alta sin temor a equivocarse, esto le enseñará a escucharse y escuchar a otros, además de poder tener una imagen mental de la fracción.

**Figura 2.** *Ejemplo de cómo ubicar fracciones en la recta numérica.*




**Fuente:** Elaboración propia.

***Actividades auto evaluables con GeoGebra***

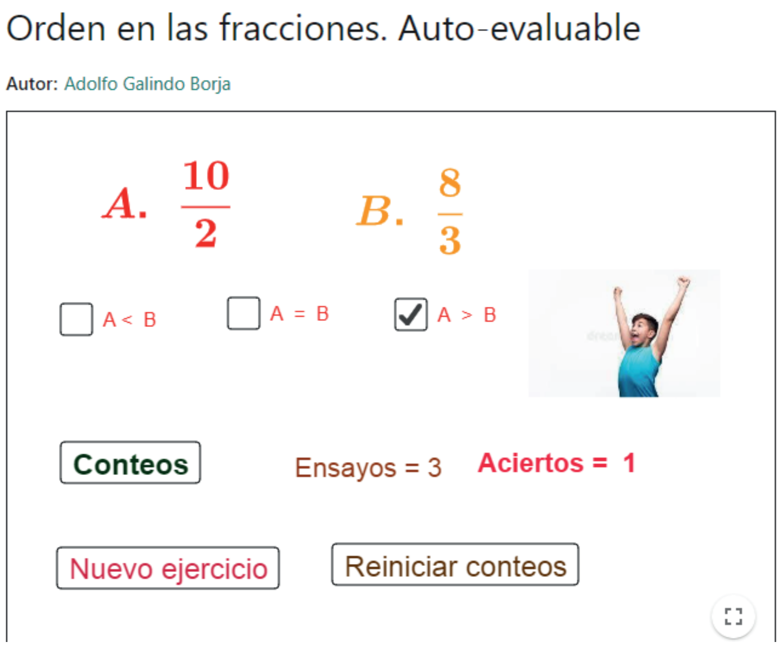
Sin duda alguna el uso de la tecnología en la práctica educativa se ha incrementado y según Cortés y Martínez (2021) representa diferentes desafíos importantes tanto para alumnos como para docentes:

> Para el docente, supone una serie de retos, donde su concepción didáctica acerca del uso de nuevas tecnologías intervendrá para su aplicación. Para el alumno, supone primordialmente el uso de dicha herramienta, para que pueda llegar, mediante la guía del profesor, a una génesis instrumental, y pueda manejar las nuevas tecnologías como una poderosa herramienta en su aprendizaje. (p. 49)

En este mismo sentido se pueden diseñar construcciones denominadas *auto evaluables* con el software GeoGebra en las cuales las tareas que debe realizar el estudiante sean aleatorias y las soluciones y su verificación se obtengan de forma automatizada. Los algoritmos de calificación y la aleatoriedad de tareas se programan al crear cada archivo, esta es una decisión que debe tomar el diseñador, esta actividad tiene el propósito que el alumno interactúe con la herramienta y con la relación de orden entre fracciones.

Entre las actividades propuestas se incluye una que ha sido denominada *Orden en las fracciones* (Galindo, 2022a). Es una actividad *Auto-evaluable,* cuya estructura visual se puede ver en la Figura 3. Esta puede ser aplicada a los estudiantes al finalizar el proceso de construcción del concepto de orden en las fracciones y se recomienda su uso como una actividad de ejercitación o de evaluación. A continuación, se explica cada una de las partes que la conforman y el uso que pudiera darle el alumno o el maestro según sea el caso.

**Figura 3.** *Ejemplo de una actividad auto evaluable.*




**Fuente:** Galindo (2022ª).

*Estructura de la construcción*

1. La presentación es con dos fracciones denominadas A y B las cuales cambiarán en forma automática y aleatoria cuando el estudiante pulse el botón rotulado como *Nuevo ejercicio*. Los numeradores y denominadores de A y B pueden ser definidos por el docente de acuerdo con la población a la cual va dirigida la actividad.
2. A continuación, se muestran tres casillas de control rotuladas así:
$$A < B, A = B \text{ y } A > B.$$
3. El estudiante puede seleccionar con un clic solo una de las tres posibles opciones.
4. El software evaluará si la opción escogida por el alumno es correcta o incorrecta y hará visible una imagen de triunfo o de fracaso según el caso. Estas imágenes pueden ser reemplazadas o complementadas con un texto que se hace visible con un mensaje ejemplo: ¡Excelente! o ¡Incorrecto!
5. El botón rotulado *Conteos* mostrará el número de intentos o ensayos que el estudiante ha realizado y el número de respuestas correctas o aciertos que ha logrado.
6. El botón *Reiniciar conteos* regresa los conteos a cero para reiniciar la actividad si se desea.

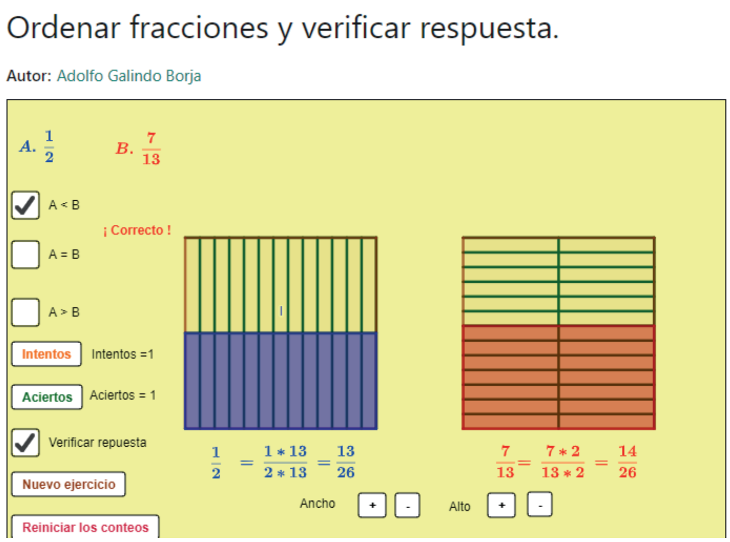
Desde el enlace que se anexa en la bibliografía se puede acceder a la actividad y desde allí observar, manipular y descargar un tutorial el cual fue escrito para explicar detalladamente la construcción. También se incluye una versión en video para que los lectores interesados puedan reconstruir el archivo, hacerle las adecuaciones que consideren convenientes o construir otros similares e incluso compartirlo con los alumnos para que se constituya en un recurso de apoyo para el autoestudio, tanto de forma sincrónica como asincrónica y pueda ser usado las veces que el alumno desee hacerlo en forma individual, se ejercite en el tema sin que el maestro tenga que intervenir en la presentación de las fracciones ni en su valoración.

Las actividades *auto evaluables* cumplen un papel destacado en la formación de los educandos para la auto-formación. Es pertinente agregar que si este recurso es incorporado en un curso en una plataforma MOODLE el docente podrá elegir el número máximo de intentos y escoger entre varias formas de calificación la cual se anexa en forma automática a la hoja de calificaciones del estudiante. En el aula presencial los estudiantes se pueden organizar en parejas o pequeños grupos para competir entre ellos para lograr el mayor número de aciertos.

En la Figura 4 se presenta la imagen de un segundo tipo de actividad *auto evaluable,* denominada *ordenar fracciones y verificar respuesta* la cual fue construida con el propósito de comparar fracciones propias. En este caso se incluye, además de las herramientas utilizadas en la primera actividad, la representación gráfica de las fracciones, la cual se hace visible después de que el estudiante haya dado su repuesta. La construcción incluye la visualización del proceso para convertir las fracciones a un mismo denominador. Al igual que en la actividad auto evaluable anterior en el enlace de esta construcción se anexa un tutorial paso a paso para los docentes o estudiantes que deseen replicarla.

El valor agregado de estas actividades *auto evaluables* es que permiten que los alumnos practiquen la actividad varias veces, sin que le salga el ejercicio repetido, esto le ayudará a comprender la relación de orden. También puede hacer la actividad en presencia o no del maestro, dado que las actividades fueron creadas en un software de uso libre. Además, las actividades se encuentran disponibles para todo público y el acceso a ellas no tiene un tiempo limitado. Para usar las herramientas proporcionadas no se requiere tener permisos de administrador para descargar archivos o software, ya que la actividad se puede ejecutar en un applet en línea, o acceder a las actividades, aunque no se tenga internet, ya que se pueden descargar para utilizarlas estando fuera de la web.

**Figura 4.** *Imagen de auto evaluable para ordenar fracciones con representación gráfica incluida.*




**Fuente:** Galindo (2022b).

### *Fracciones en otros contextos*

Las matemáticas en general tienen muchas aplicaciones en diversos contextos, particularmente se puede promover el uso de las fracciones en situaciones que le sean familiares a los alumnos, por ejemplo, hablar de fracciones al nombrar el número de personas que conforman el núcleo familiar e indicar que fracción de ellos son hombres, que fracción de ellos son personas de la tercera edad, o dada la fracción el alumno pueda identificar el número total de integrantes. Situaciones como estas ayudarán a que los alumnos puedan hablar de fracciones en otros ambientes diferentes a los que le ofrece la escuela.

En la Figura 7 se pueden identificar varios ejemplos con los que un docente puede trabajar el concepto de fracción indicando el todo, que vendrían siendo los 30 huevos de una canastilla, los días de la semana, las horas de un día, los integrantes de una familia, etc. Al hacer alusión a una parte de esos elementos se invita a construir una tabla como aparece en la parte inferior izquierda y puede usar las fracciones en un lenguaje natural.

**Figura 7.** *Ejemplos de contextos cercanos al estudiante con los que puede usar fracciones.*


**Fuente:** imágenes tomadas de Google imágenes.

## Comentarios finales

Cada una de las actividades que se presentan ofrece diferentes posibilidades didácticas, en tal sentido puede ayudar a los docentes a conocer, diseñar y proponer materiales tanto virtuales como físicos que redunden en el aprendizaje de los alumnos a la vez que contribuyan a mejorar la práctica educativa y que se promueva la reflexión, la creatividad, además ayudará a que se comprenda la utilidad de las fracciones y que estas se usen también fuera de la escuela. Por otro lado, se espera que el uso de los recursos promueva el desarrollo de habilidades transformadoras particularmente el trabajo colaborativo y la empatía, las cuales son necesarias para desempeñarse en un empleo donde se requiera relacionarse apropiadamente con otros.

También la realización de actividades lúdicas con los alumnos de la educación básica ha resultado ser de mucho agrado para los estudiantes, porque les ha permitido aprender matemáticas a través del juego, relacionarse con sus propios compañeros y así obtener un aprendizaje a través de la cooperación, sin temor al fracaso y motivados con la convivencia sana y buena participación. Al momento actual el proyecto ha sido experimentada solo en la versión presencial y en la mayoría de los casos con alumnos, donde se ha podido identificar mejores aprendizajes y gusto por realizar cada una de las actividades que se han propuesto. Es pertinente mencionar que a este proyecto se han vinculado algunos alumnos entusiastas de licenciatura, que han apoyado de manera voluntaria.

## Agradecimientos

Los autores agradecemos a las siguientes personas que son alumnos de licenciatura, por su invaluable apoyo en la realización y ejecución del proyecto.

Valeria Herrara Bautista, Carolina Ramos Durán, Yadira Alejandrina Salazar Álvarez, Karla Yadira Monroy Briones, Andrés Herrera Salazar, Rey Alexis Salas Vega, Sahira Zulema Dávila Gómez, Nelly Daniela Zambrano Reyna, Víctor Becerril Solano, Paola Jocelyn Belmares Flores, Verónica Nohemí Rodríguez Vázquez.

Los autores también agradecen a las directivas de las siguientes instituciones ubicadas en la región norte de México, por el apoyo recibido y permitir ejecutar cada una de las actividades del proyecto.

Escuela primara federal Josefa Ortiz de Domínguez T.V.

Escuela primara federal Francisco Zarco.

## Referencias bibliográficas

Ávila, A. (2019). Significados, representaciones y lenguaje: las fracciones en tres generaciones de libros de texto para primaria. *Educación matemática*, *31*(2), 22-60.

Black, J., Castro, J., y Lin, C. (2015) *Youth Practices in Digital Arts and New Media: Learning in Formal and Informal Settings*. Palgrave.

Cortés, J. y Martínez, K. (2021). Aprender álgebra jugando: el caso del DRAGON BOX. Revista Electrónica AMIUTEM. Vol. IX, No. 1, pp. 47-56. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. Editorial AMIUTEM.

Fuentes, L., Lasso, J., Cristancho, M., López, L., & Cifuentes, Á. P. (2019). Relación de orden en los números racionales. Informe final. Maestría en Educación matemática. Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia.

Galindo, A. (2022a). Orden en las fracciones, *Auto evaluable* Tutorial. GeoGebra.org. https://www.geogebra.org/m/pjkuret5

Galindo, A. (2022b). Ordenar fracciones y verificar respuestas. Tutorial. GeoGebra.org. *Auto-evaluable* https://www.geogebra.org/m/pvxrhq9a

International GeoGebra Institute. (s.f.). Acerca de GeoGebra. Acceso el 01 de 12 de 2020, disponible en GeoGebra: http://www.geogebra.org

Jaramillo, G., Moreta, M. y Proaño, A. (2022). *EL LIDERAZGO TRANSGLOBAL en la formación de innovadores sociales universitarios en el Ecuador*. Pontificia Universidad Católica del Ecuador.

Londoño, N., Kakes, A. y Llanes, J. (2015). Dificultades en conceptos matemáticos que impliquen el uso de fracciones. En Flores, R. (Ed.). (2015). *Acta latinoamericana de matemática educativa,* volumen 28. México, Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C. pág. 230-235.

Llinares, S. y Sánchez, M. (1997a). Aprender a enseñar, modos de representación y número racional, En Sierra, M. Rico, L. (Eds.), *Primer simposio de la sociedad española de investigación en educación matemática.* (pp. 13-24). Universidad de Granada.

Llinares, S. y Sánchez, M. (1999). *Fracciones*. España: Editorial Síntesis.

Ortiz, A. (2009). Estudio de situaciones continuas y discretas del concepto de fracción en interpretaciones de reparto y parte-todo, en primer grado de secundaria. Tesis de licenciatura no publicada. Escuela Normal Superior de México.

Pazos, L. (2009). Las fracciones son un problema. *Revista quehacer educativo, didáctica y prácticas docentes*, (97), 6.

Perrenoud, P. (2004). *Diez nuevas competencias para enseñar*; invitación al viaje 1ª edición Barcelona: GRAO.

Ramírez, Y. (2021).Propuesta didáctica para la aplicación de diferentes concepciones de la noción de fracción. *Revista de investigación 45*(102), 172-199.

Valdemoros, M. (2010). Dificultades experimentadas por el maestro de primaria en la enseñanza de fracciones. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME*, *13*(4-II), 423-440.

# BARRERAS DIDÁCTICAS Y APOYOS EN LA ENSEÑANZA DE LA POTENCIACIÓN EN Z: UNA EXPERIENCIA INCLUSIVA

# EDUCATIONAL BARRIERS AND SUPPORTS IN THE TEACHING OF POWER IN Z: AN EXPERIENCE OF INCLUSION

**Mayra Noemi Flores, Ivone Anahí Patagua, Roxana Leonor Albares**
**Universidad Nacional de Salta. (Argentina)**
**mayraflores.mf.01.21@gmail.com, ivonepatagua@gmail.com, roxana21.pm@gmail.com**

**Resumen**:
Este trabajo describe parte de la implementación de una propuesta de enseñanza inclusiva, sobre la potenciación de números enteros, en cuanto a la identificación de barreras didácticas y a la configuración de apoyos a la enseñanza realizada. Surge a partir de la necesidad de establecer propuestas de enseñanzas que sigan el modelo de la Educación Inclusiva, contemplada como un derecho de las personas con discapacidad en la Ley de Educación Nacional Argentina N° 26.206. El trabajo es del tipo cualitativo y se llevó a cabo en un aula de 1° año del Ciclo Básico del nivel Medio de una institución pública de la ciudad de Salta, en el año 2021, donde asiste una alumna con parálisis cerebral. Se evidencia cómo los apoyos configurados potenciaron el aprendizaje de la alumna incluida y se dejan pendientes algunas barreras por remover, detectadas en el momento de implementación de la propuesta.

**Palabras clave**: barreras didácticas, apoyos, números enteros

**Abstract**:
This paper describes part of the implementation of an inclusive teaching proposal, about the power of integers, concerning the identification of educational barriers and the configuration of teaching aids to the teaching which was carried out. It emerges from the need to establish teaching proposals that follow the guidelines of Inclusive Education, contemplated as a right of people with disabilities in the Argentine National Education Law Nº 26.206. It is qualitative research that was carried out in a first-year Basic Cycle secondary education classroom of a public institution in the city of Salta, during the year 2021, where a student with cerebral palsy attends. The findings evidence how the configured teaching aids enhanced the learning of the included student, and some barriers, detected in the implementation of the proposal, are left to be removed.

**Keywords**: educational barriers, teaching aids, integers

## Introducción

La Convención sobre los Derechos de las Personas con Discapacidad (Organización de las Naciones Unidas, 2006), ratificada en Argentina en la Ley de Educación Nacional N° 26.206, adopta el Modelo Social de la Discapacidad. Fundamentalmente se reconoce que las personas con discapacidad son sujetos de derecho y, por lo tanto, son sujetos del derecho humano a la educación. El artículo 24 de dicha convención señala que, con miras a hacer efectivo este derecho y sobre la base de la igualdad de oportunidades, han de existir sistemas educativos inclusivos. En consecuencia, el derecho a la educación es un derecho a la educación inclusiva.

La Educación Inclusiva es un modelo de educación que concibe a todos como sujetos de derecho con las mismas oportunidades de acceso al sistema educativo y en igualdad de condiciones (Broitman *et al*., 2018). En este modelo, se asume que las causas de la exclusión educativa o el fracaso escolar no residen en las características propias de cada estudiante, sino que son problemas derivados de las particularidades de la enseñanza, las instituciones y los sistemas educativos en general; es decir, de las barreras que impiden un pleno acceso y participación de todo el alumnado.

Cobeñas *et al*. (2021), refiere a las barreras en el ámbito escolar, como barreras a la participación y el aprendizaje. En términos pedagógicos:

> Una barrera a la participación y el aprendizaje es cualquier recurso, estructura, concepción, forma de organización del tiempo o del espacio, de enseñanza, de comunicación, o mobiliario escolar, entre otras, que impida o restrinja el pleno ejercicio del derecho a la educación en todo el alumnado. (p.138)

En consecuencia, considerando el rol docente, no se debe poner el foco en la discapacidad del estudiante adoptando un método especifico de enseñanza, sino "en la necesidad de revisar nuestras prácticas orientando el foco en la identificación y eliminación de barreras, y en la construcción de apoyos" (Cobeñas *et al*., 2021, p.137).

El término apoyo alude a todas aquellas modificaciones que las escuelas producen en pos de asegurar la plena participación y aprendizaje de todo el alumnado, incluido aquel con discapacidad (Cobeñas *et al*., 2017).

Desde la Educación Inclusiva, no son los alumnos quienes deben adecuarse a la escuela sino las escuelas las que deben producir las modificaciones necesarias para asegurar que se brinde a todo el alumnado las experiencias educativas y el acceso a lo definido como "común" en el diseño curricular. Por ende, según Cobeñas *et al*. (2017), no se consideran inclusivas las "adecuaciones" o "adaptaciones" curriculares que parten de la idea de un currículo fijo e inamovible y en donde es el alumno quien debe adecuarse a la escuela y no en el sentido contrario.

Los estudiantes argentinos con discapacidad que cursan el nivel Medio de la Escuela Secundaria Obligatoria (ESO) en escuelas comunes, se topan con la presencia de múltiples barreras (normativas, institucionales, culturales y actitudinales). Esto significa que la implementación práctica y plena del derecho a la educación inclusiva en Argentina, no es una realidad en las aulas. Considerando la ley expuesta, en donde se obliga al Estado argentino a asegurar el derecho a la educación inclusiva de las personas con discapacidad y, desde la labor como docentes e investigadores, se entiende la importancia de construir conocimiento didáctico para efectivizar dicho derecho (Broitman *et al*., 2018).

Por ello, es necesario diseñar las propuestas didácticas contemplando configuraciones de apoyos que tiendan a eliminar las barreras existentes y potencien la inclusión de las personas con discapacidad en las escuelas.

En este sentido, nos encontramos con un 1er año del Ciclo Básico de la ESO en una institución pública, en Salta – Argentina, donde asiste **Milagros**, alumna con diagnóstico de parálisis cerebral parcial, lo que nos enfrenta a indagar las barreras a la participación y al aprendizaje que obstaculizan el trabajo con Matemática en general, y con la potenciación de números enteros en particular, proponiendo posibles apoyos a la enseñanza que permitan eliminar dichas barreras. Se busca dar respuesta a ¿cómo los apoyos configurados tienden a eliminar las barreras didácticas que inciden en la enseñanza y aprendizaje de Milagros?

En este contexto, se lleva a cabo el presente escrito, que relata parte de la implementación y los resultados de una propuesta de enseñanza para la potenciación de números enteros (Z) en el aula inclusiva mencionada, los avances producidos y los desafíos emergentes por barreras detectadas en el momento de la implementación.

## Marco teórico

Para Cobeñas & Grimaldi (2018), la Educación Inclusiva es una perspectiva sobre educación que surge ante la evidencia de que, en todos los países del mundo, muchos grupos de niños sufren distintos niveles de exclusión educativa; entre los cuales, se encuentra el grupo de las personas con discapacidad. Siguiendo el modelo social, la discapacidad resulta de la interacción entre las personas y las barreras debidas a la actitud y al entorno que evitan su participación plena y efectiva.

Las barreras en el ámbito escolar pueden ser de variados tipos. Cobeñas *et al*. (2021) las clasifica en: barreras a la comunicación, a la interacción, barreras físicas, arquitectónicas, de recursos humanos, actitudinales, y didácticas. Para la propuesta de enseñanza, se puso el foco en las barreras didácticas:

> Son aquellas provenientes de los procesos de enseñanza; ya sean ciertos enfoques didácticos, intervenciones docentes, proyectos pedagógicos, modos de enseñar, de evaluar, tipos de actividades, de recursos o materiales, modos de entender —como deficitario— al sujeto de educación, que actúen restringiendo o impidiendo el aprendizaje del alumnado con discapacidad. (Cobeñas *et al*., 2021, p.141)

Teniendo en cuenta que los apoyos no constituyen adaptaciones para un alumno del que se supone tiene una dificultad, se consideran los apoyos referidos o centrados en la enseñanza, como “todo lo concerniente a las estrategias y decisiones didácticas tanto en la planificación como en el desarrollo de las clases en aulas inclusivas” (Cobeñas *et al*., 2017, p.38).

Cobeñas *et al*. (2021) plantea que, en el aula de matemática, los apoyos se construyen partiendo de la base de considerar a los alumnos como productores de conocimiento y analizando el contenido a enseñar teniendo en cuenta qué y cómo conocen los alumnos.

Para el trabajo áulico, se ha considerado el modelo propuesto por Guy Brousseau (1995, citado en Alagia *et al*., 2005), desde el cual se piensa la enseñanza como un proceso centrado en la producción de los conocimientos. Por lo tanto, esta perspectiva tiene en cuenta la heterogeneidad de los mismos, las diversas formas de resolución de los alumnos y los posibles errores que pudieran darse en problemas trabajados en secuencias didácticas que el docente anticipa y estudia. Como indica Cobeñas *et al*. (2021):

> La producción didáctica de la escuela francesa y de nuestra propia producción latinoamericana no se dedicó específicamente a la relación entre la enseñanza y el aprendizaje en aulas inclusivas, es posible reconocer en esta disciplina el estudio riguroso de las condiciones didácticas que promueven el aprendizaje por parte de los alumnos con conocimientos heterogéneos y con relaciones muy diferentes con las matemáticas. (p. 200)

Una de las potentes herramientas a considerar es el de la variable didáctica de Brousseau (1995, citado en Panizza, 2003): “El docente puede utilizar valores que permiten al alumno comprender y resolver la situación con sus conocimientos previos, y luego hacerle afrontar la construcción de un conocimiento nuevo fijando un nuevo valor de una variable” (p. 66).

De esta manera, son las decisiones de comando o manejo de las variables didácticas, las que permiten ajustar las propuestas didácticas a los conocimientos, estilos y características de cada estudiante (Grimaldi & Cobeñas, 2018). Por ello, es posible abordar un contenido por medio del mismo diseño de propuestas didácticas para alumnos con y sin discapacidad en aulas inclusivas, atendiendo a las características propias de los estudiantes con discapacidad a través del diseño de los apoyos y el uso de las variables didácticas que se ajusten a sus modos y estilos de aprender.

Para la enseñanza de los números enteros se consideró un estudio de los obstáculos epistemológicos de los números negativos en Cid (2015), donde uno de ellos es el número como medida. Según Cid (2002, citado en Martínez, 2018), es importante evitar actividades que pongan un énfasis excesivo en los modelos concretos; ya que justifican con cierta liviandad la suma y la resta de números enteros, y con una simplificación excesiva el producto y el cociente. Entonces, como la potenciación descansa en la multiplicación de este campo numérico, es que se asume un trabajo intramatemático.

En el programa de contenidos para la Educación Secundaria, el Diseño Curricular Jurisdiccional (DCJ) para la provincia de Salta – Argentina, la potenciación de números enteros es un tema ubicado en 1° año, en el eje Números y Operaciones, bajo el título Operaciones en Z. Este documento expresa la necesidad de analizar las operaciones en Z y sus propiedades, como una extensión de las elaboradas en los números naturales (N).

En virtud de lo anterior, y con el objetivo de realizar un recorrido de estudio de la enseñanza del objeto matemático, se analiza el DCJ de Educación Primaria de la provincia de Salta - Argentina, perteneciente al nivel educativo anterior a la ESO, donde el trabajo se realiza en el campo de los números naturales. En particular, la potenciación en N se trabaja desde la noción en 5°, profundizando el estudio en 6°, y en 7° año se formaliza el saber. A su vez, este documento sugiere la utilización de tablas de potencias en la resolución de problemas. Siguiendo a Cantoral *et al*. (2015), “el libro de texto, como objeto cultural, es un medio mediante el cual se construye el consenso educativo. Sirve por tanto para introducir una ideología y para legitimar contenidos y formas específicas del conocimiento escolar” (p.10).

Se seleccionaron para analizar dos libros de texto de 7mo año de Educación Primaria y dos libros de texto de 1er año de Educación Secundaria, con el fin de indagar en las actividades que se proponen para el trabajo de la potenciación en Z. El criterio utilizado para la selección de estos manuales es que sus autores son referentes didácticos de Argentina.

Los libros de la escuela primaria proponen problemas en contextos extramatemáticos de combinatoria y relaciones recursivas (o bien problemas que responderían a un modelo exponencial).

Los libros para la escuela secundaria inician con un problema de potenciación en N, de los tipos descriptos para la escuela primaria. Luego, recuerdan la definición de potenciación en N y en base a ella, definen o infieren la potenciación con bases negativas.

Seguidamente piden calcular potencias de bases negativas en ejercicios o en tablas para completar. A partir de esto, buscan que se infiera la regla para el signo de la potencia teniendo en cuenta el signo de la base y la paridad del exponente por medio de la comparación de los resultados de las potencias trabajadas.

## Metodología

Se adopta una metodología del tipo cualitativa. De acuerdo a Arias (2006) y Tamayo y Tamayo (2000) el tipo de trabajo es de campo intensivo, pues se realiza en un aula inclusiva particular teniendo como actora principal a Milagros, y de nivel exploratorio, dado que se analiza información que pudiera servir para futuros trabajos de investigación.

En el año 2021, el trabajo escolar secundario en las escuelas de Argentina se organizó en burbujas, en virtud de la pandemia de Covid – 19. Esta experiencia tuvo lugar en la burbuja B, de un 1° año del Ciclo Básico de la ESO, conformada de la siguiente manera: 11 alumnos, la docente de Matemática, la maestra inclusora de Educación Especial y una estudiante avanzada del profesorado de Matemáticas de la Universidad Nacional de Salta, cumpliendo el rol de observador/participante.

Se distinguen dos momentos a priori de la implementación. En un primer momento, se llevaron a cabo observaciones de clases a cargo de la estudiante avanzada. Las observaciones fueron del tipo participante y no estructurada (Arias, 2006), con la finalidad de recopilar información acerca del aprendizaje de la alumna incluida. Esto, sumado a las recomendaciones del plan de trabajo para Milagros (elaborado al inicio del año escolar por la maestra inclusora) y a la opinión de la docente del aula, condujo a la identificación de posibles barreras que imposibilitaban a Milagros un pleno acceso a la participación y el aprendizaje.

Barreras identificadas en la observación del aprendizaje de Milagros

- El intervalo de los números trabajados en las actividades no contempla lo sugerido por el plan de trabajo para Milagros, impidiendo que ella pueda construir los conceptos de los temas que se trabajan en las propuestas de actividades para el aula.
- El tamaño de la fuente de las consignas repartidas comúnmente a los alumnos para que trabajen en el aula dificulta que Milagros pueda leerlas con comodidad. Asimismo, el tamaño de las tablas y rectas numéricas que se utilizan no permiten que ella pueda completarlas en caso de pedírselo, dada su motricidad.
- Los tiempos escolares dificultan que se respete los tiempos de producción de Milagros para realizar las operaciones, escribir conclusiones y verificar resultados; truncando el potencial de trabajo que podría llegar a alcanzar.

En un segundo momento, se diseñaron las actividades y los apoyos para el tema Potenciación en los números enteros.

***Apoyos construidos***

Teniendo las actividades diseñadas se construyeron los apoyos necesarios para eliminar las barreras detectadas. Estos fueron:

- ajuste en las consignas de las actividades (mediante decisiones de manejo de las variables didácticas),
- recursos en tamaño adaptado (tablas de multiplicar, fotocopias con consignas y recta numérica)
- y el uso de calculadora (para hacer operaciones numéricas, explorar y verificar)

Finalmente, se implementó la propuesta de actividades para las que se destinaron 40 horas cátedras (40 minutos cada una), en las clases de Matemática, los martes y jueves. Particularmente, las actividades de potenciación en Z que se presentan en este artículo se implementaron en 6 horas cátedras.

A continuación, se presentan las consignas de dos actividades y una descripción de cómo las realizó Milagros, en conjunto con la maestra inclusora y el grupo clase. Además, se incluyen algunas fotos de la producción de la alumna.

En la Figura 1, se visualizan las consignas de la actividad 1 para Milagros, la cual, varió respecto sus demás compañeros en la base de la potencia.

**Figura 1.** *Consignas de Actividad 1 para Milagros*

**Actividad 1:** ¿Cuáles de las siguientes expresiones son equivalentes? ¿Qué tuviste en cuenta para decidir?:

$2^3$, $2+2+2$, ***Multiplicar tres veces*** $2$, $8$, $2.2.2$

**A)** Completa la siguiente tabla. Explica como realizaste

| $3^1$ | $3^2$ | $3^3$ | $3^4$ | $3^5$ | $3^6$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |

**Fuente:** elaboración propia.

Con la primera actividad se trabajó la potenciación en números naturales. Tuvo como fin que los alumnos utilicen el concepto de potenciación en N, visto en la escuela primaria, para luego extender el mismo al campo de los números enteros.

Las actividades fueron entregadas a cada alumno de forma individual, para que empezaran a resolverlas.

La maestra inclusora inició interviniendo con un repaso para Milagros: "en la potenciación, se usa la multiplicación y su signo es el punto". Además, le mostró algunos ejemplos de cómo resolver potencias naturales. Luego del repaso inducido, ambas leyeron la consigna. La alumna recordó que dos expresiones equivalentes son aquellas que tienen "el mismo resultado", pues ese concepto ya había sido trabajado en temas anteriores en el aula. Así, resolvieron cada cálculo dado en la consigna.

Para resolver $2 + 2 + 2 = 6$, se apoyó en el uso de material concreto (sus lápices) y para $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ usó las tablas de multiplicación. Para ambos casos, hizo uso implícito de la propiedad asociativa de la suma y el producto en los números naturales. Luego, pintó como equivalentes las expresiones $2^3$, $2 \cdot 2 \cdot 2$ y 8 porque dieron el mismo resultado.

Ante la pregunta ¿qué tuviste en cuenta para decir que son equivalentes?, la alumna respondió "el signo" (refiriéndose a que en los cálculos utiliza el "."). Dada su motricidad y los tiempos escolares, la alumna dictó a la maestra inclusora las conclusiones, quien las registró en la carpeta de actividades.

A continuación, se socializaron las actividades en el aula. La docente del aula guío este momento, animando a que los alumnos compartan sus producciones con sus demás compañeros. Cuando fue el turno de la alumna incluida, se observó cierta dificultad para leer las conclusiones arribadas por sí misma, por lo que fue ayudada por las docentes.

Para la actividad A) se utilizó nuevamente el producto reiterado para las potencias con exponentes 1, 2 y 3. Para los demás casos, la alumna dictó a la maestra el cálculo que debe realizar, usando la calculadora: la maestra preguntó: "¿cómo obtenemos $3^6$?" y ella respondió: "Tenia que repetir el 3 seis veces… con la multiplicación". Completó las tablas con los resultados y dictó las conclusiones a la maestra inclusora, quien las escribe en la carpeta.

A modo de ejemplificar lo anterior, se muestra en la Figura 2, la tabla de las potencias de base 3 con los resultados obtenidos:

**Figura 2.** *Actividad 1-A resuelta por Milagros.*

A. Completa la siguiente tabla. Explica como lo realizaste. ***(puedes usar calculadora)***

| $3^1$ | $3^2$ | $3^3$ | $3^4$ | $3^5$ | $3^6$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 9 | 27 | 81 | 243 | 729 |

**Fuente:** producción de Milagros.

La Figura 3, muestra las consignas de la actividad 2 para Milagros que consistieron en una extensión de la actividad 1. Se propusieron tablas de potenciación de base negativa para completar, utilizando el concepto de potenciación.

Luego, por medio de comparación de las tablas completadas, se buscó que los alumnos elaboren conclusiones respecto los resultados de las potencias teniendo en cuenta las bases y los exponentes.

**Figura 3.** *Consignas de Actividad 2 para Milagros.*

**Actividad 2:** Completa la siguiente tabla. (Puedes usar calculadora)

| $(-2)^1$ | $(-2)^2$ | $(-2)^3$ | $(-2)^4$ | $(-2)^5$ | $(-2)^6$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |

**A)** Usa como guía la tabla anterior, y arma una nueva tabla para las potencias de base $-\mathbf{3}$.

**B)** Observa las tablas anteriores y responde: ¿qué puedes decir respecto a la base, el exponente y el resultado?

**Fuente:** elaboración propia.

La alumna completó la tabla de potencias de base $-2$, utilizando el producto reiterado de números enteros (trabajado en temas anteriores). En una hoja aparte, la maestra inclusora le indujo nuevamente a un repaso para resolver la potencia $(-2)^2$, recordando la multiplicación de números enteros trabajada con anterioridad:

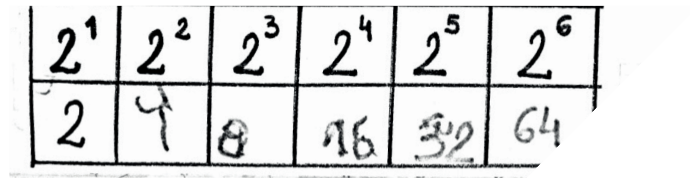
Maestra Inclusora (MI): Recordemos que $2^3$ significa multiplicar 3 veces 2. ¿Qué significa $(-2)^2$?
Alumna (A): Significa multiplicar 2 veces el $-2$
(La maestra escribe en la hoja $(-2)^2$ es $(-2) \cdot (-2)$
MI: ¿Te acuerdas cómo resolvemos $(-2) \cdot (-2)$? Primero multiplicamos los números sin los signos. ¿Cuánto es $2 \cdot 2$ ?
A: Es 4
MI: Recordemos ahora qué pasa con los signos. Teníamos tres casos: "+ y +", "+ y -" y "- y -". ¿Quién gana cuando tenemos "+ y -"?
A: Gana el "-"
MI: ¿Qué pasa cuando tenemos "- y -"?
A: Se hace "+"
MI: Entonces $(-2).(-2)$ es $+4$ porque "- y -" se hace "+"

Para la potencia $(-2)^3$ se procedió de manera análoga: La maestra inclusora escribió que $(-2)^3$ es $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$. Orientó a la alumna a analizar el producto $2 \cdot 2 \cdot 2$ . Por medio de la propiedad asociativa del producto de naturales y el uso de las tablas de multiplicación de la alumna, se arribó a que el resultado es 8. Seguidamente analizaron el signo:

MI: ¿Cuánto da "- y -"?
A: Se hace "+"
MI: ¿Y "+ y -"?
A: El "-" le gana al "+", así que es "-"
MI: ¡Muy bien! El resultado es entonces $-8$

Al igual que en la primera tabla completada, la alumna utilizó el producto reiterado para las primeras potencias. Para los demás casos, la alumna dictó a la maestra el cálculo que debe realizar como si se tratase de números naturales, usando la calculadora. Luego se analizó el signo y se colocaron los resultados en la tabla, que se puede observar en la Figura 4:

**Figura 4.** *Actividad 2 resuelta por Milagros.*




**Fuente:** producción de Milagros.

La actividad A se realizó de la misma manera que las anteriores descriptas.

Para el inciso B, fue necesario orientar a la alumna a observar las tablas, analizar las semejanzas y diferencias entre ellas, para luego enfocar en lo pedido por la consigna. Algunas conclusiones de la alumna fueron:

- “Las dos tablas tienen potencias de base negativa”
- “Cuando el exponente es impar, el resultado es negativo”
- “Cuando el exponente es par, el resultado es positivo”
- “Los signos de los resultados se van turnando”

Por último, se orientó a elaborar algunas conclusiones por medio de la observación y la comparación de la tabla de la Actividad 1 y las tablas de la Actividad 2. Algunas de ellas fueron:

- “Cuando la base es positiva, los resultados son positivos siempre”
- “Cuando la base en negativa, los números se van turnando”

## Resultados

En relación con los apoyos construidos e implementados para la eliminación de las barreras didácticas detectadas se puede decir que: las consignas y recursos en tamaño adaptado han permitido que Milagros pueda completar por sí misma las tablas de potencias propuestas en las actividades y haya iniciado un registro propio con un potencial de mejora en posteriores actividades.

Resultó útil el uso de las tablas de multiplicar para realizar las actividades, recurso utilizado con anterioridad en el aula, dada la memoria de corto plazo de la alumna. Sin embargo, a medida que los exponentes iban creciendo, se evidenciaron límites en este recurso; por lo que el uso de la calculadora fue fundamental para economizar los tiempos de resolución y seguir avanzando en los objetivos planteados. Fue fundamental el trabajo de apoyo matemático de la maestra inclusora y su compromiso en entregar las tareas de la alumna, como así también un cambio en las formas de sus intervenciones a lo largo del tiempo.

Siguiendo lo anterior y rescatando el trabajo áulico con todos sus actores, se evidenció un avance significativo en relación a los lineamientos expresados en el plan de trabajo presentado a principio del ciclo lectivo para alumna incluida, tanto en el contenido como en el tipo de actividad matemática, lo que se puede distinguir en sus logros: reconocimiento de números enteros en un intervalo de -100 a 100, elaboración de conjeturas y argumentos, uso de conceptos matemáticos anteriores como herramientas para construir nuevos.

A su vez hubieron aspectos que aún se constituyen como barreras y obligan su reflexión para pensar en apoyos que tiendan a eliminarlas: los tiempos escolares no ayudaron a que la alumna tenga un registro propio de sus producciones en su totalidad, dada su discapacidad motriz; imposibilitando que pudiese "volver" siempre sobre sus tareas escritas, lo cual nos lleva a repensar el trabajo áulico utilizando computadora para registrar las tareas, y la motricidad necesaria para el manejo sea menor que la demandada por un registro material.

Las intervenciones continuas y guiadas y la dependencia generada de la alumna con su maestra, provocó obstáculos didácticos en el aprendizaje dadas algunas intervenciones erróneas de la disciplina matemática, restringiendo un mayor desarrollo cognitivo posible de alcanzar por parte de la alumna.

## Conclusiones

Los resultados de esta experiencia muestran que los alumnos con discapacidad y sin discapacidad pueden aprender por medio de las mismas actividades, un contenido matemático. Los apoyos construidos potenciaron los modos de aprender de Milagros, evidenciando grandes avances en relación a los esperados al inicio del año escolar.

Se considera que el modelo de Educación Inclusiva es uno apropiado para garantizar el derecho a la educación de todos los alumnos sin discriminación y en igualdad de oportunidades. Por ello, se torna necesaria la construcción de espacios de formación de docentes con un enfoque inclusivo.

Se deja evidenciada la importancia del dialogo y el trabajo colaborativo entre los docentes de matemática y los de educación especial, y la necesidad de avanzar a la construcción de un dialogo interdisciplinar común con el fin de brindar efectivamente la educación de calidad a todos que promueve la Educación Inclusiva.

Es una tarea compleja que responsabiliza a seguir investigando y construir conocimiento didáctico, entendiendo éste, como el único y real camino hacia la inclusión y la igualdad de todos los estudiantes.

## Agradecimientos

Se agradece a la institución educativa por abrir sus puertas al equipo del proyecto de investigación y brindar el espacio para que la propuesta áulica se llevara a cabo.

Asimismo, al tutor de Milagros, por la autorización dada para que se trabajara con ella, la disposición a contestar entrevistas y colaborar con la realización de las actividades en el hogar.

A la maestra inclusora, por posibilitar el trabajo colaborativo y estar abierta a sugerencias con el fin de brindar una mejor educación a Milagros.

A Milagros, por su calidez, sus ganas de superarse y por haber permitido al equipo vivir la inclusión de cerca.

## Referencias bibliográficas

Alagia, H., Bressan, A. & Sadovsky, P. (2005). *Reflexiones teóricas para la Educación Matemática*. Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

Arias, F. (2006). *El proyecto de investigación. Introducción a la metodología científica.* Caracas, Venezuela: Episteme.

Broitman, C., Cobeñas, P., Dibene, L., Escobar, M., Falco, L., González, E., Lemos, A. P., Miranda, L., Sancha, I., Goñi, M. & Grimaldi, V. (2018, 19 – 22 de septiembre). *¿Qué matemáticas escolares viven hoy en escuelas de educación especial?* [ponencia]. Terceras Jornadas de Enseñanza, Capacitación e Investigación en Ciencias Naturales y Matemática, La Plata, Argentina.

Cantoral, R., Montiel, G., & Reyes-Gasperini, D. (2015). Análisis del discurso Matemático Escolar en los libros de texto, una mirada desde la Teoría Socioepestemológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 8, 9 – 28.

Cid, E. (2015). *Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números enteros* [tesis de doctorado no publicada, Universidad de Zaragoza]. Repositorio de la Universidad de Zaragoza – Zaguan.

Cobeñas, P., Fernández, C., Galeazzi, M., Noziglia, J., Santucciones, G. & Schnek, A. (2017). *Educación inclusiva y de calidad: un derecho de todos*. La Plata, Argentina: COPIDIS

Cobeñas, P., Grimaldi, V., Broitman, C., Sancha, I. & Escobar, M. (Coords.). (2021). *La enseñanza de las matemáticas a alumnos con discapacidad*. La Plata, Argentina: EDULP.

Congreso de la República Argentina (2006, 14 de diciembre). Ley 26.206. *Por la cual se expide la Ley de Educación Nacional y se dictan otras disposiciones.* https:// www.fmmeducacion.com.ar/wp-content/uploads/2018/03/Ley-26026-deEducacion-Nacional.pdf

Grimaldi, V. & Cobeñas, P. (2018). *Construyendo una educación inclusiva II. Aportes para repensar la enseñanza en escuelas para todos*. La Plata, Argentina: Asociación Azul.

Martínez, Y. (2018). *Errores y dificultades que presentan los alumnos de 2do año de secundaria en la resolución de actividades con números enteros* [tesina de licenciatura no publicada, Universidad Tecnológica Nacional]. Repositorio Institucional Abierto.

Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología de la provincia de Salta (s.f.). Resolución N° 8568/10. *Por la cual se aprueba el Diseño Curricular para Educación Primaria.* http://www.edusalta.gov.ar/index.php/docman/normativa-educativa/disenos-curriculares/diseno-curricular-para-educacion-primaria/1793-diseno-curricular-para-educacion-primaria/file

Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología de la provincia de Salta (2012, 25 de enero). Resolución N° 059. *Por la cual se aprueba el Diseño Curricular para Educación Secundaria.* http://www.edusalta.gov.ar/index.php/docentes/normativa-educativa/disenos-curriculares/diseno-curricular-para-educacion-secundaria/1277-diseno-curricular-para-educacion-secundaria-1/file

Organización de Naciones Unidas (2006). *Convención por los Derechos de las Personas con Discapacidad y su Protocolo Facultativo.* http://www.un.org/esa/ socdev/enable/documents/tccconvs.pdf

Panizza, M. (comp.). (2003). *Enseñar matemática en el nivel inicial y el primer ciclo de la EGB*. Buenos Aires: Paidós.

Tamayo y Tamayo, M. (2000). *El proceso de la investigación científica*. México: Limusa.

# PRODUÇÃO DA FARINHA DE MANDIOCA EM UMA COMUNIDADE QUILOMBOLA: POSSIBILIDADES PARA A MATEMÁTICA ESCOLAR

# CASSAVA FLOUR PRODUCTION IN A QUILOMBOLA COMMUNITY: POSSIBILITIES FOR SCHOOL MATHEMATICS

**Romaro Antonio Silva, José Roberto Linhares de Mattos, Pedro Manuel Baptista Palhares**
**Instituto Federal do Amapá. (Brasil), Universidade Federal Fluminense. (Brasil), Universidade do Minho / Instituto de Educação. (Portugal)**
romaro.silva@ifap.edu.br, jrlinhares@gmail.com, palhares@ie.uminho.pt

## Resumo
Este trabalho traz um estudo do processo ancestral da produção da farinha de mandioca, na Comunidade Remanescente de Quilombos, São João do Matapi, no estado brasileiro do Amapá, principal fonte de economia da comunidade. O objetivo foi investigar técnicas adotadas por este grupo sociocultural em um possível diálogo com a matemática escolarizada. A metodologia utilizada teve abordagem qualitativa e os instrumentos usados foram observação participante, questionários e revisão bibliográfica. Os resultados revelam a adoção de práticas matemáticas presentes no uso de medidas e cálculos financeiros, que podem ser utilizados na relação com o ensino e a aprendizagem da matemática escolar.

**Palavras-chave:** Etnomatemática, agricultura familiar, comunidade quilombola

## Abstract
This work presents a study of cassava flour production  ancestral process, in the Remaining Community of Quilombo, São João do Matapi, in the Brazilian state of Amapá. Cassava flour is the main source of economy for the community. The aim was to investigate techniques adopted by this socio-cultural group in a possible dialogue with school mathematics. The methodology used had a qualitative approach and the instruments used were participant observation, questionnaires and bibliographic review. The results reveal the adoption of mathematical practices present in the use of measures and financial calculations, which can be used in relation to school mathematics teaching and learning.

**Keywords:** ethno-mathematics, family farming, quilombola community

## Introdução

Nas últimas cinco décadas, aumentaram significativamente na América os estudos e pesquisas que versam sobre a Educação Matemática. Dentro deles, destaca-se a crescente presença do Programa Etnomatemática, que tem seus estudos fundamentados no processo de valorização cultural e na capacidade de cada grupo social utilizar elementos matemáticos mesmo sem conhecimentos acadêmicos, pautados exclusivamente na necessidade de desenvolvimento do grupo.

Os estudos e a definição do termo Etnomatemática surgiram, mais precisamente, na segunda metade da década de 70 e Ubiratan D'Ambrosio reforça a ideia supramencionada ao afirmar que: "Etnomatemática é um programa que visa explicar os processos de geração, organização e transmissão de conhecimentos em diversos sistemas culturais e as forças interativas que agem no e entre os três processos" (D'Ambrosio, 1993, p. 7). Cabe destacar que o termo surge da junção de *etno* (o ambiente natural, social, cultural e imaginário) + *matema* (de explicar, aprender, conhecer, lidar com) + *tica* (modos, estilos, artes, técnicas).

O estado do Amapá é uma das 27 unidades federativas do Brasil, e, está localizado na região Amazônica no extremo norte do país, dividido por 16 municípios e que chama atenção pela diversidade sócio cultural presente em mais de cento e cinquenta comunidades remanescentes de quilombos, especialmente pela diversidade na produção de artesanato, na cultura musical e nas técnicas da agricultura familiar.

A comunidade quilombola de São José do Matapi está localizada no município de Macapá (capital do estado), principal centro econômico do estado, no distrito do Coração, que divide as limitações geográficas entre Macapá e Santana. A comunidade está localizada na margem esquerda do rio Matapi, principal afluente do rio Amazonas e fonte de renda através da pesca e da navegação para os amazônidas.

Segundo Custódio, Souza e Almeida (2019): Atualmente a comunidade é formada por 30 famílias, todos com parentescos consanguíneos e o território, que está próximo ao perímetro urbano, apresenta um contexto de conflitos resultante do crescimento desordenado de áreas urbanas do entorno, haja vista, que a comunidade sofre os efeitos de uma potencialização do processo de segregação espacial, pois é uma problemática resultante da falta de planejamento urbano em áreas em expansão no contexto urbano-rural.

Neste trabalho há uma relação presente nos conhecimentos sistematizados pela comunidade São José do Matapi, construída especialmente a partir das necessidades de sobrevivência e de vivência em grupo dos sujeitos que pertencem à comunidade. Destaca-se a relevância de tópicos para uma abordagem nas escolas regulares no processo de ensino, valendo-se de questões presentes no dia a dia dos trabalhadores rurais na comunidade, bem como nos procedimentos utilizados na solução de questões práticas, e aplicadas no cotidiano por eles.

O objetivo deste trabalho consiste em investigar técnicas adotadas por este grupo sociocultural em um possível diálogo com a matemática escolarizada.

Acredita-se que o uso de metodologias que levem em consideração o espaço e a problemática envolvida na vida dos alunos, além de auxiliar no processo de preservação de conhecimentos tradicionais, possibilitam uma melhor relação entre o ensino e a aprendizagem dos educandos.

## Fundamentação teórica

O presente trabalho vai incidir sobre três aspectos de maior enfoque nos estudos aqui apresentados, sendo eles: 1) Comunidades remanescentes de quilombos, 2) Comunidade São José do Matapi e 3) Educação Matemática com foco na Etnomatemática.

***Comunidades remanescentes de quilombos***

O termo "comunidades remanescentes de quilombos" surge de um movimento social de reorganização dos negros, oriundos de duas importantes ações que envolvem a formação política do Brasil, que são a fuga da escravidão e a posse de terras para a agricultura familiar com políticas da reforma agrária (que vivem sendo pautas constantes no Congresso Nacional até os dias de hoje) que estiveram presentes no país no século XIX, XX e a reforma agrária ainda presente na contemporaneidade.

Alguns autores, dentre eles destacamos Moura (2014), Guimarães (1988), Gomes (2015), Schwartz (1994) e Leite (2003, 2005), têm atuado no sentido de conceituar o movimento quilombola no Brasil, explicitar suas raízes e evidenciar a necessidade de valorização desses sujeitos. Os grupos remanescentes de quilombos, ou comunidades quilombolas, comumente como são chamadas, foram protagonistas de diversas discussões na contemporaneidade e representam sinônimos de luta e resistência no Brasil, caracterizando-se por grupos étnicos, constituídos por uma população predominantemente negra. De acordo com (Guimarães, 1988), esses grupos estão relacionados à cultura e espaços territoriais afro-brasileiros, onde a terminologia é oriunda do "ochilombo".

Em análise das informações destacadas por Ribeiro (1995), a história dos primeiros negros em território Brasileiro os apresenta inicialmente provenientes de três grandes grupos étnicos, muito embora saibamos que existiam negros oriundos de todas as regiões do continente Africano. Assim sendo, o destaque do tráfico se concentrou em maior número sobre os Yorubas oriundos da Gâmbia, Serra Leoa, Costa da Malagueta e Costa do Marfim, os Africanos Islamizados como os Peuhl, os Mandingas e os Haussas do norte da Nigéria e os das tribos Bantu do grupo congo-angolês que, atualmente, vivem na região correspondente a Moçambique.

Ainda em observação aos relatos de Ribeiro (1995), esse movimento teve seu marco, especialmente com o processo de colonização brasileira, onde a coroa lusitana buscou possibilidades de ações econômicas que lhe pudessem estabelecer lucros. Observa-se, que essa discussão é apresentada com marco temporal em 1530 e com grande fluxo de tráfico de negros entre os séculos XVI e XIX. Neste sentido, se considerarmos que um país tão pequeno como Portugal, não dispusesse de mão de obra suficiente para atuar com a cana-de-açúcar, café, exploração de ouro e outros recursos naturais em quantidade suficiente para aumentar o lucro da Coroa avalia-se que a alternativa estava em buscar mão de obra a baixo custo em outras regiões. Neste contexto, a escravidão surge como uma alternativa para ampliar os lucros, com a utilização dos negros do continente africano e dos povos indígenas do Brasil, esta segunda com o aval da Igreja Católica.

Nesta mesma concepção (Lacerda, 2013) nos chama atenção, acerca especialmente do processo de escravidão dos negros, que eram retirados dos seus lares e trazidos para o Brasil, com o único intuito de suprir a mão de obra necessária para levar riquezas à coroa portuguesa, considerando a frustração com o processo de colonização dos indígenas, que naquele momento estavam protegidos pela igreja, como nos apontam as discussões apresentadas por (Treccani, 2006, p. 30).

Sendo assim, é possível compreender que os espaços denominados quilombos, carregam consigo uma história pautada na luta, na resistência, na formação e reformação social considerando todo o processo de captura desses indivíduos para o trabalho escravo no Brasil. Nota-se um cenário de constante crueldade e desumanidade, nota-se que foram mais de três séculos neste processo, que representa uma página triste da história tanto do Brasil como especialmente de Portugal.

Quando se trata de estudos envolvidos na etnicidade, tais grupos sociais carregam consigo uma bagagem presente na forma, nas técnicas, na arte e nos modos de vidas e que por séculos foram marcadas pela negação social, sendo assim, existem infinitas possibilidades que necessitam ser evidenciadas para a comunidade científica e que podem ser uma ponte para discussões de formas de ensino do conhecimento escolarizado, especialmente no caso da matemática, valendo-se do embasamento possível pela etnomatemática.

***Comunidade Quilombola de São José do Matapi: um elo entre Brasil e África***

A comunidade quilombola de São José do Matapi, embora seja de fato quilombola, infelizmente, ainda não é de direito, isso porque no Brasil, por meio de atos regulatórios do Instituto Nacional de Colonização e Reforma Agrária - Incra, há uma série de etapas e procedimentos para que a população tenha a posse da terra como comunidade quilombola. O território é reconhecido e certificado, mas ainda não possui o título definitivo de posse do território, pois espera pela demarcação da área que ainda está em processo junto ao INCRA, contudo, há uma demarcação provisória da área, cuja origem remonta à década de 1990. Aqui, nas observações dos pesquisadores, destacamos os longos anos de luta para que essas comunidades tenham seus espaços preservados e demarcados.

Ainda em observância aos estudos de Custódio, Souza e Almeida (2019), que versam sobre as comunidades quilombolas no Amapá, algumas peculiaridades sobre a Comunidade de São José do Matapi nos chamam atenção: Sobre as manifestações religiosas e culturais, é importante destacar que a comunidade São José do Matapi sofreu ao longo do tempo uma descaracterização em função das transformações ocorridas no seu entorno (ocupação desordenada, assentamentos e instalação de empreendimentos), contudo, há uma busca em (re)construir os laços culturais, ancoradas principalmente na memória dos comunitários mais idosos e resgatados pelos mais jovens como um importante elemento de suas identidades coletivas (Custódio, Souza & Almeida, 2019, p. 14).

Os dados acima reforçam a concepção de uma gritante necessidade de os ambientes educacionais atuarem no sentido da preservação e da valorização cultural desses povos, uma vez que o crescimento desenfreado nas diversas regiões do país tem contribuído para o desaparecimento de algumas culturas ou até mesmos grupos minoritários, como algumas comunidades indígenas.

***Etnomatemática no contexto da educação***

Diversos autores têm atuado no sentido de evidenciar a relevância da linha de pesquisa em Etnomatemática como uma proposta facilitadora das relações de ensino aprendizagem, neste sentido, este trabalho está fundamentado especialmente nas contribuições de D'Ambrosio (1986, 1987, 1993, 2003), Costa, Dias e Palhares (2019), Mattos (2020), Knijnik (2006) e, por fim, mas não menos importante, nas relevantes contribuições de Gerdes (1991, 2002, 2010).

Muito embora, ainda existam significativas divergências sobre a terminologia e sua aplicação, todos os autores citados atuam ou atuaram no sentido de trazer aspectos culturais e sociais de grupos específicos, que contenham a matemática no cotidiano para os currículos escolares, tal possibilidade culmina na construção de uma matemática de fora para dentro da escola, valorizando cada grupo social e contribuindo para um ensino da matemática diverso, múltiplo e inclusivo.

Relatos evidenciam que Ubiratan D'Ambrosio é considerado o idealizador da expressão "Etnomatemática" com sua origem no final da década de 70, logo após o Movimento da Matemática Moderna. Para D'Ambrosio (2009): Indivíduos e povos têm, ao longo de suas existências e ao longo da história, criado e desenvolvido instrumentos de reflexão, instrumentos materiais e intelectuais [que chamo ***ticas***] para explicar, entender, conhecer, aprender para saber e fazer [ que chamo de ***matema***] como resposta a necessidades de sobrevivência e de transcendência em diferentes ambientes naturais, sociais e culturais [que chamo de **etnos**] (D'Ambrosio, 2009, p. 60).

Assim, validam-se todos os debates antes colocados neste trabalho, especialmente reverberando a necessidade dos ambientes educacionais adotarem um currículo regionalizado que insira o ensino da matemática de fora para dentro da comunidade escolar. Costa, Dias e Palhares (2019) em um estudo realizado com o grupo étnico Nyaneka-nkhumbi do sudoeste de Angola reforçam a concepção sobre a importância da Etnomatemática, seguindo o seguinte fluxo, primeiro, "descongelar" a matemática "escondida", isto é, identificá-la, desmistificá-la para ser vista e ser conhecida e depois poderá ser usada para o contexto de sala de aula. Aqui, reforça-se os pilares que substanciam esta pesquisa.

Gerdes (2010, p.142), em uma percepção mais contemporânea, nos traz a seguinte reflexão:

> A etnomatemática é a área de investigação que estuda as multifacetadas relações e interconexões entre ideias matemáticas e outros elementos e constituintes culturais, como a língua, a arte, o artesanato, a construção e a educação. É a área de investigação que estuda a influência de fatores culturais sobre o ensino e a aprendizagem da matemática (Gerdes, 2010, p.142).

As contribuições de Gerdes coadunam com estudos realizados por Knijnik (2006, p.148), ao utilizar o conceito etnomatemático para relatar as atividades realizadas por agricultores rurais em um acampamento do Movimento Sem Terra - MST, onde ela destaca que:

> […] investigação das tradições, práticas e concepções matemáticas de um grupo social subordinado (quanto ao volume e composição de capital social e econômico) e o trabalho pedagógico que se desenvolve com o objetivo de que o grupo interprete e decodifique seu conhecimento, adquira o conhecimento produzido pela matemática acadêmica e estabeleça comparações entre o seu conhecimento, analisando as relações de poder envolvidas no uso destes dois saberes (Knijnik, 2006, p.148).

Frente ao exposto, destaca-se que o foco desta pesquisa está em trazer para a seara do debate acadêmico, aspectos etnomatemáticos utilizados na produção da farinha da mandioca e consequentemente indagar e instigar o uso dos termos para o ensino da matemática escolarizada.

## Aspectos metodológicos

Os dados aqui apresentados compõem uma pesquisa de campo realizada com profissionais da educação e lideranças quilombolas do estado do Amapá, parte de um projeto macro de doutoramento, no qual os pesquisadores analisaram os modos de vida e aplicaram questionários e entrevistas a 14 membros da comunidade São José do Matapi.

A pesquisa de campo foi conduzida, de acordo com Marconi e Lakatos (1996) e o desenvolvimento da pesquisa se deu em etapas, sendo elas:

***Primeira etapa***

Um estudo do contexto regional sobre as comunidades quilombolas e a realidade da comunidade do São José do Matapi.

***Segunda etapa***

Visitas a comunidades, registros através de fotos e vídeos sobre o processo de produção da farinha e aplicação de um questionário aos moradores da comunidade com o intuito de compreender um pouco mais sobre a cultura e a história local.

***Terceira etapa***

Tabulação e divulgação dos dados para a comunidade científica com base no método observacional em que foram verificados diversos aspectos presentes nesse processo produtivo como medidas convencionais e não convencionais utilizadas oportunamente. Os resultados lincam a possibilidade de uma relação etnomatemática com conhecimentos prévios de álgebra utilizados para resolução de problemas práticos, conceitos e aspectos geométricos e suas utilidades, além de outros que possam estar relacionados com a utilização da matemática escolar na produção da farinha.

Para Mattos (2020), faz-se importante realizar uma reflexão sobre a condução das pesquisas, alguns aspectos que podem inviabilizar algumas pesquisas e, portanto, devem ser considerados no contexto do desenvolvimento da pesquisa.

Desenvolver uma pesquisa envolve procedimentos com os quais o pesquisador assume seu compromisso com a veracidade, credibilidade e confiabilidade para com os resultados encontrados. Envolve, ainda, o planejamento minucioso de um projeto de pesquisa com o qual o pesquisador se orientará, com o rigor necessário, para a implementação da investigação (Mattos, 2020, p. 131).

Diante das considerações apresentadas por Mattos (2020), destacamos nesta pesquisa um cenário que, embora ocupe um espaço secundário nas principais discussões educacionais, representa grupos sociais que estão em constante resistência e na luta por melhores condições de ensino. Especialmente, um ensino que leve em consideração a forma de vida, respeitando seus modos, costumes, crenças e pautando tais temáticas no currículo escolar.

## Resultados encontrados

A vivência na comunidade remanescente de quilombos São José do Matapi permitiu o acompanhamento do processo da produção da farinha e uma análise da realidade sociocultural das famílias que vivem na região. Nos resultados, optou-se pela descrição de acordo com a ordem cronológica da produção da farinha, terminando com uma análise da realidade das famílias, ao todo 18 membros da comunidade remanescentes de quilombo em São José do Matapi.

A produção de farinha se inicia com o plantio das mandiocas, como a produção é uma produção de pequeno porte, geralmente, a fazem em seus quintais ou em pequenas áreas. O plantio ou *tarefa,* como eles denominam, é realizado geralmente pelos membros das famílias que cuidam até ao período da colheita. Cabe evidenciar que existem vários tipos de mandioca como: Farias, Pai-Lourenço, Curuçarí, Santo Antônio, Anta, Pratinha, Picuí, etc. Todas são utilizadas na produção de farinha e a maioria tem seus nomes regionalizados.

Já neste processo inicial, ficam evidenciados alguns aspectos etnomatemáticos na produção da mandioca, seja no espaçamento utilizado de dois passos para plantar cada galho da mandioca, seja nos artefatos utilizados para a execução da tarefa, conforme fica evidenciado na Figura 1 com o cesto com os galhos que são plantados.

**Figura 1.** *Plantio da Mandioca.*

**Fonte**: acervo dos autores.

Um dos aspectos mais interessantes diz respeito ao sistema de medidas não convencionais utilizado na produção de farinha. Uma das medidas utilizadas para medir as áreas de plantação de mandioca é a "tarefa", de acordo com outro entrevistado "*uma tarefa dá cerca de 2.500 metros quadrados*". Outra medida não convencional utilizada é denominada "braça", ainda de acordo com o entrevistado: *"uma braça é quando colocamos os dois braços abertos para medir uma área"*, nesse sentido, uma braça corresponde a cerca de 2 metros, tal sistema de medida pode ser usado na sala de aula como uma possibilidade para melhoria do ensino.

Posteriormente, dependendo do período do ano e podendo variar de 8 a 18 meses para o início da colheita das raízes que seguem para o processamento e, consequentemente, passa pelas seguintes etapas: coletar, lavar; descascar; triturar; prensar e torrar.

Antigamente a mandioca era ralada manualmente em um ralo, porém atualmente é utilizado um equipamento denominado catitu (Figura 2), uma espécie de equipamento acionado por motor ou alavanca manual ou automático, que gira em alta rotação, fazendo com que as serrilhas de aço ralem a mandioca nelas pressionada. Na comunidade, todos os observados são de forma manual.

**Figura 2.** *Catitu usado para ralar a mandioca.*

**Fonte:** Registro dos autores.

Outro aspecto da produção diz respeito à utilização de um instrumento denominado tipiti (Figura 3), usado para prensar a massa de mandioca, o líquido escorrido, após fervido é chamado de tucupi, e a massa seca segue para ser torrada no forno. De acordo com um dos quilombolas entrevistados: *"Um tipiti cabe mais ou menos uns 10 litros de massa de mandioca".* Para utilizar o tipiti deve-se posicionar ele em um suporte que fique no alto, após adicionar-se a massa da mandioca, o agricultor "puxa para baixo", de forma a esticar o utensílio, que devido a forma como é trançado, permite espremer a massa contida dentro dele.

**Figura 3.** *Tipiti produzido na comunidade.*

**Fonte:** acervo dos autores.

De acordo com as entrevistas, são necessários de 3 dias a uma semana para uma "boa produção de farinha". Os principais objetos utilizados na produção são: raspadores, facas, bacias, tipiti, prensas, peneiras, ralo, forno etc. (Figura 4).

**Figura 4.** *Torrando a farinha.*

**Fonte:** acervo dos autores.

A observação no período, e levando em consideração os dados dos entrevistados, permite destacar que a duração média do tempo de plantio até à colheita é de pelo menos um ano. O tempo para fazer um plantio pode durar de 20 dias até 3 meses, isso porque em alguns casos são realizadas queimadas sistemáticas para então, depois de algumas semanas, preparar a terra e realizar o plantio.

Mais especificamente sobre o cenário social dos entrevistados, por exemplo, os resultados dos questionários aplicados indicam que parte dos agricultores mais experientes possui idade acima de 65 anos, enquanto a maioria dos agricultores entrevistados está na faixa dos 30 anos, o que indica que o maior quantitativo de agricultores é da geração de filhos de agricultores mais antigos na região (se considerarmos especialmente o período de posse da terra por parte dos quilombolas), o que também nos evidencia que, apesar das mudanças regionais e da forte urbanização nas proximidades, parte dos filhos tem ficado nas terras, dando sequência à cultura familiar.

Quanto à escolaridade, 70% dos entrevistados possuem ensino fundamental, muitas vezes incompleto, enquanto 30% possuem ensino médio (de acordo com os entrevistados). Tais dados nos mostram que esses grupos sociais em sua grande maioria, não terminam as fases iniciais da educação básica, a maioria em virtude da necessidade de ajudar na renda familiar precisa abandonar os estudos.

Um dos entrevistados alegou que toda sua família depende diretamente dos rendimentos da agricultura, os demais alegaram que parte da família depende diretamente da agricultura, o que sugere que existem outras fontes de renda na família, alguns possuem empregos de carteira assinada em indústrias próximas ou estão vinculados em algum programa social do governo federal.

Podemos observar que 80% dos entrevistados aprenderam a produzir farinha com seus pais e 20% restantes disseram que aprenderam com avós, sogras e outros. Para fabricação de farinha, verificou-se que os agricultores utilizam uma metodologia que envolve a utilização de mandioca "dura" e "mole" para fabricação de farinha, ou seja, algumas mandiocas são deixadas de molho na água um dia antes da produção, ficando por mais de doze horas para que fiquem moles, enquanto outras são colocadas de molho apenas por algumas horas, permanecendo ainda dura na hora da produção.

Outros sistemas de medida são aqueles relacionados à medida de farinha. São utilizados o litro e o Quilograma (Figura 5). De acordo com outra entrevistada: *"antigamente, para medir o litro a gente usava aquelas latas de óleo de ferro que vinha antigamente... a gente cortava a parte de cima e usava a lata para medir litro de farinha"*.

**Figura 5.** *Medidas de quilograma (à esquerda) e litro (à direita) de farinha.*

**Fonte:** acervo dos autores.

Os agricultores foram questionados sobre a precificação e venda da farinha. De acordo com os entrevistados, o preço do quilograma é vendido por um valor que vai de R$ 5,00 a R$ 6,00. Enquanto o valor do litro varia entre R$ 3,00 e R$ 3,50. Quando vendido no atacado, o valor do saco grande referente a 80 litros varia entre R $240,00 e R$ 280,00. Todos os entrevistados foram unânimes em dizer que o trabalho é pouco valorizado e que, dado o grande trabalho (Figura 6), nem sempre recompensa a atividade de produção de farinha.

**Figura 6.** *Torragem da farinha de mandioca.*

**Fonte:** acervo dos autores.

Aqui, é possível verificar que trabalhos que visem aprofundar a teoria dos grupos étnicos, tanto do ponto de vista teórico quanto empírico, são fundamentais para cada vez mais visibilizamos a memória, a cultura e as práticas sócio-históricas presentes no cotidiano desses grupos, a exemplo da comunidade apresentada.

No que tange ao viés da etnomatemática, é possível destacar que nenhum dos livros disponibilizados no portal do Plano Nacional de Livros Didáticos - PNLD do Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação - FNDE, abordam uma temática que insira os sujeitos das comunidades quilombolas do Amapá no ensino da matemática. Tal proposta, para um país com dimensões continentais como o Brasil, é uma forma excludente de continuar deixando sufocada a história desses sujeitos que foram e ainda são deixados às margens das políticas públicas sociais. Os dados apresentados possibilitam observar a grande relevância cultural presente nas atividades desses povos, nos levam a compreender, e como mencionado por Costa, Dias e Palhares (2019), descongelar, decodificar e divulgar os aspectos matemáticos presentes no cotidiano dessas comunidades.

## Considerações finais

Em linhas gerais, a pesquisa de campo possibilitou a observação de sistemas não convencionais de ensino, unidades de medidas e instrumentos que podem, no dia a dia da sala de aula serem abordados com aspetos matemáticos presentes na comunidade quilombola que poderiam ser incorporados ao currículo escolar. Tais aspectos, conforme relatado, demonstram uma aproximação pelo qual jovens e adultos destas comunidades se apropriam de conceitos matemáticos. Obviamente essa apropriação está relacionada à percepção da prática do uso da matemática e não no campo do conhecimento teórico. Sendo assim, o debate que se propõem a fazer é o uso dessas práticas em sala de aula, como mecanismos de melhorias na relação do ensino e aprendizagem. Frente ao exposto, destacamos o contributo de Ubiratan D'Ambrosio quando destaca sobre a importância de se conhecer a realidade e os saberes dos educandos e questiona como usualmente, na condição de docentes, nos preocupamos ou nos portamos em ensinar matemática.

Segundo D'Ambrosio (2001), caberia, procurar aprender dos alunos a sua matemática - entendida principalmente como maneira de lidar com relações e comparações quantitativas e com as formas espaciais no mundo real e de fazer classificações e inferências.

No campo da educação de jovens e adultos, faz-se importante destacar a gama de conhecimentos que esses sujeitos carregam, na maioria das vezes fruto da interação social e da aprendizagem como forma de sobrevivência em uma sociedade cada vez mais globalizada e excludente.

Diante desta percepção, entende-se que a Etnomatemática tem um papel fundamental para o ensino da matemática, onde além de contribuir para a relação com o conhecimento dito escolarizado, apresenta uma ponte significativa para a valorização da cultura e do empoderamento social, especialmente em grupos minoritários.

Na comunidade São José do Matapi, foi possível através da observação direta de toda cadeia produtiva da farinha da mandioca, perceber que existem na comunidade um conjunto de saberes presentes no modo de ser e fazer dos povos que envolvem aspetos matemáticos, tais como, o uso da braça, do passo, do palmo como possibilidade de contagem para demarcar espaço do plantio da mandioca, há também a tecelagem de bambu para confecção de cestos.

Assim, espera-se que as contribuições de Gerdes (1991, 2002, 2010) e D'Ambrosio (1986, 1987, 2001, 2003) sejam incorporadas em sua plenitude no ensino da matemática. Tal ação, possibilitará um amplo espaço de debate e, consequentemente, a valorização da cultura, do modo de fazer e de viver de diferentes grupos sociais, evidenciando que não é apenas o branco ocidental que é capaz de produzir conhecimento escolarizado para ser multiplicado, ou dividido, nos ambientes escolares.

Aqui, evidenciou-se uma gama de possibilidades para um ensino da matemática pautado na realidade social de um determinado grupo e, ao mesmo tempo, trouxesse importantes reflexões que embasam a revisão conceitual de um material didático não regionalizado para o Brasil. Os dados demonstram a possibilidade de os livros didáticos inserirem a realidade de todos os grupos sociais do país, para que esses livros não continuem a ser um material excludente.

## Referências

Costa, C.; Dias, D. & Palhares, P. (2019). O grupo étnico Nyaneka-nkhumbi: estudo etnomatemático e sua aplicação à educação matemática. *In* Nilza Costa e Susana Ambrósio (Eds.). *Nas Raízes do Imbondeiro: Diálogos com a Educação em Contexto Africano* (pp.79-98). Aveiro: UA Editora.

Custódio, E.S.; Souza, S.R.A. & Almeida, M.D.R. (2021). História, Cultura e Identidade: Olhares sobre comunidades quilombolas no Estado do Amapá. *Revista PUCSP-BR*, 66, 220-254, recuperado de https://revistas.pucsp.br/revph/article/viewFile/43093/pdf. Acesso em 02 jul. 2021.

D'Ambrosio, U. (1986). *Da Realidade à Ação reflexões sobre educação e matemática.* Campinas: Editora da Unicamp.

D'Ambrosio, U. (1987). *Reflexões sobre Etnomatemática.* Grupo Internacional de estudos Etnomatemática.

D'Ambrosio, U. (1993). *Etnomatemática: Arte ou técnica de explicar e conhecer*. 2nd. ed. Editora Ática: São Paulo. (Série Fundamentos).

D'Ambrosio, U. (2001). *Etnomatemática – elo entre as tradições e a modernidade.* Belo Horizonte: Autêntica. (Coleção em Educação Matemática, v. 1).

D'Ambrosio, U. (2003). *Educação Matemática: da Teoria à Prática***.** 10th. ed. Campinas: Papirus.

Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística - IBGE. (2010). *População do estado do Amapá*. Recuperado de ww2.ibge.gov.br/home.

Gerdes, P**.** (1991). *Etnomatemática: cultura, matemática, educação.* Maputo: Instituto Superior Pedagógico.

Gerdes, P. (2002). Sobre a produção de conhecimentos matemáticos em países da África central e austral. *In* Mariana K. L. Ferreira (Ed.). *Idéias Matemáticas de povos culturamente distintos*. São Paulo: Global.

Gerdes, P. (2010). *Geometria dos trançados borá na Amazônia peruana.* São Paulo: Editora Livraria da Física.

Guimarães, C. M. (1988). *A Negação da ordem escravista: quilombos em Minas Gerais no século XVII*. São Paulo: Ícone.

Guimarães, C. M. (2003). *Uma negação da ordem escravista: Quilombos em Minas Gerais no século XVIII*. (Tese inédita de mestrado em História), Belo Horizonte, UFMG.

Gomes, F. S. (2015). *Mocambos e quilombos: uma história do campesinato negro no Brasil*. São Paulo: Claro Enigma.

Knijnik, G. (2006). *Educação Matemática, culturas e conhecimento na luta pela terra.* Santa Cruz do Sul: Edunisc.

Lacerda, A. C. *et al*. (2013). *Economia Brasileira. In* José Marcio Rego, Rosa Maria Marques (Eds.). Colaboração: Rodrigo Antonio M. Serra. 5th. ed. São Paulo: Saraiva.

Leite, I. B. (2003). *Os Quilombos no Brasil: questões conceituais e normativas*. Florianopolis: NEAD. Recuperado de: http://www.nead.org.br/index.php?acao=artigo&id=21.

Marconi, M. D. A. & Lakatos, E. M. (1996). *Técnicas de pesquisa: planejamento e execução de pesquisas, amostragens e técnicas de pesquisas, elaboração, análise e interpretação de dados*. 3th ed. São Paulo: Atlas.

Mattos, S. M. N. (2020). *Conversando sobre metodologia da pesquisa científica.* [recurso eletrônico], Porto Alegre: Editora Fi.

Moura, C. (2014). *Rebeliões da senzala: quilombos, ressureições, guerrilhas*. São Paulo: Anita Garibaldi.

Ribeiro, D. (1995). *O povo brasileiro: a formação e o sentido do Brasil*. São Paulo: Companhia das Letras.

Ribeiro, S.; Palhares, P. & Salinas, M. J. (2017). Estudo etnomatemático sobre danças folclóricas: simetria dos trajes. *In* Luís Menezes, António Ribeiro, Helena Gomes, Ana Patrícia Martins, Fernanda Tavares e Hélia Pinto (Eds.). *Atas do XXVIII Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Lisboa: APM, 231-241.

Schwartz, S. B. (1994). *Quilombos ou Mocambos*. *In* Silva, M. B. N. (Ed.). *Dicionário da história da colonização portuguesa no Brasil.* Lisboa: Verbo.

Souza, F.& Palhares, P. (2016). (Ethno)mathematical tasks in the context of proportional reasoning. *Journal of Mathematics and Culture* 10(3), 101-110.

Treccani, G. (2006). *Terras de Quilombo: caminhos e entraves do processo de titulação*. Belém: SEJU/Programa Raízes.

# O POTENCIAL DO PROJETO DE APRENDIZAGEM ESTATÍSTICO PARA A PROMOÇÃO DA INTERDISCIPLINARIDADE NA EDUCAÇÃO BÁSICA

# THE POTENTIAL OF THE STATISTICAL LEARNING PROJECT FOR PROMOTING INTERDISCIPLINARITY IN BASIC EDUCATION

**Tiago da Silva Gautério, Fernanda Angelo Pereira, Cassio Cristiano Giordano**
**Universidade Federal do Rio Grande. (Brasil)**
prof.tiagogauteriomat@gmail.com, fernandap@id.uff.br, ccgiordano@furg.br

**Resumo**:
Apresentamos resultados de um estudo de caso que buscou evidenciar o potencial do Projeto de Aprendizagem Estatístico (PAE) para a exploração da interdisciplinaridade no ensino de Estatística em duas escolas de Educação Básica brasileiras. Os sujeitos foram cinco professores de diferentes componentes curriculares, que participaram, durante um ano, de um grupo colaborativo de formação continuada, orientados por pesquisadores de uma universidade federal, concretizando suas descobertas na implementação do PAE em suas escolas. A multiplicidade de temas, estratégias de investigação, referenciais teóricos, opções metodológicas, recursos tecnológicos e parcerias, propiciou maior envolvimento e satisfação pessoal, conforme depoimentos tomados em um grupo focal.

**Palavras-chave**: educação estatística, interdisciplinaridade, projeto de aprendizagem estatístico, grupo colaborativo, formação de professores

**Abstract**:
We present the results of a case study, which sought to highlight the potential of the Statistical Learning Project (PAE) for the exploration of interdisciplinarity in the teaching of Statistics in two Brazilian Basic Education schools. The participants were five teachers from different curricular components, who were involved, for one year, in a collaborative group of continuing education, guided by researchers from a federal university. They materialize their discoveries in the implementation of the PAE in their schools. The multiplicity of subjects, research strategies, theoretical frameworks, methodological options, technological resources and partnerships, provided greater involvement and personal satisfaction, according to testimonies taken in a focus group.

**Keywords**: statistical education, interdisciplinarity, statistical learning project, collaborative group, teacher training

## Problemática

A exploração da interdisciplinaridade tem sido um ideal perseguido há décadas na educação brasileira (Fazenda, 2011a). As reformas curriculares recentes, promovidas no final do século passado, como a publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais — PCN (Brasil, 1997, 1998a, 2000), sobretudo os PCN Temas Transversais (Brasil, 1998b), e no início deste, com a publicação da versão definitiva da Base Nacional Comum Curricular – BNCC (Brasil, 2018), procuraram diluir os limites entre as componentes curriculares, mas, sobretudo, promover uma postura investigativa, docente e discente, que amplie sua visão de mundo a partir de experiências educacionais contextualizadas e realistas.

No ano seguinte, o Ministério da Educação publicou mais dois documentos, complementares à BNCC, visando explorar propostas multi, inter e transdisciplinares. O primeiro deles foi: Referenciais Curriculares para a Elaboração de Itinerários Formativos (Brasil, 2019a) apresentando 15 Temas Contemporâneos Transversais – TCT (Brasil, 2019b), a saber: Educação Ambiental; Educação para o Consumo; Trabalho; Educação Financeira; Educação Fiscal; Saúde; Educação Alimentar e Nutricional; Vida familiar e social; Educação para o Trânsito; Educação em Direitos Humanos; Direitos da Criança e do Adolescente; Processo de envelhecimento, respeito e valorização do Idoso; Diversidade Cultural; Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras; Ciência e Tecnologia.

Tal exploração deveria ser realizada em toda a Educação Básica (dos 6 aos 17 anos de idade). O segundo documento era mais específico, voltado exclusivamente para o Ensino Médio (dos 15 aos 17 anos de idade): introduziu os Itinerários Formativos — IF no Ensino Médio. Tais IF deveriam ser oferecidos em todas as quatros áreas desse segmento de ensino: Linguagens e suas Tecnologias; Matemática e suas Tecnologias; Ciências da Natureza e suas Tecnologias; Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, seriam escolhidos pelos estudantes e deveriam, a princípio, contribuir para seu ingresso no mundo do trabalho.

Nesse contexto de reforma curricular, e em meio à pandemia de COVID-19, enfrentando graves problemas de engajamento discente e adaptação ao modelo de ensino remoto, convidamos cinco professores de duas escolas públicas de Ensino Fundamental brasileiro para participar de um processo de formação continuada, em grupo colaborativo, assistidos por pós-graduandos, mestres e doutores de uma universidade federal local. Essa experiência perdurou um ano e, em seus últimos meses, incluiu gestão e desenvolvimento de Projeto de Aprendizagem Estatístico – PAE (Porciúncula, 2022). O registro dessa experiência é objeto deste artigo.

## Marco teórico

Morin (2002a), assevera que nossa civilização desune os objetos entre si e, consequentemente, precisamos estabelecer ligações entre eles, ou seja, religá-los. Segundo esse autor “a separação e a acumulação sem ligar os conhecimentos são privilegiadas em detrimento da organização que liga os conhecimentos” (Morin, 2002a, p. 24). Ao articular conhecimentos particulares, podemos (e, até mesmo, devemos) contextualizá-los. Tais aptidões podem ser desenvolvidas nos processos educacionais, a fim de globalizar os saberes. O sentido de saberes globalizantes ou mesmo “ecologizantes” pode ser concebido como processos que situam conhecimentos, informações ou acontecimentos, de acordo com suas relações com o meio ambiente, onde são considerados aspectos culturais, sociais, econômicos, políticos e naturais (Morin, 2002a). Esses processos nos auxiliam a explicar o que transformar e/ou elucidar, em uma compreensão holística.

Para Fazenda (2011a), a articulação entre diferentes saberes, oriundos de diferentes áreas, não pode ser pensada apenas no nível de integração de conteúdos e métodos, mas também no nível de integração de conhecimentos específicos e parciais, com o objetivo de um conhecer global. Concordamos com Morin (2002a), ao considerar que o ensino disciplinar privilegia a divisão, a fragmentação e a especialização do trabalho. Para ele, a disciplina tende a delimitar e consolidar fronteiras, a própria linguagem, as técnicas que conduzem e utilizam e até as teorias em que se constituem. A organização em componentes curriculares foi concebida junto com a formação das universidades modernas, ainda no século XIX, aprimorando-se ao longo do século XX com o impulso da pesquisa científica (Morin, 2002a).

As fronteiras entre a linguagem e os conceitos disciplinares promovem o isolamento entre eles, se distanciando de problemas que emergem com a sobreposição de disciplinas, pois há questões dentro das próprias disciplinas que precisam de conhecimentos de outras disciplinas para serem compreendidas, como observa Morin:

> Os conhecimentos fragmentados só servem para usos técnicos. Não conseguem conjugar-se para alimentar um pensamento capaz de considerar a situação humana no âmago da vida, na terra, no mundo, e de enfrentar os grandes desafios de nossa época. Não conseguimos integrar nossos conhecimentos para a condução de nossas vidas. (Morin, 2002a, p. 12)

Para Morin (2002a), cada disciplina requer um tipo muito peculiar de análise. As disciplinas precisam ser compreendidas nos conhecimentos que contemplam, nos conceitos enunciados e nos movimentos produzidos por esses saberes, próprios de seu *locus* de cientificidade (Fazenda, 2011a). Para essa autora, essa cientificidade "ganha *status* de interdisciplina no momento em que obriga o professor a rever suas práticas e a redescobrir seus talentos, no momento em que ao movimento da disciplina seu próprio movimento é incorporado" (Fazenda, 2011a, p. 151).

Segundo Fazenda (2011b), a interdisciplinaridade é uma constante no debate educacional, naquilo que tange à organização dos currículos, à forma como ensina, à forma como se aprende e, também, à formação docente. A BNCC enfatiza o compromisso com a formação e o desenvolvimento humano global, em suas dimensões intelectual, física, afetiva, social, ética, moral e simbólica (Brasil, 2018) e delineia ações para firmá-lo. Dentre elas, encontramos as que promovem um ensino que favorecem a construção do conhecimento:

> [...] contextualizar os conteúdos dos componentes curriculares, identificando estratégias para apresentá-los, representá-los, exemplificá-los, conectá-los e torná-los significativos, com base na realidade local e do tempo nos quais as aprendizagens estão situadas; decidir sobre formas de organização interdisciplinar dos componentes curriculares e fortalecer a competência pedagógica das equipes escolares para adotar estratégias mais dinâmicas, interativas e colaborativas em relação à gestão do ensino e da aprendizagem. (Brasil, 2018, p. 16)

A interdisciplinaridade, para Zabala (2002, p. 33), acontece quando há "interação entre duas ou mais disciplinas, que podem implicar transferência de leis de uma disciplina a outra, originando, em alguns casos, um novo corpo disciplinar, como, por exemplo, a bioquímica ou a psicolinguística". Assim, entendemos a interdisciplinaridade como a interação entre os conhecimentos fragmentados disciplinarmente, interseção entre conhecimentos específicos, reciprocidade entre as disciplinas, com base nas concepções de Fazenda (2011a) e Zabala (2002) destacadas nesse texto.

Ao considerar os contextos sociais, econômicos, políticos e escolares existentes na sociedade, há uma série de limitações que podem fazer da ação interdisciplinar um desafio de ousadia. Para Miranda (2008), a interdisciplinaridade permite possibilidades, se adapta ao contexto vivido, convive com a diferença, com a impotência, com a hegemonia e o poder. Assim, se fundamenta na realidade, tal como é, assumindo nuances e singularidades (Miranda, 2008).

Fazenda (2011b, p.10) escreve que a "interdisciplinaridade é uma nova atitude frente à questão do conhecimento, de abertura à compreensão de aspectos ocultos do ato de aprender e dos aparentemente expressos colocando-os em questão". A autora enfatiza que essa prática exige uma profunda imersão no trabalho cotidiano e que é pautada numa ação em movimento, de invenção, de descoberta, de pesquisa e de produção científica. Os problemas da vida real não são compartimentados em disciplinas, para resolvê-los, podemos providenciar um movimento entre as disciplinas de troca e reciprocidade. Nesse sentido, promover a interdisciplinaridade requer um trabalho cooperativo entre estudantes e professores, sem competições, sem rivalidade, mas de forma colaborativa, todos sendo protagonistas do próprio aprendizado e da própria história.

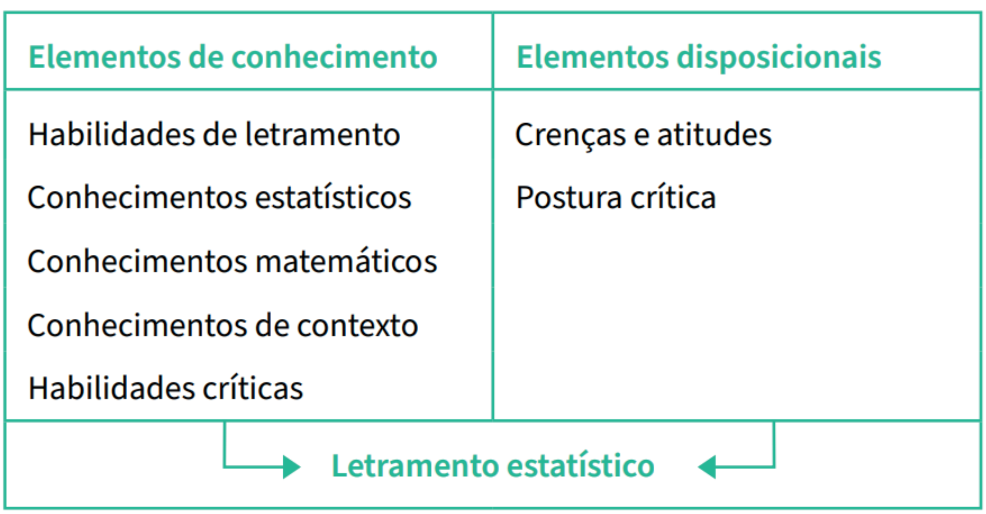
Fazenda (2011a) enfatiza que a sala de aula interdisciplinar é um ambiente que proporciona um movimento evolutivo, ao mesmo tempo reflexivo e histórico. Esse espaço tem origem na coletividade, mas é singular para cada sujeito que dela se propõe a participar. Segundo a autora, dentro do contexto e da atitude interdisciplinar, vem à tona perguntas que servirão de diretrizes às pesquisas, o que implica uma metodologia condizente.

Essa metodologia demanda um olhar mais atento em relação ao conhecimento, um olhar lúdico, segundo essa autora. E uma metodologia capaz de promover um ambiente interdisciplinar, de acordo com Bender (2015), é a da Aprendizagem Baseada em Projetos. Por meio de projetos, é possível viabilizar a interação entre saberes disciplinares, favorecendo o diálogo entre as disciplinas de forma a não contribuir com a fragmentação do conhecimento. O ensino é abordado de forma interativa. O estudante não é um mero receptor de conteúdos, mas protagonista da sua aprendizagem.

Para investigar os assuntos de outras áreas, integrar conceitos, procedimentos e metodologias, é preciso implementar um projeto educacional mais abrangente, com foco no trabalho em equipe. Tais ideias estão em consonância com a proposta de Educação Estatística por meio de projetos de Batanero e Díaz (2011). Para essas autoras, os projetos estatísticos motivam os estudantes, ao contrário da resolução de exercícios descontextualizados, comuns em grande parte dos livros didáticos.

As autoras se amparam na definição de Cobb e Moore (1997), para quem a Estatística é a ciência dos dados e estes não são apenas números, mas sim, números inseridos em contexto. Segundo essas autoras, no trabalho com projetos, a ênfase é dada a tarefas que devem ser realistas, como exemplificado por Giordano (2016), ao explanar sobre letramento estatístico em uma abordagem por meio de projetos. Esse autor considerou tanto os elementos cognitivos quanto os disposicionais do modelo de Gal (2021):

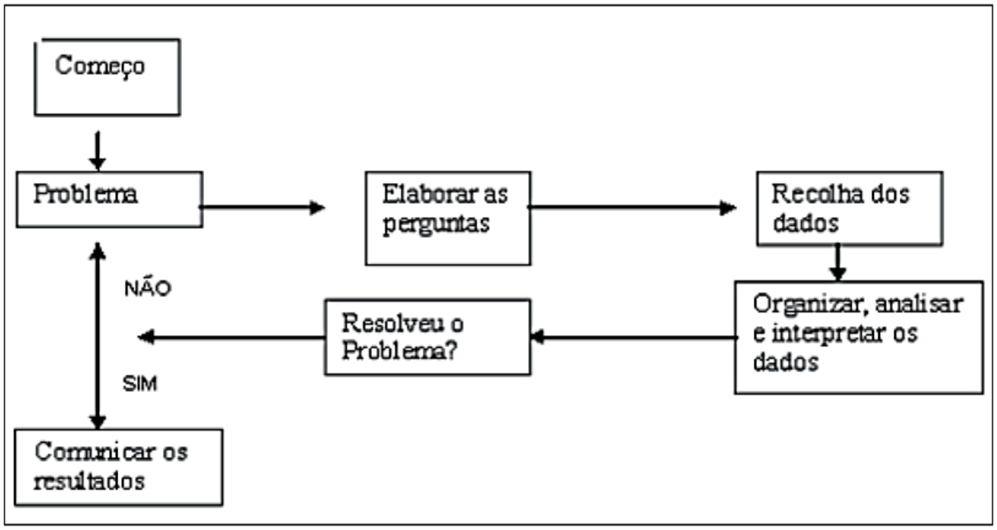
**Figura 1.** *Modelo de letramento estatístico*




**Fonte:** Gal (2021, p. 42, tradução nossa).

Batanero e Díaz (2011) ressaltam que essa abordagem permite a aquisição de competências fundamentais à Educação Básica, tais como a comunicativo-linguística, a matemática, a competência de reconhecimento e interação com o mundo físico, a competência para organizar e apresentar dados, a computacional, as competências socioemocionais, a competência para o exercício da cidadania, para "aprender a aprender", para questionar, identificar e gerenciar as diversas técnicas e estratégias para lidar com uma mesma situação-problema e, por fim, a competência para a conquista de autonomia.

**Figura 2**. *Esquema de desenvolvimento de um projeto*




**Fonte:** Batanero e Diaz (2004, p. 134, tradução nossa)

Giordano (2020, p. 172) observa que os estudantes "reduzem a ansiedade e elevam a autoestima e autoconfiança, tornando-os mais engajados, responsáveis e produtivos". Segundo ele (2020, p. 173), a opção pelo trabalho com projetos em grupo pode enriquecer a experiência didática dos estudantes, "na medida em que o capital cultural de cada um pode, em alguns momentos, colaborar de modo singular para a evolução do trabalho. Basta olhar a diversidade de temas escolhidos por eles em suas pesquisas".

Porciúncula (2022) propõe a implementação de Projetos de Aprendizagem Estatísticos (PAE), cujo desenvolvimento compreende em oito momentos: definição da temática (diante do interesse e das inquietudes dos sujeitos pesquisadores); problematização (levantamento de hipóteses); escolha dos sujeitos da pesquisa; criação de um instrumento de coleta de dados (questionários, formulários); coleta de dados (por meio de uma *survey*); análise dos dados; socialização das informações e avaliação da atividade. Ao desenvolver o PAE, o estudante assume a posição de pesquisador, vivência que pode proporcionar a construção da cidadania para conviver em uma sociedade democrática e esclarecida, informada. Além disso, o estudante tem a oportunidade de desenvolver uma pesquisa estatística de acordo com um tema de seu interesse e poder manipular dados reais que o próprio aluno coletou. Nesse sentido, o processo de aprendizagem se torna significativo e surgem oportunidades para que o Letramento Estatístico possa se desenvolver, empoderando estudantes e professores no contexto educativo e influenciando a vida fora da escola.

No Projeto de Letramento Multimídia Estatístico (LeME), desenvolvido há 10 anos, em Rio Grande – RS, Brasil, essa tem sido a estratégia pedagógica. A proposta é de que estudantes e professores se tornem pesquisadores, investigando temáticas de seu interesse, participando de pesquisas estatísticas, tornando-se protagonistas de sua aprendizagem nesse processo. O LeME busca promover o Letramento Estatístico de jovens, para que possam ler, autônoma e criticamente as informações de cunho estatístico nos mais diversos espaços sociais, a fim de promover uma transformação social e o encorajamento para o desenvolvimento de novas perspectiva de vida.

O PAE (Porciúncula, 2022), visa desenvolver a interdisciplinaridade (Fazenda, 2011a), o letramento estatístico (Gal, 2021), o protagonismo discente e o empoderamento dos jovens, na perspectiva da Análise Exploratória de Dados (Batanero & Díaz, 2011), considerando as peculiaridades da Estatística (Cobb & Moore, 1997). Esse desafio demanda habilidades, competências e conhecimentos docentes muito específicos, que podem ser aprimorados em um processo de formação continuada colaborativa (Schreiber & Porciúncula, 2021).

## Metodologia

Realizamos uma pesquisa qualitativa, do tipo estudo de caso, na perspectiva de Bogdan & Biklen (1994). Os sujeitos envolvidos na pesquisa foram cinco professores, com formação em Língua Portuguesa, História e Matemática, com aulas atribuídas em turmas de 7º e 8º ano do Ensino Fundamental de duas escolas públicas gaúchas. Esses professores foram convidados a integrar o programa LeME - Letramento Multimídia Estatístico, em 2021.

Tal programa, foi criado em 2011 e vem sendo desenvolvido desde 2012, por pesquisadores de uma universidade federal local. Atualmente, ele conta com apoio financeiro e estratégico da Fundação Carlos Chagas (FCC) e do Instituto Itaú Social, tendo por objetivo a promoção da transformação social por meio de práticas pedagógicas lúdicas e contextualizadas.

Seu foco é o desenvolvimento do letramento estatístico de estudantes da Educação Básica, mediado por tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC), instrumentalizando-os para ler, autônoma e criticamente, as informações estatísticas que são veiculadas na sociedade, principalmente pela mídia. Foram analisados registros audiovisuais das reuniões semanais realizadas, no segundo semestre de 2021, com os pesquisadores e professores, em um grupo colaborativo, por meio do Google Meet, dos grupos de tutorias criados via WhatsApp, com pesquisadores, professores e estudantes; das reuniões periódicas também realizadas pelo Google Meet (semanais em uma escola e bissemanais em outra); da gravação das apresentações dos resultados finais dos projetos, por parte dos estudantes e de seus professores; e, por fim, de um Grupo Focal (GF) realizado ao final do trabalho, na primeira quinzena de dezembro.

O foco de análise desse texto são as transcrições das discussões que aconteceram durante o GF. Ao longo do encontro, foram realizadas cerca de dez perguntas e nos atemos apenas aos questionamentos e respostas que apresentavam possíveis características que reforçassem a interdisciplinaridade do PAE. As perguntas que provocaram as respostas dos docentes, alvos de nossa análise foram: Como se sentiram ao longo do desenvolvimento do LeME?; Vocês observaram aspectos interdisciplinares no desenvolvimento do projeto?; Quais conhecimentos docentes vocês consideram que foram mobilizados ou produzidos nesse processo? E além desses conhecimentos que foram mobilizados ou produzidos, quais conhecimentos vocês consideram que precisam ainda serem desenvolvidos, tendo em vista a continuidade do projeto?; Se fosse começar a pesquisa agora, considerando essa experiência interdisciplinar, que parcerias procurarias, em termos de componentes curriculares e de colegas de trabalho?; Você acredita que a Aprendizagem Baseada em Projetos pode contribuir para a otimização do tempo e de recursos inclusive na articulação dos componentes curriculares?

Cada um dos professores pôde dar sua contribuição respondendo todos os questionamentos feitos, fazendo uma avaliação de si, do projeto e de toda a experiência vivida. A seguir apresentaremos apenas os pontos principais que destacamos nas falas dos professores, a fim de que o leitor possa compreender um pouco do que foi viver o LeME para esses professores e assim, compreender o possível potencial interdisciplinar que o PAE se constitui num ambiente de ensino e aprendizagem escolar.

## Resultados

É importante ressaltar o espaço colaborativo proporcionado aos professores desde a formação inicialmente proposta pela equipe técnica do LeME, no qual professores, graduandos, mestres, doutorandos e doutores podiam contribuir com as discussões do grupo nem nenhuma discriminação. As ideias, as dúvidas, os questionamentos e propostas foram debatidos por todos de forma democrática. Tal ambiente de trabalho e de formação pode ter sido uma influência positiva na atuação do professores em relação ao projeto e também à sua vida profissional quando um dos professores menciona que “[...]eu gostei bastante de participar, acho que pra mim foi muito bem inclusive pra pensar na minha atuação enquanto professor na escola e tal, abriu várias outras possibilidades de como trabalhar em sala de aula com os alunos[...]” (fala do Professor 1).

O trabalho colaborativo é uma das características de um ambiente interdisciplinar (Fazenda, 2011a), pois são diferentes áreas do conhecimento, visões de mundo, níveis de formação distintos que promovem uma riqueza singular nas discussões e debates promovidos, que a produção do conhecimento se torna múltipla e ampla, considerando diferentes elementos do que seria se não houvesse essa diversidade.

Em relação à experiência vivida pelos docentes e os relatos transcritos a partir do GF com as respostas dos professores aos questionamentos realizados, observamos que a proposta de trabalho (participação do projeto e implementação do PAE) suscitou, à princípio, insegurança, medo do novo e da aceitação de uma nova metodologia, porém a confiança no apoio oferecido pelos pesquisadores os levou a aceitar o desafio. Os cinco professores envolvidos afirmaram ser esta a sua primeira experiência com projetos estatísticos. O grupo colaborativo se mostrou acolhedor e continente de suas angústias e ansiedades. Por fim, esses professores experimentaram um sentimento de alívio e gratificação, ao verem os trabalhos finais de seus estudantes.

Os relatos dos professores também evidenciaram as possíveis articulações entre as disciplinas curriculares, além de uma aproximação maior entre os professores, com garantia de liberdade de atuação tanto docente quanto discente. Nas palavras de um dos professores envolvidos "Mas não é esse o objetivo, né? (foco somente na Matemática e História) Ele (o PAE) engloba tudo a partir da pesquisa e aí eu acho que é isso, isso que é o legal" e, falando do trabalho já realizado: "as vezes a gente faz e nem se dá por conta né, de quão interdisciplinar que é, mas é, vai pesquisando, vai indo atrás e tem que minimamente saber um pouco das outras áreas, né?" (fala do Professor 2).

Esse mesmo professor concluiu que "o principal do projeto é que eles têm o espaço coletivo de diálogo, de discussão, de pesquisa" (fala do Professor 2). Outra professora observou que no "ensino muito tradicional, era tudo em linha, era isso pra depois aquilo, pouca interdisciplinaridade" (fala do Professor 3). Era um caminho seguro, embora pouco motivador para os estudantes e até mesmo para o professor.

O PAE se mostrou desafiador, exigindo que o professor aceitasse conviver com a incerteza, pois os rumos da pesquisa estavam nas mãos dos estudantes. Segundo ela, "o maior aprendizado foi nos permitir não estar no controle" (fala do Professor 3). Uma terceira professora se mostrou encantada com o resultado final, sobretudo com o engajamento dos estudantes: "como eles se sentem importantes no momento que nos davam mil e uma explicações da pesquisa deles!" (fala do Professor 4). A análise das interações entre professores, estudantes e pesquisadores, evidenciou a apropriação de estratégias de desenvolvimento de pesquisa estatística, do tipo *survey*, tanto por parte dos estudantes (com 12 ou 13 anos de idade) quanto dos professores, com diferentes formações (Língua Portuguesa, História, Ciências, Artes, Matemática, Pedagogia).

Eles se mostraram inseguros, no início, uma vez que não estavam familiarizados com o ciclo investigativo de pesquisa (Batanero & Díaz, 2011). Nesse interim, o grupo colaborativo foi fundamental (Schreiber & Porciúncula, 2021) com apoio cognitivo e emocional, permitindo que esses professores participassem de uma pesquisa piloto antes de levar o PAE (Porciúncula, 2022) para a sala de aula. Na medida em que o trabalho dos alunos foi evoluindo, o engajamento e a confiança dos envolvidos ficou evidente, assim como os avanços em termos dos elementos cognitivos e disposicionais do letramento estatístico (Gal, 2021), em uma perspectiva de trabalho interdisciplinar (Fazenda, 2011a).

As falas destacadas dos professores evidenciam a sua percepção de que a realização de projetos permite aproveitar melhor o tempo e recursos, promove aproximações entre os diferentes componentes curriculares, com retomadas e antecipações de objetos de conhecimento, de forma não linear e complementar, em uma nova perspectiva curricular, mais conectada com a realidade do estudante e próxima das demandas da BNCC.

Percebemos que as afirmações dos professores sobre a valorização do trabalho com outros colegas e a mobilização de projetos que envolvam outras disciplinas caracterizam a atitude necessária para um ambiente interdisciplinar. Tal atitude, de acordo com Fazenda (2011a), emerge a partir da percepção da utilidade, valor e aplicabilidade da interdisciplinaridade, com o objetivo de promover a integração de conhecimentos.

## Conclusões

A opção pelo PAE, em termos de metodologia de ensino, se mostrou acertada, uma vez que permitiu trocas de experiências, reflexões coletivas, articulação entre os diferentes componentes curriculares e discussões interdisciplinares tão necessárias ao processo de formação docente continuada, em uma proposta colaborativa (Schreiber & Porciúncula, 2021), potencializando o ensino da Estatística, uma ciência tão dependente da leitura de mundo e compreensão do contexto (Cobb & Moore, 1997).

A interdisciplinaridade se tornou inevitável nessa abordagem, uma vez que a escolha do tema de investigação foi prerrogativa dos estudantes. Nas escolas atendidas pelo LeME, em 2021, presenciamos ampla diversidade temática, da história dos videogames, do universo à preservação da biodiversidade em nosso planeta, da realidade socioeconômica e cultural do Japão à de Israel. O PAE como estratégia de aprendizagem, permitiu a contextualização dos conteúdos dos componentes curriculares, apresentando-os e representando-os de maneiras não convencionais, exemplificando-os de forma a conectá-los com a vida dos estudantes para assim se tornarem significativos, com base na realidade do lugar e tempo em que as aprendizagens aconteceram.

A multiplicidade de temas, de estratégias de investigação, de escolhas teóricas e metodológicas, de opções de amostragem e coleta de dados, de recursos didáticos e tecnológicos, de parcerias, dentro (estudantes de diferentes turmas, docentes de diferentes áreas, membros da equipe gestora de diferentes cargos) e fora da escola, com instituições que apoiaram e financiaram esse trabalho, propiciou maior motivação, engajamento, envolvimento emocional e satisfação pessoal da comunidade escolar, conforme os depoimentos colhidos nas reuniões do grupo colaborativo, no registro da apresentação final dos estudantes e no grupo focal que finalizou nossa intervenção.

Ao final do semestre, convivendo estreitamente com professores e estudantes das duas escolas públicas que aderiram ao LeME, constatamos no PAE, um grande potencial para o desenvolvimento de ambientes interdisciplinares. A interdisciplinaridade permite ao estudante conectar diferentes TCT e componentes curriculares de forma contextualizada e motivadora, se tornando protagonista na construção do conhecimento. Para o professor, é uma oportunidade de se reinventar, de desconstruir e reconstruir saberes, estabelecendo parcerias, colaborando, compartilhando conhecimentos e sentimentos, de ser humilde, de se desapegar, de ousar.

## Referências bibliográficas

Batanero, C. & Díaz, C. (2011). *Estadística con proyectos*. Universidad de Granada.

Batanero, C. & Díaz, C. (2004). El papel de los proyectos en la enseñanza y aprendizaje de la estadística. En J. Patricio Royo (Ed.), *Aspectos didácticos de las matemáticas* (125-164). Zaragoza, ES: ICE.

Bender, W. N. (2015). *Aprendizagem baseada em projetos: educação diferenciada para o século XXI*. Porto Alegre, BR: Penso Editora.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto, PT: Porto Editora.

Brasil. (1997). Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais*: *Matemática*, v.3 (Ensino Fundamental). Brasília, BR: MEC.

Brasil. (1998a). Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais*: *Matemática (Ensino Fundamental)*. Brasília, BR: MEC.

Brasil. (1998b). Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais - terceiro e quarto ciclos*: *apresentação dos temas transversais / Secretaria de Educação Fundamental*. Brasília, BR: MEC.

Brasil. (2000). Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros curriculares nacionais (Ensino Médio)*. Brasília, BR: MEC.

Brasil. (2018). *Base Nacional Comum Curricular - Educação é a Base: Ensino Médio*. Brasília, BR: Ministério da Educação.

Brasil. (2019a). Ministério da Educação. *Referenciais Curriculares para a Elaboração de Itinerários Formativos*. Brasília, BR: Ministério da Educação.

Brasil. (2019b). Ministério da Educação. *Temas Contemporâneos Transversais na BNCC*: *Contexto Histórico e Pressupostos Pedagógicos.* Brasília, BR: Ministério da Educação.

Cobb, G. W. & Moore, D. (1997). Mathematics, Statistics, and Teaching. *The American Mathematical Monthly*, 104, 801-823.

Fazenda, I. C. A. (2011a). *Integração e interdisciplinaridade no ensino brasileiro: efetividade ou ideologia*. São Paulo, BR: Loyola.

Fazenda, I. C. A. (2011b). Desafios e perspectivas do trabalho interdisciplinar no Ensino Fundamental: contribuições das pesquisas sobre interdisciplinaridade no Brasil: o reconhecimento de um percurso. *Interdisciplinaridade* 1 (1), 10-23. Recuperado de https://revistas.pucsp.br/index.php/interdisciplinaridade/article/view/16202

Gal, I. (2021). Promoting statistical literacy: Challenges and reflections with a Brazilian perspective. En C. Monteiro & L. Carvalho (Ed.), *Temas emergentes em letramento estatístico* (37-59). Pernambuco, BR: UFPE. Recuperado de https://editora.ufpe.br/books/catalog/book/666

Giordano, C. C. (2016). *O desenvolvimento do letramento estatístico por meio de projetos*: *um estudo com alunos do Ensino Médio*. Dissertação (Mestrado) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

Giordano, C. C. (2020). *Concepções sobre Estatística*: um estudo com alunos do Ensino Médio. Tese (Doutorado) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

Miranda, R. G. (2008). Da interdisciplinaridade. En Fazenda, I. C. A. (Ed.), *O que é interdisciplinaridade?* (113-124). São Paulo, BR: Cortez.

Morin, E. (2002). *A cabeça bem-feita: repensar a reforma, reformar o pensamento*. Rio de Janeiro, BR: Bertrand.

Porciúncula, M. (2022). *LeME - Letramento Multimídia Estatístico: Projetos De Aprendizagem Estatísticos na Educação Básica e Superior*. São Paulo, BR: Akademy.

Schreiber, K. P. & Porciúncula, M. (2021). Conhecimentos docentes para ensinar Estatística: olhar do professor sobre os estudantes e as estratégias pedagógicas. *Zetetike*, 29, 1-25. https://doi.org/10.20396/zet.v29i00.8661814

Zabala, A. (2002). *Enfoque globalizador e pensamento complexo: uma proposta para o currículo escolar*. Porto Alegre, BR: Artmed.

# CONFLICTOS SEMIÓTICOS EN EL APRENDIZAJE A DISTANCIA DE NÚMEROS COMPLEJOS EN ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS

# SEMIOTICS CONFLICTS IN UNIVERSITY STUDENTS AT THE DISTANCE LEARNING OF COMPLEX NUMBERS

**Lizzeth Navarro-Ibarra, Omar Cuevas-Salazar, Alan Robles-Aguilar**
**Instituto Tecnológico de Sonora. (México)**
lizzeth.navarro@gmail.com, omar.cuevas@itson.edu.mx, alan.robles@itson.edu.mx

**Resumen**:
El objetivo es determinar los conflictos semióticos en el aprendizaje de la notación de números complejos en estudiantes universitarios. La enseñanza del tema se realizó en modalidad a distancia. El estudio se fundamenta en la teoría de Duval. El enfoque es cualitativo descriptivo. Se diseñó e implementó un instrumento diagnóstico de manera presencial con seis actividades. Participaron 66 estudiantes. Se encontraron dificultades en las conversiones de la notación binómica a la polar y exponencial. También, la transformación de la notación polar al registro en el plano originó conflictos. Los hallazgos permitirán construir en un futuro una propuesta con el uso de tecnología que apoye a los estudiantes en las representaciones de los números complejos.

**Palabras clave**: Evaluación diagnóstica, educación superior, números complejos

**Abstract**:
This paper is aimed at determining the semiotic conflicts present in university students' learning of complex numbers notation. Distance learning was used to teach the subject. The study is based on Duval's theory with a qualitative descriptive approach. An in-person diagnostic instrument with six activities was designed and implemented to a sample of sixty-six students. Difficulties were found in the conversion from binomial to polar and to exponential notations. Additionally, conflicts arose from the transformation of polar notation to their representation on the plane. The findings will allow building a proposal that, with the use of technology, aids students in the representations of complex numbers, in the future.

**Keywords**: diagnostic evaluation, higher education, complex numbers

## Introducción

En la investigación de la matemática educativa surge comúnmente la paradoja cognitiva referente a la incapacidad de gran cantidad de estudiantes para transitar entre registros de representación como mencionan Duval (2006), Hitt (2017) y Dufour (2011). La comprensión del concepto implica la articulación coherente de las diferentes representaciones que entran en juego durante la resolución de problemas (Hitt, 1998). Para D'Amore et al. (2015) el desarrollo cognitivo se integra por las interacciones sociales, es decir, actividades mediadas e interiorizadas por formas culturales. A su vez, el signo lingüístico es un enlace entre las personas y su medio ambiente, además, de conformar un significado, lo que permite que objetos de conocimiento social se trasladen al plano individual.

La dificultad con el pensamiento matemático es, según Duval (2016), la especificidad matemática y lo complejo a nivel cognitivo de realizar una conversión o cambio de representación. Por su parte, Ribeiro et al. (2021) expresan que a través de la coordinación de registros de representación semiótica se produce el aprendizaje de los conceptos matemáticos. En el proceso de conversión de acuerdo con Duval (2016) las dificultades que se presentan se relacionan directamente con la incomprensión conceptual. Esto además limita a los estudiantes a emplear el conocimiento adquirido y es un obstáculo para la construcción de nuevo conocimiento matemático. Consecuentemente se disminuye el avance en la comprensión y aprendizaje de los estudiantes.

En el aprendizaje de los números complejos Randolph y Parraguez (2019) en su estudio encontraron una falta de articulación en las formas de pensamiento, predominando el analítico-aritmético y con ausencia de tránsitos hacia otras representaciones, por ello, concluyen que se presenta una comprensión fragmentada del objeto. También, Carrasco (2017) expone en su trabajo la dificultad de los estudiantes en el tránsito del registro algebraico al geométrico, la cual es una competencia básica para la resolución de problemas y la comprensión del objeto matemático.

En estudio realizado por Antonio (2020), encontró que los estudiantes carecen de la construcción del significado geométrico de los números complejos, además en las operaciones presentan dificultades en la conversión del registro gráfico al algebraico. A su vez, Romero, Quiñonez y Del Castillo (2021) determinaron que los estudiantes confunden los significados de los objetos matemáticos módulo y argumento de números complejos. Por otra parte, los hallazgos de Romero (2013) indican dificultades de los alumnos al representar la parte imaginaria de un número complejo. También, al construir módulos con cantidades negativas y en obtener argumentos omitiendo el cuadrante al que pertenece el número complejo.

Además, el aprendizaje a distancia enfrenta retos como la ausencia de un espacio de interacción exclusivamente educativo y la restricción a lo que puede ser visto y escuchado (Labraña-Vargas et al., 2021). Aunque la interacción en internet tiene pocas reglas, y que en muchas ocasiones no están escritas, la disponibilidad y uso de herramientas fomenta la disciplina de la institución educativa. Esto motivado bajo la premisa de que el estudiante más apegado al comportamiento ideal será el que más aprende (Ayala, 2021).

En contraste, Macías, López, Ramos y Lozada (2020) expone que la enseñanza virtual fomenta la participación activa de los alumnos, el trabajo colaborativo y la comunicación entre los estudiantes. De igual forma, se incrementa la motivación del profesor y del grupo al facilitar una interacción continua que dinamiza la enseñanza. La limitación que enfrenta el trabajo virtual es la deshumanización en la interacción.

Con base en lo anterior, se desarrolla un estudio en la línea de investigación de pensamiento algebraico, planteando como objetivo: determinar los conflictos semióticos en el aprendizaje de la notación de números complejos en estudiantes universitarios.

## Marco teórico

El enfoque teórico en que se fundamenta este estudio son los registros de representación semiótica de Duval (1993). Una definición simple de representación explica el concepto como algo que se pone en lugar de otro algo (Duval, 2016). Las representaciones mentales son las concepciones que tiene un individuo sobre un objeto y sobre lo que se relaciona con él. Por otra parte, las representaciones semióticas son las construcciones de expresiones donde se usan signos bajo un sistema de representación. Es decir, las representaciones semióticas son el medio para expresar las representaciones mentales y que sean visibles o entendibles para otros (Duval, 1993).

La representación de un objeto matemático puede ser mediante lenguaje verbal, símbolos, trazos, figuras, entre otros. No obstante, un objeto matemático no debe ser confundido con su representación ya que esto genera incomprensión y la imposibilidad de usar el concepto matemático fuera de la situación en que se aprendió (Duval, 1993). Las representaciones también comprenden signos y sus asociaciones, cumplen reglas y pueden describir fenómenos. Las representaciones, además de transmitir un concepto mental, su manipulación permite crear nuevo conocimiento (Duval, 2016).

Los registros de representación deben cumplir tres actividades fundamentales. La primera, para que un sistema semiótico pueda considerarse un registro de representación debe cumplir con la formación de una representación identificable. La representación debe incluir un conjunto de rasgos y de datos en el contenido. Esta información depende de las unidades y reglas de integración del mismo registro semiótico donde se genera la representación. La segunda actividad se refiere al tratamiento de una representación que consiste en la transformación de esta representación dentro del mismo registro en que se formó, es decir, una transformación interna. La tercera actividad que debe cumplir una representación es la conversión, y es la transformación de la representación en una representación en otro registro, en ocasiones se conserva la totalidad o solo una parte de la información del registro de partida (Duval, 1993).

En el contexto matemático, la conversión y el tratamiento son fundamentales en la resolución de problemas. El tratamiento es básico para poder elegir la mejor notación de acuerdo con el tipo de situación problema a resolver. En cuanto a la conversión, este es un proceso cognitivo más difícil que el tratamiento, y en la mayoría de los estudiantes es el inicio para lograr la comprensión. El cambio de representación de objetos matemáticos de un sistema semiótico a otro es un impulso cognitivo. En contraste, el tratamiento tiene reglas, asociaciones básicas, la conversión no es simplemente una codificación (Duval, 2006).

## Metodología

La investigación es de tipo cualitativo descriptivo. El trabajo consistió en diseñar e implementar un instrumento diagnóstico para identificar los conflictos semióticos que se presentan con las notaciones de los números complejos. La población a la que se dirigió fueron estudiantes universitarios de la asignatura Álgebra Lineal, donde la instrucción del tema se impartió en modalidad a distancia a través de la plataforma Zoom, con sesiones síncronas y explicación por parte del docente, esto debido a la situación por la pandemia COVID-19.

La unidad de competencia del programa del curso indica desarrollar el manejo de los números complejos con base en sus propiedades utilizando las distintas notaciones. Los temas comprenden la noción y forma de expresar números complejos en diferentes notaciones (de par ordenado, binómica, polar o trigonométrica de Euler o exponencial), así como la conversión entre notaciones. De igual forma, se señala realizar las operaciones de suma, resta, producto y cociente en forma binómica, y producto y cociente para la forma polar (trigonométrica) y exponencial (Euler). La instrucción de estos temas se impartió durante seis sesiones de una hora.

El instrumento se diseñó para determinar los conflictos semióticos en las transformaciones y conversiones de los números complejos en las diferentes representaciones. En el instrumento no se incluyen las operaciones entre números complejos.

La aplicación del instrumento fue de forma presencial y en formato impreso, al permitir las autoridades de salud y académicas del país, el regreso a las aulas físicas. En el estudio participaron 66 estudiantes, los cuales tuvieron una hora para responder el instrumento. A los participantes se les proporcionó lápiz, borrador, regla, transportador y utilizaron su propia calculadora científica.

Para el análisis de las actividades se establecieron indicadores que deberían cumplir cada una de ellas. Se revisó si se desarrolló cada actividad con todos los elementos, de forma parcial o incorrecta. El instrumento se integró de seis actividades independientes en donde se le solicitó al estudiante escribir los números complejos en sus diferentes representaciones, así como realizar tratamientos y conversiones para obtener las notaciones de números complejos (par ordenado, binómica, polar o trigonométrica de Euler o exponencial). El instrumento se redactó en dos hojas de trabajo, en la primera hoja se incluyó solamente la actividad 1. En esta actividad el alumno debe realizar la notación gráfica de números complejos a partir de la forma binómica.

En la hoja de trabajo 2 se integraron las cinco actividades restantes (actividades 2, 3, 4, 5 y 6). En la actividad 2 se solicita la conversión de la representación gráfica a la notación rectangular o binómica. A su vez, en la actividad 3 se indica obtener la representación polar de un número complejo en notación rectangular.

En la actividad 4, la notación exponencial se debe calcular iniciando con un número complejo en representación binómica. Por otra parte, en la actividad 5, se proporciona un número complejo en notación polar y se pide expresarlo en forma rectangular. En la actividad 6 y última, la conversión solicitada es de la notación polar a la representación gráfica.

La hoja de trabajo uno se proporcionó al estudiante y cuando concluyó, se le retiró el documento y se le entregó la hoja de trabajo dos. Este procedimiento se estableció para evitar que el participante observara las representaciones gráficas de los números complejos que se tienen en la hoja de trabajo dos, ya que en la actividad 1 el alumno debe trazar un plano y ubicar pares ordenados de números complejos.

En la actividad 1 se proporciona al estudiante cuatro números complejos en la forma binómica y se le solicita realizar la notación gráfica. Como apoyo al participante se adjuntó a la actividad papel milimétrico con el objetivo de facilitar el trazado de los ejes y la escala (ver Figura 1).

**Figura 1.** *Actividad para realizar la conversión de la representación rectangular a la notación gráfica.*

I. Dados los siguientes números complejos en su representación rectangular, dibuja un plano complejo y representa cada uno de ellos en su notación gráfica:

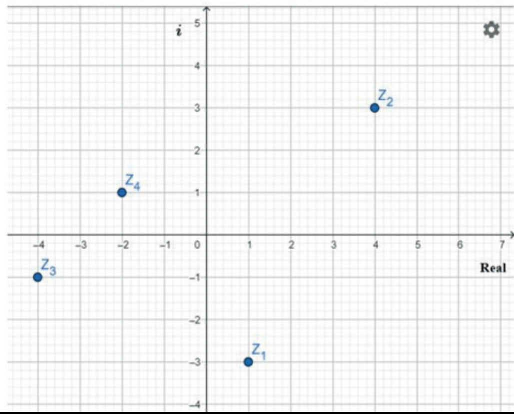
$Z_1 = 3 - 2i$ $\quad$ $Z_2 = -8 - 4i$ $\quad$ $Z_3 = -1 + 6i$ $\quad$ $Z_4 = 9 + 7i$

**Fuente:** elaboración propia.

En la Figura 2 se presenta la segunda actividad la cual muestra números complejos en su representación gráfica y se indica que se obtenga la notación rectangular. Los números complejos están ubicados en pares ordenados con números enteros para evitar confusión al identificarlos.

**Figura 2.** *Actividad para realizar la conversión de la representación gráfica a la notación rectangular.*

II.- Dados los siguientes números complejos en su representación gráfica, escríbelos en su notación rectangular ($z = a \pm bi$).




$Z_1 =$ ______________ $Z_2 =$ ______________

$Z_3 =$ ______________ $Z_4 =$ ______________

**Fuente:** elaboración propia.

En la actividad tres se indica convertir un número complejo de la forma rectangular a la notación polar, utilizando el ángulo en grados. De igual forma, en la actividad cuatro se solicita realizar la conversión de un número complejo de la forma rectangular, pero en este caso sería a la notación exponencial con su correspondiente ángulo en $\pi$ radianes.

Por otro lado, en la actividad cinco, se proporciona un número complejo en la forma polar con el ángulo en grados y se pide convertir a la notación rectangular (ver Figura 3).

**Figura 3.** *Actividades para realizar las conversiones entre notación rectangular, polar y exponencial.*

III.- El número complejo $Z = -3 - 7i$ (representado en forma rectangular), escríbelo en notación polar con el ángulo en grados, en el intervalo de $0° \leq \theta \leq 360°$

IV.- Dado el número complejo en forma rectangular $Z = 2 - 5i$, realiza su representación en forma exponencial con el ángulo en $\pi$ radianes, en el intervalo de $0 \leq \theta \leq 2\pi$

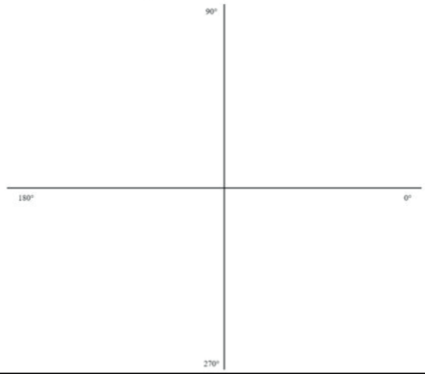
V.- El número complejo representado en forma polar $Z = 8\, Cis\ 137°$, exprésalo en la notación rectangular.

**Fuente:** elaboración propia.

Por último, en la actividad seis se tienen dos números complejos en la forma polar con el ángulo en grados y se señala realizar la notación gráfica. Como apoyo, se proporciona un plano indicando la escala en grados (ver Figura 4).

**Figura 4.** *Actividad para realizar la conversión de la representación polar a la notación gráfica.*

VI.- Realiza la representación gráfica de los siguientes números complejos expresados en notación polar. $Z_1 = 5\ Cis\ 40°$ $Z_2 = 2 < 195°$




**Fuente:** elaboración propia.

## Resultados

Participaron en el estudio alumnos de Ingeniería de la asignatura Álgebra Lineal donde el 65% tenían entre 18 y 19 años, el resto de los estudiantes en el rango de 20 a 25 años. En cuanto al género, la mayoría eran varones y el 40 % mujeres.

Las actividades se revisaron indicando si la notación fue construida con todos los elementos, de forma parcial o incorrecta, y de acuerdo con los indicadores.

En la primera actividad se tienen cuatro indicadores para evaluar la conversión de un número complejo de la forma rectangular al par ordenado en el plano complejo. En la Tabla 1 se exponen los porcentajes obtenidos en cada indicador, donde se observa que el 80% logró la conversión del número complejo de la forma binómica al par ordenado en el plano complejo. La conversión parcial fue realizada por el 12% de los estudiantes, mientras que el 8% lo hizo de forma incorrecta.

**Tabla 1.** *Resultados actividad 1.*

*Dados los siguientes números complejos en su representación rectangular ($Z_1 = 3 - 2i$, $Z_2 = -8 - 4i$, $Z_3 = -1 + 6i$, $Z_4 = 9 + 7i$), dibuja un plano complejo y representa cada uno de ellos en su notación gráfica.*

| Indicadores | Completo % | Parcial % | Incorrecto % |
|---|---|---|---|
| Traza los ejes del plano complejo | 97 | | 3 |
| Identifica los ejes del plano | 9.1 | 6.1 | 84.8 |
| Asigna escala al plano complejo | 31.8 | 54.5 | 13.6 |
| Ubica los números complejos en el plano | 80.3 | 12.1 | 7.6 |

**Fuente:** elaboración propia.

En la actividad 2, el estudiante debía hacer la conversión del número complejo de la representación gráfica a la notación rectangular. Para esta actividad se establecieron tres indicadores (ver Tabla 2), con el objetivo de verificar la construcción de la notación rectangular. La conversión a la representación rectangular fue realizada por el 91% de los participantes.

**Tabla 2.** *Resultados actividad 2.*

*Dados los siguientes números complejos en su representación gráfica, escríbelos en su notación rectangular ($z = a \pm bi$).*

| Indicadores | Completo % | Parcial % | Incorrecto % |
|---|---|---|---|
| Identifica el componente real de número complejo | 97 | 3 | |
| Identifica el componente imaginario de número complejo | 92.4 | 6.1 | 1.5 |
| Representa en forma rectangular los números complejos | 90.9 | 7.6 | 1.5 |

**Fuente:** elaboración propia.

La conversión de la forma rectangular a la notación polar con el ángulo en grados y en el intervalo de 0° a 360° se evalúo en la actividad 3. El desarrollo de la actividad se verificó con cuatro indicadores que se describen en la Tabla 3. Los resultados de esta actividad se concentran en la Tabla 3, donde se observa que solamente el 29% de los estudiantes logró construir la representación polar del número complejo. Además, el 15% de los participantes obtuvo una construcción parcial de la notación y, el mayor porcentaje (56%) lo hizo de forma incorrecta.

**Tabla 3.** *Resultados actividad 3.*

*El número complejo $Z = -3 - 7i$ (representado en forma rectangular), escríbelo en notación polar con el ángulo en grados, en el intervalo de $0° \leq \theta \leq 360°$.*

| Indicadores | Completo % | Parcial % | Incorrecto % |
|---|---|---|---|
| Obtiene el valor del módulo ( r ) | 53 | | 47 |
| Calcula la amplitud (ángulo) | 50 | | 50 |
| Cumple con el ángulo de 0° a 360° | 30.3 | | 69.7 |
| Escribe el número complejo en notación polar | 28.8 | 15.2 | 56.1 |

**Fuente:** elaboración propia.

La actividad 4 solicita convertir un número complejo de la forma rectangular a la notación exponencial. Esta actividad se evaluó con cuatro indicadores como se expone en la Tabla 4. En los resultados se observa que el 27%

de los estudiantes realizó la notación exponencial con el ángulo en π radianes en el intervalo de 0 a $2\pi$. Sin embargo, el 68% presentó una notación exponencial incorrecta.

**Tabla 4.** *Resultados actividad 4.*

*Dado el número complejo en forma rectangular Z = 2 – 5i, realiza su representación en forma exponencial con el ángulo en π radianes, en el intervalo de $0 \leq \theta \leq 2\pi$.*

| Indicadores | Completo % | Parcial % | Incorrecto % |
|---|---|---|---|
| Obtiene el valor del módulo ( r ) | 54.5 | | 45.5 |
| Calcula la amplitud (ángulo) en π radianes | 31.8 | 1.5 | 66.7 |
| Cumple con el ángulo de 0 a 2 π | 31.8 | | 68.2 |
| Escribe el número complejo en notación exponencial | 27.3 | 4.5 | 68.2 |

**Fuente:** elaboración propia.

En la Tabla 5 se presentan los resultados de la revisión de la actividad 5. En esta actividad se indicó realizar la conversión del registro polar a la notación rectangular. La evaluación de la actividad se hizo con los tres indicadores que se describen en la Tabla 5. Los resultados señalan que 35% de los alumnos lograron la notación rectangular mientras que en 64% de los participantes la representación rectangular fue incorrecta.

**Tabla 5.** *Resultados actividad 5.*

*El número complejo representado en forma polar Z = 8 Cis 137°, exprésalo en la notación rectangular.*

| Indicadores | Completo % | Parcial % | Incorrecto % |
|---|---|---|---|
| Obtiene el componente real del número complejo (a) | 36.4 | 1.5 | 62.1 |
| Obtiene el componente imaginario del número complejo (b) | 37.9 | 62.1 | |
| Escribe el número complejo en notación rectangular | 34.8 | 1.5 | 63.6 |

**Fuente:** elaboración propia.

La última actividad corresponde a la conversión de números complejos en la forma polar a la representación gráfica. La verificación de la actividad se llevó a cabo con cinco indicadores que se presentan en la Tabla 6, al igual que los resultados. La notación gráfica la obtuvieron 29% de los participantes, aunque hubo estudiantes que utilizaron regla y transportador y otros que decidieron convertir a la forma binómica para construir la notación como par ordenado.

Además, el 23% presentó una representación con errores y 48% mostraron una notación incorrecta.

**Tabla 6.** *Resultados actividad 6.*

*Realiza la representación gráfica de los siguientes números complejos expresados en notación polar ($Z_1$ = 5 Cis 40°, $Z_2 = 2 \angle 195°$).*

| Indicadores | Completo % | Parcial % | Incorrecto % |
|---|---|---|---|
| Define escala en el plano complejo | 18.2 | 33.3 | 48.5 |
| Traza el módulo midiendo con regla | 10.6 | 15.2 | 74.2 |
| Ubica el ángulo midiendo con el transportador | 34.8 | 10.6 | 54.5 |
| Convierte a forma binómica para localizar el número complejo | 28.8 | | 71.2 |
| Representa los números complejos en el plano | 28.8 | 22.7 | 48.5 |

**Fuente:** elaboración propia.

## Conclusiones

La investigación que se realizó es del tipo cualitativo descriptivo con el objetivo de identificar los conflictos semióticos en los estudiantes universitarios al transitar entre los registros de representación de los números complejos. Para la revisión de las actividades se establecieron indicadores específicos para cada una de ellas, señalando el nivel de logro como completo, parcial o incorrecto.

En el análisis de las actividades se encontró que el 80% de los estudiantes lograron transitar entre los registros rectangular a gráfico, así como del par ordenado la notación rectangular. Sin embargo, una quinta parte de los participantes tuvo dificultades en la representación gráfica de los números complejos indicados en la actividad.

Por otra parte, la conversión del número complejo a la notación polar o a la representación exponencial fue realizada de forma correcta en menos del 30% de los estudiantes. En estas conversiones, la mitad de los participantes obtuvo el módulo con el procedimiento adecuado. En contraste, la amplitud en la conversión a la notación polar, aunque la logró uno de cada dos estudiantes, solamente un tercio presentó el ángulo en el intervalo solicitado.

A su vez, en la conversión a la notación exponencial, el 60% de los estudiantes erró en el cálculo de la amplitud y en expresar el ángulo en el intervalo señalado. En ambas representaciones, polar y exponencial, el argumento fue el principal problema. Estas dificultades coinciden con lo encontrado por Romero (2013) donde los estudiantes calculaban el argumento sin considerar el cuadrante al que pertenece el número complejo.

En cuanto a la conversión del número complejo de la forma polar a la notación rectangular, el 65% de los participantes construyó una representación que no corresponde a la rectangular. Evidenciando una complejidad similar a la conversión del registro rectangular a la notación polar y a la representación exponencial.

En la actividad donde se solicitó realizar la conversión de la notación polar al registro en el plano complejo se determinó que originó conflictos tanto con el módulo como con la amplitud en la mayoría de los estudiantes. Estos resultados son similares a los detectados por Carrasco (2017) y Antonio (2020), quienes identificaron conflictos en la conversión del registro algebraico al geométrico y del significado geométrico de los números complejos.

Estos hallazgos permiten definir la aportación de esta investigación. Se concluye que las conversiones entre la notación rectangular y la representación gráfica son las que pueden construir de forma correcta la mayoría de los estudiantes. Por el contrario, las conversiones que involucren a las notaciones polar y exponencial ocasionan conflictos que impiden lograr la representación del número complejo principalmente por la ubicación del argumento (ángulo) en el cuadrante indicado.

Por otra parte, la enseñanza a distancia es un factor que pudo influir en la comprensión de los números complejos porque al estar estudiando desde casa los alumnos están rodeados de situaciones que los pueden distraer como señala Labraña-Vargas et al. (2021). Sin embargo, este aspecto es algo que se debe investigar a fondo.

Las deficiencias encontradas en las conversiones de los números complejos serán fundamentales para conformar una futura propuesta didáctica. Además, se incorporará el uso de la tecnología, el cual ha sido limitado en la enseñanza de los números complejos según Antonio (2020). Esto con el fin de apoyar a los estudiantes en la construcción de las representaciones semióticas de los números complejos.

**Agradecimientos:** Se agradece al Programa de Fomento y Apoyo a Proyectos de Investigación (PROFAPI, 2022) por su aportación fundamental para este estudio.

## Referencias bibliográficas

Antonio, J. A. (2020). *Aprendizaje del concepto de números complejos desde la teoría de las situaciones didácticas y el software geogebra* [Tesis de Magister en Educación Matemática, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia]. https://repositorio.uptc.edu.co/bitstream/001/3719/1/Aprendizaje_del_concepto_numeros_complejos.pdf

Ayala, R. (2021). Un zoom a la educación virtual: biopolítica y aprendizaje centrado en el estudiante. *Educación Médica, 22*(3), 177-180. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1575181321000061

Carrasco, M. (2017). *Propuesta didáctica para la enseñanza de la multiplicación de números complejos a partir del tránsito entre el registro algebraico y geométrico* [Tesis de Magister en Didáctica de la Matemática, Pontificia Universidad Católica del Valparaíso]. http://opac.pucv.cl/pucv_txt/txt-2500/UCC2598_01.pdf

D'Amore, B., Fandiño, M., Iori, M., & Matteuzzi, M. (2015). Análisis de los antecedentes histórico-filosóficos de la "Paradoja cognitiva de Duval". *Revista Latinoamericana de Investigación Matemática Educativa, 18*(2), 177-212.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et functionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5*, 37-65.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 9*(1), 143-168.

Duval, R. (2016). Capítulo Segundo. Un análisis cognitivo de problemas de comprensión en el aprendizaje de las matemáticas. En R. Duval & A. Sáenz-Ludlow (Eds.), *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas* (pp. 61-94). Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Dufour, S. (2011). *L'utilisation des représentations par deux enseignants du collégial pour l'introduction de la dérivée* [Mémoire de maîtrise. Université du Québec à Montréal]. http://www.archipel.uqam.ca/4059/

Hitt, F. (1998). Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of function. *The Journal of Mathematical Behavior, 17*(1), 123-134. http://dx.doi.org/10.1016/S0732-3123(99)80064-9

Hitt, F. (2017). El aprendizaje del cálculo y nuevas tendencias en su enseñanza en el aula de matemáticas. *Eco Matemático, 8*, 6-15. https://doi.org/10.22463/17948231.1374

Labraña-Vargas, J. R., Urquieta-Álvarez, M. A., & Salinas-Fuentealba, S. A. (2021). Espacio y educación: desafíos de la enseñanza a distancia en el contexto de la pandemia por COVID 19. *Simbiótica. Revista Electrónica, 8*(3), 119- 134.

Macías, J., López, J., Ramos, G., & Lozada, F. (2020). Los entornos virtuales como nuevos escenarios de aprendizaje: el manejo de plataformas online en el contexto académico. *Rehuso, 5*(3), 62-69.

Randolph, V., & Parraguez, M. (2019). Comprensión del Sistema de los Números Complejos: Un Estudio de Caso a Nivel Escolar y Universitario. *Formación Universitaria, 12*(6), 57-82. http://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062019000600057

Ribeiro, O. A., Medeiros, B., & Gaspar, R. (2021). Teoría de Duval Raymond en la enseñanza de funciones matemáticas. *Research Society and Development, 10*(3), 1-6.

Romero, D. (2013). *Números Complejos: Actividades didácticas con representaciones dinámicas* [Tesis de Maestría en Ciencias con Especialidad en Matemáticas Educativa, Universidad de Sonora]. http://www.repositorioinstitucional.uson.mx/bitstream/20.500.12984/6890/1/romeroroblesdanielam.pdf

Romero, D., Quiñonez, M., & Del Castillo, A. (2021). Intervención didáctica para el aprendizaje de números complejos en modalidad virtual. *SahuarUS, 5*(1), 112-126.

# LA COMPLEJIDAD DE LA FUNCIÓN LINEAL EN UN CURSO DE FORMACIÓN DOCENTE

# THE COMPLEXITY OF THE LINEAR FUNCTION IN A TEACHER TRAINING COURSE

**Eulalia Calle, Adriana Breda, Vicenç Font**
**Universidad de Cuenca. (Ecuador), Universitat de Barcelona. (España)**
eulalia.calle@ucuenca.edu.ec, adriana.breda@ub.edu, vfont@ub.edu

**Resumen**:
Este trabajo busca analizar la reflexión que hace un grupo de profesores, participantes de una maestría con mención en matemáticas, acerca a la idoneidad didáctica de una actividad propuesta por uno de ellos, cuya finalidad era de mejorar la enseñanza de la función lineal. Para analizar el caso, de forma cualitativa – descriptiva, se utilizó como categoría *a priori* el componente "Representatividad de la complejidad de la noción que se quiere enseñar", del Criterio de Idoneidad Epistémica. Como resultado se infiere que la reflexión de los profesores, acerca a la tarea planteada por un profesor, contempla los diversos significados del objeto matemático función lineal. Además de esta reflexión, se puede visibilizar que los docentes realizan otro tipo de reflexiones que, de manera implícita, se relacionan con los criterios de idoneidad didáctica, en particular, la idoneidad emocional, la idoneidad interaccional y la idoneidad cognitiva.

**Palabras clave**: idoneidad epistémica, complejidad de función lineal, formación de profesores

**Abstract**:
This work seeks to analyze the reflection made by a group of teachers, participants in a master's degree with a major in mathematics, about the didactic suitability of an activity proposed by one of them that was aimed at improving the teaching of the Linear Function. To analyze the case, in a qualitative-descriptive way, the component "Representative of the complexity of the notion to be taught" of the Epistemic Suitability Criterion was used as a prior category. As a result, it is inferred that the reflection of teachers about the task set by a teacher contemplates the various meanings of the linear function mathematical object. In addition to this reflection, it can be seen that teachers carry out other types of reflections that, implicitly, are related to the didactic suitability criteria, as is the case of emotional suitability, interactional suitability and cognitive suitability.

**Keywords**: epistemic suitability, complexity of linear function, training of teachers

## Introducción

El interés por los procesos de mejora en la formación del profesorado ha generado modelos teóricos para identificar y clasificar el conocimiento del profesor (Davis y Renert, 2013; Fernández, Llinares y Valls, 2012; Liston, 2015; Mason, 2002; Rowland, Huckstep y Thwaites, 2005). El modelo de competencias y conocimientos didáctico-matemáticos del profesor de matemáticas (CCDM), basado en el Enfoque Ontosemiótico (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2019) es uno de ellos. En el marco del CCDM, el constructo Criterios de Idoneidad Didáctica (CID) es una de las herramientas que se enseñan en diversos dispositivos formativos para desarrollar, en los profesores, la competencia de análisis de la idoneidad didáctica de un proceso de instrucción (Godino, Giacomone, Batanero y Font, 2017).

La Idoneidad Didáctica se compone por seis criterios con sus respectivos componentes e indicadores. Uno de los criterios es el epistémico, que sirve para valorar la idoneidad matemática de un proceso de instrucción. Dicho criterio, contempla, entre sus componentes, presentar a los alumnos una muestra representativa de la *complejidad de los objetos matemáticos*. Tener en cuenta esta complejidad, como se sostiene en Burgos et al. (2018), implica, entre otros aspectos, que el profesor pueda plantear y resolver una tipología diversificada de problemas, encontrar diferentes soluciones y analizar los conocimientos involucrados en la proposición y solución de dichos problemas.

En la línea de investigar sobre la incorporación de la reflexión sobre "la complejidad del objeto matemático a enseñar" en algunas experiencias de formación de profesores, un estudio publicado en Calle, Breda y Font (2020), con 95 docentes ecuatorianos de matemáticas en ejercicio, apunta que la mayoría de ellos no lograban relacionar, de forma correcta, el significado parcial del objeto media aritmética, necesario para resolver un problema, con su enunciado correspondiente, demostrando poco conocimiento acerca de la complejidad de dicho objeto matemático.

En otro estudio realizado, se concluye que ese mismo grupo de profesores presenta dificultades para crear una tarea y señalar el tipo del significado del teorema de Pitágoras que se debe usar para resolverla y que el significado geométrico es el que mejor relacionan con la tarea que proponen (Calle, Breda y Font, 2023). Otra investigación llevada a cabo por Calle, Breda y Font (2022), muestra que las guías utilizadas por futuros docentes ecuatorianos en sus prácticas preprofesionales no contemplan la valoración de las matemáticas enseñadas y que, en las secuencias didácticas implementadas por los futuros profesores, siguiendo esta guía, no tienen muy en cuenta dicha complejidad.

La realidad ecuatoriana, reflejada en los bajos resultados de las evaluaciones aplicadas a los jóvenes por organismos nacionales e internacionales (OCDE, 2017), requiere hacer efectiva la propuesta del Ministerio de Educación (2016) y superar las graves dificultades de los estudiantes de bachillerato, que no cuentan con conocimientos ni habilidades suficientes para participar de manera satisfactoria en la sociedad del saber. Este requerimiento del país pone en primer plano la necesidad de realizar cambios profundos en la formación inicial y continua de profesores de matemáticas, hasta alcanzar los conocimientos y las competencias didáctico-matemáticas que debe tener el futuro profesor de matemáticas (Godino, 2018) para desarrollar la competencia matemática de sus alumnos.

En el marco de esta problemática, el objetivo de este trabajo es analizar la reflexión que hace un grupo de profesores, participantes de una maestría con mención en matemáticas, acerca a la idoneidad didáctica de una actividad propuesta por uno de ellos que tenía la finalidad de mejorar la enseñanza de la función lineal.

A continuación, se presenta el marco teórico, la metodología utilizada, los resultados y algunas consideraciones finales.

## Marco Teórico

En esta sección exponemos, de manera breve, el modelo CCDM del EOS y la subcompetencia de análisis de la idoneidad didáctica y, con más detalle, el componente "Representatividad de la complejidad del objeto matemático que se quiere enseñar" del Criterio de Idoneidad Epistémica.

### *El modelo CCDM y la Idoneidad Didáctica*

El Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción matemática (EOS) es un sistema teórico inclusivo en la Educación Matemática que articula diversas categorías de conocimientos y competencias (CCDM), de los profesores de matemáticas consideradas necesarias para una enseñanza idónea de las matemáticas (Godino, Batanero y Font, 2019).

En este modelo teórico se considera que las dos competencias clave del profesor de matemáticas son la competencia matemática y la competencia de análisis e intervención didáctica, siendo el núcleo fundamental de esta última (Breda, Pino-Fan y Font, 2017) que consiste en diseñar, aplicar y valorar secuencias de aprendizaje propias y de otros, mediante técnicas de análisis didáctico y criterios de calidad, para establecer ciclos de planificación, implementación, valoración y plantear propuestas de mejora. Esta competencia general está formada por diferentes subcompetencias (Breda, Pino-Fan y Font, 2017): 1) subcompetencia de análisis de la actividad matemática ─ esta subcompetencia, en Godino, Giacomone, Batanero y Font (2017), se descompone a su vez en dos (competencia de análisis de significados globales y competencia de análisis ontosemiótico de prácticas matemáticas) ─; 2) subcompetencia de análisis y gestión de la interacción y de su efecto sobre el aprendizaje de los estudiantes; 3) subcompetencia de análisis de normas y metanormas; y 4) subcompetencia de valoración de la idoneidad didáctica de procesos de instrucción. En este trabajo nos centraremos, sobre todo en esta última subcompetencia, más en concreto una de sus componentes. La subcompetencia de valoración de la idoneidad didáctica de procesos de instrucción hace hincapié en el análisis de idoneidad didáctica, como una competencia para la reflexión global sobre la práctica docente, su valoración y mejora progresiva (Giacomone, Godino y Beltrán-Pellicer, 2018); por lo tanto, responde a qué criterios seguir en el diseño de secuencias de tareas, cómo desarrollar y evaluar la competencia matemática de los alumnos y qué cambios hacer para conseguir metas de aprendizaje superiores. Esta noción se descompone en los siguientes criterios parciales de idoneidad didáctica (Font, Planas y Godino, 2010):

- ✓ *Idoneidad epistémica*

Se refiere al grado de representatividad e interconexión de los significados institucionales implementados (o pretendidos) respecto de un significado de referencia. Las tareas o situaciones-problemas son un componente fundamental en esta dimensión, y deben involucrar diversos objetos y procesos matemáticos.

- ✓ *Idoneidad ecológica*

Grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo del centro, la escuela y la sociedad y a los condicionamientos del entorno en que se desarrolla.

- ✓ *Idoneidad cognitiva*

Grado en que los significados pretendidos e implementados están en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/implementados.

- ✓ *Idoneidad afectiva*

Grado de implicación (intereses, emociones, actitudes y creencias) del alumnado en el proceso de estudio.

- ✓ *Idoneidad interaccional*

Grado en que las configuraciones didácticas y el discurso en la clase permiten, por una parte, identificar conflictos semióticos potenciales (que se puedan detectar a priori), y por otra, resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción.

- ✓ *Idoneidad mediacional*

Grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.

En Breda y Lima (2016) y Breda, Pino-Fan y Font (2017) se aporta un sistema de componentes e indicadores que sirve de guía de análisis y valoración de la idoneidad didáctica, que está pensado para un proceso de instrucción en cualquier etapa educativa.

***La idoneidad epistémica y la complejidad de los objetos matemáticos***

Tanto los componentes como los indicadores de los Criterios de Idoneidad Didáctica se han confeccionado teniendo en cuenta las tendencias, los principios y los resultados de la investigación en el área de Didáctica de las Matemáticas (Breda, Font y Pino-Fan, 2018). En particular, para la idoneidad epistémica se ha tenido en cuenta un principio fundamental del EOS que, con los matices propios de cada enfoque, es (o puede ser) asumido por otros enfoques teóricos del área. Nos referimos al principio que se puede formular de la siguiente manera: los objetos matemáticos emergen de las prácticas, lo cual conlleva su complejidad (Font, Godino y Gallardo, 2013; Rondero y Font, 2015). De este principio se deriva un componente (representatividad) cuyo objetivo es que se tenga en cuenta, dentro de lo posible, dicha complejidad en el diseño y rediseño de las secuencias didácticas (Pino-Fan, Castro, Godino y Font, 2013).

El componente *Representatividad de la complejidad de los objetos matemáticos* (entendida como pluralidad de significados parciales), se refiere al grado de representatividad e interconexión de los significados institucionales implementados (o pretendidos) respecto de un significado de referencia (Font, Pino-Fan y Breda, 2020; Giacomone, Godino y Beltrán-Pelliecer, 2018).

Cada uno de estos significados permite resolver tipos de problemas diferentes, por lo cual, si se quiere conseguir que el alumno sea competente en la resolución de una variedad de problemas, donde el objeto matemático en cuestión tenga un rol determinante, es necesario que el alumno disponga de una red de significados parciales de dicho objeto bien conectados entre sí (Font, Breda y Seckel, 2017). En la siguiente tabla (Font, Breda y Seckel, 2017), se recogen los indicadores del componente *Representatividad de la complejidad de los objetos matemáticos* del Criterio de Idoneidad Epistémica.

**Tabla 1**. *El componente Representatividad y sus indicadores.*

| Componente de la Idoneidad Epistémica | Indicadores |
|---|---|
| **Representatividad de la complejidad de la noción que se quiere enseñar** | ✓ Los significados parciales (definiciones, propiedades, procedimientos, etc.) son una muestra representativa de la complejidad de la noción matemática que se quiere enseñar<br>✓ Los significados parciales definiciones, propiedades, procedimientos, etc.) son una muestra representativa de la complejidad contemplada en el currículo de la noción matemática que se quiere enseñar.<br>✓ Para uno o varios significados parciales seleccionados para su implementación, ¿se contempla una muestra representativa de problemas?<br>✓ Para uno o varios significados parciales seleccionados para su implementación, ¿se contempla el uso de diferentes modos de expresión (verbal, gráfico, simbólico…), tratamientos y conversiones entre los mismos? |

**Fuente**: Font, Breda y Seckel (2017).

Primero hay que valorar si los significados parciales (definiciones, propiedades, procedimientos, etc.) seleccionados para su implementación son una muestra representativa de la complejidad de la noción matemática que se quiere enseñar (para ello la mirada se dirige a las matemáticas). En segundo lugar, dado que el currículo contempla parte de estos significados parciales, hay que valorar si la muestra de significados presentes en el proceso de instrucción son también una muestra representativa de los contemplados en el currículo (en el currículo en general, en la etapa o ciclo o en el curso donde se realiza la implementación).

Una vez seleccionados uno o varios significados parciales para su implementación, valorar. Como mínimo, si se contempla una muestra representativa de representaciones del objeto y de problemas en los que se aplica o emerge.

*Complejidad del objeto matemático función*

El objeto matemático función es un objeto que presenta una grande complejidad, como lo demuestra su evolución histórica. Según Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2006), a lo largo de la historia de las diferentes civilizaciones se generaron diferentes significados parciales sobre esta noción, algunos de los cuales sirvieron para generalizar otros preexistentes. Estos autores consideran que esta evolución puede organizarse en cuatro sentidos parciales: tabular, gráfico, analítico y conjuntista.

Estos cuatro significados parciales señalados por Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2006), de alguna manera, resumen el desarrollo de la noción de función que fueron transpuestas en los libros de texto a través de dos tipos de configuraciones epistémicas. Por un lado, tenemos las configuraciones epistémicas formales (o intramatemáticas) y por otro tenemos las configuraciones empíricas (extramatemáticas). Los primeros tienen como referente el significado que llamamos de conjuntista, mientras que los segundos tienen como referente una combinación de los otros tres (tabular, gráfico y analítico), (Font, Giménez, Larios, & Zorrilla, 2012).

## ■ Metodología

En el presente estudio se trabaja con un enfoque cualitativo – descriptivo y pretende analizar la reflexión de un grupo de profesores acerca a una actividad docente, desarrollada por el profesor Luis, quien imparte clases en el primer año de Bachillerato General Unificado de una institución educativa de Quito y se encuentra participando de un programa de Maestría en Educación, mención matemática. En una de las asignaturas de la maestría nombrada de Procedimientos Didácticos de Innovación Matemática, el profesor presentó la innovación que había realizado en una unidad didáctica, para enseñar el objeto matemático función lineal.

Con la finalidad de mejorar el aprendizaje de las matemáticas, la actividad propuesta en la asignatura indicada tenía como objetivo que los maestrantes, profesores en ejercicio, reflexionasen sobre la complejidad de los objetos matemáticos y su posible aplicación como estrategia didáctica en la práctica docente. Para ello, por un lado, tuvieron en cuenta las herramientas de idoneidad didáctica y, por otro lado, el siguiente resultado de aprendizaje: *Presenta propuestas de innovación y herramientas de valoración de la calidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas que permita al profesor la mejora de su propia práctica*.

La actividad propuesta debía ser realizada mediante un estudio de caso en donde se debía cumplir, en primer lugar, con la preparación del caso, seleccionando un objeto matemático que estuviera siendo abordado en su práctica docente y, en segundo lugar, establecer los diferentes significados de ese objeto para cumplir con el criterio de "Representatividad de la complejidad del objeto matemático que se quiere enseñar" del Criterio de Idoneidad Epistémica, uno de los CID del EOS.

Una vez completada la actividad del profesor Luis con sus estudiantes, debía confrontar el caso, mediante la discusión con sus compañeros del programa de maestría y elaborar el informe final con los resultados de la reflexión grupal.

En la socialización de los resultado de la actividad con el gran grupo, el profesor Luis inició su exposición con la preparación del caso en donde se menciona el planteamiento de problemas de función lineal, basado en el cuento Alicia en el país de las maravillas, en donde los estudiantes debieron analizar definiciones, conceptos, gráficas, tabulaciones y, con ayuda de las TICs, establecer soluciones a los problemas, atendiendo a la pluri significación del objeto matemático función lineal: significado algebraico, geométrico y físico, como se puede apreciar en la Tabla 2:

**Tabla 2**. *Descripción del caso.*

**Fase 1: Preparación del Caso**

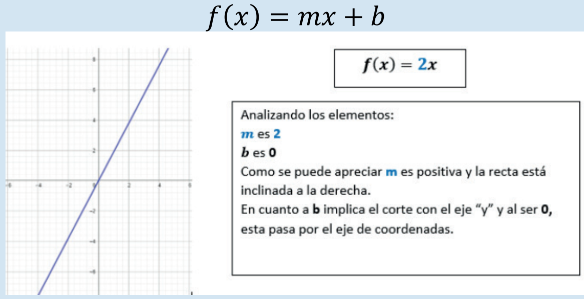
El objeto matemático a abordar es la "función lineal." Las actividades realizadas por un docente en la actualidad son de vital importancia en el proceso de enseñanza aprendizaje especialmente en la utilización de TICs o de manera práctica basada en problemas que cada estudiante en particular lo puede experimentar (Herrera, 2018). Para ello, se plantean problemas de función lineal analizando definiciones, pendientes, gráficos en el plano cartesiano, construcción de tablas de valores entre otras que con ayuda o no de las TICS el estudiante puede establecer una solución a cada problema desde el campo algebraico, geométrico y físico, para al final evaluar las estrategias empleadas y la aplicación de los conocimientos determinando así el nivel de asimilación por parte del estudiantado.

**Fase 2: Organización y Definición del Caso**

Objeto matemático: función lineal
¿Cuáles son los significados parciales del objeto matemático que usted ha encontrado?
El objeto matemático función lineal, será abordado mediante tres significados:

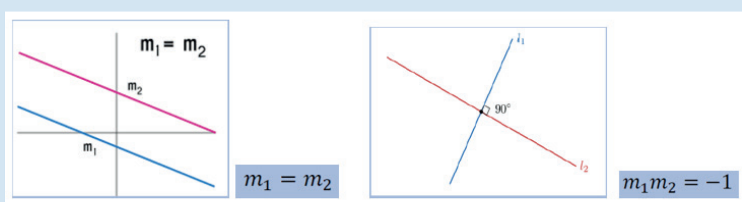
1) Significado Algebraico: La función lineal es una función cuya expresión analítica es

$$f(x) = mx + b$$



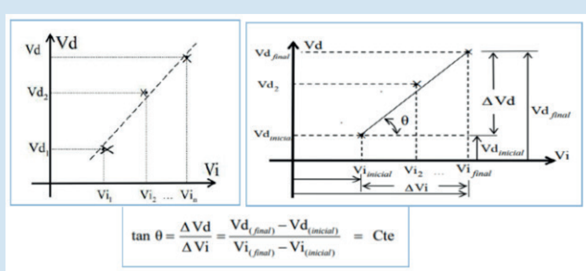

2) Significado Geométrico: La ecuación general de una recta es una expresión de la forma

$$Ax + By + C = 0$$




3) Significado Físico: Existe una proporcionalidad directa entre dichas variables, si la $Vd$ crece y $Vi$ crece

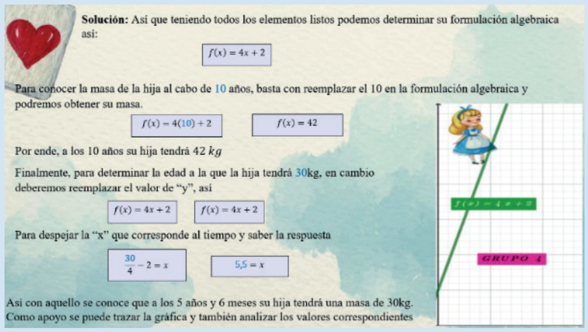
$$Vd \propto Vi \qquad\qquad Vd = cte\, Vi$$



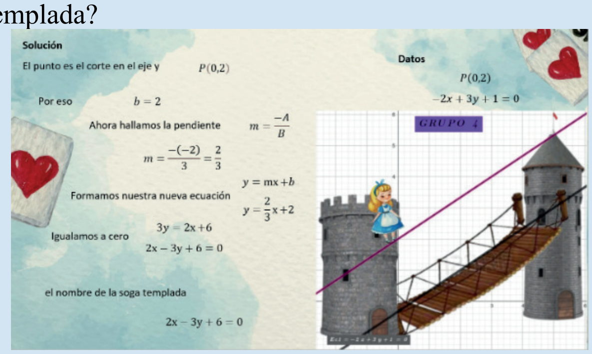

**Fase 3: Presentación y Análisis del Caso**

A continuación, se reflexiona sobre lo obtenido y expuesto en el punto anterior, presentando la descripción y posibles soluciones de los problemas de manera que se puedan vincular con uno o varios tipos de paradigma y relacionarlos con los significados parciales propuestos.

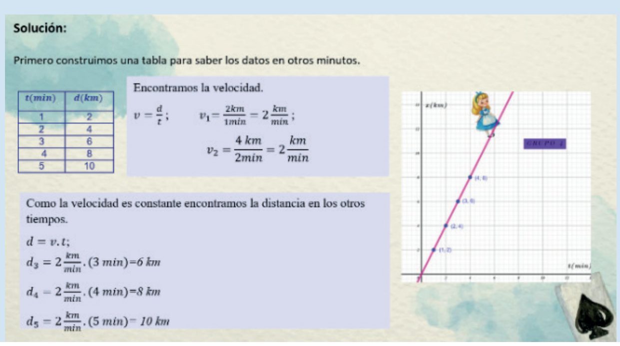
**Problema 1**: Una persona conoce que la masa de su hija "Alicia" al nacer es de 2Kg, al cabo de 4 años conoce que su masa ha aumentado 10Kg. La mamá relaciona la masa de Alicia con el tiempo y desea conocer si puede representar algebraicamente la masa de su hija con respecto al tiempo, también se pregunta bajo lo anterior, sobre la masa de su hija al cabo de 10 años y por último desea saber a qué edad su hija tendrá una masa de 30 Kg.




**Problema 2**: Alicia se encuentra a la misma altura de la entrada en la torre 1 en el piso 3 para cruzar a la torre 2 debe lazar una soga con una flecha para que quede anclada en la punta y templarla. pero para no ser descubierta por los guardias que están en las entradas de las dos torres debe ser paralela a un puente inclinado que se encuentra debajo de ella y tiene por nombre 2x+3y+1=0. ¿Cuál será el nombre de esta soga templada?




**Problema 3**: Alicia se encuentra perseguida por la reina y los peones del palacio, necesita escapar de ellos y se encuentra con una tarabita para poder trasladarse fuera del castillo. Como solo existe una sola tarabita, a los peones les toca ir por tierra. Alicia necesita recorrer 10 km en 5 minutos, ya que los peones llegarán por tierra en 6 minutos. Y es la única forma de que Alicia pueda escapar del palacio. Al subir se da cuenta que en un minuto recorre 2 km y a los dos minutos recorre 4km, evidencia que la tarabita se mueve a una velocidad constante. ¿Podrá Alicia llegar en 5 minutos y escapar de la persecución?, ¿La cuerda donde se traslada Alicia es directamente proporcional?



| |
|---|
| **Fase 4: Evaluación del Caso** |
| Se plantean problemas adicionales a los estudiantes:<br><br>**Problema 4:** Alicia debe subir las gradas del castillo rápidamente, un guardia desde lejos alcanza a observar cómo Alicia sube, se da cuenta que las gradas tienen la forma de la función lineal $f(x)=2x-3$, el guardia necesita graficar la función lineal y encontrar su pendiente y la ordenada de la función. Adicional colocar el dominio y rango de la función.<br>**Problema 5:** Alicia se encuentra a la misma altura de la entrada en la torre 1 en el piso 3 para cruzar a la segunda torre debe lazar una soga con una flecha para que quede anclada en la punta y templarla. pero para no ser descubierta por los guardias que están en las entradas de las dos torres debe ser paralela a un puente inclinado que se encuentra debajo de ella y tiene por nombre 3x+2y+2=0. ¿Cuál será el nombre de esta soga templada?<br>**Problema 6:** Alicia se encuentra perseguida por la reina y los peones del palacio, necesita escapar de ellos y se encuentra con una tarabita para poder trasladarse fuera del castillo. Como solo existe una sola tarabita los peones les toca ir por tierra. Alicia necesita recorrer 5 km en 60 segundos, ya que los peones llegarán por tierra en 1 minuto y medio. Y es la única forma de que Alicia pueda escapar del palacio. Al subir se da cuenta que en 10 segundos recorre 1 km y a los dos segundos recorre 2km, evidencia que la tarabita se mueve a una velocidad constante. ¿Podrá Alicia llegar en menos de un minuto y medio y escapar de la persecución?, ¿La cuerda donde se traslada Alicia es directamente proporcional?<br>Una vez realizada la socialización, mediante la plataforma MOODLE se desarrolla una evaluación en la cual los estudiantes deben seleccionar la respuesta correcta y subir imágenes del proceso que hicieron para llegar a su respuesta. Se dio plazo de 30 minutos para su evaluación. |
| **Fase 5: Confrontación del Caso** |
| Luego de exponer el estudio de caso, con nuestro objeto matemático se realizó la evaluación a todos los estudiantes del curso, luego de aquello, nos reunimos en el grupo de trabajo para seleccionar algunos estudiantes y analizar el desarrollo de los ejercicios y sus respuestas. Finalmente, todas las observaciones que realizamos en el grupo se presentan en el informe del estudio de casos. |

**Fuente**: los autores.

## Resultados

Tomando como instrumento de análisis el componente Representatividad de la complejidad de la noción que se quiere enseñar del Criterio de Idoneidad Epistémica, en la actividad presentada por el profesor Luis, se puede deducir, en primero lugar, que, en la reflexión grupal se observó que los significados parciales (definiciones, propiedades, procedimientos, etc.) son una muestra representativa de la complejidad de la noción matemática que se quiere enseñar; además, está contemplada en el currículo: significado algebraico, geométrico y físico.

En segundo lugar, que, para uno o varios significados parciales seleccionados para su implementación, se contempla una muestra representativa de problemas: problema 1, relacionado con el significado funcional; el problema 2, relacionado con el significado geométrico y el problema 3 relacionado con el significado físico.

En tercer lugar, para uno o varios significados parciales seleccionados para su implementación, se contempla el uso de diferentes modos de expresión (verbal, gráfico, simbólico, etc.), tratamientos y conversiones entre los mismos. Con este análisis de la propuesta, se puede deducir que lo realizado por el profesor Luis, cumple con el criterio de Representatividad del objeto matemático Función Lineal, presentando la evaluación de la propuesta, luego de la confrontación del caso con los demás integrantes del grupo (conforme Tabla 3).

**Tabla 3**. *Confrontación del caso del profesor Luis con los demás integrantes del grupo.*

| Estudiante | Problema 1 | | Problema 2 | | Problema 3 | | Observaciones |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Correcto | Incorrecto | Correcto | Incorrecto | Correcto | Incorrecto | |
| Alcívar Ashly | X | | X | | X | | |
| Álvarez José | X | | X | | X | | |
| Arcos Mateo | X | | X | | X | | |
| Aucapiña Joel | | X | X | | | X | El estudiante no se encontró en el momento de socializar el estudio de caso. |
| Bonilla Jennifer | X | | X | | | X | |
| Bravo Melany | | X | X | | X | | |

**Fuente**: Los autores.

En el análisis de los resultados se valoró el razonamiento, a través de la justificación de las respuestas brindadas. Además de los comentarios referidos a la complejidad del objeto matemático, los participantes realizaron otro tipo de reflexiones que, de manera implícita, se relacionan con los Criterios de Idoneidad Didáctica; coincidiendo con lo mencionado en Font, Breda y Calle (2022): cuándo las opiniones son valorativas, se organizan de manera implícita o explícita, mediante algunos indicadores de los componentes de los CID.

En el caso específico de este estudio, se visibiliza a la *idoneidad emocional* cuando hablan de lo divertido de asociar los problemas matemáticos con cuentos como el de Alicia en el país de las maravillas, o la *idoneidad interaccional*, sugiriendo que los estudiantes sean más responsables de su trabajo y asistan a la socialización de los proyectos a ejecutar en las clase; otra idoneidad presente fue la *cognitiva* que plantea la necesidad de trabajar en una retroalimentación para consolidar los conocimientos adquiridos.

## Conclusiones

Los maestrantes exponen su reflexión y valoran la experiencia de asociar los diversos significados de un objeto matemático, manifestando que no se había visto antes de manera conjunta este tipo de desarrollos, en donde se han obtenido resultados positivos en las evaluaciones; demostrando el interés por trabajar el componente de representatividad de un objeto matemático, derivado del Criterio de Idoneidad Epistémica.

En el estudio de caso realizado, se han evidenciado algunos aspectos que ameritan ser destacados: 1) los profesores menciona que a los estudiantes les pareció muy divertido poder asociar el objeto matemático con cuentos, en este caso, con el cuento de Alicia y la función lineal; 2) los profesores participantes, expusieron su satisfacción por haber adquirido la nueva experiencia de trabajo, considerando los diversos significados de un objeto matemático que, en este estudio, surgieron a partir del planteamiento y resolución de problemas; todo lo cual muestra la capacidad y creatividad de los docentes por formular diversos problemas derivados de una misma situación que, a más de involucrar procesos innovadores de enseñanza, motivan a los estudiantes a aprender, coincidiendo con lo mencionado por Font et al. (2020), en que los docentes deberían tener en cuenta la complejidad de los objetos matemáticos que enseñan a fin de conseguir una enseñanza más eficaz.

## Agradecimientos

Trabajo desarrollado en el marco del proyecto de investigación PID2021-127104NB-I00 MCIN/AEI/10.13039/501100011033 y por FEDER Una manera de hacer Europa.

## Referencias bibliográficas

Breda, A., y Lima, V. M. R. (2016). Estudio de caso sobre el análisis didáctico realizado en un trabajo final de un máster para profesores de matemáticas en servicio. *REDIMAT - Journal of Research in Mathematics Education*, *5*(1), 74-10. http://dx.doi.org/10.4471/redimat.2016.1955

Breda, A., Font, V., & Pino-Fan, L. (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. *Bolema*, *32*(60), 255-278. https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a13

Breda, A., Pino-Fan, L. R., y Font, V. (2017). Meta Didactic-Mathematical Knowledge of Teachers: Criteria for The Reflection and Assessment on Teaching Practice. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 13, 1893-1918. https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.01207a

Burgos, M., Beltrán-Pellicer, P., Giacomone, B., y Godino, J. D. (2018). Conocimientos y competencia de futuros profesores de matemáticas en tareas de proporcionalidad*. Educação e Pesquisa, 44,* 1-22.

Calle, E., Breda, A., Font, V. (2020). ¿Qué significado atribuyen a la media aritmética profesores de matemáticas en ejercicio? *Revista Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *33*(1), 643-652.

Calle, E., Breda, A., Font, V. (2022). La complejidad de la noción a enseñar en la valoración de la práctica preprofesional de futuros profesores de matemáticas ecuatorianos. *Redimat*, *11*(3), 218-249. https://doi.org/10.17583/redimat.10986

Calle, E., Breda, A., Font, V. (2023). Significados parciales del teorema de Pitágoras usados por profesores en la creación de tareas en el marco de un programa de formación continua. *Uniciencia, 35*(1), en prensa.

Davis, B., & Renert, M. (2013). Profound understanding of emergent mathematics: broadening the construct of teacher disciplinary knowledge. *Educational Studies in Mathematics Education*, *82*(2), 245-265. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9424-8

Fernández, C., Llinares, S., & Valls, J. (2012). Learning to notice students" mathematical thinking through on-line discussions. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education Online First, 44,* 747–759. https://doi.org/10.1007/s11858-012-0425-y.

Font, V., Breda, A., & Seckel, M. J. (2017). Algunas implicaciones didácticas derivadas de la complejidad de los objetos matemáticos cuando estos se aplican a distintos contextos. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, *10*(2), 1-23.

Font, V., Breda, A., & Calle, E. (2022). La idoneidad didáctica en la formación de profesores de matemáticas. *Quintaesencia, 12*(1), 162–167. https://doi.org/10.54943/rq.v12i1.165

Font, V., Giménez, J., Larios, V., & Zorrilla, J. F. (2012). *Competencias del profesor de matemáticas de secundaria y bachillerato* (eBook). Edicions Universitat Barcelona.

Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics, 82,* 97–124. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9411-0

Font, V., Planas, N., y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, *33*(1), 89-105.

Font, V., Pino-Fan, L., Breda, A. (2020). Una evolución de la mirada sobre la complejidad de los objetos matemáticos. *Revista Paradigma*, *41*(1), 107-129.

Giacomone, B., Godino, J. D., y Beltrán-Pellicer, P. (2018). Developing the prospective mathematics teachers' didactical suitability analysis competence. *Educação e Pesquisa*, *44,* e172011.

Godino, J. D., Batanero, C., Font, V. (2019). El enfoque ontosemiótico: implicaciones sobre el carácter prescriptivo de la didáctica. *For the Learning of Mathematics*, *39*(1), 37-42.

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V., & Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma*, *27*(2), 221-252.

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C., y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema*, *31*(57), 90-113. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a05

Liston, M. (2015). The use of video analysis and the Knowledge Quartet in mathematics teacher education programs. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *46*(1), 1-12. https://doi.org/10.1080/0020739X.2014.941423

Mason, J. (2002). *Researching your own practice. The discipline of noticing.* London: Routledge-Falmer.

Ministerio de Educación. (2016). Currículo vigente. Quito. Disponible en: << https://educacion.gob.ec/curriculo/>>

OCDE. (2017). Marco de Evaluación y de Análisis de PISA para el Desarrollo: Lectura, matemáticas y ciencias.

Pino-Fan, L., Castro, W. F., Godino, J. D., y Font, V. (2013). Idoneidad epistémica del significado de la derivada en el currículo de bachillerato. *Paradigma*, *34*(2), 123 – 150.

Rondero, C., y Font, V. (2015). Articulación de la complejidad matemática de la media aritmética. *Enseñanza de las Ciencias*, *33*(2), 29-49.

Rowland, T., Huckstep, P., & Thwaites, A. (2005). Elementary teachers‟ mathematics subject knowledge: The Knowledge Quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *8*(3), 255-281. https://doi.org/10.1007/s10857-005-0853-5

# TIPO DE RAZONAMIENTO ESTADÍSTICO EN ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS AL RESOLVER EL PROBLEMA DE LOS DADOS DEL CABALLERO DE MÉRÉ

# STATISTICAL REASONING IN UNIVERSITY STUDENTS SOLVING THE CHEVALIER DE MERÉ 'S DICE PROBLEM

**Beatriz Adriana Rodríguez González, Judith Alejandra Hernández Sánchez**
**Universidad Politécnica de Zacatecas, Universidad Autónoma de Zacatecas. (México)**
brodriguez@upz.edu.mx, judith700@hotmail.com

**Resumen**:
Los juegos de azar son un referente histórico que sigue vigente en la enseñanza y el aprendizaje de la probabilidad. A inicios del renacimiento, un filósofo llamado Caballero de Méré propuso lanzar un dado cuatro veces consecutivas y apostar a que saldría por lo menos un seis. En esa época la correspondencia que sostuvieron Pascal y Fermat para resolver este problema dio origen a lo que llamaríamos teoría de la probabilidad. En la presente investigación, se ha elegido el problema de los dados de Meré para ser resuelto por un grupo de estudiantes universitarios. El objetivo es clasificar el tipo de razonamiento estadístico con base a los cuatro primeros niveles de la escala de SOLO (StructureofObservedLearningOutcomes). El análisis de las producciones de los estudiantes nos ha permitido observar que existe un razonamiento erróneo para resolver este tipo de problemas.

**Palabras clave**: azar, razonamientoestadístico, dados, probabilidad

**Abstract**:
Games of chance are a historical reference that is still used in teaching and learning probability. Early in the Renaissance, a philosopher named Chevalier de Méré proposed rolling a dice four consecutive times and betting that at least a six would come up. At that time, the correspondence between Pascal and Fermat to solve this problem gave rise to what we would call probability theory. In this research, the Mere's dice problem has been chosen to be solved by a group of university students. The objective is to classify the type of statistical reasoning based on the first four levels of the SOLO (Structure of Observed Learning Outcomes) scale. The analysis of the students´ productions has allowed us to observe that there is an erroneous reasoning to solve this type of problem.

**Keywords**: chance, statistical reasoning, dices, probability

## Introducción

La historia de la probabilidad es atemporal y permanece vigente cada vez que comenzamos un nuevo curso como profesores en cualquier nivel educativo. Los juegos de azar son constantemente evocados, no solo para generar dinamismo en la clase, sino porque han sido motivo del desarrollo del razonamiento estadístico. De acuerdo con Batanero et al., (2006, p. 1) "una mirada a la historia permite tomar conciencia de que los objetos probabilísticos no son inmutables, sino fruto del ingenio y construcción humana para dar respuesta a situaciones problemáticas". Los autores aseveran que un proceso muy parecido se desarrolla en el aprendizaje de los estudiantes que deben construir su conocimiento gradualmente a partir del error y el esfuerzo.

Según Basulto y Camúñez (2007), el problema del azar en general es una buena excusa para que distintos autores de diferentes épocas se involucren en las situaciones azarosas y aporten sus soluciones y experiencias y su visión de la probabilidad. Aunado a ello, Batanero (2005) sugiere que plantear problemas relacionados con el azar a los estudiantes nos permite analizar las posibles dificultades y razonamientos incorrectos. La importancia de identificar los razonamientos estadísticos queda en evidencia en investigaciones como la de Inzunsa y Jiménez (2013) sobre prueba de hipótesis; o bien en la de García-García et al., (2020) sobre variación. En estos estudios se identifican que tanto estudiantes como profesores alcanzan un razonamiento estadístico en el nivel preestructural; lo que implica que poseen o aplican información aislada sin comprender lo que están haciendo.

Por tal motivo, en esta investigación se presenta el problema del Caballero de Méré a un grupo de 28 estudiantes de la carrera de sistemas computacionales de una universidad mexicana para que otorguen una solución a priori (antes de llevar un curso de probabilidad). El objetivo general es realizar una clasificación del tipo de razonamiento estadístico al resolver una paradoja de la historia. Además de identificar algunas de las causas de un razonamiento incorrecto para contrarestarlos con la contribución de argumentos que sean útiles para mejorar la clase de probabilidad.

### *Elementos históricos sobre probabilidad*

En los juegos con el dado, el jugador desea hacer un análisis acerca de la posible o no ocurrencia de un suceso con el objetivo de valorar a priori sus posibles ganancias (Mateos y Aparicio, 2002). El cálculo de las predicciones correctas tardó muchos años en llegar. A finales de la Edad Media, los grandes pensadores de la historia intentaron resolver juegos de dados relacionados con el azar, no solo basándose en creencias sino en posibilidades.

El desarrollo y primeros fundamentos del cálculo de probabilidades para los juegos de azar se produjo durante los siglos XVI y XVII (Mateos y Aparicio, 2002), con autores como Blaise Pascal (1623-1662) y Pierre de Fermat (1601-1665). En el año 1654, Blas Pascal viajaba con un jugador conocido como el Caballero de Méré, quien además de ser un hombre ilustrado era un apasionado por los juegos de dados y cartas (Restrepo y González, 2003). Este caballero tenía la creencia de que el comportamiento de los dados era diferente cuando se utilizaba un dado que cuando se empleaban dos dados. Este problema estuvo presente en la correspondencia entre Pascal y Fermat.

Entre las cartas que se conservan se encuentra una referencia a la situación, sin solución alguna por parte de uno ni de otro (Basulto y Camúñez, 2007); sin embargo, se entendía que ambos conocían la solución y que no querían perder el tiempo con ello. En concreto, el problema se encuentra en la carta que Pascal envío a Fermat el 29 de julio de 1654, donde hay evidencia que había sido propuesto por el Caballero de Méré amigo de Pascal (Basulto y Camúmez, 2007). Más adelante, en la solución de problemas con juegos de azar, discutidos por Pascal y Fermat en su correspondencia origina la definición clásica de la probabilidad (Batanero et al., 2021).

## Marco teórico

En el desarrollo de la inferencia estadística y el incremento de experimentos aleatorizados en distintas investigaciones, se tiene que la probabilidad ha adquirido relevancia en distintas áreas profesionales y científicas (Hernández et al., 2021). Según León et al. (2020), aprender probabilidad contribuye a desarrollar un pensamiento crítico, aplicable a diversas situaciones de la vida cotidiana y profesional.

No obstante, prevalecen algunas lagunas en su enseñanza y aprendizaje. Por ejemplo: la probabilidad se estudia como un conjunto de procedimientos de cálculo sin considerar que su aprendizaje implica un razonamiento nuevo (Sánchez y Valdez, 2017); las investigaciones sobre las intuiciones que las personas tienen sobre la idea de juego equitativo son todavía escasas (Hernández et al., 2021); el currículo profesional no contiene propuestas consolidadas en cuanto a probabilidad y su enseñanza y no existe en el sistema educativo una tradición de enseñanza de estadística escolar (Estrella, 2017); entre otros problemas que prevalecen.

Actualmente, algunos docentes con experiencia en el área estadística se han dedicado a responder la pregunta de ¿cómo hacer que el estudiante aprenda a razonar estadísticamente? Una opción es dejar a los estudiantes hacer proyectos, ya que les permite experimentar con mayor amplitud la actividad estadística y probabilística. La experiencia en el campo de la calidad y la investigación en educación han mostrado que la capacidad de pensar y resolver problemas de los estudiantes puede mejorarse mediante marcos estructurados de forma adecuada (Wild y Pfannkuch, 1999).

Al respecto, se considera que el pensamiento estadístico no está aislado al razonamiento. El pensamiento estadístico ha sido definido por Ben-Zvi y Garfield (2004) como la comprensión de porqué y cómo se llevan a cabo las investigaciones estadísticas y las ideas que de ellas subyacen y por Carnevalli et al. (2020) como un objetivo a largo plazo, ya que debe pasar a formar parte de la lógica corriente de quienes lo adquieren.

En un sentido transversal, el razonamiento estadístico ha sido un buen indicio para la investigación en alumnos que estudian probabilidad en todos los niveles educativos. Éste se define como lo que hacen las personas al razonar con ideas estadísticas y dar sentido a la información que reciben (Ben-Zvi y Garfield, 2004). En el campo de la probabilidad, el razonamiento estadístico puede combinar ideas acerca de los datos y el azar (Estrella, 2017). Además, se han realizado propuestas que propicien el razonamiento estadístico como la creación de ambientes de aprendizaje; éstas proponen una combinación de materiales, actividades, discusión, evaluación, entre otras (Ben-Zvi, 2011).

## Metodología

La presente investigación es un estudio cualitativo de carácter descriptivo acotado a una situación determinada (Guevara, 2020), basado en la metodología de SOLO (Structure of Observed Learning Outcomes). Este modelo consiste en presentar los conceptos y procesos usados por los estudiantes cuando realizan una tarea específica. Existe una propuesta genérica de Bills y Collins (1982) de la cual han surgido algunas adaptaciones como la de Isunza y Jimenez (2013) para el uso de las pruebas de hipótesis y más recientemente en 2022 por Rodríguez et. al para el uso de la Regla Empírica en probabilidad. A continuación se describen los sujetos de estudio, la actividad (qué es resolver el problema 1) y se presenta la descripción del modelo de SOLO aplicado al problema de los dados del Caballero de Mèrè.

### *Sujetos de estudio*

Los sujetos de estudio fueron 28 estudiantes de la licenciatura en Sistemas Computacionales que cursan tercer cuatrimestre de la Universidad Politécnica de Zacatecas y están inscritos en el curso de probabilidad y estadística. Cabe mencionar que la actividad se aplicó al inicio del curso, es decir, aún no habían revisado los principales conceptos de probabilidad. A la muestra de estudiantes se les propuso el problema del Caballero de Méré para que lo resolvieran en parejas y se le pidió a cada equipo que registraran sus resultados en la Tabla 1.

### *Problema por resolver: análisis a priori*

*Problema 1.* Se necesitan dos personas para llevar a cabo la actividad (jugador 1 y jugador 2). El jugador 1 lanzará un dado cuatro veces consecutivas y registrará sus resultados. Si el jugador 1 obtiene al menos un seis gana un peso, en caso contrario lo pierde. Cada jugador cuenta con tres pesos. Si un jugador se queda sin dinero antes de 10 experimentos el juego termina.

**Tabla 1.** *Tabla para registro de 10 experimentos tirando 4 veces el dado en cada uno de ellos.*

| E | Tirada 1 | Tirada 2 | Tirada 3 | Tirada 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1. | | | | |
| 2. | | | | |
| 3. | | | | |
| 4. | | | | |
| 5. | | | | |
| 6. | | | | |
| 7. | | | | |
| 8. | | | | |
| 9. | | | | |
| 10. | | | | |

**Fuente:** Tabla para registro de resultados

Se pregunta a los estudiantes el saldo al final del juego. Y se les presenta la pregunta que se planteó el Caballero de Méré: ¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos un seis en 4 tiradas de un dado?

El problema se puede resolver de la siguiente forma:
El evento se denomina:
"sacar al menos un seis en 4 tiradas con un dado"
El evento contrario es:
"No sacar ningún 6 en 4 tiradas con un dado"
O se puede pensar en 4 eventos:
A = No sacar un seis en la primera tirada del dado
B = No sacar un seis en la segunda tirada del dado
C = No sacar un seis en la tercera tirada del dado
D = No sacar un seis en la cuarta tirada del dado
Bajo este esquema, es posible resolver el problema utilizando la regla del complemento. Ésta se emplea para determinar la probabilidad de que un evento P ocurra restando de uno la probabilidad de que el evento P no ocurra. Según Lind et al. (2008) esta regla es útil porque a veces es más fácil calcular la probabilidad de que un evento suceda, determinando la probabilidad de que no suceda y restando a 1 el resultado. Adicionalmente, se realizan 4 experimentos al lanzar el dado en 4 ocasiones que son independientes.

En el caso de 4 eventos independientes, A, B, C y D ocurran, se determina multiplicando las 4 probabilidades utilizando la regla especial de la multiplicación y la regla del complemento de la siguiente forma:

P (~A, B, C y D) = $1 - (5/6)(5/6)(5/6)(5/6) = 0.5254$

Se esperan diferentes estrategias planteadas por los estudiantes y se realiza un análisis de los datos por medio de ítems. Los ítems fueron diseñados para contemplar los cuatro primeros niveles del modelo SOLO. Con base en el análisis de las respuestas y la actividad desarrollada por los estudiantes se ubicó a cada uno ellos en el nivel que le corresponde (Tabla 3). De esta forma es posible caracterizar el razonamiento estadístico de los alumnos con base a la propuesta realizada por Insunza y Jiménez (2013). Los conceptos que se evaluaron se derivan del análisis combinatorio (incluye regla de la multiplicación y combinaciones) según las respuestas dadas.

El modelo detallado de SOLO permite presentar los conceptos y procesos utilizados por un estudiante cuando resuelve una tarea específica y puede ser clasificado en uno de los cinco niveles propuestos; sin embargo, dada la complejidad de la paradoja del caballero de Meré, para un estudiante que no ha comenzado el curso de probabilidad y estadística solo se plantean 4 niveles. Existe una descripción genérica, como se ha mencionado, de cada nivel: modelo de Biggs y Collis (1982) y una adaptación de Insunza y Jiménez (2013) para las pruebas de hipótesis. La tabla 2 muestra los niveles del modelo SOLO en su descripción genérica aplicados a la solución del problema de los dados:

**Tabla 2.** *Niveles del modelo SOLO aplicados a la solución del problema de los dados del Caballero de Méré.*

| Nivel<br>(Modelo Bigg y Collis, 1982) | Descripción Genérica<br>(Insunza y Jiménez, 2013) | Descripción en contexto de la solución del problema de los dados<br>(Elaboración propia) |
|---|---|---|
| **Nivel Preestructural** | Los estudiantes no se enfocan en aspectos relevantes de la tarea que les ha sido planeada. Los conceptos o procesos son utilizados de forma simplista que los conduce a cometer errores. Pueden dejar la tarea sin resolver por falta de comprensión. | Los estudiantes cometen errores porque no entienden bien las instrucciones que les da el profesor.<br>Los estudiantes cometen errores porque no tienen información sobre los conceptos relacionados con el azar. |
| **Nivel Uniestructural** | Los estudiantes se enfocan en algún aspecto relevante de la tarea planeada o en alguna etapa de la tarea, realizan alguna conexión de un concepto o proceso con otro. Son capaces de desarrollar procesos simples. | Los estudiantes cumplen de manera correcta con las instrucciones y llenan de forma correcta las tablas.<br>Los estudiantes tienen algunas nociones de probabilidad. |
| **Nivel Multiestructural** | Los estudiantes se enfocan en más de un aspecto relevante de la tarea, pero no logran integrarlos para obtener una solución correcta. | Los estudiantes observan que la solución del problema no es equiprobable.<br>Los cálculos realizados son parcialmente correctos.<br>No logran integrar de forma correcta todos los conceptos de probabilidad que son necesarios para resolver el problema. Comete errores y no proporciona una solución correcta. |
| **Nivel Relacional** | Los estudiantes integran todos los aspectos relevantes de la tarea como un todo coherente con estructura y significado | Los estudiantes son capaces de recordar los principales conceptos relacionados con la regla de multiplicación y combinaciones estudiados en el nivel medio superior.<br>Los estudiantes hacen cálculos correctos e incluso pueden llegar a la solución del problema. |

## Resultados

Los resultados que se obtuvieron una vez que los estudiantes realizaron la actividad se dan a conocer en la Tabla 3, donde se muestran los niveles de SOLO aplicados a la solución del problema de los dados y se cruza la información con los ítems derivados de la adaptación genérica.

**Tabla 3.** *Niveles del modelo SOLO aplicados a la solución del problema de los dados del caballero de Méré por ítem y nivel.*

| Ítem | Nivel del Modelo SOLO relacionado con ítem | | | |
|---|---|---|---|---|
| | **Preestructural** | **Uniestructural** | **Multiestructural** | **Relacional** |
| 0. **Los estudiantes no entienden las instrucciones y no tienen información sobre conceptos relacionados con el azar.** | Una pareja de estudiantes se queda en el nivel preestructural. | | | |
| **1. Entiende las instrucciones y llena correctamente la tabla de tiradas de dados** | | 13 parejas completan la tabla correctamente. | | |
| **2. No se consideran combinaciones al momento de lanzar los dados** | | Ninguna pareja considera combinaciones al momento de lanzar los dados. | | |
| **3. Cálculos parcialmente correctos** | | Los cálculos de los estudiantes se resumen en la tabla 4. | | |
| **4. Presentan nociones de probabilidad** | | | Aunque los cálculos son incorrectos todos los estudiantes presentan nociones de probabilidad (tabla 4) | |
| **5. Presentan una solución al problema no equiprobable** | | | 13 parejas de estudiantes consideran los eventos de los dados igualmente probables al no tomar en cuenta las combinaciones. | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **6. Cometen errores y no proporcionan una solución correcta** | | | El 100% de los estudiantes presentan una solución incorrecta. | |
| **7. Consideran combinaciones al realizar sus cálculos** | | | | Ninguna pareja de estudiantes considera las combinaciones. |
| **8. Se hacen cálculos correctos y se llega a una solución idónea** | | | | Ninguna pareja de estudiantes llega a la solución correcta. |

En la tabla 3, se hace una relación del item a cada nivel del modelo SOLO. Al nivel preestructural le corresponde el ítem 0, al nivel uniestructural 1, 2 y 3, al nivel multiestructural 4, 5 y 6 y finalmente al nivel relacional los ítem 7 y 8.

Analizando las respuestas se puede ver que ninguna pareja de estudiantes:

- Piensa en las combinaciones de los números cuando intentan responder la pregunta planteada.
- Llega a la solución correcta.
- Utiliza la regla de la multiplicación para resolver el problema.

Por esta razón, se considera que ningún equipo alcanza el nivel de razonamiento 4 en la escala de SOLO (relacional), los estudiantes alcanzan como máximo el nivel multiestructural. De manera complementaria se observa que cuando al estudiante se le pide resolver el cuestionamiento del caballero de Méré: ¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos un seis en 4 tiradas consecutivas de un dado?, las respuestas, aunque similares son incorrectas (Ver Tabla 4).

**Tabla 4.** *Respuestas al planteamiento del caballero Méré que dan 14 parejas de estudiantes.*

| | ***Respuesta*** | ***Número de parejas*** |
|---|---|---|
| **¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos un seis en 4 tiradas consecutivas de un dado?** | 1/6 | 4 |
| | 4/24 | 4 |
| | 1.5% | 1 |
| | 51% | 1 |
| | 4/6 | 3 |
| | 4 porque desconocemos los dados | 1 |

## Conclusiones

Una característica de los fenómenos aleatorios es la impredecibilidad del resultado de un experimento aislado, aunque se puede predecir la distribución de resultados en una serie más grande de eventos independientes (Batanero et al., 2021). Esta afirmación podría ser un buen indicio para resolver el problema de los dados del caballero de Méré, debido a que algunos estudiantes observan que el comportamiento de los dados es distinto cuando se tira una vez a cuando se tira en varias ocasiones y esto los incita a multiplicar. De hecho, cuando los estudiantes dicen que existe un total de 24 posibilidades es porque multiplican los 6 lados de un dado por 4, razonamiento incorrecto, pero que tiene que ver con un número más grande de repeticiones.

La mayor parte de las parejas que resuelven el problema de forma errónea toman el enfoque clásico de probabilidad, como si el dado se tirara solo en una ocasión. Los estudiantes que contestaron que la posibilidad era 4/6 no justifican su respuesta. Se piensa, que debido a la experiencia con estudiantes que cursan probabilidad, el denominador hace referencia a las seis caras del dado y que el numerador son las cuatro tiradas a las que tienen oportunidad.

Por tal motivo, se considera que el razonamiento estadístico de los estudiantes se encuentra en un nivel preestructural, pues aunque llenan de manera correcta la tabla, para obtener la probabilidad solicitada lo hacen aplicando de manera simplista el concepto de probabilidad clásica, más como un proceso de utilizar un cociente de números conocidos (6 por las caras del dado y 4 por los lanzamientos).

En conclusión, los estudiantes tienen una intuición incorrecta y las nociones que tienen en la materia de probabilidad no les ayudan a resolver este tipo de problemas que se han planteado a través de la historia. El razonamiento estadístico se considera podría afinarse una vez que el estudiante adquiera elementos para dar solución a los problemas de probabilidad.

Una situación que se observa es que los estudiantes ya llevaron un curso de probabilidad en el nivel medio superior y que el conocimiento adquirido alcanza un nivel de razonamiento multiestructural en la escala de SOLO. Ningún estudiante resuelve el problema de forma correcta y no se utiliza la idea de combinación para poder dar solución. De esta manera, queda como responsabilidad al curso de probabilidad propuesto en los primeros años de universidad el reforzar los conceptos de la probabilidad que no fueron comprendidos en la etapa anterior. Por tal motivo, se considera necesario plantear el mismo problema al finalizar el curso universitario. Una hipótesis deseable sería que el estudiante podrá resolverlo de manera correcta, ya que con los elementos de la teoría de la probabilidad tendrá las nociones para dar solución y alcanzar un nivel de razonamiento relacional en la escala de SOLO. El profesor por su parte, se considera debe poner en práctica estrategias que propicien el razonamiento estadístico como propone Ben-Zvi (2011) donde se combinen materiales, actividades, discusión que ayuden al estudiante a razonar estadísticamente.

Al respecto, se han realizado propuestas que propicien el razonamiento estadístico como la creación de ambientes de aprendizaje; éstas proponen una combinación de materiales, actividades, discusión, evaluación, entre otras, como propone Ben-Zvi (2011).

## Referencias bibliográficas

Basulto, J. y Camúñez, J. (2007). El problema de los dados del Caballero de Meré: soluciones publicadas en el siglo XVII. *Suma 56,* 43-54.

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa,* 8(3), 247-263.

Batanero, C., Contreras, J., Díaz, C. y Arteaga, P. (2006). Paradojas en la história de la probablidad como recurso didáctico. Taller.

Batanero, C., Gea, M. y Álvarez-Arroyo, R. (2021). El inicio del razonamiento probabilítstico en educación infantil, *PNA Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática, 15*(4), 267-288.

Batanero, C., Begué, N., Álvarez-Arroyo, R. y Valenzuela-Ruíz, S. (2021). Prospective Mathematics Teachers Understanding of Classical and Frequentist Probability. *Mathematics, 9,* 2-15. 2526. https://doi.org/10.3390/math9192526

Ben-Zvi, D. (2011). Statistical reasoning learning environment. *Em Teia - Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana, 2*(2), pag.

Ben-Zví, D. y Garfield, J. (2004), "Statistical Literacy, Reasoning, and Thinking: Goals, definitions, and challenges", en Dani Ben-Zvi y Joan Garfield (eds.), The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning, and Thinking, Netherlands, Kluwer Academic Publishers, pp. 3-15.

Biggs, J. y Collis, K. (1982). Evaluating the Quality of Learning: The Solo Taxonomy. New York: Academic Press.

Carnevalli, G., Ferreri, N. y Pozzo, M. (2020). Objetivos para el desarrollo del pensamiento estadístico en alumnos del primer curso de estadística de la Carrera de ingeniería industrial. *Saberes, 12*(2), 160-172.

Estrella, S. (2017). Enseñar estadística para alfabetizar estadísticamente y desarrollar el razonamiento estadístico. En: Salcedo, A. (Comp.). Alternativas Pedagógicas para la Educación Matemática del Siglo XXI, (173–194). Caracas: Centro de Investigaciones Educativas, Escuela de Educación. Universidad Central Venezuela.

García-García, J., Fernández, N., Arredondo, E. y Díaz-Levicoy, D. (2020). Niveles de razonamiento estadístico de profesores de matemáticas sobre variabilidad. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias (REIEC), 15(*2), 27-37.

Guevara, G., Verdesoto, A., y Castro, N. (2020). Metodologías de investigación educativa (descriptivas, experimentales, participativas, y de investigación-acción). *Recimundo, 4* (3), 163-173. 10.26820/recimundo/4.(3).julio.2020.163-173

Hernández, L., Batanero, C., Gea, M. y Álvarez, A. (2021). Comparación de probabilidades en urnas: un estudio con estudiantes de Educación Primaria. *Uniciencia, 35*(2), 1-18.

Insunza, S. y Jiménez, J. (2013). Caracterización del razonamiento estadístico de estudiantes universitarios acerca de las pruebas de hipótesis. *Revista Latinoamericana de investigación en matemática educativa, 16*(2), 179-211.

León, J., López, J. y Carrillo, C. (2020). Significados de la probabilidad presentes en libros de texto de primer año de secundaria en México. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 33*(2), 78-88.

Lind, D., Marchall, G. y Wathen, S. (2008). Estadística aplicada a los negocios y la economía. México: Mc Graw Hill.

Mateos, G. y Morales, A. (2002). Historia de la Probabilidad y de la Estadística. En A.C. (Ed.), *Historia de la probabilidad (desde sus orígenes hasta Laplace) y su relación con la historia de la teoría de la decisión* (pp. 1-18). Madrid, España: Alfa Centauro.

Rodríguez, B., Figueroa, G., Guirette, O. y Durán, H. (2022). The Use of the Empirical Rule in the Probability Class: A Proposed Application for University Students to Determine the Type of Statistical Thinking. *Canadian Journal of mathematics science and technology education,* https://doi.org/10.1007/s42330-022-00237-y

Wild, C. y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review, 67*(3), 223-265.

VOL 36, NÚMERO 1, AÑO 2023

# LOS TEJIDOS SON LOS LIBROS QUE LA COLONIA NO PUDO QUEMAR. SABERES MATEMÁTICOS EN LOS TEJIDOS ANDINOS

# THE TISSUES ARE THE BOOKS THAT THE COLONY COULD NOT BURN; MATHEMATICAL KNOWLEDGE IN ANDEAN TISSUES

**María del Carmen Bonilla-Tumialán**
**Pontificia Universidad Católica del Perú. (Perú)**
mariacbonillat@gmail.com

**Resumen**:
Los estudiantes de la zona rural del Perú, pertenecientes a los pueblos originarios, presentan un bajo desempeño en matemáticas en comparación con los estudiantes de las zonas urbanas. Entre otros factores, esta brecha de exclusión tiene una raíz epistemológica. Desde hace 500 años, los saberes ancestrales desarrollados por las culturas andinas y amazónicas han sido invisibilizados, se ha producido un epistemicidio que se mantiene en la actualidad. En ese contexto, el presente estudio persigue el reconocimiento y revalorización de los saberes matemáticos ancestrales, en específico de la cultura Quechua-Collao, conocimientos que subyacen en sus prácticas diarias. En el marco de la Etnomatemática y la Teoría Antropológica de lo didáctico, y empleando el método etnográfico, la investigación ha podido evidenciar que en el proceso de elaboración del tejido andino emergen saberes matemáticos relacionados a la construcción del rectángulo, que podrían ser utilizados en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas de la educación básica de la región de Puno.

**Palabras clave**: etno-matemática, teoría antropológica en lo didáctico, epistemologías del sur, decolonialidad, complejidad

**Abstract**:
Students from the rural area of Peru, who belong to the indigenous peoples, present a low performance in mathematics compared to students from urban areas. Among other factors, this exclusion gap has an epistemological root. For 500 years, the ancestral knowledge developed by the Andean and Amazonian cultures has been invisible; an epistemicide has occurred which is currently maintained. In this context, the present study pursues the recognition and revaluation of ancestral mathematical knowledge, specifically of the Quechua-Collao culture, knowledge that underlies their daily practices. Within the framework of the Ethnomathematics and the Anthropological Theory of the didactic, and using the ethnographic method, the research has been able to show that in the process of elaboration of the Andean tissue, mathematical knowledge related to the construction of the rectangle emerges, which could be used in the mathematics teaching and learning processes in basic education in the Puno region.

**Keywords**: ethnomathematics, anthropological theory of the didactic, epistemologies of the south, decoloniality, complexity

## Introducción

La presente investigación se origina en la formación inicial docente de estudiantes indígenas quechuas, shipibos y aimaras que estudiaron la Carrera de Educación Intercultural Bilingüe (EIB) en la Facultad de Educación de la Universidad Peruana Cayetano Heredia (UPCH) de Lima. Los estudiantes vivían en las zonas rurales de las regiones de Puno, Cusco y Ucayali, y fueron favorecidos por becas otorgadas por el gobierno peruano el 2014, lo que les permitió acceder a estudios superiores en Lima.

Al inicio de su formación en el área de matemáticas los estudiantes tuvieron muchas dificultades en la formalización, sin embargo, en el trabajo práctico al elaborar diseños de sus culturas utilizando la geometría dinámica, aprendieron rápidamente a usar los comandos del Cabri II Plus para dibujar polígonos, rectas, para realizar transformaciones isométricas.

Sus trabajos son una muestra de la relación que existe entre cultura, estética y matemáticas (UPCH, 2014; Bonilla-Tumialán, 2015). ¿Cómo es posible que estudiantes indígenas recién llegados a la urbe puedan emplear con tanta facilidad los comandos de un software matemático para elaborar exitosamente sus diseños culturales? La situación de aprendizaje planteada tiene una base filosófica y epistemológica (Ernest, 2016) que cuestiona lo que comúnmente se acepta sobre la naturaleza y la enseñanza de las matemáticas.

En el siglo pasado, los filósofos han tratado de definir la naturaleza de las matemáticas teniendo en cuenta sus fundamentos lógicos y su estructura formal. En los últimos 50 años la búsqueda se ha desviado. El primero en destacar estos cambios fue Imre Lakatos (1983) a fines de los sesenta del siglo pasado, su trabajo sigue siendo muy relevante para la filosofía de las matemáticas y la educación matemática.

Lakatos enfatiza en el carácter histórico de las matemáticas, que no se descubre sino se construye. Señala dos estilos de la prueba matemática, que se pueden extender a dos formas de ver la naturaleza primigenia de las matemáticas, el estilo deductivista, ahistórico, eterno e inmutable, y el estilo heurístico, histórico, que enfatiza en la situación problemática, en el proceso de construcción de la prueba y el conocimiento matemático. Desde esa base teórica, la práctica matemática exitosa demostrada en el uso del software Cabri II plus, evidencia que si bien es cierto los estudiantes indígenas no tenían éxito en la formalización matemática, si podían aplicar los conocimientos matemáticos relacionados a la geometría que posiblemente habían adquirido en sus comunidades.

Las circunstancias llevaron a pensar que los estudiantes habían aprendido de manera práctica esos conocimientos matemáticos a través de las actividades de la vida diaria que sus familiares les habían transmitido. Es decir, se podría afirmar que los pueblos indígenas tienen conocimientos matemáticos que utilizan en su vida diaria y que subyacen a sus prácticas, a pesar de que la cultura quechua no ha llegado a la formalización, pues históricamente es una etapa ulterior. Aunque esta última afirmación puede ser discutible, pues se sabe que los quipus (Bonilla-Tumialán, 2016) eran un sistema de escritura que todavía no ha sido descifrado en su totalidad.

El deseo de resolver la situación problemática planteada, originó un proyecto de investigación interuniversitario y multidisciplinar integrado por docentes de la UPCH, la Pontificia Universidad Católica del Perú y el Laboratorio de Didáctica André Revuz de Francia, que fue financiado por el Consorcio de Universidades del Perú (Bonilla-Tumialán, 2019, p. 27). El equipo de investigación estuvo conformado por educadores, psicólogos, antropólogos y matemáticos. Inicialmente se consideró en el marco teórico al programa de investigación de la Etnomatemática, posteriormente se articuló con la Teoría Antropológica de lo Didáctico.

## Marco teórico

La Etnomatemática es un programa de investigación que genera, organiza, institucionaliza y difunde el conocimiento (D’Ambrosio, 1993), e impulsa una acción pedagógica. En su enfoque epistemológico parte de la realidad y recurre a varias dimensiones: histórica, cultural, social, política, cognitiva y pedagógica. Tiene como objetivo fundamental consolidar el paradigma relativista en matemáticas, el cual se basa en una epistemología cultural, que explica los conocimientos matemáticos en el contexto del grupo sociocultural de los sujetos productores. Los conocimientos matemáticos son constructos sociales que no puede nacer al margen de la cultura local (Oliveras, 2006).

***La Etnomatemática y la teoría de la Complejidad***

Desde la perspectiva planteada, se puede aproximar la Etnomatemática a la Teoría de la Complejidad, en tanto que, para resolver la problemática planteada se tuvieron que abordar diversas áreas del conocimiento. Desde una perspectiva clásica de la ciencia, el desarrollo de cada área disciplinar obedeció al deseo de explicar lo visible y complejo a través de lo invisible y simple (Jean Perrin, como se citó en Morin, 2004). En el inicio del desarrollo científico era necesario legislar, descubrir leyes que gobiernan los elementos fundamentales de la materia, principios de la ciencia clásica, y para lograrlo, era preciso reducir los objetos sometidos a las leyes, es decir, identificar sus elementos básicos.

Una vez construido el cuerpo de conocimientos de cada ciencia, en la actualidad, para resolver los problemas científicos es insuficiente el empleo de estos principios aislados. Es necesario recurrir al pensamiento complejo en el trabajo científico, hacer visible el carácter histórico del conocimiento, argumentar que lo importante no es solo identificar a los elementos de una ciencia, sino estudiar como estos elementos interactúan. En ese contexto teórico, la presente investigación tuvo que abarcar diversas áreas disciplinares para poder llenar los "huecos" que algunos cuestionamientos debilitaban la fundamentación teórica del estudio. En la figura 1 se pueden apreciar las disciplinas y los temas que se tuvieron que abarcar.

**Figura 1.** *Disciplinas científicas y temas involucradas en el estudio.*


**Fuente:** elaboración propia.

*Colonialidad de los saberes, epistemicidio y derechos epistémicos*

En pocas palabras, el deseo de develar los conocimientos matemáticos de los pueblos indígenas peruanos llevó a la *ciencia política*, expresada en la necesidad de reivindicar los *derechos epistémicos* del pueblo quechua, que ha desarrollado una epistemología propia, distinta a la occidental, pero que ha sido sistemáticamente invisibilizada desde la *colonia*, sufriendo un *epistemicidio* (de Souza, 2010, 2014).

*La ciencia del tejido andino y los saberes ancestrales*

Los tejidos son una parte muy importante de los saberes quechuas, por ello se puede hablar de la Ciencia del tejido (Arnold & Espejo, 2013). Los *tejidos andinos son los libros que la colonia no pudo quemar.* Es un saber ancestral que se empleaba en diversas áreas del conocimiento, se tejían los puentes (Ministerio de Cultura, s.f.), los techos de las casas, se tejía la escritura a través de los quipus (Bonilla-Tumialán, 2016) y de los tokapus. En los tejidos subyacen conocimientos astronómicos (Bucher-Fernández, 2019), y también conocimientos matemáticos, además de otros. Con la finalidad de estar seguros de que la técnica actual del tejido quechua es ancestral, se tuvo que recurrir a estudios históricos y antropológicos basados en crónicas del siglo XVII (Desrosiers, 1986).

*Las teorías socioculturales en la Educación Matemática*

Finalmente, en el campo de la Educación Matemática la Etnomatemática y la Teoría Antropológica de lo didáctico son teorías socioculturales sobre las cuáles se ha desarrollado el análisis de la información recogida en el trabajo de campo. Sobre ello, Artigue (2018) señala que los marcos teóricos pueden ser ensamblajes de varias teorías, o elementos de ellas, que se articulan para resolver problemas de investigación. Los ensamblajes elaborados deben ser necesarios y coherentes en su combinación, se debe respetar el sentido profundo de esta construcción, así como la función que cada teoría cumple en la construcción. Es posible combinar los marcos teóricos, así tengan visiones diferentes, siempre y cuando se utilicen en diferentes niveles y funciones teóricas. No se podría utilizar dos teorías con la misma función en una investigación, ambas deberían complementarse.

***La TAD y la organización praxeológica del tejido andino***

La Teoría Antropológica de lo Didáctico es un enfoque sociocultural que estudia los recursos sociales e históricos que las instituciones de los grupos sociales producen para dar solución a sus problemas básicos, siempre considerando que la solución está condicionada por el contexto sociocultural determinado por la realidad, por ello se habla de una epistemología antropológica (Castela, 2017). El modelo que se construye a partir de los recursos materiales, organizativos y cognitivos, producidos por los grupos sociales es la Organización Praxeológica (OP) o Praxeología (Chevallard, 1999). Este modelo permite estudiar cualquier actividad humana, y en el origen de una OP se dan procesos didácticos que forman parte de la epistemología de los grupos sociales en sus instituciones. Es aquí donde surgen los saberes en las sociedades, que posteriormente serán enseñados en la Academia, pero para ello es necesario que se dé un proceso de transposición didáctica (Chevallard, 1998).

*La Organización praxeológica o Praxeología del tejido andino*

En la OP se pueden distinguir dos niveles (Chevallard et al., 1997):

La praxis o el saber-hacer. Los tipos de tareas y las técnicas son los procedimientos necesarios que llevan a que las tareas se cumplan. El logos o saber, representado por la tecnología, que es el discurso que habla sobre la técnica, y la teoría, tecnología de la tecnología, da los argumentos que fundamentan la tecnología.

La praxeología es la unidad mínima de análisis que describe toda actividad humana. En la presente investigación se considera que el tejido andino quechua es una actividad humana, por ello, a partir del estudio de las fases del proceso de elaboración del tejido andino elaborado por una tejedora se van a determinar los tipos de tareas y las técnicas, así como la tecnología o discurso sobre la técnica, pero la organización praxeológica será personal (OPP). En cuanto a la teoría, Castela (2017, p. 12) señala que muchas veces la teoría es *evanescente o ausente*, quedando institucionalmente escondida.

En la presente investigación cuando se le pregunta a la tejedora como puede justificar el conjunto de técnicas y elementos tecnológicos asociados que utiliza en su labor, dice: “Mi mamá me lo enseñó”. Esta oración expresa poco, pero representa mucho de la cultura indígena. Para la TAD se le atribuye un valor a este discurso. Detrás de esa afirmación está implícito el cuerpo de conocimientos de la ciencia del tejido (Arnold & Espejo, 2013) que ha sido trasmitido por los pobladores andinos oralmente de generación en generación, desde hace milenios.

***Preguntas de investigación***

Tomando en cuenta el marco teórico planteado y la situación problemática a resolver que motiva la investigación, se llegó finalmente a plantear las siguientes preguntas de investigación: ¿Cuáles son y cómo se describen las fases del proceso de producción del tejido en telar de cuatro estacas (TTCE) de las comunidades quechuas de Puno? ¿Cuál es la OPP del proceso de elaboración del TTCE de una tejedora? ¿Cuáles son los objetos, nociones y propiedades matemáticas que subyacen a dichas prácticas? ¿Qué sugerencias generales se pueden proponer, a partir de dicho estudio, en el diseño de procesos de aprendizaje y enseñanza de la matemática en la Educación Básica Regular en la Región de Puno?

***Objetivos de investigación***

*Objetivo general*

Contribuir al estudio, reconocimiento y revalorización de los saberes ancestrales desarrollados por la cultura quechua-collao, en particular, identificar y caracterizar los saberes matemáticos involucrados en la elaboración de los tejidos en telar de cuatro estacas (TTCE) de la región de Puno.

*Objetivos específicos*

Determinar la Organización Praxeológica Personal (OPP) del proceso de elaboración del TTCE realizado por una tejedora informante de Puno, con el propósito de identificar elementos de su dimensión matemática.

Identificar las fases del proceso de elaboración del TTCE.

Identificar los tipos de tareas y las técnicas, que corresponden a la Praxis, así como la tecnología y teoría, pertenecientes al Logos, que conforman la OPP de las fases del proceso de elaboración del TTCE confeccionado por una informante de Puno.

Develar algunas nociones y propiedades matemáticas que emergen de la OPP de las fases del proceso de elaboración del TTCE.

## Metodología

El enfoque de investigación empleado fue el cualitativo. Se utilizó como diseño de investigación el método etnográfico, desarrollado por la Antropología. A través del trabajo de campo se realiza un estudio exploratorio en el que se aplica como técnicas la observación participante y las entrevistas a informantes claves, en un contexto bilingüe, español-quechua y español-shipibo. De igual manera, hubo reuniones con grupos de la comunidad, por lo que se puede señalar que la metodología fue participativa.

A mediados del 2016, se inició el trabajo de campo que se prolongó hasta enero del 2017 en las comunidades indígenas quechua-collao, Llalli y Machacmarca de la región de Puno, y en las comunidades nativas shipibo-conibo de Curiaca de Caco y Puerto Nuevo ubicadas en la región de Ucayali. Para poder tener un fácil acceso a la información brindada por la población de las comunidades se tuvo el apoyo de los padres de los estudiantes de la Carrera de EIB de la UPCH que colaboraron con el proyecto.

***El trabajo de campo en el método etnográfico en la Etnomatemática***

En el trabajo etnográfico el objeto de estudio es el “otro” (Guber, 2001) desde una perspectiva dialéctica. Lo que se desea es comprender al otro, comprender la diversidad humana, tanto en el aspecto físico como en lo simbólico. Se desea descubrir lógicas y racionalidades en prácticas aparentemente irracionales y sin sentido. Con ese fin es importante el estudio de la cultura y las prácticas consuetudinarias con el objetivo de descubrir sus significados.

La etnografía, a través de la inducción, construye teorías desde una visión no etnocéntrica a través de un proceso de involucramiento en el que se participa aprendiendo, no solo se observa. En ese contexto metodológico existe una tensión epistemológica entre objetividad, subjetividad y neutralidad, es decir, no hay una distinción absoluta entre el sujeto que investiga y el objeto estudiado, pues al observar los fenómenos los cambiamos, de acuerdo a la crítica de la mecánica cuántica (Heisenberg, citado por de Souza 2010).

***Pasos a seguir en el trabajo metodológico***

Del conjunto de prácticas sociales observadas en el trabajo de campo, como por ejemplo, la construcción de casas, la elaboración de cerámica, el tejido de redes para pescar, entre otras, se escogió la actividad humana del *tejido andino quechua-collao de cuatro estacas* de Puno, específicamente se estudió el proceso de elaboración de una *unqhuña*, prenda cuadrangular de aproximadamente 50 cm. de lado que se utiliza para llevar la coca en los rituales y que fue tejida por una señora experta en el oficio, por lo que el presente estudio corresponde a un estudio de caso.

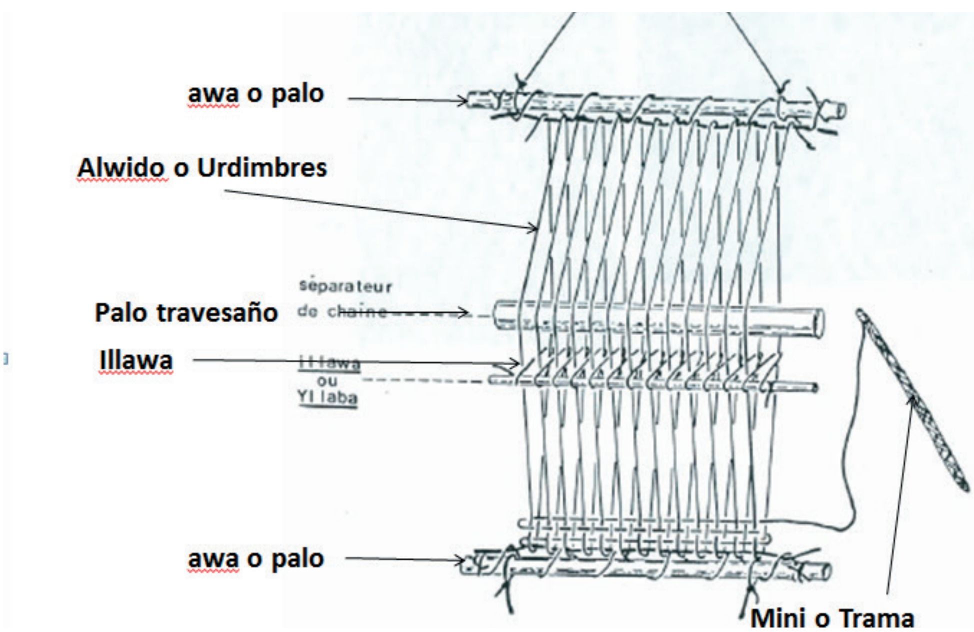
La información recogida de las prácticas fue registrada en medios audiovisuales, que posteriormente fueron analizados con el fin de: 1) identificar las fases del proceso de elaboración del tejido, 2) bajo el marco de la TAD, identificar los tipos de tareas y técnicas que corresponden a la praxis, así como las tecnologías y teoría dentro del logos, es decir, la organización praxeológica personal del tejido andino elaborado por la tejedora quechua, y 3) develar algunos conocimientos matemáticos que emergen del proceso de elaboración del tejido quechua. En realidad, se observaron a cuatro distintos tejedores, pero entre ellos se escogió a la tejedora que proporcionó más información y que tenía más voluntad para enseñar. La observación participante requiere que investigadores cumplan el papel de aprendices.

## Resultados

***Las fases del proceso de elaboración del tejido quechua***

Considerando los objetivos específicos planteados, a continuación, se dan a conocer las fases de elaboración del tejido quechua determinadas a partir del análisis de la información registrada en una tejedora. Si bien es cierto la técnica utilizada mayoritariamente en la región es la de *faz de urdimbre* (al final lo que se ve son las urdimbres), una tejedora puede conocer variedades de estilos de tejidos. En la figura 2 se puede visualizar los elementos básicos de un telar andino. El telar está colocado verticalmente.

**Figura 2**. *Telar andino común con una illawa.*

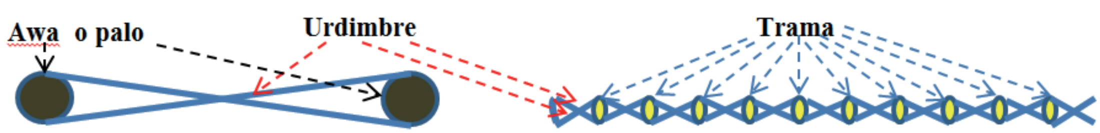



**Fuente:** d'Harcourt (1934, citado en Desrosiers, 2010, p. 266)

El tejido se produce cuando se entrecruzan las urdimbres y la trama, es así como a partir de elementos de carácter lineal, los hilos, se van elaborando superficies de dos dimensiones, las telas, que por su flexibilidad pueden acoplarse al cuerpo humano que tiene tres dimensiones. Esta situación, a su vez, configura una situación problemática, que da pie a formular la *pregunta fundamental del tejido andino de faz de urdimbre*:

¿Cómo construir una superficie plana y flexible a partir del entrecruzamiento de dos superficies formadas por urdimbres utilizando la trama como un dispositivo para garantizar la permanencia (estabilidad, rigidez) de los cruces? (Figuras 3 a y 3 b).

**Figura 3.** *a. Corte transversal del telar después del alwido. b. Corte transversal del tejido.*




**Fuente:** elaboración propia.

Posteriormente, en la figura 4 se aprecia una *unqhuña* y las fases del proceso de elaboración del tejido quechua.

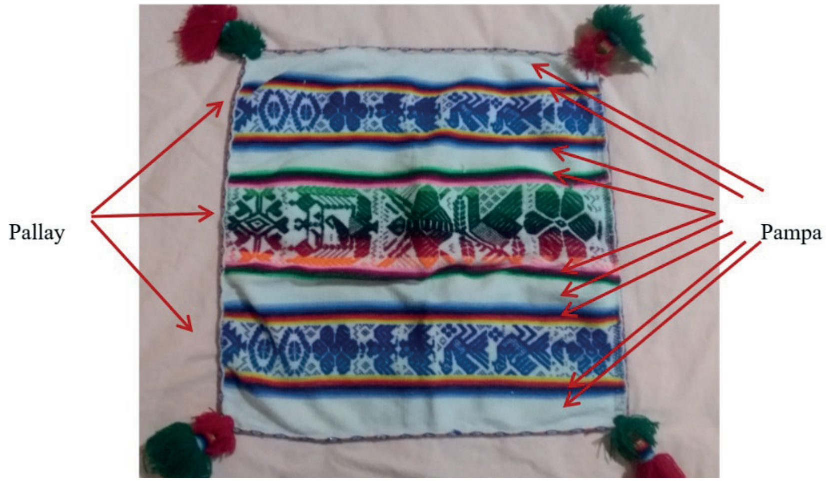
**Figura 4.** *Unqhuña y las fases del proceso de elaboración del tejido andino.*


**Fuente:** elaboración propia.

***Organización Praxeológica Personal del tejido andino***

En la tabla 1 se dan a conocer los tipos y subtipos de tareas que se identifican en las fases. En el tejido se distinguen dos zonas, la pampa y el pallay (figura 5).

**Figura 5.** *Zonas del pallay y de la pampa.*




**Fuente:** elaboración propia.

**Tabla 1.** *Tipos de tareas en las fases del proceso de elaboración del tejido en telar de cuatro estacas.*

| | **Fases del proceso de elaboración del tejido en telar de cuatro estacas** | **Tipo de tareas** | **Subtipo de Tareas** |
|---|---|---|---|
| 1 | Preparación de la lana para el tejido | K'antir o torcer la lana. | |
| 2 | Construcción de la estructura que soporta el telar | Clavar las cuatro estacas de acuerdo con el tamaño del producto final | |
| | | Amarrar las awas (palos) a las estacas | |
| 3 | El Allwido o urdido | Allwido o tender las urdimbres (pita o lana) en las awas | Tender las urdimbres de la pampa |
| | | | Tender las urdimbres del pallay |
| 4 | Preparación del telar para el tejido | Construcción de la illawa | |
| | | Traspasar las urdimbres de una de las awas a una lana gruesa | |
| 5 | El Tejido propiamente dicho | Tejer utilizando la trama | |

**Fuente:** elaboración propia.

Las técnicas y las tecnologías no pueden resumirse en un cuadro pues la explicación es extensa. En realidad, existen dos niveles de tecnología, uno es proporcionado por el discurso de la tejedora que explica, justifica o motiva la técnica. El otro nivel de tecnología es producido en la investigación para explicar con mayor claridad la técnica empleada, proporcionar justificaciones o motivaciones más profundas y elaboradas con un mayor sustento teórico, para representar simbólicamente el proceso a través de signos semióticos, como en el caso del allwido de la pampa (las franjas de un solo color) y del pallay (los dibujos o figuritas), o para representar gráficamente el proceso de elaboración. En realidad, el investigador también produce un modelo de OPP (Bonilla-Tumialán, 2019).

Algo importante a señalar sobre la técnica, en los vídeos se muestra que no hay un cuaderno con algo escrito sino un objeto de referencia. El objeto de referencia es el tejido que se quiere reproducir. En la TAD se habla de un ostensivo, una manera de representar las cosas. Aquí lo que representa el número es el objeto. Esta característica es un elemento de la técnica porque no solamente transmite sino recuerda la técnica, se debe producir una referencia y guardarla. La descripción de la técnica no solamente consiste en decir los gestos. El gesto primero es de guardar la referencia, sino no se puede utilizar esta técnica. Es una parte de la técnica tener un tejido de referencia. Otro aspecto de la técnica es que ésta se evalúa de acuerdo con el tiempo de producción (tejer dos unqhuñas al mismo tiempo para economizar o cinco alforjas en el tejido shipibo-conibo).

***Objetos matemáticos que emergen de la segunda fase, construcción de la base del telar***

A través del análisis de los vídeos registrados sobre el proceso de elaboración del tejido andino realizados por cuatro tejedoras, se pudo poner en evidencia que las señoras, al momento de construir la base del telar utilizando cuatro estacas, es decir, en la segunda fase del proceso, emplean técnicas similares a la construcción de un rectángulo.

En la tabla 2 se desea partir desde una visión antropológica, describiendo los gestos realizados por la tejedora cuando arma la base del telar; posteriormente, se señala las definiciones y propiedades relacionadas al rectángulo; y, finalmente, se relaciona los gestos con las definiciones y propiedades, representándolos simbólicamente. En el presente vídeo (Bonilla-Tumialán, 2020) se puede observar que la tejedora emplea intuitivamente el paralelismo y la perpendicularidad entre palos y sogas, pero no utiliza instrumentos que permitan verificar la exactitud de dichas construcciones.

*Definiciones y propiedades matemáticas relacionadas al rectángulo*

Definición 1: Se llama rectángulo al paralelogramo que tiene sus cuatro ángulos rectos.

Definición 2: Los paralelogramos son los cuadriláteros que tienen paralelos los dos pares de lados opuestos.

Como el conjunto de los rectángulos está incluido en el conjunto de los paralelogramos, las siguientes propiedades de los paralelogramos también les corresponden a los rectángulos:

Propiedad 1: Los lados opuestos son congruentes.

Propiedad 2: Los ángulos opuestos son congruentes.

**Tabla 2.** *Construcción del rectángulo a partir del ancho.*

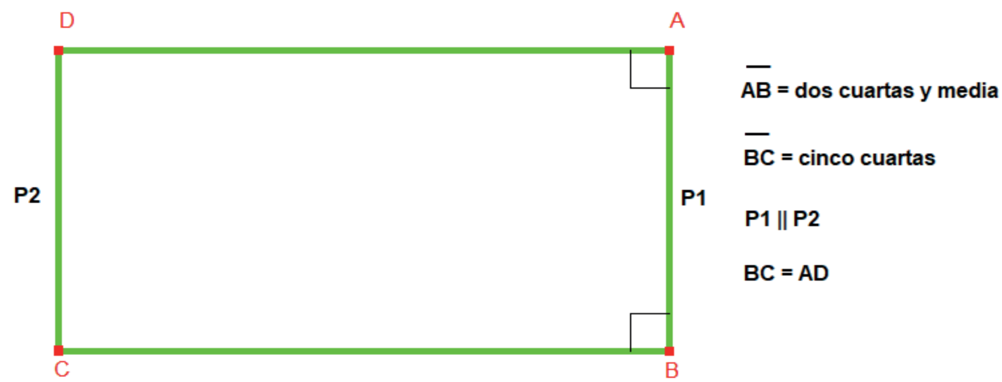
| **Gestos** | **Representación simbólica** | **Justificación** |
|---|---|---|
| Planta las estacas A y B con una distancia de dos cuartas y media entre ellas. | $\overline{AB}$ | Construcción |
| Coloca la awa (palo) P1 junto a A y a B. En la unión de P1 con B pone una lazada de la soguilla que mide 5 cuartas. La otra lazada va en la awa P2 paralela a $\overline{AB}$. | P1 = P2<br>$\overline{AB}$ ‖ P1 ‖ P2 | Construcción<br>Definición 2 |
| Tensa la soguilla buscando que sea perpendicular a la awa P1. | $< B = 90°$ | Definición 1 |
| Planta la estaca C en la intersección de la soguilla y la awa P2 | $\overline{BC}$, $< C = 90°$ | Definición 1 |

| | | |
|---|---|---|
| Traslada la soguilla a través de P1 y P2 utilizando las lazadas hasta que llegue hasta la estaca A, preservando el paralelismo a $\overline{BC}$. Planta la estaca D en la intersección de P2 y la soguilla, cuidando que la soguilla sea “rectita” o sea perpendicular a $\overline{AB}$. | $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$<br>$\overline{BC} = \overline{AD}$<br>$< D = 90°$<br>$\overline{AB} = \overline{DC}$ | Definición 2<br>Propiedad 1<br>Definición 1<br>Propiedad 1 |
| | $< A = < B = < C = < D$ | Propiedad 2 |

**Fuente:** elaboración propia.

En la figura 6 se puede apreciar como la construcción de la base del telar puede ser representada gráficamente utilizando símbolos matemáticos.

**Figura 6**. *Representación gráfica del rectángulo construido.*




$\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ $\quad$ $<DAB = 90°$ $\quad$ $\overline{BC} = \overline{AD}$

**Fuente:** elaboración propia.

## Conclusiones

Se puede afirmar que se han identificado algunas nociones y propiedades matemáticas que subyacen en la primera tarea de la segunda fase, clavar las cuatro estacas para la base del telar. Las tejedoras emplean técnicas parecidas a las técnicas matemáticas relacionadas a la construcción de rectángulos, actividad que les permite armar la estructura que soporta el telar y, de esa manera, elaborar sus tejidos con mayor facilidad. En el caso específico del presente estudio, los resultados han puesto en evidencia que en el proceso de construcción de la base del telar emergen saberes matemáticos que pertenecen al pueblo quechua-collao.

Por estudios históricos y antropológicos se ha podido reconstruir un tejido a partir de la lectura de una crónica del siglo XVII, concluyéndose que la técnica no ha variado (Desrosiers, 1986). Por ello, se puede afirmar que el proceso de elaboración de la base del telar es un saber ancestral y que en ese proceso subyacen nociones y técnicas matemáticas. Es preciso incorporar este tipo de saberes en los procesos de enseñanza de las matemáticas en la Educación Básica de la región de Puno, de esa manera los procesos serían pertinentes y contextualizados.

**Agradecimientos:** a los estudiantes indígenas de la UPCH, a sus padres y comunidades. A las señoras Isidora, Isabel, Domitila, Eduviges y al sr. Lorenzo. Así mismo, a los doctores Corine Castela, Cecilia Gaita, Eduardo Ruiz, Olga Bardales, Oscar Espinosa, Norma Rubio, Hernán Neciosup. A Juan Vicente Huamán, Leonard Sánchez Vera, Wendy Álvarez y Lucero Pinedo. A la UPCH, la PUCP, el Consorcio de Universidades y CONCYTEC.

## Referencias bibliográficas


Arnold, D. & Espejo, E. (2013). *El textil tridimensional: la naturaleza del tejido como objeto y como sujeto.* Instituto de Lengua y Cultura Aymara.

Artigue, M. (2018). *Construcción y uso de marcos teóricos en la investigación didáctica*. Conferencia del 1er Coloquio de doctorado en Matemática Educativa. Instituto Politécnico Nacional Cicata Legaria.

Bonilla-Tumialán, M. (2015). Etnomatemática y geometría dinámica. Patrick, R. y Ruíz, A. (Eds.). *Educación Matemática en las Américas. Talleres y minicursos*, 17, 169-176. Comité Interamericano de Educación Matemática (CIAEM).

Bonilla-Tumialán, M. (2016). Articulation of mathematical notions with quechua notions across History of Mathematics and Dynamic Geometry. En L. Radford, F. Furinghetti & T. Hausberger (Eds.). *History and Pedagogy of Mathematics 2016*, Montpellier, France. hal-01349237

Bonilla-Tumialán, M. (2019). *Un estudio del proceso de elaboración del tejido quechua en telar de cuatro estacas. Aportes para la enseñanza de las matemáticas en la educación básica*. Pontificia Universidad Católica del Perú.

Bonilla-Tumialán, M. (2020, 27 de agosto). *Construcción de la base del telar de 4 estacas quechua, Puno, Perú.* [Vídeo]. Youtube. https://youtu.be/kIDiZuheK_I

Bucher Fernandez, E. (2019). *La Astronomía en los mantos de Paracas*. Fundación ILAM.

Castela, C. (2017). La Teoría Antropológica de lo Didáctico: Herramientas para las ciencias de la educación. *Acta Herediana, 59*, 8-15.

Chevallard, Y. (1998). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado* (Tercera edición). Aique Grupo Editor.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(2), 221-266.

Chevallard, Y., Bosch, M. & Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje.* ICE/Horsori.

D'Ambrosio, U. (1993). Etnomatemática: Um programa. *Educação Matemática em Revista, 1*(1), 5-11.

De Souza Santos, B. (2010). *Descolonizar el saber, reinventar el poder*. Trilce.

De Souza Santos, B. (2014). *Epistemologies of the South. Justice Against Epistemicide*. Routledge.

Desrosiers, S. (1986). Une expérience de technologie: la reconstruction d'une ceinture précolombienne à partir d'un texte codé du XVIIe siècle. *Techniques & Culture* [En ligne], 6. DOI: 10.4000/tc.936.

Desrosiers, S. (2010). Les techniques de tissage ont-elles un sens? Un mode de lecture des tissus andins. *Techniques & Culture*, 54-55, 1, 263-285.

Ernest, P. (2016). An Overview of the Philosophy of Mathematics Education. En P. Ernest, O. Skovsmose, J. P. van Bendegem, M. Bicudo, R. Miarka, L. Kvasz & R. Moeller, *The Philosophy of Mathematics Education* (3-8). Springer.

Guber, R. (2001). *Etnografía. Método, campo y reflexividad*. Editorial Norma.

Lakatos, I. (1983). *La metodología de los programas de investigación científica*. Alianza Universidad.

Ministerio de Cultura del Perú [Mincul]. (s.f.). *Q´eswachaka, el último puente inka* [Vídeo]. Youtube. https://youtu.be/E5AAkU3-64A.

Morin, E. (2004). La epistemología de la complejidad. *Gazeta de Antropología*, (20).

Oliveras, M. (2006). Etnomatemáticas: de la multiculturalidad al mestizaje. En J. Goñi (coord.), *Matemáticas e interculturalidad* (117-149). Editores Graó.

Universidad Peruana Cayetano Heredia. (2014). *Etnomatemática y Geometría Dinámica*. https://www.flickr.com/photos/63485986@N02/sets/72157649003841112/with/15464648217/

# A IMPLEMENTAÇÃO DA EDUCAÇÃO FINANCEIRA NO CURRÍCULO DA EDUCAÇÃO BÁSICA BRASILEIRA: DESAFIOS E POSSIBILIDADES

# IMPLEMENTING FINANCIAL EDUCATION IN THE BRAZILIAN BASIC EDUCATION CURRICULUM: CHALLENGES AND POSSIBILITIES

**Claudia Fernandes Andrade do Espirito Santo, Marco Rodrigo da Silva Assis, Cassio Cristiano Giordano**
**Universidade Federal do Pará, Centro Estadual de Educação Tecnológica Paula Souza, Universidade Federal do Rio Grande. (Brasil)**
claudia.santo@iemci.ufpa.br, marco.assis@fatecguarulhos.edu.br, ccgiordano@furg.br

**Resumo**:
A Educação Financeira esteve ausente das propostas curriculares brasileiras, como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), até a publicação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), em 2018.Desde então, se tornou um Tema Contemporâneo Transversal (TCT), em toda a Educação Básica (estudantes de 6 até 17 anos de idade), além de estar presente em diversos Itinerários Formativos (IF), no Novo Ensino Médio (estudantes de 15 até 17 anos de idade), integrando os currículos nacionais. Investigamos a sua implementação curricular a partir dos casos das redes estaduais de ensino do Pará e de São Paulo, na proposta do Novo Ensino Médio, na perspectiva Educação Matemática Crítica. Analisamos documentos curriculares, bem como propostas de Aprendizagem Baseada em Projetos para estudantes desse segmento de ensino, com idades de 15 até 17 anos. Embora incipiente, ela surge como promissor elemento de promoção da interdisciplinaridade, criticidade e cidadania.

**Palavras-chave**: educação financeira, interdisciplinaridade, projetos

**Abstract**:
Financial Education was missing from Brazilian curricular proposals, as the National Curricular Parameters, until the publication of the National Common Curricular Base, in 2018. Since then, it has become a Transversal Contemporary Theme, throughout Basic Education (students from 6 to 17 years old), in addition to being present in several Training Itineraries, in the New High School (students from 15 to 17 years old), integrating the national curricula. We investigated its curricular implementation from the cases of the state schools of Pará and São Paulo, in the proposal of the New High School, in the perspective of Critical Mathematics Education. We analyzed curriculum documents, as well as Project-Based Learning proposals for students in this education segment, aged 15 to 17 years. Although incipient, it emerges as a promising element for promoting interdisciplinarity, critical sense, and citizenship.

**Keywords**: financial education, interdisciplinary, projects

## Problemática

Os Parâmetros Curriculares Nacionais — PCN, documentos norteadores dos currículos brasileiros da Educação Básica, em suas versões para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental (6-10 anos), para os Anos Finais do Ensino Fundamental (11-14 anos) e para o Ensino Médio (15-17 anos), publicadas no final do século passado (BRASIL, 1997, 1998, 2000), sequer mencionavam a expressão Educação Financeira (Azevedo, 2019).

A publicação da versão definitiva da Base Nacional Comum Curricular – BNCC (Brasil, 2018) introduziu oficialmente em toda a Educação Básica brasileira a Educação Financeira, em uma perspectiva interdisciplinar, na condição de um dos 15 Temas Contemporâneos Transversais – TCT (Brasil, 2019b), na macroárea Economia, juntamente com Trabalho e Educação Fiscal. Além disse, no mesmo ano, o Ministério da Educação — MEC publicou um documento apresentando as diretrizes básicas para a introdução dos Itinerários Formativos — IF no Ensino Médio.

Tais IF deveriam ser oferecidos em todas as quatros áreas desse segmento de ensino: Linguagens e suas Tecnologias; Matemática e suas Tecnologias; Ciências da Natureza e suas Tecnologias; Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, seriam escolhidos pelos estudantes e deveriam, a princípio, contribuir para seu ingresso no mundo do trabalho. Imediatamente, as redes de ensino municipais, estaduais e federais se mobilizaram para assegurar a sua efetiva implementação. No Estado de São Paulo, por exemplo, A Educação Financeira também foi oferecida, na constituição do Novo Ensino Médio, no IF Matemática Conectada, com carga horária de quatro aulas semanais.

No Estado do Pará, optou-se pela implementação, desde 2020, do Programa Aprender Valor, criado por iniciativa do Banco Central do Brasil, tendo como objetivo fundamental estimular o desenvolvimento curricular da Educação Financeira na perspectiva da Educação para o Consumo. O referido programa foi financiado com recursos do Fundo de Defesa de Direitos Difusos (FDD) do Ministério da Justiça e Segurança Pública. Em sua fase inicial, ainda em caráter experimental (denominada fase-piloto), em escolas de cinco Estados da Federação (a saber, Ceará, Mato Grosso do Sul, Minas Gerais, Pará e Paraná), além do Distrito Federal.

Nesse artigo, discutiremos a introdução oficial da Educação Financeira no ensino brasileiro, a partir da realidade de duas redes de ensino público: a do Estado do Pará (Pará, 2019, 2021, por implantar um modelo externo, não criado para atender as especificidades locais, mas com potencial para integrar diferentes estados em uma proposta nacional, e a do Estado de São Paulo (São Paulo, 2019, 2020), por ser a maior rede de ensino do Brasil, além de ter elaborado material didático próprio. Pará e São Paulo estão entre os Estados precursores desse novo campo de ensino e aprendizagem em seu país.

## Marco teórico

Na perspectiva da Educação Matemática Crítica, Skovsmose (2001) ressalta que o desenvolvimento da criticidade emerge de práticas investigativas dinâmicas e colaborativas, em situações contextualizadas na realidade dos estudantes. Inspirados nessas ideias, adotamos uma vertente da Educação Financeira que busca a construção para o bem-estar social e do indivíduo ao invés de preparação para o consumo de produtos bancários.

Nesta perspectiva, Skovsmose (2001) salienta que tanto o professor quanto o aluno são instrumentos fundamentais no processo de ensino e aprendizagem. É uma relação caracterizada pela parceria e igualdade. Não cabe ao professor um papel decisivo e prescritivo, pelo contrário, deve haver amplo diálogo entre os sujeitos envolvidos no processo educacional. O protagonismo discente emerge de metodologias de ensino ativas, como a Modelagem Matemática – MM (Santo, 2018) ou a Aprendizagem Baseada em Projetos – ABP (Giordano, Pereira & Gautério, 2022). É importante que o professor crie situações de aprendizagem que conscientizem os estudantes sobre a relevância da Educação Financeira, não apenas como um projeto de vida, uma vez que sua concepção não se restringe a um projeto de sociedade, com qualidade de vida, distribuição de renda, democracia e justiça social.

## Metodologia

Realizamos uma pesquisa qualitativa, do tipo estudo de caso (Creswell & Creswell, 2021), analisando as propostas curriculares das redes estaduais de ensino do Pará e de São Paulo, em sua implementação, no início de 2022, bem como as atividades desenvolvidas por 35 estudantes, com idades entre 15 e 17 anos, nos moldes da Aprendizagem Baseada e Projetos – ABP, de uma escola paulista, na componente curricular Educação Financeira em Conexão.

## Resultados

No Estado do Pará, a metodologia de ensino voltada à Educação Financeira foi adotada de forma institucional e programática pelo Governo do Estado, tendo como objetivo central estimular os estudantes paraenses, desde tenra idade, a desenvolver consciência no planejamento de gestão de seus próprios recursos financeiros, principalmente os estudantes da rede pública de ensino, priorizando os estudantes do Ensino Fundamental, a se inscreverem no Programa Aprender Valor, que tem, igualmente, como objetivo ensinar os estudantes da rede pública de ensino a valorizar os recursos que possuem, de modo a fazer a melhor gestão desses valores, tornando-os assim futuros adultos conscientes da necessidade de independência financeira e autossustento.

Dadas as dimensões do Estado do Pará, e a grande dificuldade de implementação e execução de um projeto dessa envergadura na Rede Pública de Ensino, apenas 108 escolas-piloto foram selecionadas para sediar os espaços de aprendizagem, sendo 25 da rede estadual e 83 da rede municipal, atingindo 52 cidades paraenses, as quais foram convidadas a participar inicialmente do projeto.

O alastramento da pandemia COVID-19, entretanto, afetou drasticamente a sua execução, e quando escrevemos esse artigo, há previsão de que o projeto seja retomado no segundo semestre de 2022. Ressalte-se que o Programa "Aprender Valor" fora criado por iniciativa do Banco Central do Brasil — BCB, tendo como objetivo estimular o desenvolvimento curricular da Educação Financeira e da Educação para Consumo, voltada para estudantes das escolas públicas brasileiras, sendo financiado com recursos do Fundo de Defesa de Direitos Difusos, do Ministério da Justiça e Segurança Pública. Ele vem sendo implementado efetivamente desde o início de 2020, em caráter experimental (denominada de *fase-piloto*), em escolas selecionadas de cinco Estados da Federação (a saber, Ceará, Mato Grosso do Sul, Minas Gerais, Pará e Paraná), incluído o Distrito Federal.

Programas como esse se configuram pela perspectiva da Educação para o Consumo, em um modelo mais preocupado com a oferta de produtos e serviços bancários que de uma Educação Financeira popular, atenta às demandas que mais afetam os brasileiros, sobretudo no contexto pandêmico, como a fome, o desemprego, o trabalho informal precário. Nesse cenário, não há muito espaço para pesquisa discente autoral, para trabalhos originais que valorizem o protagonismo discente, na perspectiva da ABP, da MM, da Resolução de Problemas, mas sim uma proposta de caráter meramente programático e orientativo, sem efetividade prática, um currículo meramente simbólico e inoperante, apenas ilustrativo, quando, na verdade, deveria ser dever de profissionais, gestores e administradores das redes de ensino em todo o Brasil, no sentido de observar a formação em suas grades curriculares, o ensino da Educação Financeira como fonte político-pedagógica de inclusão e transformação social.

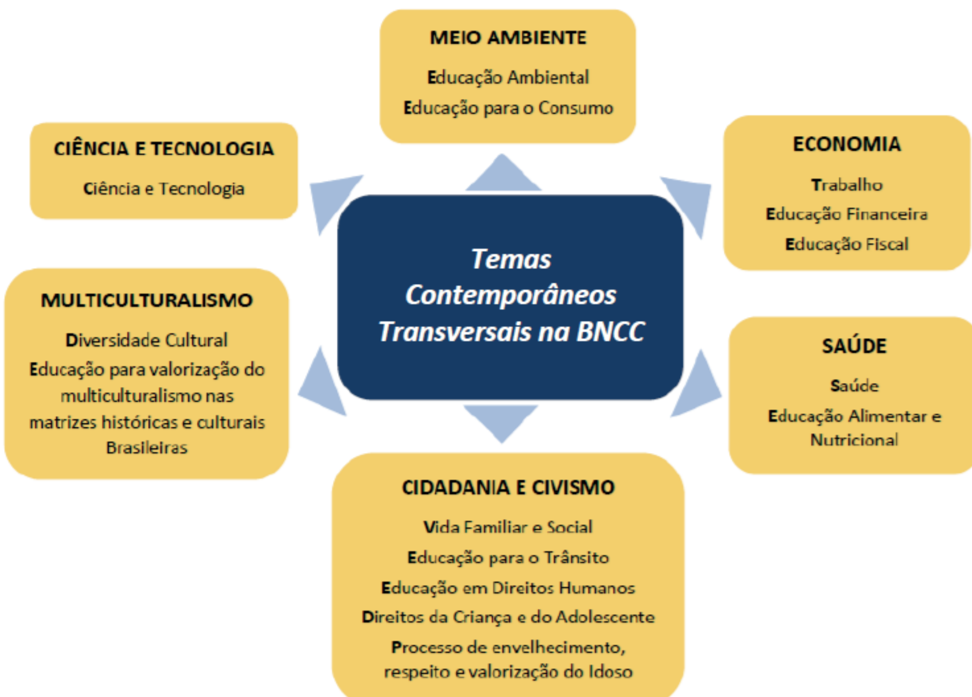
Uma proposta de Educação Financeira que respeite as orientações da BNCC (Brasil, 2018) deveria promover uma cultura transformadora do povo brasileiro e formadora de futuros cidadãos responsáveis financeiramente. É essencial a politização dos educandos e de suas famílias, direcionando-os à promoção de uma nova consciência voltada para à melhoria de suas perspectivas sociais, inclusão no mercado de trabalho, independência e autodeterminação financeira, mas que também estivesse orientada, não somente para um projeto de vida, mas para um projeto de sociedade, preocupada com a coletividade e com o meio ambiente.

Santo (2018) defende a perspectiva de uma MM capaz de articular saberes matemáticos e não matemáticos, que se realizam em diferentes instituições com uso ou manipulação de objetos matemáticos, possibilitando ao estudante brasileiro e suas respectivas famílias condições para aprimorar seu empreendedorismo, frente à crise econômica nacional. De acordo com essa autora, a MM em contexto concretos, enquanto projeto político-pedagógico voltado à Educação Financeira, possui nítida índole sociocultural. Ela não se realiza tão somente por meio da prática matemática, mas por outros saberes, nem sempre explicitados no modelo matemático, que com isso irão visar essencialmente reduzir as desigualdades sociais e regionais das famílias brasileiras.

Por outro lado, o Currículo Paulista, em suas duas versões, para Ensino Fundamental e Ensino Médio (São Paulo, 2019, 2020), não passou de uma mera transposição da BNCC (Giordano e Kian, 2021), o que, aliás, se repetiu em diversas propostas curriculares nacionais. No entanto, diferentemente do Estado do Pará, o Estado de São Paulo apresentou alternativas próprias para a exploração da Educação Financeira.

Primeiramente, reconhecendo-a como um TCT, com possibilidade de exploração, tanto no Ensino Fundamental quanto no Médio por meio das novas disciplinas criadas em 2020: Tecnologia & Inovação, Projeto de Vida e Eletivas (Giordano e Kian, 2021; Cazorla e Giordano, 2021). Essa última, possibilitava que os professores criassem cursos e oferecessem aos seus estudantes, como componentes curriculares optativas, sobre temas diversos. Nos dois módulos de formação para os professores da rede estadual paulista, oferecidos em 2020 e 2021, uma das sugestões foi a Educação Financeira como se pode observar na figura 1.

**Figura 1.** *Temas Contemporâneos Transversais.*




**Fonte:** Brasil (2019b, p. 13)

Além dos TCT (Brasil, 2019b), a rede estadual paulista trouxe a Educação Financeira em sua proposta de implementação e implantação dos IF (Brasil, 2019a), de modo gradativo, em 2021 para o 1º ano do Ensino Médio e em 2022, para o 2º ano. O objetivo agora é fechar o ciclo, oferecendo os IF, em 2023 para os concluintes do Ensino Médio.

Em 2022, foram disponibilizadas 244 novas componentes, por meio do documento Matrizes das Unidades Curriculares dos Aprofundamentos que compõem os IF (São Paulo, 2022b). Tais IF foram organizados, para escolha direta dos estudantes no site da Secretaria Digital, em Unidades Curriculares de dez horas-aula semanais de duração (em 2023, para o 3º ano do Ensino Médio, serão 25 horas-aula dedicadas aos IF). Uma dessas unidades é Educação Financeira Sustentável, atrelada à Matemática Conectada, com dez horas-aula semanais assim distribuídas: quatro para ‘Educação Financeira em Conexão’, duas para ‘’Conexão Empreendedora, duas para ‘Fenômenos físicos e a interpretação de gráficos’ e duas para ‘A influência da mídia no consumo dos jovens’ (São Paulo, 2022b, p. 9), embora tenham sido os identificadas outras novas componentes curriculares potencialmente associadas à Educação Financeira:

**Quadro 1.** *Componentes curriculares potencialmente associadas à Educação Financeira.*

| Unidade Curricular | Componente Curricular | Habilitação Prioritária | Habilitação Alternativa | Aulas semanais |
|---|---|---|---|---|
| Projeto economia circular | Cidades sustentáveis | Biologia | Química | 3 |
| Comprar ou não comprar, eis a questão | Cultura de consumo | Língua Inglesa | Português ou Arte | 2 |
| #Seliganavisão | Criatividade emprendedora | Arte | Português ou Inglês | 2 |
| Educação financeira sustentável | Educação Financeira em conexão | Matemática | Física | 2 |
| Educação financeira sustentável | Conexão Empreendedora | Matemática | Física | 4 |
| Educação financeira sustentável | Fenômenos físicos e interpretação de gráficos | Física | Matemática | 2 |
| Educação financeira sustentável | A influência da mídia no consumo dos jovens | Arte | Matemática | 2 |
| Eu jovem a caminho do mundo do trabalho | Resolução de problemas em conexão | Matemática | Física | 5 |
| Produção em contexto global | Trabalho e economía | Sociologia | Filosofia ou História | 2 |
| Números também importam | Demografia: investigação das populações humanas | Geografia | Sociologia ou História | 2 |
| Números também importam | Trabalho, política e pensamento econômico | História | Filosofia ou Sociologia | 2 |
| Números também importam | Mudanças sociais, demografia e trabalho | Sociologia | Geografia | 2 |
| Consumo, logo existo | Eu consumidor | Matemática | Física | 2 |
| Indicadores sociais: o que isso muda na minha vida? | O impacto de indicadores em seu projeto de vida | Matemática | Física | 4 |
| Cidades e comunidades sustentáveis | Funções: consumo e preservação do meio | Matemática | Física | 2 |
| Como se tornar um consumidor mais consciente? | Práticas Corporais: Autoimagem e Consumo | Educação Física | Não há outra habilitação | 2 |
| Como se tornar um consumidor mais consciente? | A relação entre números e mídia: dados e escolhas | Matemática | Física | 4 |

**Fonte:** Autoria própria

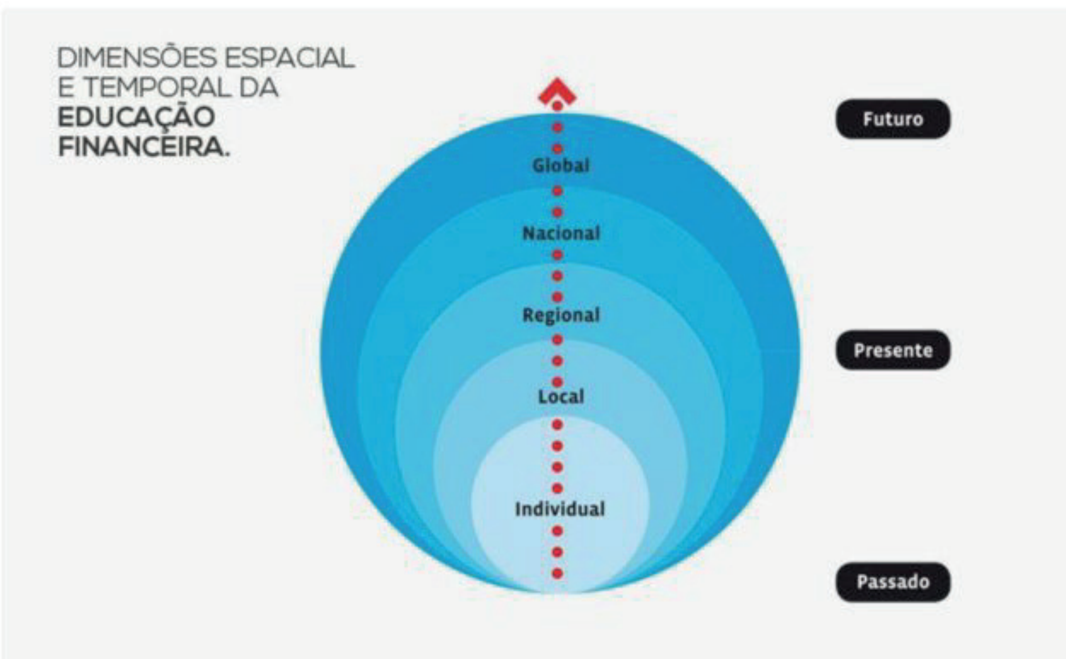
No material exclusivo dos professores, dedicado a quem assume as aulas de Educação Financeira, logo no primeiro parágrafo, encontramos a introdução ao curso:

> Professor, ao serem desenvolvidas as propostas deste componente curricular, espera-se mobilizar os estudantes para a aprendizagem matemática, conectando-a com temas da educação financeira em situações do cotidiano. Assim, eles deverão compreender como gerenciar seus recursos financeiros, considerando as questões individuais e a administração de renda. (São Paulo, 2022a, p. 15)

Fica evidenciada, mais uma proposta de Educação Financeira centrada em um projeto de vida do indivíduo, em seu orçamento pessoal, desconectado da realidade social, política, econômica e ambiental que o rodeia, como preconiza a BNCC (Brasil, 2018).

Nas propostas de Educação Financeira paraense e paulista, notamos a falta de uma perspectiva macroeconômica, social, política e ambiental, centrada no presente e no futuro (ignorando fatores historicamente construídos) e no indivíduo (ignorando demais esferas sociais), contrariando o que preconiza a Estratégia Nacional de Educação Financeira —ENEF:

**Figura 2.** *Dimensões Espacial e Temporal da Educação Financeira.*




**Fonte:** Adaptado do Plano Diretor da ENEF (2019)

Giordano, Assis e Coutinho (2019) reconhecem a necessidade de uma abordagem dialógica da Educação Financeira, que promova a reflexão e o posicionamento consciente e responsável a respeito dos problemas centrais de nossa sociedade, de natureza política cultural, econômica, social, ambiental, e sugerem a perspectiva da Educação Matemática Crítica. Poderíamos partir de outros referenciais teóricos, como a Insubordinação Criativa, a Etnomatemática ou a Estatística Cívica.

O que não podemos fazer é adotar uma leitura da Educação Financeira limitada a aspectos técnico-procedimentais, de forma acrítica e até mesmo alienada, que se limite a tentar nos tornar consumidores melhores, ao invés de pessoas melhores, que coloca os problemas financeiros individuais alheio aos problemas centrais de nossa sociedade. Para abordar questões tão complexas, como observam Santo (2018), Giordano, Assis e Coutinho (2019) e Cazorla e Giordano (2021), é necessário repensar, dentre outras coisas a formação inicial e continuada de professores, a produção de materiais didáticos e, acima de tudo, ouvir o principal agente da transformação social por meio da escola: o estudante.

O interesse, a motivação e o engajamento dos estudantes do Ensino Médio nas atividades de Educação Financeira previstas no material apostilado proposto pelo governo do Estado de São Paulo, que assim como o do Pará, tinham como foco concepções bancárias de venda de produtos e serviços, além da educação para o consumo, ficou aquém do esperado. A discussão sobre temas como poupança ou previdência privada adquiriu um tom tecnicista, procedimental, próximo da clássica Matemática Financeira.

Por outro lado, a perspectiva de desenvolvimento de projetos sobre temas de sua livre escolha, explorando o leque de possibilidades dos TCT (Cazorla & Giordano, 2021) suscitou o protagonismo discente, na perspectiva da ABP, contribuindo para o aprimoramento de seu letramento financeiro e estatístico, de forma articulada e integradora com Educação Ambiental, Trabalho, Educação Fiscal, Educação Alimentar e Nutricional, Educação para os Direitos Humanos, Diversidade Cultural, Ciência e Tecnologia.

Para ilustrarmos as primeiras experiências de Educação Financeira na sala de aula, no contexto, pós-BNCC (Brasil, 2018), discutiremos uma experiência embasada na ABP, desenvolvida no Estado de São Paulo.

O Eixo Norteador de IF Empreendedorismo (Brasil, 2019a) se justifica por instrumentalizar o estudante a “participar de uma sociedade cada vez mais marcada pela incerteza, volatilidade e mudança permanente” bem como “se apropriar cada vez mais de conhecimentos e habilidades que os permitam se adaptar a diferentes contextos e criar novas oportunidades para si e para os demais”. Por outro lado, a ABP voltada à Educação Financeira pode contemplar, segundo Giordano, Assis e Coutinho (2019, p. 15), premissas da Educação Matemática Crítica (SKOVSMOSE, 2001) e Educação Financeira Crítica (Campos, Teixeira e Coutinho 2015), tais como o “uso de estratégias e procedimentos matemáticos aplicáveis à realidade imediata dos cidadãos, articulação de ações matemáticas para investigar os desafios da contemporaneidade de forma ética e socialmente responsável, compreensão da flexibilidade e fluidez das representações matemáticas”.

Assim, em 2021, foi realizado, durante um semestre letivo, em uma turma de 2º ano do EM, na nova componente curricular da rede estadual paulista, Tecnologia & Inovação, o projeto Empreendedorismo & Sustentabilidade, articulando Educação Financeira, Empreendedorismo, Educação para o Consumo (embora essa expressão não nos agrade, por transmitir implicitamente a ideia de promoção do consumismo, é assim que aparece nos documentos oficiais, como Brasil (2019a), Meio Ambiente e Sustentabilidade.

Os 31 estudantes dessa turma elegeram problemas ambientais significativos e desenvolveram o Ciclo Investigativo de Pesquisa, e por meio da ABP, realizaram suas pesquisas, ainda no contexto pandêmico, organizando-se de modo remoto e, ao término do ano, presencial.

Um dos temas escolhidos por eles foi a *Fast Fashion*, surgida na década de 1990, na perspectiva de uma produção de baixo custo, barateamento tanto da mão de obra (e precarização das condições de trabalho) quanto matéria-prima na indústria têxtil, produzindo peças que lembravam a alta costura, porém tinham custo baixo para o consumidor e um tempo de vida reduzido. Por consequência, as roupas de baixa qualidade, sujeitas à volatilidade do mundo da moda, gerava mais resíduos sólidos, impactando sobremaneira o meio ambiente.

Uma das soluções apresentadas, como produto desse projeto, foi a customização de roupas, calçados, bolsas e demais acessórios, aproveitando peças, parcialmente danificadas, reduzindo o consumo e consequentes impactos ambientais, em um momento de crise econômica, permeado pelo desemprego e redução do poder de compra, revitalizando o guarda-roupa dos jovens e, até mesmo, melhorando a sua autoestima. Alguns grupos, inclusive, apresentaram propostas de comercialização de peças customizadas, contribuindo, de forma empreendedora, para a geração de renda em famílias vítimas do desemprego. A seguir, apresentamos algumas peças confeccionadas por esses estudantes:

**Figura 3.** *Alguns resultados do projeto de Customização X Fast Fashion*


**Fonte:** Dados da pesquisa

Ressaltamos que 2021 foi o ano de escolha dos IF para 2022 e, nesse contexto, a transversalidade da Educação Financeira era explorada em projetos interdisciplinares, em São Paulo, e por meio das novas componentes curriculares Eletivas, Projeto de Vida e Tecnologia & Inovação, como foi o caso do projeto aqui citado. Embora o exemplo mencionado se refira a uma turma de 2º ano do Ensino Médio, ele se deu em turmas de 6º, 7º e 8º anos do Ensino Fundamental, bem como 1º e 2º anos do EM, nessa unidade escolar, e associado a outras iniciativas, influenciou a escolha de alunos pela Educação Financeira, a ser implantada definitivamente como IF em 2022. Vale ressaltar que o cardápio de IF era constituído por mais de 240 opções de componentes curriculares, ou seja, a disputa foi acirrada, mas a semente já havia sido lançada.

Assim, em 2022, sob a regência de aulas do mesmo professor, nessa escola pública da Grande São Paulo, uma turma de 33 estudantes do 2º ano do EM desenvolveu atividades de Educação Financeira, na nova componente Educação Financeira em Conexão.

Contando com quatro aulas semanais (Matemática tinha apenas três), nessa nova grade curricular, foram realizadas atividades envolvendo ABP, Modelagem Matemática, Ensino Híbrido, criação de um *Podcast*, mas destacamos, agora uma proposta didática de Gamificação, pois ela aconteceu no encerramento do semestre letivo, quando essa componente seria substituída pela componente Jogos, da estratégia à criação — conexões lógicas: eu e o mundo.

Como já dissemos, não nos cabe, aqui, discutir a continuidade desses IF, que em São Paulo são semestrais, até porque os objetivos e o material preparado para esse componente curricular ainda não são bem conhecidos, nem pelos professores, tampouco pelos estudantes. Contudo, em Educação Financeira Conectada, a exploração de jogos foi introduzida e assim justificada, por meio do material institucional da Secretaria de Educação — SEDUC-SP (São Paulo, 2022a, p. 26): "A escolha da metodologia de aprendizagem baseada em jogos tem a intenção de obter maior envolvimento dos estudantes em situações que envolvem suas finanças, com o objetivo específico da compreensão do planejamento do orçamento doméstico ou pessoal", complementando que essa abordagem "integra o ato de jogar com os objetos de conhecimento a serem aprofundados".

Os jogos estão presentes em nossa civilização há milênios e nas últimas décadas também tem sido objeto de interesse dos educadores matemáticos. A perspectiva da Gamificação, no entanto, não se concentra apenas na criação ou na análise de estratégias de jogo, mas em utilizar a mecânica, a estética e o pensamento baseados em jogos para mobilizar os estudantes, resolver problemas e promover o aprendizado (Kapp, 2012). Em consonância com essas ideias, Alves (2018, p. 9) afirma, e nós concordamos com ele, com a exploração da gamificação como recurso que "contribua para o desenvolvimento dos alunos e dos professores, em ambiente educacional".

Assim, os estudantes da turma de 2º ano, na componente curricular de Educação Financeira, ao final do semestre, participaram de uma Mostra Cultural de sua escola, apresentando jogos por eles criados, ou jogos já existentes, mas adaptados àquilo que foi estudado ao longo do 1º semestre de 2022, em sala de aula, que incluía, discussões como Consumismo X Consumerismo; Orçamento Familiar e Finanças; Projeto de Vida X Projeto de Sociedade; Consumo Consciente e Sustentabilidade, Endividamento, Planejamento e Recuperação Financeira; Educação Financeira e o Mundo do Trabalho; Alternativas aos impactos da pandemia de COVID-19 em nossas vidas; A Invasão da Ucrânia e a Economia Mundial, dentre outros temas. Vale ressaltar que nem todos eles constavam no material oferecido pelo governo paulista. Abaixo, algumas dos jogos elaborados pelos alunos dessa turma:

**Figura 4.** *Jogos e Educação Financeira.*


**Fonte:** Dados da pesquisa

O primeiro jogo, na figura anterior, à esquerda, denominado pelos estudantes que o criaram de *Awesome Bank*, se tratava de uma adaptação do clássico Banco Imobiliário à realidade local e acabou funcionando como um mapeamento socioambiental do entorno escolar, apresentando potencialidade e fragilidades dos equipamentos públicos e instituições privadas de educação, saúde, lazer, cultura, saneamento básico, além dos imóveis de alguns estudantes, avaliados de acordo com o carnê do Imposto Predial e Territorial Urbano (IPTU), com o consentimento dos mesmos.

No entanto, mesmo com autorização, para não causar constrangimento e comparações, os números dos imóveis não apareciam nos *cards* do jogo, apenas o nome da rua. As discussões mais interessantes sobre a elaboração desse jogo não foram sobre as comandas, já bem conhecidas, ainda que adaptadas, mas sobre a definição dos critérios de avaliação do bem público e do privado. Definir o valor de uma casa, de um apartamento foi mais simples, com os carnês de IPTU, mas quanto a um prédio da Receita Federal, a uma escola pública, a uma Unidade de Pronto Atendimento (UPA), de um parque ou de uma agência dos Correios, a situação foi bem mais complexa. Quanto a esse último, uma boa discussão se deu em torno da ideia da privatização dos Correios e eventuais melhorias X precarização dos serviços, a partir do sucateamento de bens públicos.

O quarto jogo da figura anterior, à direita, denominado pelos estudantes que o criaram de Situações e Reações envolvia pareamento de reações de euforia, depressão, alegria, tristeza, indiferença, medo, entusiasmo, raiva, desejo, inveja, dentre outras, à situações de natureza financeira elaboradas pelos estudantes, tais como: "minha empresa faliu", "o capital da minha empresa ainda não começou a dar retorno", "a criptomoeda que comprei e aguardei para vender desvalorizou 75%", "consegui abrir uma franquia da minha loja", "abri uma oficina, mas fui assaltado".

Novamente, enfatizamos que a perspectiva didática da Gamificação não é criar jogos ou jogá-los, embora isso também seja interessante para o ensino, mas explorar elementos do jogo em contextos que se aproximem de desafios enfrentados em nosso mundo real. Na mostra cultural onde esses jogos foram apresentados, professores, alunos, pais e demais responsáveis jogaram, também, mas o processo de construção e ou adaptação do jogo a partir das motivações, experiências pessoais e conhecimentos prévios mobilizados constituiu o foco das ações.

Quando às situações apresentados no jogo Situações e Reações foram discutidos, a princípio, apontavam para séries de *streaming*, *fanfics*, *podcasts*, músicas, *HQ*, *games*, mas logo elementos da vida desses estudantes foram revelados: uma franquia aberta pela família de um que fracassou, o estabelecimento comercial de outro que foi assaltado, situações de desemprego e subemprego, sonhos de fazer dinheiro por meio de investimentos fantásticos, passando pelos conceitos de *startups* e criptomoedas, para financiar os estudos, adquirir uma casa própria para família.

A emergência de situações financeiras mais complexas e significativas representam oportunidades e desafios aos docentes que, geralmente, não receberam formação para isso. Apesar de todas as dificuldades encontradas, acreditamos que a abordagem da Educação Financeira por MM, gamificação, ABP ou outras metodologias ativas é fundamental para que os professores possam promover a construção do letramento financeiro de seus alunos, em consonância com as ideias de Giordano, Lima e Silva (2021), de um letramento mais amplo e abrangente, que contempla demandas prescritas na BNCC (Brasil, 2018).

## Conclusões

A despeito das deficiências aqui apresentadas nas iniciativas dos Estados do Pará e de São Paulo na exploração da Educação Financeira, consideramos um avanço em relação às propostas curriculares brasileiras anteriores. Um dos pontos positivos é a articulação de temas de grande relevância social, política, econômica, ambiental, por meio de metodologias ativas. Ao assumir uma postura investigativa, participando do planejamento e execução de pesquisas autorais, da elaboração da questão de pesquisa e da coleta de dados à análise e divulgação dos resultados da pesquisa, os estudantes puderam desenvolver habilidades e competências, prescritas na BNCC, necessárias a diversos letramentos, como o computacional, o cartográfico (no mapeamento socioambiental), o estatístico e o financeiro.

## Referências

Alves, L. M. (2018). *Gamificação na Educação*. Joinville: Clube de Autores.

Azevedo, S. S. D. (2019). *Educação financeira nos livros didáticos de matemática dos anos finais do ensino fundamental*. Dissertação de Mestrado. Recife: Universidade Federal de Pernambuco.

Brasil. (1997). Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais*: Matemática 3 (Ensino Fundamental). Brasília: MEC.

Brasil. (1998). Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais*: Matemática (Ensino Fundamental). Brasília: MEC.

Brasil. (2000). Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros curriculares nacionais (Ensino Médio)*. Brasília: MEC.

Brasil. (2018). *Base Nacional Comum Curricular - Educação é a Base*: Ensino Médio. Brasília: Ministério da Educação.

Brasil. (2019a). Ministério da Educação. *Referenciais Curriculares para a Elaboração de Itinerários Formativos*. Brasília: Ministério da Educação.

Brasil. (2019b). Ministério da Educação. *Temas Contemporâneos Transversais na BNCC*: Contexto Histórico e Pressupostos Pedagógicos. Brasília: Ministério da Educação.

Cazorla, I. M. & Giordano, C. C. (2021). O papel do letramento estatístico na implementação dos Temas Contemporâneos Transversais da BNCC. In: Monteiro, C. E. F.; Carvalho, L. M. T. L. (org.) *Temas Emergentes em Letramento Estatístico*, Ed. UFPE, 88-111.

Campos, C. R.; Teixeira, J.; Coutinho, C. Q. S. (2015). Reflexões sobre a Educação Financeira e suas interfaces com a Educação Matemática e a Educação Crítica. *EMP — Educação Matemática Pesquisa,* São Paulo, 17(3), 556-577.

Creswell, J. W. & Creswell, J. D. (2021). *Projeto de pesquisa - métodos qualitativo, quantitativo e misto*. Porto Alegre: Penso Editora.

ENEF. (2011). *Estratégia Nacional de Educação Financeira*. Disponível em 03 mar 2022 em: https://www.vidaedinheiro.gov.br/es/

Giordano, C. C., Assis, M. R. S.& Coutinho, C. Q. S. (2019). A Educação Financeira e a Base Nacional Comum Curricular. *EM TEIA - Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, 10 (3), 1-20.

Giordano, C. C. & Kian, F. A. (2021). O ensino de Probabilidade e o novo Ensino Médio: reflexões a partir da BNCC e do Currículo Paulista. *Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemáti*ca, 11 (1), 59-78.

Giordano, C. C.; Lima, R. F.; Silva, A. W. J. (2021). Literacia estatística, probabilística e financeira: caminhos que se cruzam. *REnCiMa — Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, 12 (6), 1-26.

Giordano, C. C.; Pereira, F. S.; Gautério, T. S. (2022). Educação Financeira, Educação Estatística e o Projeto de Aprendizagem Estatístico: um caminho possível. In: Kistemann Junior, M. A.; Giordano, C. C. (orgs). *Pandebook*: cabeças pensantes na pandemia V. 3. Taubaté: Editora Akademy, 1-21.

Kapp, K. M. (2012). *The gamification of learning and instruction*: game-based methods and strategies for training and education. Chichester West Sussex: John Wiley & Sons Ltd.

Pará. (2019). *Documento Curricular para Educação Infantil e Ensino Fundamental do Estado do Pará*. Secretaria de Educação do Estado do Pará.

Pará. (2021*). Documento Curricular do Estado do Pará no Conselho Estadual de Educação*. Secretaria de Educação do Estado do Pará.

Santo, C. A. E. (2018). *O papel dos saberes não matemáticos na Modelagem Matemática*: o estudo do cálculo do Imposto de Renda. Dissertação (Mestrado). Belém: Universidade Federal do Pará.

São Paulo. (2019). *Currículo Paulista*. São Paulo: Secretaria da Educação do Estado de São Paulo – SEDUC/SP.

São Paulo. (2020). *Currículo Paulista Etapa Ensino Médio*. São Paulo: Secretaria da Educação do Estado de São Paulo – SEDUC/SP.

Skovsmose, O. (2001). *Educação Matemática Crítica*: a questão da democracia. Campinas: Papirus.

Acta Latinoamericana de Matemática Educativa
**SECCIÓN 2** / PROPUESTAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS
VOL 36, NÚMERO 1, AÑO 2023

# COMPRENSIÓN DE ADICIÓN Y DE PRODUCTO DE PROBABILIDADES: CASO DE UN ESTUDIANTE DE BACHILLERATO TECNOLÓGICO

# UNDERSTANDING OF ADDITION AND PRODUCT OF PROBABILITIES: A STUDENT CASE FROM TECHNOLOGICAL HIGH SCHOOL

**José Luis Ávila Betancourt, Ana María Ojeda Salazar**
**Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN. (México)**
joseluis.avila@cinvestav.mx, amojeda@cinvestav.mx

**Resumen**:
Caracterizamos las ideas de adición y producto de probabilidades en la propuesta institucional de estocásticos de un bachillerato tecnológico de México, y su comprensión por uno de sus estudiantes luego de su asistencia a una corta estrategia de enseñanza adicional de estas ideas. Con una metodología cualitativa de investigación, se aplicó la célula de análisis y el triángulo epistemológico para ideas fundamentales de estocásticos al programa de estudio respectivo, a respuestas del caso de estudio, a un cuestionario y a una entrevista, para caracterizar el programa e identificar procesos de pensamiento matemático en la comprensión del estudiante. Ello resultó en la deficiencia en el programa de referencia a problemas, términos técnicos y registros semióticos, así como dificultades de categorización, de lenguaje e ineficiencia operativa del estudiante. Aunque la discontinuidad con las ideas en secundaria y las deficiencias del programa dificultaron más avance del estudiante con la enseñanza adicional, al término de ésta se le ubicó en un nivel de simbolización de esas ideas fundamentales.

**Palabras clave**: Estocásticos, probabilidad, comprensión, bachillerato, cualitativa

**Abstract**:
We have characterized the ideas of addition and product of probabilities in the institutional proposal of stochastics of a technological high school in Mexico, and its understanding by one of its students, who attended to a short additional teaching strategy of these ideas. With a qualitative research methodology, the analysis cell and the epistemological triangle for fundamental ideas of stochastics were applied to the respective syllabus, to responses of the case study, to a questionnaire, and to an interview in order to characterize the program, and to identify mathematical thinking processes in the student's understanding. This resulted in the syllabus deficiency with respect to reference to problems, technical terms, and semiotic registers, as well as categorization and language difficulties, and operational inefficiency of the student. Although the discontinuity of the ideas in middle school and the syllabus' deficiencies made it difficult student's further advance with the additional teaching, at t end of this study, the student was placed at the symbolization level for those fundamental ideas.

**Keywords**: stochastic, probability, understanding, high school, qualitative

## Introducción

En México, la unidad de aprendizaje "Probabilidad y Estadística" se imparte en el sexto semestre en el bachillerato tecnológico (DEMS-IPN, 2008), después de dos años y medio sin la enseñanza de temas de estocásticos en ese nivel educativo. Salcedo (2013) señala que todos los programas de estudio de matemáticas para ese bachillerato se plantean con una perspectiva determinista y no integral. Martínez (2018) reporta que el enfoque frecuencial de la probabilidad no es explícito en el programa de "Probabilidad y Estadística" y que los estudiantes no dotan a la media ni a la desviación estándar de un conjunto de datos, de un sentido funcional ni analítico, sino sólo algorítmico.

La importancia de una investigación sobre la comprensión de la probabilidad y la advertencia del azar radica en la interpretación del humano sobre su mundo. Heitele (1975) afirma que tanto niños como adultos no educados "están confinados a un determinismo pobremente entendido" (p. 195). La necesidad de incluir temas de esta área en los currículums obedece a la necesidad del humano de acoplarse a una sociedad expuesta a grandes cantidades de información de naturaleza estocástica. Sin embargo, como señala Fischbein (1975), la instrucción de la escuela favorece las situaciones deterministas que guían al estudiante a respuestas y representaciones únicas de los fenómenos.

Bruner (2001) consideró el rol de las conjunciones y las disyunciones de categorías en la adquisición de conceptos. Particularmente, Tversky y Kahneman (1983) identificaron sesgos del pensamiento probabilístico de estudiantes universitarios, como la falacia de la conjunción. Tales roles son evidentes en la propuesta epistemológica de Heitele (1975) de las diez ideas fundamentales de estocásticos, en particular en las de "Combinación de Probabilidades" (p. 195): la regla de la adición y la regla del producto.

Las preguntas que se plantean en esta investigación son: a) ¿Qué caracteriza a la enseñanza de los temas de adición y del producto de probabilidades?; b) ¿Qué caracteriza la comprensión de un estudiante de bachillerato tecnológico de las reglas de adición y del producto de probabilidades?; y c) ¿Qué papel juegan diferentes registros de representación en la comprensión de un estudiante de bachillerato tecnológico de las reglas de adición y del producto de probabilidades? Se pretende proponer una estrategia de enseñanza de las ideas de adición de probabilidades y de producto de probabilidades para estudiantes de bachillerato tecnológico.

## Marco Teórico

La investigación se sustentó en tres ejes teóricos: epistemológico, cognitivo y social (Ojeda, 1994).

***Eje Epistemológico***

Con un enfoque epistemológico, Heitele (1975) propone diez ideas fundamentales de estocásticos (medida de probabilidad, campo de probabilidad, regla de la adición, independencia, equidistribución y simetría, modelo de urna y simulación, variable estocástica, ley de los grandes números e idea de muestra), cuya enseñanza se debe realizar de manera continua en un currículo en espiral y que proveen al individuo de modelos explicativos de ideas de estocásticos que difieren en los distintos estratos cognoscitivos sólo en su forma lingüística y en sus niveles de elaboración, pero no en su estructura.

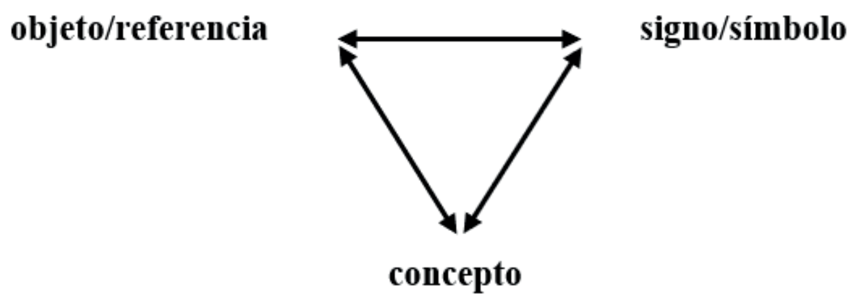
Uno de sus referentes es el estudio de Piaget e Inhelder (1975) de la evolución de la idea de azar en el niño, que surge alrededor de los cuatro años y avanza a través de tres estadios.

La Regla de la Adición, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, así como la Regla del Producto, $P(A \cap B) = P(A|B)\, P(B)$, modelan la combinación de eventos simples en eventos compuestos (Heitele, 1975). Si $A$ y $B$ son mutuamente excluyentes, en símbolos $A \cap B = \emptyset,\ P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

La Regla del Producto es expresión del grado de condicionamiento de la ocurrencia de un evento sobre la de otro, o sea $P(A|H) = \frac{P(A \cap H)}{P(H)}$ $(P(H) \neq 0)$, por lo que, si los eventos $A$ y $H$ son eventos independientes entre sí, entonces $P(A|H) = P(A)$ y $P(H|A) = P(H)$, de ahí que $P(A \cap H) = P(A) * P(H)$.

Steinbring (2005) distingue en su propuesta del triángulo epistemológico tres elementos relevantes para caracterizar la naturaleza de las ideas matemáticas: objeto, concepto y signo. Exhibe así la forma relacional entre contextos interpretativos, aspectos formales y de cálculo. Steinbring (1991) interrelaciona objeto, signo y concepto en el triángulo epistemológico para explicar la constitución de los conceptos matemáticos; para esta última, son necesarios medios de representación, convenciones sociales y patrones basados en la experiencia previa del individuo. La Figura 1 muestra la generalidad de un triángulo epistemológico.

**Figura 1.** *Triángulo Epistemológico.*




**Fuente:** Steinbring (1991).

***Eje Cognitivo***

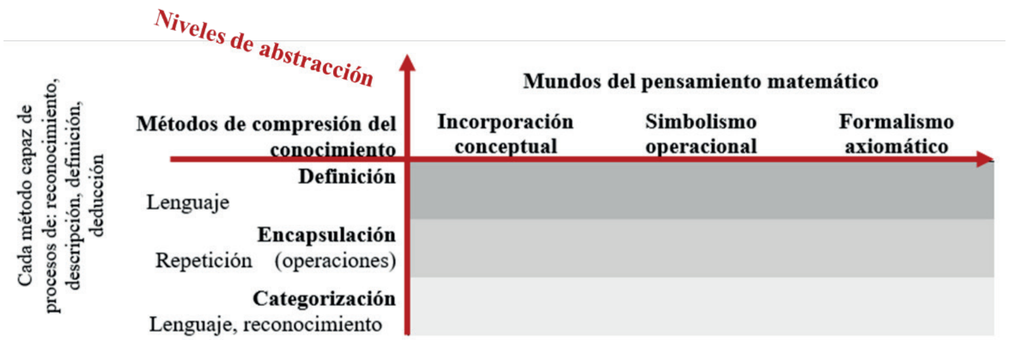
En su propuesta sobre el proceso del aprendizaje, Bruner (2001) ha estudiado los procesos de categorización en la adquisición de conceptos. Dos tipos especiales de categorías que se toman en cuenta en esta investigación son las categorías con atributos de criterio y las categorías con atributos definitorios. La convergencia gradual entre categorías con atributos definitorios y categorías con atributos de criterio resulta en la adquisición de conceptos. Por otro lado, las categorías conjuntivas, disyuntivas y relacionales discriminan valores de varios atributos de las instancias (Bruner, 2001).

En línea con las investigaciones de Piaget y de Bruner, para Tall (2013) el pensamiento matemático evoluciona según tres mundos: el de incorporación, el simbólico y el axiomático, los cuales corresponden al dominio de conceptos que logra el individuo. Los mundos se revelan desde la percepción de objetos concretos hasta el tratamiento formal de conceptos abstractos, por el empleo de procesos del pensamiento, a saber: de reconocimiento, de repetición y de lenguaje. En cada mundo, esos procesos se emplean según *métodos de compresión* del conocimiento: categorización, encapsulación y definición. Cada mundo y cada método son susceptibles de actividades inherentes a los procesos del pensamiento matemático, entre ellos, reconocimiento, descripción, definición y deducción (Tall, 2013), en abstracción progresiva por cada individuo. La Figura 2 esquematiza esta propuesta.

Duval (2017) estudia los registros semióticos utilizados en la actividad matemática, para la que describe los procesos cognitivos de producción, tratamiento y conversión. Según Duval (2017), un registro de representación semiótica es una producción física mediante la que se externa una representación y que describe el funcionamiento cognitivo del individuo. Señala que “para que un sistema semiótico sea considerado como registro, es necesario identificar las operaciones de producción y tratamiento que hacen posible su realización” (p. 56).

Para Fischbein, las intuiciones son “adquisiciones cognitivas que intervienen directamente en acciones prácticas o mentales, como resultado de la inmediatez de sus características, generalidad, capacidad de extrapolación, estructuralidad y evidenciación” (1975, p. 117). El autor sugiere que existen intuiciones primarias basadas en experiencias previas del individuo, e intuiciones secundarias derivadas de la formación científica.

**Figura 2.** *Niveles de mundos y procesos en el pensamiento matemático.*




**Fuente:** Interpretación propia de la propuesta de Tall (2013).

El tratamiento de Fischbein (1975) de la exclusividad mutua y de la independencia, así como los sesgos cognitivos sobre probabilidad tratados por Tversky y Kahneman (1983), conciernen a las características cognitivas de objetos, conceptos y representaciones semióticas, como las de la independencia física de fenómenos aleatorios. Los sesgos como la falacia de la conjunción (Tversky y Kahneman, 1983) resultan de las heurísticas de representatividad y disponibilidad, que contradicen la extensionalidad de la probabilidad.

***Eje Social***

Para Bruner (2001), la interacción social es un factor para la adquisición y formación de conceptos. Por su parte, Steinbring (2005) considera esa interacción inscrita en el intercambio y asignación de significados durante la justificación y argumentación del individuo respecto a su creación y uso de conceptos. Por ello, caracteriza esta interacción social mediante un análisis de pares de significadores-significados.

Ojeda (2006) advierte la importancia del contexto al que pertenecen las situaciones en la comprensión de estocásticos y la resolución de problemas. Los contextos de situaciones referentes han sido tipificados por autores como Díaz y Poblete (2001), quienes se refieren en su propuesta a cuatro tipos de contextos en los problemas sobre probabilidad: real, realista, matemático y fantasista.

## Método

Enfocamos el caso de estudio (Rodríguez, Flores y García, 1996), OG, del sexto semestre de bachillerato tecnológico, participante voluntario desde 2018 en el convenio entre el CECyT 4 del IPN y el Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav. La investigación se organizó en tres fases. La primera, de investigación documental (Cortés y García, 2003), identificó antecedentes en la vía de nuestro planteamiento y examinó la propuesta institucional para estocásticos del Bachillerato Tecnológico (DEMS-IPN, 2008). La segunda fase se realizó con la participación *en línea* de OG, en cinco sesiones de enseñanza, de dos horas de duración por semana, para una introducción a los fundamentos de la probabilidad.

Para la tercera fase, en la sexta sesión se le aplicó un cuestionario *en línea* referente a las ideas en foco y, en la séptima sesión, una entrevista semiestructurada (Zazkis y Hazzan, 1998) basada en sus respuestas al cuestionario. Las siete sesiones se realizaron y videograbaron en la plataforma Teams y fueron independientes de las clases regulares del caso de estudio.

Analizamos los datos recopilados de acuerdo con los criterios en la célula de análisis (Ojeda, 2006): situaciones y contextos, ideas fundamentales de estocásticos, recursos semióticos, términos empleados y otros conceptos matemáticos. Se profundizó en los aspectos epistemológico y comunicativo según la propuesta de Steinbring (2005) y en el aspecto cognitivo de acuerdo con las propuestas de Bruner (2001) y Tall (2013).

***Los instrumentos***

El cuestionario constó de seis reactivos planteados como problemas con preguntas abiertas (para un ejemplo, véase la Tabla 1), se le envió electrónicamente, OG lo contestó, fotografió sus respuestas y las envió de regreso también electrónicamente.

La Tabla 1 muestra la pormenorización de los problemas 1 y 4 del cuestionario que ponen en juego las ideas fundamentales de estocásticos de forma implícita o explícita, particularmente las de adición de probabilidades y producto de probabilidades. Se tomaron en cuenta los criterios de la célula de análisis (Ojeda, 2006) aplicados dichos problemas del cuestionario.

**Tabla 1.** *Caracterización del cuestionario aplicado al caso OG, problemas 1 y 4.*

| **Problema** | **Contextos y situaciones referentes** | **Ideas fundamentales de estocásticos** | **Recursos para organizar y (re) presentar datos** | **Términos empleados** | **Otros conceptos matemáticos** |
|---|---|---|---|---|---|
| . | Contexto: *Realista* (Díaz y Poblete 2001)<br>Situación:<br>Encuesta y datos: Probabilidad de respuesta por rango de edad. | Medida de probabilidad, campo de probabilidad, equidistribución y simetría, modelo de urna, **regla de la adición**. | Lengua natural.<br>Lenguaje numérico. | Selección al azar.<br>Una del total.<br>Evento simple.<br>Organizar datos.<br>Espacio muestra. | Número y operaciones.<br>Conjunto y operaciones. |
| . | Contexto: *Realista.*<br>Situación:<br>Producción de artículos por empleados: Probabilidad de estado del artículo por trabajador. | Medida de probabilidad, campo de probabilidad, equidistribución y simetría, modelo de urna, **regla de la adición** (ítems i, k), **regla del producto**. | Lengua natural.<br>Lenguaje numérico. | Selección al azar.<br>Uno del total.<br>Evento simple.<br>Espacio muestra.<br>Probabilidad… y…<br>Si selecciona… y…<br>probabilidad de…<br>Intersección de eventos.<br>Independientes.<br>Excluyentes. | Número y operaciones.<br>Conjunto y operaciones. |

**Fuente:** Elaboración propia.

Por otro lado, el guion de entrevista de tipo semiestructurado (Zaskis y Hazzan, 1998) consistió en 42 preguntas, divididas en seis secciones. El objetivo de las preguntas fue profundizar en el dominio conceptual y procedimental de ideas fundamentales de estocásticos del estudiante mediante la identificación de procesos del pensamiento matemático que reflejen su reconocimiento, su repetición y su lenguaje al respecto.

## Resultados del análisis: Programa de Estudios

La competencia general de la unidad “Probabilidad y Estadística” del bachillerato tecnológico (DEMS-IPN, 2008) es que el estudiante resuelva “problemas referentes a estadística descriptiva y probabilidad en su entorno académico, social y global” (p. 5). Los temas de adición de probabilidades y de producto de probabilidades corresponden a la competencia particular 2: “Resuelve problemas referentes a teoría de conjuntos, técnicas de conteo y probabilidad” (p. 5). Esta competencia particular se desagrega en “Resultados de Aprendizaje Propuestos” (RAP); de ellos se tomaron en cuenta los RAP2 (sobre teoría de conjuntos) y RAP3 (sobre probabilidad). La Tabla 2 pormenoriza el planteamiento en el programa de estudios de los contenidos de interés en nuestra investigación.

El tipo de problemas en el programa de estudios (ámbito académico, social y global) coincide con el de naturaleza rutinaria de la clasificación de Díaz y Poblete (2001), pues los criterios de evaluación de la propuesta se refieren a acciones y adverbios como “identifica”, “aplica una regla”, “ordenada y precisa” y “calcula correctamente” para la resolución de problemas, de lo que se infiere que el estudiante tendría que conocer previamente el procedimiento para resolverlos.

En lo que concierne a las ideas fundamentales de estocásticos, el programa incluye la diez, sin embargo, cada competencia particular acapara temas específicos. Así, la competencia particular 1 trata ideas referentes a estadística descriptiva, la competencia particular 2 trata ideas referentes a probabilidad y la competencia particular 3 incluye las ideas de ley de los grandes números y variable estocástica. Por lo que el tratamiento en el programa de las ideas en foco para esta investigación resulta compartimentalizado.

Para los resultados esperados RAP2 y RAP3 no hay referencias sobre el dominio de lenguaje y de diagramas que debe tratar el estudiante, por lo que no se puede concluir si el programa propone aprovecharlos desde el punto de vista de Fischbein (1975), como modelos generativos que “son los mejores dispositivos de enseñanza para la construcción de intuiciones secundarias” tanto en combinatoria como en el cálculo de probabilidades (p. 129). Tampoco hay referencias sobre si se esperan justificaciones o argumentaciones a respuestas, procedimientos y conceptos, por lo que no se puede deducir si el programa plantea la conversión y tratamiento de registros (Duval, 2017) producidos por el estudiante.

Los pocos recursos semióticos propuestos y los términos que se utilizan en el planteamiento del programa evocan los mundos de incorporación y simbólico propuestos por (Tall, 2013), pues parece que se espera un tratamiento operativo y simbólico de los conceptos en la resolución de problemas mediante reglas y algoritmos. Los tipos de tareas que el programa de estudios indica que el estudiante debe realizar, nos sugieren procesos mentales de reconocimiento y repetición (Tall, 2013). Algunos criterios de evaluación que propone el programa corresponderían a los procesos de identificación, inferencia de conclusiones y el mero cálculo de la probabilidad para problemas de los tipos ya citados.

Los términos que se utilizan en el programa sugieren que el estudiante debe categorizar conceptos (Bruner, 2001) y encapsular procedimientos (Tall, 2013), de manera que, al reconocer los recursos semióticos de referencia o al recuperarlos de los ya establecidos (*set befores*), pueda efectuar el tratamiento respectivo (identificar elementos implicados, relacionarlos y operarlos) según el concepto objeto de enseñanza, para solucionar problemas propuestos.

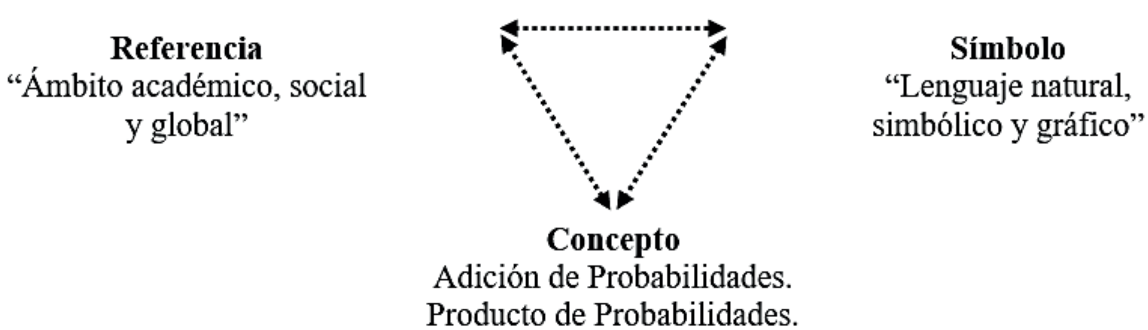
**Tabla 2.** *Caracterización de los temas de interés en el RAP2 de la unidad didáctica "Probabilidad" del programa de estudios (DEMS-IPN, 2008).*

| Contexto de situaciones referentes | Ideas fundamentales de estocásticos | Recursos para organizar y (re) presentar los datos | Términos empleados | Otros conceptos matemáticos |
|---|---|---|---|---|
| Ámbitos académico, social y global (DEMS-IPN, 2008). Problemas rutinarios de contextos real, realista y matemático (Díaz y Poblete, 2001). | Medida de probabilidad. Campo de probabilidad. Adición de Probabilidades. Producto de probabilidades. Equidistribución y simetría. Combinatoria. | Lengua natural. Lengua escrita. Lenguaje numérico. "Lenguaje simbólico". "Lenguaje gráfico". (DEMS-IPN, 2008, p. 2) | Técnicas conteo. Probabilidad clásica y axiomática. Eventos cumplen axiomas de probabilidad. Probabilidad condicional. Eventos independientes. Excluyentes, no excluyentes, equiprobables. Identifica eventos aleatorios. Aplica conceptos y leyes. Aplica el cálculo de… Aplicada adecuadamente. Forma ordenada y precisa. Calculada correctamente. Induce a través de problemas. | Número y operaciones. Conjunto y operaciones. |

**Fuente:** Elaboración propia.

Un análisis epistemológico (Steinbring, 2005) reveló que la falta de especificación de referentes y recursos semióticos propuestos pone en entredicho la interrelación de los tres vértices del triángulo epistemológico, necesaria para que los estudiantes adquieran las ideas de adición y de producto de probabilidades. Por lo que no se espera una construcción formal de los conceptos. La Figura 3 muestra el triángulo epistemológico aplicado a las ideas fundamentales en foco con sus interrelaciones en línea punteada.

**Figura 3.** *Triángulo epistemológico para las ideas en foco en el programa de estudios (DEMS-IPN, 2008).*




**Fuente:** Elaboración propia.

## Resultados del análisis: Caso OG

La comprensión de OG de las ideas fundamentales de adición de probabilidades y de producto de probabilidades se caracterizó por sus respuestas en la entrevista relativas a sus resoluciones a los problemas del cuestionario. Para la pormenorización de los criterios de análisis en el caso OG, se tomó en cuenta su desempeño en la resolución y argumentación del problema 1, especificado en la Tabla 1.

OG resolvió de forma correcta el problema 1 utilizando la idea de adición de probabilidades y organizando los datos del problema en un diagrama de árbol. Un análisis de los registros (Duval, 2017) producidos por el estudiante para resolver el problema reveló su identificación de unidades matemáticamente significativas para realizar la conversión respectiva a lenguaje simbólico y a diagrama de árbol.

En la Tabla 3, se muestra la correspondencia de unidades matemáticamente significativas de OG en el tratamiento y conversión de sus registros; añadimos en negrita las unidades matemáticamente significativas que identificó OG, por la evidencia que él mismo nos proporcionó.

El registro simbólico producido por OG mezcla notación proposicional ($\sim r$) con notación de conjuntos ($A \cap r$) o ($A \cap \sim r$), por lo que se puede inferir un tratamiento meramente procedimental (repetición) para calcular la probabilidad de un evento. Por ello, no se puede asegurar que OG reconozca un evento propiamente como un subconjunto del espacio muestra $\Omega$, que se asocie a la proposición $\sim r$, o sea, como el subconjunto de posibilidades de $\Omega$ para las que la proposición "no contestó" ($\sim r$) se verifica. $\Omega$ tampoco fue señalada en el diagrama de árbol, por lo que se refleja su omisión del concepto de espacio muestra.

A partir del enunciado del problema, OG expresó por escrito su reconocimiento de parejas de eventos que se intersecan, sus cardinalidades explícitas en el enunciado del problema, las de los eventos, $n(A) = 138$, $n(B) = 288$ y del espacio muestra, $n(\Omega) = 426$, aunque este último no fue etiquetado explícitamente por OG. Con enfoque clásico determinó las probabilidades $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$, $P(r|A) = \frac{n(A \cap r)}{n(A)}$, $P(\sim r|A) = \frac{n(A \cap \sim r)}{n(A)}$,

$P(r|B) = \frac{n(B \cap r)}{n(B)}$ y $P(\sim r|B) = \frac{n(B \cap \sim r)}{n(B)}$.

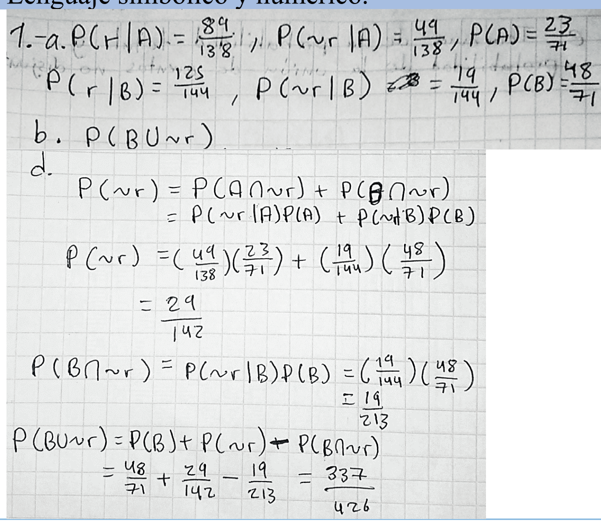
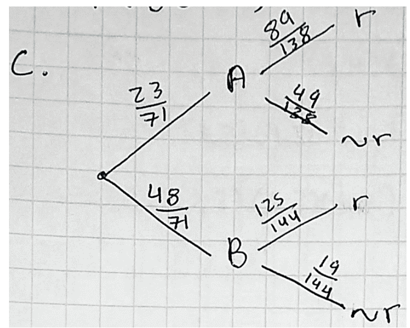
Sin embargo, no utilizó esas intersecciones en la expresión de la adición de probabilidades.

OG produjo un diagrama de árbol para representar y organizar los datos del problema, que corresponde a las probabilidades $P(A)$ y $P(B)$ para ponderar las ramas de primer orden de los eventos $A$ y $B$, así como a las probabilidades condicionales $P(r|A), P(\sim r|A), P(r|B)$ y $P(\sim r|B)$ para ponderar las ramas de segundo orden de los eventos $r$ y $\sim r$. La organización del diagrama de árbol guio a OG al cálculo de $P(\sim r)$ con el "Teorema de la Probabilidad Total", al cálculo de $P(B \cap \sim r) = P(B) * P(\sim r|B)$ y, finalmente, al cálculo de la adición de probabilidades para eventos no excluyentes, $P(B \cup \sim r) = P(B) + P(\sim r) - P(B \cap \sim r)$.

Un análisis comunicativo (Steinbring, 2005) con cadena de significados y significadores (véase Figura 4) que obedeció a la interacción de OG durante la entrevista, reveló la dificultad del estudiante para identificar el término que se refiere a la probabilidad de la unión de eventos (adición de probabilidades) en la pregunta de problema. Se infirió el tratamiento operatorio de OG de una "fórmula" para el cálculo de la probabilidad de la unión de eventos en la que el registro principal es el diagrama de árbol y cuya expresión simbólica (que fue escrita incorrectamente y corregida) se muestra en la Tabla 3.

El estudiante argumentó "deduje la fórmula" al referirse a la expresión $P(B \cup \sim r) = P(B) + P(\sim r) - P(B \cap \sim r)$, que aparentemente recordó por encuentros anteriores con ese tipo de problemas, lo que revela una heurística de disponibilidad.

**Tabla 3.** *Correspondencia de unidades matemáticamente significativas al en la resolución de OG del Problema 1.*

<table>
<tr><th colspan="2">Registro original:<br>Lenguaje natural y numérico (unidades aparentemente reconocidas por OG en negrita)</th></tr>
<tr><td colspan="2">Un encuestador contacta a personas de entre 18 y 25 años $(\boldsymbol{evento\ A})$, de las que 89 $\boldsymbol{n(A\cap r)}$ responden y 49 $\boldsymbol{n(A\cap \sim r)}$ se rehúsan a hacerlo $(\boldsymbol{\sim r})$. Cuando contacta a personas de entre 26 y 35 años $(\boldsymbol{evento\ B})$, 250 $\boldsymbol{n(B\cap r)}$ responden y 38 $\boldsymbol{n(B\cap \sim r)}$ se rehúsan $(\boldsymbol{\sim r})$. Se selecciona al azar una persona del total de la muestra. ¿Cuál es la probabilidad de que sea una persona del rango de edad de 26 a 35 años o alguien que rehusó responder $\boldsymbol{P(B\cup \sim r)}$?</td></tr>
<tr><th>Registro producido por OG:<br>Lenguaje simbólico y numérico.</th><th>Registro Producido por OG:<br>Diagrama de árbol.</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

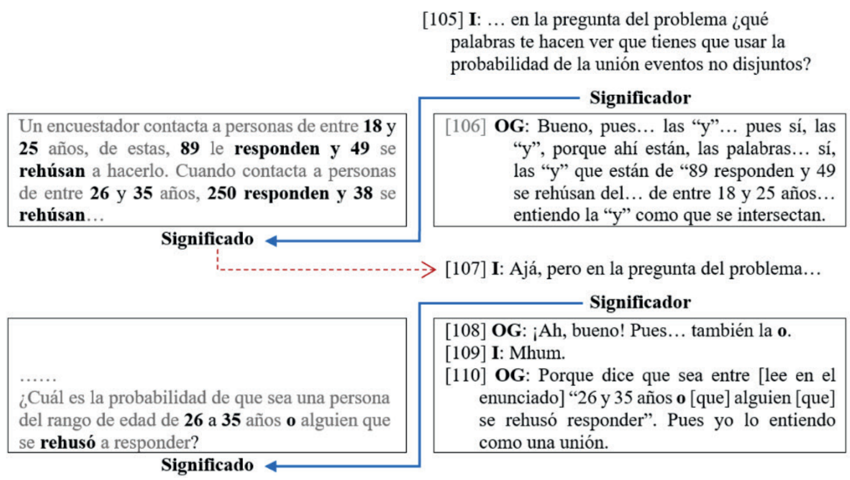
**Fuente:** Elaboración propia.

La comprensión de OG del problema 1 implicó una categorización con criterios de seguridad (Bruner, 2001) basados en la consecución de algoritmos probabilísticos sintetizados en dos tipos de registros semióticos: el diagrama de árbol y el simbólico. OG, además, realizó procesos de reconocimiento y repetición a través de un esquema de resolución que completó con los datos del problema.

Desde una perspectiva epistemológica, OG construyó la comprensión del problema a través de una categorización con criterios de seguridad (Bruner, 2001) basada en un algoritmo para resolver problemas referentes a probabilidad. La primera acción para el surgimiento de las ideas para resolver el problema por parte de OG consistió en reconocer el problema como de probabilidad. Luego, el estudiante identifica los eventos simples y su cardinalidad, para representarlos en un diagrama de árbol sin tener en cuenta la idea espacio muestra, pero poniendo en juego medida de probabilidad y producto de probabilidades.

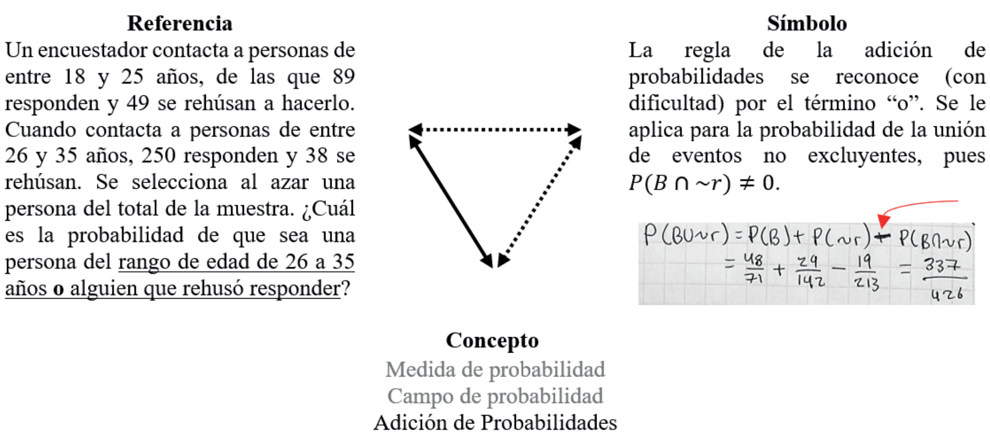
OG encapsuló (Tall, 2013) o en otras palabras categorizó (Bruner, 2001) una generalización de la estructura de diagrama de árbol que utiliza para resolver problemas referentes a probabilidad. La estructura consiste en identificar eventos condicionados por eventos simples y colocar la ponderación de ambos tipos de eventos en las ramas de primer orden (eventos simples) y las ramas de segundo orden (eventos condicionados). Para cada rama del árbol calcula el producto de probabilidades, multiplicando las ponderaciones de las ramas de primer y segundo orden. La primera idea explícita y cuya construcción se revela completa en un triángulo epistemológico correspondiente a la resolución del problema 1 por el estudiante es la de producto de probabilidades.

**Figura 4.** *Consecución de significados y significadores: reconocimiento de adición de probabilidades por OG.*




**Fuente:** Elaboración propia.

**Figura 5.** *Triángulo epistemológico adición de probabilidades en la resolución de OG del problema 1.*




**Fuente:** Elaboración propia.

Por otro lado, la idea fundamental de adición de probabilidades es referida por parte del estudiante como "probabilidad de eventos no disjuntos", lo que denota un enfoque en conjuntos. La identificación de esta probabilidad surge del uso de la palabra "o" en la pregunta del problema, y los eventos son identificados como "no disjuntos" porque su intersección no es vacía. Sin embargo, la construcción de la idea tiene rupturas en las relaciones entre referente-símbolo por la dificultad de reconocimiento y lenguaje del estudiante al tratar con el término disyuntivo; y en la relación concepto-símbolo, por su tratamiento simbólico con errores y omisiones de probabilidades que desembocan en una deficiencia operativa como se muestra en el triángulo epistemológico de la Figura 5.

## Conclusiones

El programa de estudios de Bachillerato Tecnológico (DEMS-IPN, 2008) propone un enfoque clásico y determinista de la probabilidad e incluye las diez ideas fundamentales de estocásticos de Heitele (1975), pero no en espiral ni como guía. La secuencia de contenidos se realiza de forma modular e independiente, por lo que el estudiante no tendrá una noción general de las ideas fundamentales. El desarrollo de las ideas enfoca a la probabilidad como procedimientos de cálculo, por lo que enfatiza en ellos más que en conceptos.

La falta de especificaciones para los registros semióticos planteados en el programa de estudio puede ocasionar dificultades para la adquisición de conceptos, debidas a la falta de énfasis en incluir una variedad de esos registros que dé lugar a los procesos de producción de cada uno de ellos, tratamiento a su interior y conversión de uno en otro (Duval, 2017). Por otro lado, los recursos semióticos propuestos y los términos utilizados evocan los mundos de incorporación y simbólico (Tall, 2013) y los tipos de tareas sugieren los procesos de reconocimiento y repetición.

La propuesta del programa de estudios augura una construcción del concepto por el estudiante compartimentalizada, incompleta, derivada, además de la falta de continuidad con las propuestas de los niveles educativos anteriores, de una ruptura entre las ideas fundamentales de estocásticos y los recursos semióticos para organizar y representar datos.

OG evoca la idea de adición de probabilidades mediante la probabilidad de la unión de eventos no disjuntos y se situó en el mundo de incorporación simbólico para la idea. El estudiante categorizó la idea de adición de probabilidades a través de la probabilidad de la unión de eventos y la encapsuló mediante el algoritmo que responde a su "fórmula", sin embargo, sus dificultades en el uso del lenguaje formal, derivadas de heurísticas de disponibilidad, contribuyeron a errores en la definición del concepto.

Para el estudiante, la comunicación de la idea fundamental de adición de probabilidades corresponde a enumerar los pasos para resolver problemas de ese tipo, a diferencia de su mejor operación de la conjunción, de su uso de sinónimos y mayor fluidez en sus argumentaciones durante su interacción con el investigador. Además, el tratamiento algorítmico de la idea de producto de probabilidades es más fluido, lo que puede deberse al algoritmo de resolución de problemas referentes a la probabilidad, el cual se basa, independientemente del tipo de combinación de probabilidades, en un diagrama de árbol.

La idea de producto de probabilidades se evoca a través del entendimiento de la probabilidad de la intersección de eventos y el uso de la probabilidad condicional.

El estudiante identifica y representa fácilmente esas dos probabilidades en un diagrama de árbol, esta identificación le permite resolver problemas de ese tipo de forma inmediata. Para la idea de producto de probabilidades, el estudiante se situó en el mundo simbólico, su categorización definitoria, encapsulación de procedimientos y tratamiento de registros semióticos, sugieren establecimientos anteriores de la idea.Se propone una estrategia de enseñanza para las diez ideas fundamentales de estocásticos de forma continua a lo largo de un currículo en espiral con adaptaciones en la continuidad y la integralidad del área y cambios hacia un enfoque que promueva la aleatoriedad.

Esta estrategia debe favorecer el carácter extensional de la probabilidad como resultado de sus axiomas al enseñar la idea de adición de probabilidades, su relación con el tercer axioma de probabilidad y la unión de eventos, así como el producto de probabilidades, su relación con la probabilidad condicional y teorema de Bayes, proponiendo variedad de situaciones de referencia y registros semióticos en ejemplos y problemas, que favorezcan cada idea de acuerdo con su necesidad.

## Referencias bibliográficas

Bruner, J. (2001). *El proceso mental en el aprendizaje*. Narcea Ediciones.

Cortés, G. y García, S. G. (2003). *Investigación documental: guía de autoaprendizaje apuntes y ejercicios.* ENBA-DGES-SEP.

Dirección de Educación Media Superior, Instituto Politécnico Nacional (DEMS-IPN) (2008). *Programa de Estudios de la unidad de Aprendizaje: Probabilidad y Estadística*. IPN.

Díaz, M. y Poblete, A. (2001). Contextualizando tipos de problemas matemáticos en el aula. *Números. Revista de didáctica de las matemáticas*, 45, 33-41.

Duval, R. (2017). *Understanding the Mathematical Way of Thinking – The Registers of Semiotic Representations*. Springer.

Fischbein (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children.* Reidel.

Heitele, D. (1975). An epistemological view on fundamental stochastic ideas. *Educational Studies in Mathematics*, *6*(2), 187-205. https://doi.org/10.1007/bf00302543

Martínez, R. (2018). *El enfoque frecuencial de la probabilidad en el bachillerato tecnológico* [Tesis de maestría no publicada]. Cinvestav.

Ojeda, A. M. (1994). *Understanding Fundamental Ideas of Probability at Pre-university Levels*. [Unpublished doctoral dissertation]. King´s College London.

Ojeda, A. M. (2006). Estrategia para un perfil nuevo de docencia: un ensayo en la enseñanza de estocásticos. *Matemática Educativa, treinta años*, 195-204.

Piaget, J., & Inhelder, B. (2014). *The origin of the idea of chance in children (Psychology revivals)*. Psychology Press. https://doi.org/10.4324/9781315766959

Rodríguez, G., Flores, J. y García, E. (1996). *Metodología de la Investigación Cualitativa.* Ediciones Aljibe.

Salcedo, J. (2013). *Razonamiento probabilístico en el bachillerato tecnológico* [Tesis de maestría no publicada]. Cinvestav.

Steinbring, H. (2006). *The construction of new mathematical knowledge in classroom interaction: An epistemological perspective*. Springer Science & Business Media. https://doi.org/10.1007/s10649-006-5892-z

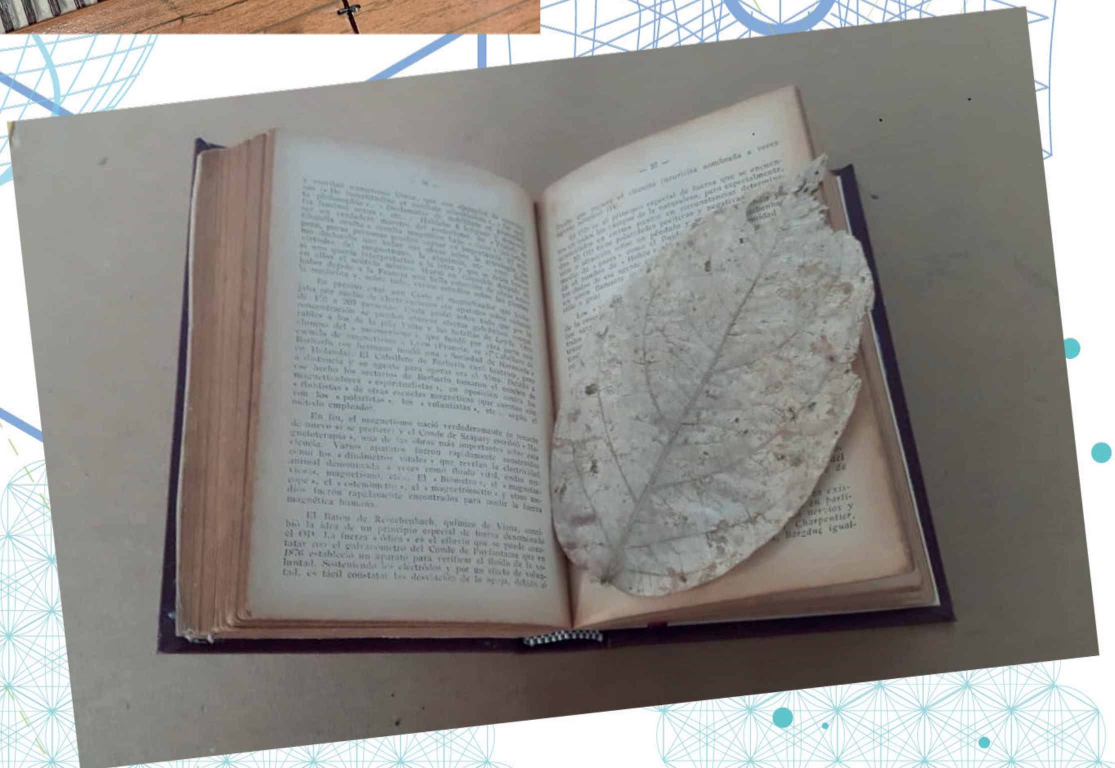
Tall, D. (2013). *How humans learn to think mathematically: Exploring the three worlds of mathematics*. Cambridge University Press.

Tversky, A., & Kahneman, D. (1983). Extensional versus intuitive reasoning: The conjunction fallacy in probability judgment. *Psychological Review*, *90*(4), 293-315. https://doi.org/10.1037/0033-295x.90.4.293

Zazkis, R., & Hazzan, O. (1998). Interviewing in mathematics education research: Choosing the questions. *The Journal of Mathematical Behavior*, *17*(4), 429-439. https://doi.org/10.1016/s0732-3123(99)00006-1

# SECCIÓN 3

## ASPECTOS SOCIOEPISTEMOLÓGICOS EN EL ANÁLISIS Y EL REDISEÑO DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR



# INTERSECÇÕES DE FRONTEIRAS TEÓRICAS: UM ESTUDO BIBLIOGRÁFICO SOBRE ETNOMATEMÁTICA, REPRESENTAÇÃO SOCIAL E EDUCAÇÃO ESCOLAR INDÍGENA

# INTERSECTIONS OF THEORETICAL BOUNDARIES: A BIBLIOGRAPHIC STUDY ON ETHNOMATHEMATICS; SOCIAL REPRESENTATION AND INDIGENOUS SCHOOL EDUCATION

**José Roberto Linhares de Mattos, Sandra Maria Nascimento de Mattos, Éverton Melo de Melo**

**Universidade Federal Fluminense. Secretaria Municipal de Educação do Rio de Janeiro. Universidade Federal do Acre. (Brasil)**

jrlinhares@gmail.com, smnmattos@gmail.com, everton.melo@ufac.br

**Resumo:**

O objetivo desse trabalho é fazer uma interseção entre fronteiras epistemológicas para posicionar um estudo de investigação. Assim, estabelece um diálogo entre diferentes concepções teóricas a respeito de três temáticas que dialogam com o processo de ensino no contexto indígena, a saber: Educação Escolar Indígena, Etnomatemática e a Teoria das Representações Sociais. A partir de uma pesquisa bibliográfica revelou-se que a relação dialógica entre diferentes concepções teóricas é um processo principiante no meio acadêmico, porém necessário para compreensão de fenômenos complexos como a cultura de um determinado grupo social, em que os membros manifestem a compreensão a respeito de si.

**Palavras-chave**: educação escolar indígena, etnomatemática, representação social

**Abstract**:

This work is aimed at making an intersection between epistemological boundaries to carry out a research study. Thus, it establishes a dialogue between different theoretical conceptions regarding three themes that dialogue with the teaching process in the indigenous context, namely: Indigenous School Education, Ethno-mathematics and the Theory of Social Representations. Based on bibliographic research, it was found that the dialogic relationship between different theoretical concepts is a process that is beginning in the academic environment, but it is necessary for the understanding of complex phenomena such as the culture of a social group, in which the members express the understanding about themselves.

**Keywords**: indigenous school education, ethno-mathematics, social representations

## Introdução

A Matemática é uma ciência fundamentalmente importante para a sobrevivência do ser humano, visto que desenvolve o raciocínio e as habilidades essenciais para a construção da cidadania. Porém, uma aprendizagem apenas acontece, a partir da reflexão e da construção do conhecimento, levando em consideração a contextualização, ou seja, pelo uso da Matemática na realidade do educando. Partindo dessa problemática, entendemos que o cotidiano escolar em uma comunidade indígena precisa ser mais bem compreendido, considerando as razões que conduzem os diferentes fenômenos presentes nas práticas de linguagem convergidas para a ação de matematizar. Sabemos que a matemática tem uma importância e dinâmica própria na cultura indígena, assim sendo, há a necessidade de se investigar a respeito da representação social que as comunidades escolares indígenas fazem do ato de matematizar.

Em um estudo maior de um projeto de pesquisa realizado junto ao contexto socioeducacional dos *Noke koî*, que habitam a Terra Indígena Campina Katukina, localizada no estado do Acre, a 60 quilômetros de Cruzeiro do Sul, seguindo pela BR-364, que liga a região com a capital Rio Branco, temos como tese que, o conhecimento da representação social de matemática da comunidade indígena *Noke Koî* contribui com o fazer pedagógico para que umas das manifestações matemáticas não suplante as outras. Isto se dá levando em consideração que coexistem a linguagem Matemática *Noke Koî* e a linguagem da Matemática dominante no contexto escolar da comunidade (Melo, 2013).

Já o presente artigo é dedicado ao diálogo com diferentes concepções teóricas a respeito das diferentes abordagens de ensino em comunidades escolares indígenas para matemáticas culturalmente construídas. Para isso, fizemos uma interseção entre as fronteiras de três temáticas teóricas que dialogam com os processos de ensino nos contextos indígenas, a saber: Educação Escolar Indígena, Etnomatemática e Teoria das Representações Sociais, para posicionar nosso estudo no arcabouço teórico existente e demonstrar sua relevância social.

## Fundamentação teórica

### *Educação (Escolar) Indígena*

A educação indígena não é desassociada da vida social. As vivências sociais são relações dialógicas em que há sempre aprendizagem mútua, sem desconsiderar os reais interesses das comunidades. Assim, os grupos culturais possuem maneiras diferentes de interação e representação social, em conformidade com o contexto local.

O educar ocorre todo o tempo e de maneira recíproca. Ocorre como uma transformação estrutural contingente com uma história no conviver, e o resultado disso é que as pessoas aprendem a viver de uma maneira que se configura de acordo com o conviver da comunidade em que vivem (Maturana, 1998, p.29).

Nessa perspectiva, a educação indígena precisa ser refletida na educação escolar indígena. Não podemos pensar numa educação para indígenas sem levar em consideração que eles são parte desse processo, com seus saberes, suas crenças que precisam ser tomadas como ponto de partida durante os processos de ensino e de aprendizagem.

A educação indígena refere-se aos processos próprios de transmissão e produção dos conhecimentos dos povos indígenas, enquanto a educação escolar indígena diz respeito aos processos de transmissão e produção dos conhecimentos indígenas por meio da escola, que é uma instituição própria dos povos colonizadores. A educação escolar indígena refere-se à escola apropriada pelos povos indígenas para reforçar seus projetos socioculturais e abrir caminhos para o acesso a outros conhecimentos universais, necessários e desejáveis, a fim de contribuírem com a capacidade de responder às novas demandas geradas a partir do contato com a sociedade global (Luciano, 2006, p.129).

Para isso, faz-se necessário uma mudança de paradigmas. É preciso desconstruir o modo como os processos educativos para os povos indígenas são concebidos. Ao invés de serem pensados pelos órgãos governamentais que lidam e advogam o direito de conceber um modelo de educação escolar indígena. Esse modelo educacional também acarreta profundas alterações culturais, embora seja possível haver um ensino institucionalizado que coexista com processos de educação indígena já existentes nos contextos das comunidades indígenas.

***Etnomatemática***

Sabe-se que a Matemática se desenvolveu de maneira distinta entre as várias culturas e é expressa por modos particulares de raciocinar logicamente, traduzidos por distintos modos de quantificar, calcular e medir. Ao longo dos anos, o pensamento dominante sempre se encarregou de proporcionar o contato direto dos educandos com os conceitos universais da disciplina matemática.

Isso porque as bases e fundamentações do Ensino da Matemática na academia estão enraizadas nos princípios europeus que quando transportados para outros contextos, resultam em um ensino meramente técnico, sem a devida atenção necessária à compreensão das diversas situações de uso. "A matemática, na grande maioria das escolas, ainda é concebida como um conjunto de técnicas, um conhecimento pronto e acabado, que é transmitido aos alunos de forma mecânica e acrítica" (Halmenschlager, 2001, p.14).

Nos diferentes contextos sociais é possível observar a manifestação da matemática na vida cotidiana. É necessário trazer "à discussão a história dos povos marginalizados, voltando o olhar para seus saberes e fazeres, em destaque as formas de matematizar consigo, com os outros e com o mundo" (Mattos, 2020, p.160). Assim, o programa Etnomatemática nos ajuda a entender a dinâmica com que as diferentes matemáticas (no plural) interagem entre seus praticantes nos diversos ambientes culturais.

> Eu mesmo devo dominar inglês para participar do mundo acadêmico internacional. Mas jamais alguém disse, ou mesmo insinuou, que seria bom que eu esquecesse o português, e que eu deveria ter acanhamento e até vergonha de falar essa língua. Mas faz-se isso com povos, em especial com os indígenas, seja na linguagem, seja nos sistemas de conhecimento em geral, e particularmente na matemática. Sua língua é rotulada inútil, sua religião se torna "crendice", sua arte e seus rituais são "folclore", sua ciência e medicina são "superstições" e sua matemática é "imprecisa" e "ineficiente", quando não "inexistente" (D'Ambrosio, 2005, p.116).

A Etnomatemática é um campo de estudo que ganhou expressividade no mundo todo, com a ampliação do número de eventos e publicações sobre essa temática (D'Ambrosio, 2005).

A criação do Programa Etnomatemática aqueceu o debate sobre a Educação Matemática que a posicionou no centro das discussões sobre as formas de matematizar dos diversos grupos socioculturais. Ao passo que sua base epistemológica foi se desenvolvendo a etnomatemática ganhou expressão e passou a ser considerada uma subárea da História da Matemática e da Educação Matemática, se relacionando naturalmente com a Antropologia e as Ciências Sociais (D'Ambrosio, 2019).

***Teoria das Representações Sociais***

A Teoria das Representações Sociais - TRS tem, epistemologicamente, contribuído para compreensão do conhecimento humano, unindo fenômenos como a percepção e o pensamento. Nesse sentido, a TRS demonstra que existe várias maneiras de interagir, comunicar e conhecer um determinado objeto (Moscovici, 2009).

De acordo com este autor, a TRS é uma preparação para a ação, tanto por conduzir comportamentos, como por modificar e reconstituir os elementos do meio ambiente que o comportamento deve ter lugar. Para o autor, o ser humano é um ser pensante que fórmula questões e busca respostas e, ao mesmo tempo, compartilha realidades por ele representadas. Com esta visão, Moscovici assinala sua concepção do social; uma coletividade racional, que não pode ser concebida apenas como um conjunto de cérebros processadores de informações que as transforma em movimentos, atribuições e julgamentos sob a força de condicionamentos externos.

A esse respeito Sêga (2000) afirma que:

> As representações sociais se apresentam como uma maneira de interpretar e pensar a realidade cotidiana, uma forma de conhecimento da atividade mental desenvolvida pelos indivíduos e pelos grupos para fixar suas posições em relação a situações, eventos, objetos e comunicações que lhes concernem. O social intervém de várias formas: pelo contexto concreto no qual se situam grupos e pessoas, pela comunicação que se estabelece

> entre eles, pelo quadro de apreensão que fornecem sua bagagem cultural, pelos códigos, símbolos, valores e ideologias ligados as posições e vinculações sociais especificas (Sêga, 2000, p.128).

Já Spink (2004) define as representações sociais, como:

> Modalidades de conhecimento prático orientadas para a comunicação e para a compreensão do contexto social, material e ideativo em que vivemos. São, consequentemente, formas de conhecimento que se manifestam como elementos cognitivos — imagens, conceitos, categorias, teorias —, mas que não se reduzem jamais aos componentes cognitivos. Sendo socialmente elaboradas e compartilhadas, contribuem para a construção de uma realidade comum, que possibilita a comunicação (Spink, 2004, p.1).

No intuito de completar as preposições de Moscovici, sua colaboradora Jodelet (2001) aborda as Representações Sociais como: "[...] um produto e processo de uma atividade de apropriação da realidade exterior ao pensamento e de elaboração psicológica e social dessa realidade" (Jodelet, 2001, p.22).

Jovchelovitch (2003) preocupa-se com a relação entre intersubjetividade, espaço público e as representações sociais, uma vez que, "[...] enquanto fenômeno psicossocial, estão necessariamente radicadas no espaço público nos processos através dos quais o ser humano desenvolve uma identidade, cria símbolos, e se abre para a diversidade de um mundo de Outros" (Jovchelovitch, 2003, p.65). Assim, para Jovchelovitch "[...] é através da ação de sujeitos sociais agindo no espaço que é comum a todos, que a esfera pública aparece como lugar em que uma comunidade pode desenvolver e sustentar saberes sobre si própria – ou seja, representações sociais" (Jovchelovitch, 2003, p.71). É dessa forma que as representações sociais são criadas, no espaço público, na transmissão do conhecimento do senso comum, nas relações entre as pessoas, esclarecendo, sustentando e justificando ideias e saberes.

A esse respeito, Costa (2014) afirma que:

> As representações sociais são fenômenos sempre ativos e em (re)construção na vida social, levando em conta os aspectos individuais e coletivos do conhecimento social, ou seja, a pessoa constitui-se nas relações sociais e esse fato ocorre através da linguagem. São construções dinâmicas, fluidas a partir de condicionantes históricos e sociais e, por isso, levam os indivíduos a interagir com o meio, modificando os sujeitos em questão, bem como o mundo ao seu redor (Costa, 2014, pp.32-33).

As representações sociais estão sempre ativas na nossa vida social, tanto nos aspectos individuais quanto coletivos no que diz respeito aos conhecimentos sociais. Assim, o indivíduo estabelece-se no meio social por meio das relações sociais e isso ocorre através da linguagem.

## Metodología

A base desse estudo são três perspectivas teóricas sobre a representação social de matemática no contexto indígena. Nossa discussão parte da Educação Escolar Indígena, dialoga com a Etnomatemática e perpassa pela Teoria das Representações Sociais. São perspectivas teóricas que se intercruzam e se complementam, de forma homogênea, sem preferência de umas em detrimento de outras. Diante dessa diversidade teórica, cruzamos fronteiras para dialogar com teóricos que ajudam a compreender aspectos sócioculturais.

Nesse processo dialógico, adotamos como levantamento do estado da arte com uma seleção de teses e dissertações publicadas sobre o assunto. Para tanto, recorremos às publicações disponíveis no Portal de Teses e Dissertações da Capes. Como procedimentos de recorte do acervo pesquisado, utilizamos as expressões: "Etnomatemática" "Representação Social", e "Educação Escolar Indígena". Ao todo foram encontradas 3.889 publicações, sendo que 485 foram para a primeira inserção; 2.877 para a segunda e 557 trabalhos para a última.

Porém, para esse estudo nos interessava os trabalhos que interagiam entre essas áreas do conhecimento e para isso buscamos trabalhos que compreendessem as intersecções entre os conjuntos de trabalhos encontrados anteriormente. Assim, refinamos nossa busca com as seguintes expressões: a) "Etnomatemática" AND "Educação Escolar Indígena", encontrando nessa busca um total de 29 trabalhos; "Etnomatemática" AND "Representação

Social", o portal retornou um total de 1 trabalho; e a intersecção entre "Educação Escolar Indígena" AND "Representação Social", também, só retornou um único trabalho. A intersecção dos três termos "Etnomatemática" AND "Educação Escolar Indígena" AND "Representação Social" não retornou nenhum trabalho. Nesse procedimento de recorte, não adotamos recorte temporal nem espacial, assim os resultados obtidos compreendem todo o universo de publicação disponível no Portal de Teses e Dissertações da Capes.

## Resultados

***Efetuando interseções e estabelecendo relações dialógicas***

Os trabalhos analisados foram produzidos, em sua maioria, nas Regiões Sudeste do Brasil. Podemos perceber que, dos 31 trabalhos analisados, 03 trabalhos foram produzidos na Região Sul do Brasil, 16 trabalhos foram produzidos na Região Sudeste, 05 no Centro-Oeste, 06 na Região Norte e somente 01 na Região Nordeste. Essa primeira análise, revela que a maioria das pesquisas estão concentrada na região Sudeste e suas proximidades.

Porém, quando observamos o lócus das 31 pesquisas estudadas, é possível afirmar que existe uma diferença significativa, se levarmos em consideração o seu local de produção.

Temos 06 trabalhos falando sobre o contexto da Região Sudeste, 02 da Região Sul, 01 da Região Nordeste, 05 da Região Centro-Oeste e 17 trabalhos falando da Região Norte. Há, portanto, uma mobilidade de pesquisadores de outros contextos procurando compreender o contexto da região Norte. Eles estão procurando compreender o outro e não oportunizando ao outro expressar ou expor seu conhecimento pelo seu próprio ponto de vista. Assim, é possível perceber que os povos indígenas da região Amazônica são estudados pela ótica do outro. Muitas vezes, os conceitos de ciência e comportamentos de práticas sociais são apresentados pela ótica do investigador que se apresenta como "cientista único". É preciso refletir que já há uma ciência que motiva as práticas sociais dos povos indígenas.

Boaventura de Sousa Santos menciona a linha abissal existente entre a visão de ciência eurocêntrica do restante do sul. Refletindo sobre essa linha abissal teorizada por Boaventura, Ramos (2016) destaca:

> Todo o processo de colonização foi estruturado por um pensamento abissal (Santos, 2007), a começar pela "descoberta" do território brasileiro – lugar que era povoado por sociedades tradicionais distintas e complexas –, os povos que aqui estavam eram vistos e tratados pelos europeus como "animais", ausentes de alma, conhecimentos "verdadeiros" e sentimentos – desumanos. Esses pré-conceitos/conceitos de falta de "humanidade" e ausência de capacidade cognitiva presente nas relações sociais "primitivas", alimentados pelo etnocentrismo europeu, justificou a presença de distinções visíveis e invisíveis estabelecidas por meio de linhas abissais. Essas linhas abissais separam a realidade social em duas partes, "o deste lado da linha" – onde o pensamento ocidental, a ciência, os grupos sociais "dominantes" estão inclusos – e o "do outro lado da linha" – onde conhecimentos, "crenças" e grupos sociais "desaparecem" como realidade, sendo considerados inferiores, insignificantes e incompreensíveis (Ramos, 2016, p.69).

Os estudos analisados procuram compreender o "outro lado da linha" em que as crenças e realidades sociais dos povos indígenas são compreendidos pela ótica do investigador. É preciso que os próprios indígenas passem a falar por si, mas esse é um movimento muito principiante ainda. Geralmente, os indígenas investigados não são compreendidos pela perspectiva deles. Eles são sempre investigados. Isso ocorre porque:

> O pensamento moderno ocidental é um pensamento abissal. Consiste num sistema de distinções visíveis e invisíveis, sendo que estas últimas fundamentam as primeiras. As distinções invisíveis são estabelecidas por meio de linhas radicais que dividem a realidade social em dois universos distintos: "o deste lado da linha" e o "do outro lado da linha". A divisão é tal que "o outro lado da linha" desaparece como realidade, torna-se inexistente e é mesmo produzido como inexistente (Santos, 2007, p.71).

É preciso oportunizar ao indígena falar. É possível coexistir os dois mundos, transpondo as linhas abissais existentes entre nós e eles. Vivemos tempos de *apartaid*, de separatismos e de negacionismo que, cada vez mais, fortalecem a existência desses abismos entre norte e sul, entre direita e esquerda, entre bem e mal. Temos que construir com o outro, novas possibilidades no campo da epistemologia, sem apagamentos ou subalternidades.

Assim, esse estudo se situa na posição pós-abissal, ciente que a concepção de mundo do pesquisador, em constante estado de fluxo e convivência com os sujeitos investigados, pode-se construir uma diversidade de saberes, capazes de conviver mutuamente, em que um complementa o outro.

O pensamento pós-abissal parte da ideia de que a diversidade do mundo é inesgotável e que esta diversidade continua desprovida de uma epistemologia adequada. Por outras palavras, a diversidade epistemológica do mundo continua por construir (Santos & Menezes, 2010, p.51).

Tal exercício de coexistência, poderá fazer emergir novos pensamentos a respeito do objeto investigado, porém, isso só será possível mediante uma resistência ativa de procurar compreender o outro, livrando-se de toda a carga positivista e cartesiana das abordagens metodológicas eurocêntricas. Em relação as pesquisas realizadas, é oportuno que o Norte fale de si para fazer emergir uma epistemologia nortista, afinal as linhas abissais se reorientam dentro do próprio contexto brasileiro onde "eles" falam de "nós" e "nós" imitamos sempre os trabalhos "deles".

Ao nos apropriamos da epistemologia eurocêntrica, podemos antropofagicamente produzir saberes à nossa maneira. Assim, diante de uma diversidade epistemológica, emerge-se uma ecologia de saberes como propõe Boaventura de Sousa Santos. Sobre isso ele afirma que o "contexto da ecologia de saberes consiste em dar preferência às formas de conhecimento que garantam a maior participação possível dos grupos sociais envolvidos na concepção, execução, controle e fruição da intervenção" (Santos, 2007, p.90).

Assim, concepções de mundo do pesquisador e concepções dos povos investigados constituirão novas possibilidades no campo das metodologias do ensino de matemática, promovendo a ecologia de saberes e superando as práticas abissais, que não deixam de ser colonialidades.

***Etnomatemática e Educação Escolar Indígena***

Como já mencionamos, os estudos em Entomatemática estão em constante avanço. Nessa interseção entre Etnomatemática e Educação Escolar Indígena foram identificados 29 trabalhos publicados desde 2005 até 2019. Porém, nessa seção, vamos dialogar apenas com 07 publicações publicadas no período entre 2016 a 2019, para sintetizar como essa área tem promovido o debate no meio acadêmico.

Monteiro (2016) procura compreender em que medida, tanto a tradução quanto a criação de novos termos para a língua indígena, cumpririam a intenção de transferência dos significados e levaria os indígenas ao conhecimento matemático tido como referência.

Ferreira Neto (2018) investiga como se dá a prática docente no ensino e a aprendizagem dos conceitos matemáticos nas aldeias Paiter da Linha 9, Lapetanha da Linha 11 e Apoena Meirelles do povo Paiter Surui. Nesse processo investigativo, sob uma perspectiva etnomatemática e à luz da aprendizagem significativa, o pesquisador investigou a prática docente, o ensino e a aprendizagem de Matemática e suas relações com a cultura nas aldeias Paiter, Lapetanha e Apoena Meirelles do povo Paiter Suruí, localizadas na Amazônia Ocidental.

Bicho (2018) estuda a Etnomatemática e práticas pedagógicas para compreender saberes matemáticos escolares e tradicionais na educação escolar indígena Karipuna. Dentro os objetivos podemos citar:

> Discutir pressupostos teóricos para a orientação da prática docente de professores indígenas no sentido da construção de relações entre saberes escolares e saberes tradicionais, na dinamização da cultura e na apropriação de conhecimentos matemáticos no meio indígena; Interpretar os entendimentos de professores indígenas sobre as possíveis relações entre matemática escolar e práticas socioculturais do povo Karipuna na educação escolar indígena; e Problematizar a atuação de professores indígenas na dimensão didático-

> pedagógica voltada para a construção de uma educação matemática intercultural na escola da aldeia Manga (Bicho, 2018, pp.42-43).

O pesquisador analisa as relações entre saberes tradicionais do povo Karipuna e saberes matemáticos escolares por meio das práticas pedagógicas de professores indígenas nos anos finais do ensino fundamental na escola indígena da aldeia Manga, no município de Oiapoque-AP.

Ramos (2016) procura compreender e sistematizar conhecimentos etnomatemáticos Javaé e promover reflexões sobre a inserção desses conhecimentos próprios na escola indígena a partir do olhar dos professores indígenas. Como resultado da pesquisa a autora faz a seguinte proposição: "As discussões e reflexões dos professores Javaé, durante a realização do grupo focal, apontaram possibilidades e contribuições de uma educação escolar que valorize os conhecimentos próprios" (Ramos, 2016, p.145). E continua:

> Na perspectiva dos professores Javaé, a inserção de conhecimentos indígenas na escola – em disciplinas como a matemática – propicia um ensino contextualizado, aproximando a escola à realidade dos alunos; contribui para o processo de ensino e aprendizagem dos conhecimentos não indígenas; e proporciona a revitalização e o fortalecimento da cultura Javaé. [...] Os professores Javaé apontaram possíveis caminhos para que sejam desenvolvidos conhecimentos próprios na escola indígena, como: a qualificação de professores indígenas, o desenvolvimento de pesquisas sobre os conhecimentos Javaé e a construção de materiais didáticos específicos (Ramos, 2016, p.149).

Em Silva (2018) vemos as práticas pedagógicas no ensino de Matemática na Educação Escolar Indígena e o diálogo com a Etnomatemática. São temas que estão em consonância com a abordagem desse trabalho. O autor analisa as dificuldades enfrentadas por docentes do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Roraima/Campus Amajari e discentes das etnias Macuxi e Wapixana nos processos de ensino e de aprendizagem da matemática do Curso Técnico em Agropecuária oferecido por aquele Campus, na Comunidade do Contão, Município de Pacaraima. A pesquisa conclui que as dificuldades são diversas, sendo a Etnomatemática um fator de suma importância para facilitar a aquisição de conhecimentos matemáticos.

Nessa mesma perspectiva, Saraiva (2016) investiga os processos de ensino e de aprendizagem da matemática e sua relação com o cotidiano de uma aldeia da Etnia Sateré-Mawé. Para essa reflexão, apoiamo-nos na Etnomatemática, pois entendemos que ela se preocupa não apenas com os fins, mas também com o modo e as técnicas utilizadas na abordagem da matemática nos mais diversos grupos sociais. Assim, durante a pesquisa verificou-se que

> [...] a partir do levantamento bibliográfico, que os professores Sateré-Mawé anseiam uma Educação Escolar Indígena com a diferenciação que seu povo merece, exaltando sua língua, seus mitos, seus rituais, etc. Através da análise do PPP das Escolas Indígenas Sateré-Mawé, que é uma construção e conquista da classe docente dessa etnia com apoio de suas lideranças, visualiza-se que eles desejam elevar e perpetuar pontos fortes da sua cultura através dos componentes curriculares, além de não aceitarem a concepção bancária criticada por Freire (2014), onde a sociedade opressora pratica sobre o oprimido a cultura do silêncio (Saraiva, 2016, p.76).

Silva (2016) apresenta os sentidos que os estudantes pataxó da Educação de Jovens e Adultos (EJA) conferem aos conhecimentos matemáticos. A partir de uma metodologia que antropologicamente possibilita responder questões que envolvem a Matemática em contextos de diversidade étnica e cultural. Nesse estudo, o pesquisador acompanhou cinco estudantes Pataxó, matriculados na modalidade EJA da Escola Indígena Pataxó Coroa Vermelha, pertencente ao município de Santa Cruz Cabrália – BA. Com a análise dos dados, Silva (2016) compreendeu que os conhecimentos matemáticos dos estudantes Pataxó, participantes daquele estudo, estiveram presentes antes dos processos de escolarização deles. Segundo o pesquisador, os estudantes Pataxó participantes do estudo mobilizam constantemente os conhecimentos matemáticos nas suas atividades cotidianas. O autor conclui que os conhecimentos matemáticos exerceram e exercem diferentes sentidos de acordo com as dinâmicas sociais e econômicas vivenciadas pelos estudantes:

> Sob o ponto de vista da Educação Matemática, nesta pesquisa trazemos à tona a importância dos conhecimentos matemáticos desenvolvidos pelos estudantes da EJA em seus cotidianos e, ao mesmo tempo,

> a necessidade de articulação desses conhecimentos com os conhecimentos matemáticos aprendidos no âmbito escolar. Dessa forma, a Escola Pataxó de Coroa Vermelha, juntamente com seus professores, precisam ter clareza do tipo de sujeito que desejam formar, pois pensar a Educação Matemática a ser realizada com esses alunos, é considerar as possíveis implicações da matemática para um duplo objetivo: formar os estudantes indígenas como cidadãos brasileiros plenos, para conhecerem e exercitarem seus direitos e deveres no interior da sociedade brasileira e, também, garantir que continuem exercendo amplamente sua cidadania no interior da sociedade indígena à qual pertencem (Silva, 2016, p.85).

Há nesse estudo uma íntima relação com a dimensão antropológica e com a dimensão afetiva cunhada por Mattos (2020). De fato, no campo da educação indígena e escolar indígena, compreender todas as dimensões da Etnomatemática, possibilita a proposição de metodologias de ensino menos acachapantes e mais inclusivas.

***Etnomatemática e Representação Social***

Na interseção Representação Social e Educação Escolar Indígena, apenas um (01) trabalho foi encontrado. Trata-se do trabalho de Nogueira (2015) que procura reconstruir o percurso histórico da Educação Escolar Indígena para entender o processo histórico da presença do Povo Tenharin no estado do Amazonas. A pesquisadora procura provocar um debate sobre a importância da formação dos professores indígenas para o processo educativo e as perspectivas para a promoção de uma política de formação inicial e continuada e seus impactos no processo de ensino dos alunos. A metodologia utilizada está ancorada na pesquisa de cunho qualitativo. Os instrumentos da pesquisa foram: entrevistas, evocação, questionário e observação direta. Foi utilizado a técnica da evocação ou associação livre de palavras para captar os significados de "escola" entre os professores na construção de suas representações sociais. Para a pesquisadora:

> Na Teoria da Representação Social, não existe a distinção entre sujeito e objeto, conferindo novo significado ao que chamamos de "realidade objetiva", porque toda realidade é reconstituída pelo indivíduo ou pelo grupo de acordo com seu sistema cognitivo e de valores (Nogueira, 2015, p.18).

Como resultado desse estudo destacamos que:

> O núcleo central que sustenta a representação dos professores Tenharin acerca de "escola" está ligado ao processo de educação com ênfase no ensino e no aluno. Essa representação deve ser resultado das dificuldades que os professores enfrentaram quando tiveram que buscar esses conhecimentos escolares fora das aldeias. Atualmente, os professores enfatizam que é necessária uma educação de qualidade para que essa nova geração possa continuar a luta para garantir os direitos dos povos indígenas, especialmente, dos Tenharin. Essa representação social demonstra que os professores Tenharin pensam o ensino voltado para atender às necessidades dos alunos, procurando enfocar o ensino voltado, também, para a valorização da cultura e dos conhecimentos não-indígenas. [...] Com isso, concluímos que a escola aparece como papel fundamental na organização da vida do Povo Tenharin, mas é necessário que outras ações sejam realizadas pelas universidades em parcerias com as Secretarias Municipais de Educação para promover ações que possam melhorar a qualificação dos professores Tenharin, sejam voltados para as Língua Materna e da Língua Portuguesa, assim como para outras áreas do conhecimento. Além disso, é preciso oportunizar que a sociedade não-indígena possa conhecer a história e a cultura dos povos indígenas como forma de minimizar os comportamentos preconceituosos com relação à cultura indígena (Nogueira, 2015, p.141).

Nesse exercício de situar o artigo no universo de trabalhos acadêmicos já publicados sobre o tema, os caminhos metodológicos trilhados por Nogueira (2015) nos ajudam a pensar em procedimentos metodológicos adequados para atingir nossos objetivos.

***Representação Social e Educação Escolar Indígena***

Nessa interseção, também encontramos apenas um estudo. No contexto pesquisado, Santos (2012) investiga as representações matemáticas que estão presentes na produção de brinquedos de miriti, no estado do Pará. O pesquisador investiga as peças artesanais identificando os conhecimentos matemáticos escolares e não escolares que contribuem na elaboração dos modelos de brinquedos pelos artesãos. Nesse processo investigativo de identificação, Santos (2012) concentra as discussões nas representações sociais do brinquedo mencionado, no município de Abaetetuba. Ao fazer isso, o autor analisa os elementos do contexto cultural e socioambiental que contemplem a educação patrimonial ambiental sob o ponto de vista etnográfico. Segundo o autor:

> Neste trabalho optamos por uma "trilha" ao invés de "caminho", por entender caminho como uma faixa de trânsito de um ponto a outro, e trilha como um caminho com vários obstáculos, seria o desafio de utilizar estratégias para transpor obstáculos que surgem no decorrer de uma pesquisa. [...] A presente pesquisa possui características etnográficas, fundamentando- se nos pressupostos teóricos metodológicos da teoria das Representações Sociais, concordando com as idéias de Franco (2004) onde a abordagem e a realização de pesquisas sobre representações sociais podem ser consideradas ingredientes indispensáveis para melhor compreensão da sociedade. [...] A busca por fundamentação teórica - principalmente pela teoria das Representações Sociais, Etnomatemática e Educação Patrimonial Ambiental – para realização dessa pesquisa iniciou-se antes da constituição do "esqueleto" desse trabalho e foi se alargando e se consolidando continuamente nessa trilha metodológica (Santos, 2012, p.56).

A pesquisa de Santos (2012) aproxima aspectos socais, culturais e ambientais das relações matemáticas do contexto investigado.

## Considerações finais

O objetivo desse artigo foi dialogar com teóricos a respeito de três temáticas importantes para compreender os processos de ensino de matemática nos contextos indígenas e pensar na relação que existe entre as três áreas de estudo: "Educação Escolar Indígena", "Etnomatemática" e "Representação Social". Por meio de um levantamento bibliográfico, foi possível compreender que o ensino de Matemática é um campo fronteiriço e interdisciplinar.

O procedimento metodológico oportunizou pensar a relação que existe entre matemática culturalmente construída, sua reprodução, seus usos e processos de ensino atrelados à afetividade, aos sentidos e a psique humana. Com esse levantamento bibliográfico, vimos que não há estudo que dialogue com essas três áreas simultaneamente. Outra lacuna identificada é que, faltam estudos em que os próprios indígenas manifestem sua representação social a partir dos seus contextos. Percebemos que para se compreender as diferentes maneiras de matematizar de um grupo social, é necessário dialogar com pressupostos teóricos complementares. Portanto entre fronteiras e de maneira interseccionado é mais prudente quando se procura compreender fenômenos complexos como é o processo de ensino e afetividade de matemáticas nos contextos escolares indígenas.

Para além disso, os trabalhos aqui intersecionados sugerem possibilidades para o caminhar investigativo com o povo *Noke Koî*, no estado do Acre. Nesse percurso nada é fácil ou previsível, mas necessário para compreendermos um pouco a respeito dos aspectos culturais dos povos investigados. Advogamos por uma intersecção entre Etnomatemática, Educação Escolar Indígena e Representação Social. Acreditamos que esses são ingredientes necessários a um procedimento metodológico que conduzirá a uma compreensão da sociedade *Noke Koî*, principalmente em relação aos diferentes atos de matematizar, na busca por uma abordagem metodológica decolonial e sensível às questões locais.

Nessa perspectiva, faz-se necessário compreender princípios teóricos decoloniais, que advoguem em prol das minorias, considere os processos de construção identitárias dos sujeitos como estado de fluxo e promova a ciência como mutável. Tudo isso se faz necessário à prática docente teoricamente orientada.

## Referências biliográficas

Bicho, J. S. (2018). *Etnomatemática e Práticas Pedagógicas: saberes matemáticos escolares e tradicionais na educação escolar indígena Karipuna*. (Tese de doutorado) - Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática, Belem - PA.

Costa, A. L. (2014). O. *Formação Continuada e Representação Social: implicações para a educação inclusiva.* (Tese de Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Natal, p. 290f.

D'Ambrosio, U. (2005). Sociedade, cultura, matemática e seu ensino. *Revista Educação e Pesquisa*, São Paulo, 31. 99-120.

D'Ambrosio, U. (2019). *Etnomatemática - elo entre as tradições e a modernidade*. 6. ed. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, v. (Coleção Tendência em Educação Matemática, 1).

Ferreira Neto, A. (2018). *Ensino e Aprendizagem da Matemática na Educação Escolar Indígena Paiter Suruí*. (Tese de doutorado) - Programa de Pós- Graduação em Educação em Ciências e Matemática, Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática, Cuiabá-MT.

Halmenschlager, V. L. S. (2001). *Etnomatemática: uma experiência educacional*. São Paulo: Selo Negro.

Jodelet, D. (2001). Representações sociais: um domínio em expansão. *In* Jodelet, D. *As Representações Sociais* (pp. 17-44). Rio de Janeiro: Ed. Uerj.

Jovchelovitch, S. (2003). Vivendo a Vida com os Outros: intersubjetividades, espaço público e representações sociais *In* Guareschi, P.; Jovchelovitch, S. (Eds.). *Textos em Representações Sociais* (pp. 63-88). 8. ed. Petrópolis: Vozes.

Luciano, G. S. (2006). *O Índio Brasileiro: o que você precisa saber sobre os povos indígenas no Brasil hoje*. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Continuada, Alfabetização e Diversidade.

Mattos, S. M. N. (2020). *O Sentido da Matemática e a Matemática do Sentido: aproximações com o programa etnomatemática*. 1. ed. São Paulo: Livraria da Física.

Maturana, H. F. (1998). *Emoções e Linguagem na Educação e na Política*. Belo Horizonte: UFMG.

Melo, E. M. (2013). Katsiti: Um Estudo sobre a Matemática Noke Koi. (Dissertação de Mestrado). Universidade Federal Fluminense, Niterói, BR.

Monteiro, H. S. R. (2016). *Magistério Indígena: contribuições da etnomatemática para a formação dos professores indígenas do Estado do Tocantins* (Tese de doutorado) - Programa de Pós-Graduação Multiunidades em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Estadual de Campinas. Unicamp. Campinas.

Moscovici, S. (2009). *Representações Sociais: investigações em psicologia social*. 5 ed. Petrópolis: Vozes.

Nogueira, E. L. (2015). *Currículo e diversidade cultural indígena no Amazonas: representações da Escola Tenharin em Humaitá e Manicoré*. (Tese de Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em Educação, Pontífica Universidade Católica de São Paulo. São Paulo.

Ramos, G. C. (2016). *Sistema de numeração e pintuas corporais Javaé: a etnomatemática por uma relação dialógica entre cultura e educação escolar*. (Tese de doutorado) - Programa de Pós Graduação em Educação em Ciências e Matemática, Universidade Federal de Goiás. Goiania.

Santos, B. S. (2007). Para Além do Pensamento Abissal: das linhas globais a uma ecologia de saberes. *Novos estudos*.

Santos, B. S. & Menezes, P. (2010). *Epistemologias do Sul*. São Paulo: Cortez.

Santos, I. L. (2012). *Matemática e Cultura Amazônica - Representações do brinquedo de Miriti*. (Tese inédita de mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática do Instituto de Educação Matemática e Científica, Universidade Federal do Pará. Belém - PA.

Saraiva, D. C. M. (2016). *O Ensino e a Aprendizagem da Matemática na Educação Escolar Indígena da Etnia Sateré-Mawé*. (Tese inédita de mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Educação Agrícola, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Seropédica, RJ.

Sêga, R. A. (2000). O conceito de representação social nas obras de Denise Jodelet e Serge Moscovici. *Revista Anos 90*, 128-133.

Silva, A. A. (2018). *Práticas Pedagógicas no Ensino de Matemática na Educação Escolar Indígena e o Diálogo com a Etnomatemática*. (Tese inédita de mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Educação Agrícola, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Seropédica, RJ.

Silva, W. G. (2016). *Sentidos que os Estudantes Pataxós da Eja Conferem aos Conhecimentos Matemáticos para as suas Vidas*. (Tese inédita de mestrado) - Programa de Pós-graduação em Educação Científica e Formação de Professores, Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia. Jequié - BA.

Spink, M. J. (1993). O conceito de representações sociais na abordagem psicossocial. *Cadernos de Saúde Pública.* 9(3), 300-308.

Clame Acta Latinoamericana de Matemática Educativa
SECCIÓN 3 / ASPECTOS SOCIOEPISTEMOLÓGICOS EN EL ANÁLISIS Y EL REDISEÑO DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR
VOL 36, NÚMERO 1, AÑO 2023

# PROCESSOS DE CRIAÇÃO DE HORTAS ESCOLARES: POSSIBILIDADES PARA O ENSINO E A APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA ESCOLAR

# SCHOOL GARDEN CREATION PROCESSES: POSSIBILITIES FOR THE TEACHING AND LEARNING OF SCHOOL MATHEMATICS

**Sandra Maria Nascimento de Mattos, José Roberto Linhares de Mattos, Edinilson dos Anjos Silva**
**Secretaria Municipal de Educação do Rio de Janeiro. Universidade Federal Fluminense. Secretaria Municipal de Educação de Vila Pavão. (Brasil)**
smnmattos@gmail.com, jrlinhares@gmail.com, edinilson.matematica@hotmail.com

**Resumo**:
Este trabalho traz um estudo sobre os processos de criação de hortas escolares desenvolvidos em três escolas públicas das regiões Norte e Sudeste do Brasil. O objetivo foi investigar os processos de criação de hortas escolares como possibilidades para o ensino e a aprendizagem de conteúdos de matemática escolar. Com abordagem qualitativa, empregamos a pesquisa de campo e os instrumentos de pesquisa utilizados foram observação participante, roda de conversas, diário de campo e entrevistas. Os colaboradores de pesquisa foram alunos dos níveis Ensino Fundamental II e Médio, bem como familiares e alguns educadores. Os resultados apontam que o diálogo entre etnomatemática, conhecimentos próprios sobre hortas e os conteúdos matemáticos escolares possibilitam a aprendizagem dos estudantes e que estes são caminhos para o ensino e a aprendizagem dos conteúdos matemáticos escolares. Conclui-se que as vivências e práticas dos colaboradores com hortas complementam os processos de ensino e aprendizagem da matemática escolar.

**Palavras-chave**: hortas escolares, aprendizagem, matemática escolar

**Abstract**:
This work presents a study on school garden creation processes developed in three public schools in the North and Southeast regions of Brazil. The aim was to investigate the processes of creating school gardens as possibilities for teaching and learning school mathematics content. We used field research with a qualitative approach; and the research tools were: participant observation, conversation circles, field journal, and interviews. The research collaborators were students from Elementary School II and High School, as well as family members and some educators. The results indicate that the dialogue between ethno-mathematics, own knowledge about vegetable gardens, and school mathematical content enabled students to learn; and that these are ways of teaching and learning school mathematical content. It is concluded that the experiences and practices of collaborators with vegetable gardens complement the teaching and learning processes of school mathematics.

**Keywords**: school gardens, learning, school mathematics

## Introdução

Em diferentes localidades brasileiras, mais especificamente nas regiões Norte e Sudeste do Brasil, foram desenvolvidos projetos de criação de hortas escolares em escolas públicas com a intenção de promover o ensino contextualizado na cultura dos estudantes e fomentar a aprendizagem significativa nos termos de Ausubel (2000) no despertamento do interesse em aprender a matemática escolar.

No desenvolvimento da pesquisa, partimos do problema: como os processos de criação de hortas escolares, aliados às hortas familiares, contribuem para o ensino e a aprendizagem da matemática escolar? Nessa ótica, o objetivo de estudo foi investigar os processos de criação de hortas escolares como possibilidades para o ensino e a aprendizagem de conteúdos de matemática escolar.

Os procedimentos metodológicos permearam a pesquisa de campo, utilizando como instrumentos investigativos a observação, rodas de conversas, registros em diário de campo e entrevistas. O Programa Etnomatemática (D'Ambrosio, 2011) é um caminho promissor na valorização sociocultural de saberes e fazeres inerentes às hortas familiares, trazendo esses conhecimentos para a reestruturação do ensino de maneira inovadora e criativa, bem como desperta o interesse dos estudantes. Nas atividades desenvolvidas pelos professores, constatamos que os estudantes aproximaram àquilo que já sabiam aos conteúdos matemáticos escolares.

## Marco teórico

Geralmente, no Brasil, as hortas escolares são implantadas nas escolas públicas como uma tentativa de despertar o interesse, tanto dos estudantes quanto dos familiares, pela educação ambiental, sustentabilidade e alimentação saudável. Dias (2019) nos previne que a sustentabilidade, inicialmente tinha o objetivo sobre a manutenção da vida em todo o planeta.

O autor alerta-nos que "[...] a atividade agrícola exige a criação de um meio ambiente artificial para o cultivo de plantas [...]" (Dias, 2019, p. 20) e que essas criações artificiais permitem abundância na produção de alimentos. Entretanto, ressaltamos que as hortas escolares permitem abundância de comida diversificada e saudável para os estudantes. Assim, o papel da escola é, na medida do possível, tornar-se autossustentável em relação aos alimentos saudáveis, os quais seriam disponibilizados na merenda escolar.

Já no que tange a Educação Ambiental, Guimarães (2004) traz a ideia de educação ambiental crítica como a melhor ferramenta para despertar responsabilidades e garantir a manutenção do ambiente. O autor ainda afirma que:

> A Educação Ambiental Crítica objetiva promover ambientes educativos de mobilização desses processos de intervenção sobre a realidade e seus problemas socioambientais, para que possamos nestes ambientes superar as armadilhas paradigmáticas e propiciar um processo educativo, em que nesse exercício, estejamos, educandos e educadores, nos formando e contribuindo, pelo exercício de uma cidadania ativa, na transformação da grave crise socioambiental que vivenciamos todos (Guimarães, 2004, pp. 30-31).

Portanto, as ações pedagógicas devem ser planejadas cognitiva e afetivamente para que os estudantes exercitem o esforço da ruptura paradigmática conservadora e se apropriem de uma vivência coletiva que movimenta saberes e fazeres, os quais eles já conhecem quando se trata de hortas escolares.

Sobre alimentação saudável, Burity *et al*. (2010) afirmam que uma alimentação saudável garante o bom funcionamento do corpo, auxiliando na manutenção da saúde. Mais tarde, agrega-se a esse conceito o aspecto nutricional e sanitário, passando a ser denominado Segurança Alimentar e Nutricional. No Brasil, o conceito adotado em 2004 parte do princípio que:

> A Segurança Alimentar e Nutricional consiste na realização do direito de todos ao acesso regular e permanente a alimentos de qualidade, em quantidade suficiente, sem comprometer o acesso a outras necessidades essenciais, tendo como base práticas alimentares promotoras de saúde que respeitem a

> diversidade cultural e que sejam ambiental, cultural, econômica e socialmente sustentáveis (Burity *et al.,* 2010, p. 13).

Essa afirmação corrobora a introdução das hortas escolares e, em paralelo, ascende ao respeito ambiental, cultural e alimentar orientados aos estudantes nas escolas brasileiras. A alimentação saudável e adequada tem incentivo nas escolas, por partes dos professores, e é entendida como "[...] aquela que contribui para a promoção e manutenção da saúde e a prevenção de doenças e, portanto, para um estado nutricional adequado das pessoas em qualquer fase do curso da vida" (Burity *et al.*, 2010, p. 160), principalmente na fase de desenvolvimento das crianças e adolescentes.

Tomando esses vieses e focando a matemática escolar, trazemos o Programa Etnomatemática (D'Ambrosio, 2011) como aporte central das discussões que envolvem o ensino e a aprendizagem dos conhecimentos inerentes à matemática escolar a partir de hortas escolares e familiares. As discussões trazidas pelo autor envolvem as tradições ou a ancestralidade advinda de sabres e fazeres oriundos dos variados grupos socioculturais. O autor ressalta que "a etnomatemática é embebida de ética, focalizada na recuperação da dignidade cultural do ser humano" (D'Ambrosio, 2011, p. 9). Consequentemente, não podemos negar que o vínculo entre a etnomatemática e as hortas escolares apregoam a entrada da cultura dos estudantes em sala de aula ou fora dela. Instigam, ainda, o alcance da aprendizagem significativa (Ausubel, 2000) que permeia utilizar aquilo que os estudantes já conhecem para despertar o desejo em aprender os conceitos matemáticos escolares.

Nesse sentido, Mattos (2020) traz a dimensão afetiva como um aspecto essencial para aproximar a afetividade da cognitividade e, em relação com a etnomatemática, para propiciar o ensino e a aprendizagem significativa. A autora ressalta que:

> [...] a atribuição de significados que são compartilhados por cada um em um grupo social, que os permite reconhecerem-se mutuamente, já que podemos afirmar que dão sentidos as coisas e as práticas e interpretam-nas semelhantemente. Por conseguinte, estão interligados pela cultura que se relaciona aos sentimentos, ao sentido de pertencimento que revela a identidade de cada um e do grupo social e aos conceitos, valores e ideias compartilhados. Os significados culturais geram, organizam e regulam as práticas sociais, influenciando a conduta de um grupo social (Mattos, 2020, p. 99).

Nessa mesma lógica, a etnomatemática veio pensar as formas de matematizar o mundo, reconhecendo que embora tardio essa maneira de pensar encoraja reflexões do ponto de vista cognitivo, histórico, social, pedagógico e afetivo. De acordo com D'Ambrosio (2011, p. 17): "O grande motivador do programa de pesquisa que denomino Etnomatemática é procurar entender o saber/fazer matemático ao longo da história da humanidade, contextualizado em diferentes grupos de interesse, comunidades, povos e nações." É com esse entendimento que embarcamos na aventura proposta pelo autor.

D'Ambrosio (2011) reafirma que a cultura é construída em uma dinâmica de interação entre sujeitos na qual existem distintas maneiras de fazer e saber que a caracteriza. Diante disso, o autor adverte que: "A necessidade de se alimentar, em competição com outras espécies, é o grande estímulo no desenvolvimento de instrumentos que auxiliam na obtenção de alimentos" (D'Ambrosio, 2011, p. 19). Além disso, a obtenção dessa alimentação motivou as primeiras manifestações matemáticas com o intuito de sanar as necessidades alimentares dos sujeitos tempos atrás. O que continua ocorrendo na atualidade.

## Metodología

Com abordagem qualitativa, utilizamos a pesquisa de campo, desenvolvida em três escolas das regiões Norte e Sudeste do Brasil. Os instrumentos de pesquisa utilizados foram observação participante, rodas de conversas, registro em diário de campo e entrevistas. Os participantes da pesquisa foram os alunos do ensino fundamental II e médio, bem como os familiares e alguns educadores. Aqui neste trabalho estamos apresentando somente o que foi trabalhado junto aos alunos em cada uma das escolas.

Partindo do objetivo geral de investigação: investigar os processos de criação de hortas escolares como possibilidades para o ensino e a aprendizagem de conteúdos de matemática escolar, visamos trazer como resultado de pesquisa, a introdução da etnomatemática e da aprendizagem significativa, por intermédio de hortas escolares, como caminhos profícuos para uma prática docente inovadora.

Paralelamente, os pesquisadores fizeram observações de como os familiares construíam suas hortas familiares, além disso, realizaram rodas de conversas na implementação de diálogos com os estudantes e familiares e entre eles. A roda de conversa é uma técnica que contribui para agregar pessoas em torno de um assunto comum, possibilitando coletar diferentes opiniões em um mesmo espaço. Isso permite que o assunto seja ressignificado, apreendido e reaprendido a cada tempo que a roda ocorrer.

Baseamo-nos em Marconi e Lakatos (1996) para a pesquisa de campo, além disso, foram desenvolvidas algumas etapas, as quais seguem: visitas às famílias, registros de fotos e vídeos sobre o processo de criação da horta familiar, rodas de conversas, registros em diário de campo e entrevistas. As análises e discussões foram baseadas nos processos de criação de hortas escolares, aliadas aos conhecimentos da horta familiar, que poderiam resultar como caminhos para o ensino e a aprendizagem da matemática escolar. As entrevistas e rodas de conversas foram realizadas em locais e horas acordadas entre entrevistador e entrevistados. Após as transcrições, foram observadas similitudes e diferenças entre os procedimentos agrícolas utilizados pelas famílias, e como proceder na abordagem de conteúdos da matemática escolar. Os resultados foram interpretados e discutidos à luz dos referenciais teóricos da etnomatemática e da aprendizagem significativa utilizados.

## Resultados

O Brasil é um país de dimensão continental, regido por territorialidades regionais que envolvem cinco regiões: Norte, Nordeste, Centro-Oeste, Sudeste e Sul. Cada uma dessas regiões apresenta características alimentares diferenciadas e variadas. O ministério da saúde pensando nessas formas alimentares distintas lançou um documento, em 2015, intitulado “Alimentos regionais brasileiros”. Esse documento além de trazer os alimentos regionais como cereais, condimentos, hortaliças, frutas e outros, apresenta alguns tipos de preparo.

Em geral, muitos alimentos e preparos vêm de origem indígena, africana e europeia.

Segundo esse documento “Na história alimentar, a agricultura é uma prática de produção milenar, adotada por vários povos da antiguidade como opção para aumentar a disponibilidade de alimentos” (Brasil, 2015, p. 438), incluindo a elaboração de hortas familiares.

Anterior a esse documento já existia outro que trata sobre “Hortas”. É um documento também do ministério da saúde, de 2001, elaborado como um “Manual para Escolas: A Escola promovendo hábitos alimentares saudáveis” (Brasil, 2001). Segundo esse documento:

> Há várias atividades que podem ser utilizadas na escola com o auxílio de uma horta onde o professor relaciona diferentes conteúdos e coloca em prática a interdisciplinaridade com os seus alunos. A matemática pode ser um exemplo com o estudo das diferentes formas dos alimentos cultivados, além disso, o estudo do crescimento e desenvolvimento dos vegetais pode ser associado com o próprio desenvolvimento. Isto é, a importância da terra ter todos os nutrientes para que a semente se desenvolva em todo o seu potencial, livre de qualquer doença. Essas atividades também asseguram que a criança e a escola resgatem a cultura alimentar brasileira e, consequentemente, estilos de vida mais saudáveis (Brasil, 2001, pp. 3-4).

Ancorando-nos nesses documentos e pautando-nos na etnomatemática é possível utilizar as hortas escolares em paralelo às hortas familiares para introduzir conceitos matemáticos escolares de maneira que os estudantes se sintam seguros e empoderados para argumentar e descobrir variados conceitos matemáticos. Em concordância com Miguel (2005) entendemos que:

> [...] um processo significativo de ensino de Matemática deve conduzir os alunos à exploração de uma grande variedade de idéias e de estabelecimento de relações entre fatos e conceitos de modo a incorporar os contextos

> do mundo real, as experiências e o modo natural de envolvimento para o desenvolvimento das noções matemáticas com vistas à aquisição de diferentes formas de percepção da realidade. Mas ainda é preciso avançar no sentido de conduzir as crianças a perceberem a evolução das idéias matemáticas, ampliando progressivamente a compreensão que delas se tem (Miguel, 2005, p. 377).

Nessa perspectiva, passamos a apresentar três trabalhos realizados em diferentes regiões brasileiras.

O primeiro estudo ocorreu na região Norte do Brasil, na Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Cora Coralina, situada em Cacoal – Rondônia, Brasil (Figura 1), onde várias atividades foram desenvolvidas, mesclando diferentes disciplinas.

**Figura 1**. *Localização no mapa e fachada da escola.*


**Fonte**: Escola Cora Coralina 2020.

A exposição de conhecimentos, por familiares, e professores, sobre espaçamento entre mudas e semeadura (Figura 2), quantitativo de adubo e criação de maquetes são alguns dos conteúdos utilizados para ensinar a matemática escolar. O projeto “Espaço horta na escola” teve importância para a comunidade da Escola Cora Coralina compreender que se pode desenvolver atividades dentro e fora da sala de aula.

**Figura 2.** *Semeadura para germinação.*

**Fonte**: autores 2019.

Essas práticas, aliadas às teorias, não ensinam somente o conteúdo escolar, mas vão além das fronteiras das disciplinas. A troca de experiências entre os professores e os alunos ocorreram constantemente, promovendo o enriquecimento dos processos que envolvem o ensino e a aprendizagem, além de voltar-se para a educação ambiental e a sustentabilidade local.

Sobre a criação de maquetes, as atividades foram planejadas com as professoras de matemática e física, juntamente com os alunos do terceiro ano do ensino médio. Com os conceitos matemáticos de geometria plana e espacial, os alunos elaboraram a planta baixa da maquete, utilizando algumas formas geométricas. Além disso, realizaram estudo gráfico observando a passagem do plano bidimensional para o plano tridimensional. Essa ação é corroborada por Simielli quando afirma que:

> [...] o trabalho com maquetes não é simplesmente a confecção da maquete, isto porque o processo da construção de maquetes, em si, é um processo interessante, pois o aluno percebe realmente a passagem da tridimensão para a bidimensão ou, no caso específico da construção da maquete, da bidimensão para a tridimensão [...] (Simielli, 2015, p. 103).

Essa prática docente deu possibilidades aos estudantes buscarem respostas e argumentarem sobre o processo de desenvolvimento das maquetes e os conceitos matemáticos escolares interligados a essa construção. As maquetes apresentavam um sistema de produção de energia, o qual simulava um sistema eólico para essa geração, como podemos observar na figura 3.

**Figura 3.** *Maquete elaborada por estudantes.*

**Fonte**: autores 2019.

Diante do exposto, esta primeira pesquisa possibilitou-nos compreender que a etnomatemática, desenvolvida por meio de hortas escolares, aliadas as hortas familiares, é um caminho para atuar interdisciplinarmente e contextualizar conhecimentos matemáticos escolares com àqueles já ancorados pelos estudantes e utilizados cotidianamente.

O segundo estudo teve como contexto o Centro Municipal de Educação Agroecológica (CMEA) Artur Pagung, no distrito Praça Rica, município de Vila Pavão, no estado do Espírito Santo, Brasil, situado na região Sudeste do Brasil (Figura 4).

**Figura 4.** *Localização no mapa e entrada principal da escola.*


**Fonte**: autores 2020.

Os alunos do ensino fundamental II, sexto e nono ano, filhos de produtores rurais, conheceram o espaço da horta, números de canteiros a serem construídos, tipos de hortaliças para o local e disponibilidade de água. Houve explicações sobre as diversas atividades que seriam realizadas na horta escolar e na horta caseira, relacionando conhecimento escolar e conhecimento artesanal familiar. Essa ação docente assumiu a intenção de comparar os procedimentos utilizados pelo produtor com os dos alunos na horta escolar. Em pesquisa realizada com os alunos foi constatado que 80% deles possuíam horta em casa, aspecto que facilitaria realizar as comparações.

Foram realizadas medições em dois canteiros já construídos, com 5,9 m de comprimento e 66 cm de largura, e posteriormente construíram mais cinco canteiros. O uso das mãos para traçar os espaçamentos era um aspecto observado constantemente, algo que é comum entre os produtores rurais. Os cinco canteiros foram construídos com 21 retângulos por canteiro, cada retângulo medindo 23 cm de largura e 22 cm de altura (Figura 5).

**Figura 5.** *Alunos medindo os canteiros da horta escolar.*

**Fonte**: autores 2019.

Contextualizar conteúdos matemáticos, em diálogo com os saberes e fazeres cotidianos dos alunos, possibilitou resolver problemas envolvendo medidas de comprimento, cálculo de área, porcentagens, transformações entre as unidades, figuras geométricas, números decimais, situações de venda e sistema monetário. Segundo Miguel (2005, p. 392):

> [...] o estudo da Geometria na escola, enquanto estudo de figuras, formas e relações, deve propiciar aos alunos a possibilidade de relacionar a Matemática ao desenvolvimento da competência espacial que cumpre três etapas essenciais: espaço vivido (espaço físico vivenciado pelo deslocamento e exploração física), espaço percebido (para lembrar-se dele, a criança já não precisa explorá-lo fisicamente) e espaço concebido (estabelecimento de relações espaciais pelas suas representações: figuras, plantas, mapas, diagramas, etc.).

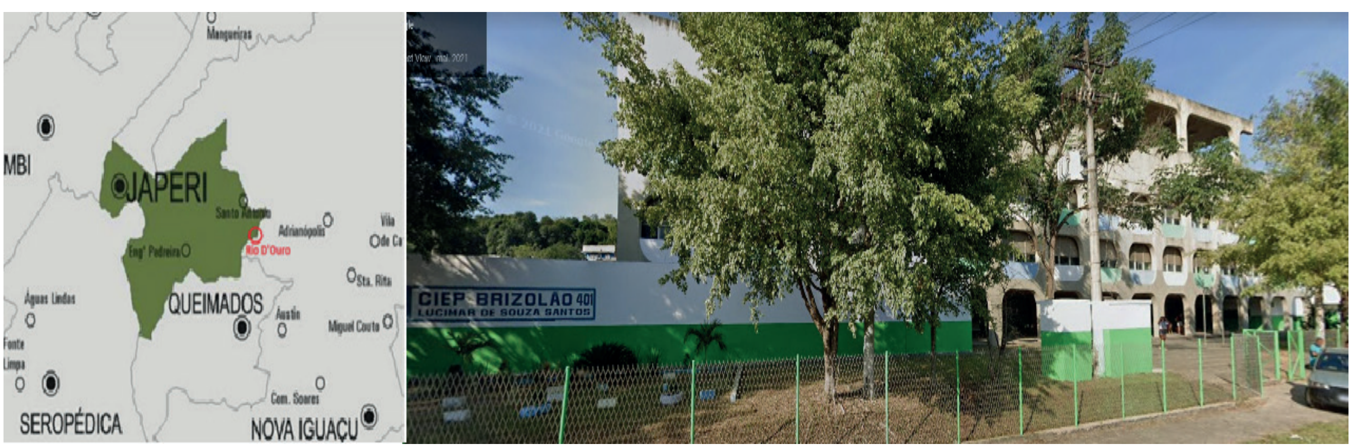
Os alunos de posse de seus conhecimentos, os quais já estão ancorados em suas estruturas mentais conseguem realizar as atividades que envolvam conceitos matemáticos escolares com maior facilidade e melhor compreensão. Essa afirmação é corroborada por Mattos e Mattos (2019, p. 105) quando afirmam que:

> Torna-se relevante o sentido dado ao conhecimento a ser adquirido e que este tenha suporte na estrutura cognitiva do aluno, permitindo com que o mesmo seja afetado e desenvolva o desejo em aprender. Nessa perspectiva, ao estimular as estruturas cognitivas do aluno, o professor possibilita a organização mental e o armazenamento sequenciado do conhecimento.

Essa segunda pesquisa revigora-nos a percepção que estamos trilhando um caminho proveitoso. Ampara-nos na reflexão acerca das possíveis comparações entre saberes e fazeres dos agricultores familiares e os conceitos matemáticos escolares. E por último, dá-nos a segurança de que a aprendizagem significativa (Ausubel, 2000) alinhada a etnomatemática (D'Ambrosio, 2011) traz a cultura como eixo integrador (Mattos & Mattos, 2019) para o ensino dos educadores matemáticos.

O terceiro estudo ocorreu também na região Sudeste do Brasil, na Escola Municipal CIEP 401 – Lucimar de Souza Santos, no município de Japeri, Rio de Janeiro, Brasil (Figura 6), com ações educativas, realizadas pelos docentes, repensando práticas para contextualizar os conhecimentos matemáticos escolares.

**Figura 6.** *Localização e Fachada da escola.*




**Fonte:** autores 2022.

A horta escolar é um projeto pedagógico que faz parte do Projeto Político Pedagógico – PPP da escola, para contribuir de forma significativa na compreensão dos conhecimentos escolares desenvolvidos em sala de aula e investigar a realidade envolvente, organizando atividades escolares a fim de interagir com ela. Na Figura 7, vemos uma dessas atividades em que os alunos fazem o espaçamento e semeadura das sementes.

**Figura 7.** *Espaçamento e semeadura das sementes.*

**Fonte**: autores 2022.

Todos os professores são envolvidos nesse projeto para movimentar a comunidade escolar interna na inter-relação com a comunidade externa. O intuito dessa ação é que os alunos levem para fora dos muros da escola as ideias de reciclagem, cuidados com a horta, compostagem, dentre outras ações, além disso, tragam para dentro da escola os saberes e fazeres que desenvolvem com seus familiares, o que possibilita a compreensão de que aquilo que aprendem, tem utilidade na vida diária deles. Nessa mesma lógica, a etnomatemática viabiliza comparar os conhecimentos já adquiridos pelos alunos e fortalecer a cultura deles. Knijnik *et al*. afirmam que:

> O pensamento etnomatemático está centralmente interessado em examinar as práticas de fora da escola, associadas as racionalidades que não são idênticas à racionalidade que impera na Matemática Escolar, com seus estreitos vínculos com a razão universal instaurada pelo Iluminismo. Mas é preciso que se diga: olhar para essas outras racionalidades, sem jamais se esquecer do que está no horizonte, é pensar outas possibilidades para Educação Matemática praticada (Knijnik *et al*., 2019, pp. 17-18).

A utilização de hortas escolares/familiares deu possibilidade de se trabalhar interdisciplinarmente, envolvendo educação ambiental, alimentação saudável e elementos de outras disciplinas, como a matemática escolar. De acordo com Anschau *et al*. (2018, p. 149):

> A horta torna-se uma ferramenta para o ensino e a aprendizagem, de grande importância nas escolas, principalmente, por abordar vários tópicos em um “laboratório vivo”, que ao final de cada ciclo servirá de alimento para a própria comunidade escolar. Ainda, uma horta viva na escola pode inserir a comunidade no meio escolar.

Em um primeiro momento foi feito levantamento das famílias que tinham hortas para observações nestes locais. Depois foi estabelecido pela professora de matemática que a avaliação final do projeto seria a elaboração de uma maquete dos canteiros construídos (Figura 8).

**Figura 8.** *Elaboração das Maquete com formas geométricas.*


**Fonte**: autores 2022.

O diferencial desse projeto recaiu nas técnicas agrícolas simples, passadas pelos responsáveis, interesse em aprender conteúdos referentes a geometria euclidiana plana com a introdução de mini maquetes, bem como, a necessidade de uma alimentação saudável.

## Considerações finais

O diálogo entre etnomatemática, conhecimentos próprios sobre hortas e os conteúdos escolares permitiram aos estudantes sentiram-se estimulados a aprender, por dar visibilidade aos conhecimentos cotidianos e, ao mesmo tempo, verem-se valorizados e detentores desses conhecimentos. É importante destacar, que esses professores conseguiram ressignificar a matemática escolar, desenvolvendo um trabalho interdisciplinar e promovendo a aproximação entre a escola e a comunidade escolar, pelo viés das hortas escolares.

A implantação de hortas nas escolas valorizou a alimentação saudável, sustentabilidade local e de pequenos espaços como em mini maquetes. Além disso, abriu espaço para que os estudantes trouxessem os conhecimentos que praticavam no cotidiano com suas famílias. Houve aproximações entre diferentes áreas de conhecimento, tais como a biologia, a geografia, a matemática, a física e a agroecologia.

Foi possível constatar a adesão dos estudantes nos diferentes projetos implantados nas três escolas, além da participação dos responsáveis e dos educadores, havendo, portanto, engajamento de quase toda comunidade escolar. No que diz respeito a matemática escolar, podemos afirmar que diferentes conceitos foram abordados. Entretanto, foi comum nos três projetos a abordagem sobre geometria euclidiana plana e um pouco da geometria espacial, passagem do bidimensional para o tridimensional.

A inovação neste trabalho reside na junção da etnomatemática com a aprendizagem significativa, conforme Mattos e Mattos (2019), no ensino e na aprendizagem de conteúdos da matemática escolar, em especial de geometria, no processo de criação de hortas escolares,  o que possibilita caminhos profícuos para uma prática docente inovadora e uma aprendizagem mais prazerosa e criativa.

Podemos, ainda, constatar que a introdução da etnomatemática fortaleceu a aprendizagem significativa por trazer conceitos já adquiridos e ancorados na estrutura cognitiva dos alunos, bem como, valorizou os conhecimentos familiares artesanais sobre os conceitos básicos de agricultura familiar. Entendemos, mais ainda, que o desenvolvimento de hortas nas escolas propiciou aos alunos, que já desenvolviam hortas familiares, passarem seus conhecimentos para os outros alunos que não tinham acesso a esses conhecimentos.

Para finalizar, cabe-nos reforçar a necessidade de trazer a cultura dos alunos para a sala de aula como mais um recurso que desperte o interesse e o desejo em aprender os conceitos matemáticos escolares. Por fim, vislumbramos na etnomatemática um dos caminhos de ensino que dá suporte para a aprendizagem mais prazerosa, mais coletiva, mais compartilhada e mais consciente sobre a proteção do ambiente local, tal qual desperte tonalidades afetivas agradáveis e estimulem os alunos a persistirem em aprender.

## Referências

Ausubel, D. P. (2000). *Aquisição e retenção de conhecimentos*: *uma perspectiva cognitiva*. Tradução Ligia Teopisto. Lisboa: Plántano Edições Técnicas.

Anschau *et al*. (2018). Projeto Horta Viva na Escola. *Ciência e Natura*, 40, 148-155.

Brasil. (2015). Ministério da Saúde. *Alimentos regionais brasileiros*. Secretaria de Atenção à Saúde. Departamento de Atenção Básica (2nd ed.) Brasília: Ministério da Saúde.

Brasil. (2001). Ministério da Saúde. *Manual para Escolas: A Escola promovendo hábitos alimentares saudáveis – Hortas*. Secretaria de Atenção à Saúde. Departamento de Atenção Básica. Brasília: Ministério da Saúde.

Burity, V. *et al*. (2010). *Direito humano à alimentação adequada no contexto da segurança alimentar e nutricional*. Brasília, DF: ABRANDH.

D'Ambrosio, U. (2011). *Etnomatemática – elo entre as tradições e a modernidade.* Belo Horizonte: Autêntica.

Dias, R. (2019). *Gestão ambiental: responsabilidade social e sustentabilidade.* (3th ed.) São Paulo: Atlas.

Guimarães, M. (2004). Educação ambiental crítica. *In* Layrargues, P. P. (Ed.). *Identidades da educação ambiental brasileira* (pp. 25-34). Brasília: Ministério do Meio Ambiente.

Knijnik, G.; Wanderer, F.; Giongo, I. M.; Duarte, C. G. (2019). *Etnomatemática em movimento*. Belo Horizonte: Autêntica. [Coleção Tendências em Educação Matemática, 25].

Marconi, M. D. A. & Lakatos, E. M. (1996). *Técnicas de pesquisa: planejamento e execução de pesquisas, amostragens e técnicas de pesquisas, elaboração, análise e interpretação de dados*. (3th ed.) São Paulo: Atlas.

Mattos, S. M. N. (2020). *O sentido da matemática e a matemática do sentido*: *aproximações com o programa etnomatemática*. São Paulo: Livraria da Física.

Mattos, S. M. N. & Mattos, J. R. L. (2019). Etnomatemática e prática docente indígena: a

cultura como eixo integrador. *Hipátia,* 4(1), 102-115.

Miguel, J. C. (2005). O ensino de matemática na perspectiva da formação de conceitos: implicações teórico-metodológicas. *In* Pinho, S. Z.; Saglietti, J. R. C. (Ed.), *Núcleos de Ensino* - Prograd - Unesp. (1st ed.) (pp. 375-394). São Paulo - SP: Editora UNESP, v. I.

Simielli, M. E. R. (2015). Cartografia no ensino fundamental e médio. *In* Carlos, A. F. A. (Ed.), *A geografia na sala de aula*. (9th ed.) (pp. 92-108). São Paulo: Contexto.

# SECCIÓN 4

## EL PENSAMIENTO DEL PROFESOR, SUS PRÁCTICAS Y ELEMENTOS PARA SU FORMACIÓN PROFESIONAL

VOL 36, NÚMERO 1, AÑO 2023

# PRÁCTICAS DE AUTORREGULACIÓN EN PROBLEMAS DE MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

# SELF-REGULATION PRACTICES IN MATHEMATICAL MODELLING PROBLEMS

**Diana Hidalgo-Moncada, Carlos Ledezma**
**Universidad de Barcelona. (España)**
dhidalmo7@alumnes.ub.edu, cledezar25@alumnes.ub.edu

**Resumen**:
Se reporta la reflexión sobre el diseño e implementación de un taller dirigido a profesores de matemática de educación secundaria, cuyo objetivo fue introducir a los participantes en la modelización matemática desde la perspectiva del aprendizaje autorregulado. Como sustento teórico del taller se consideraron, por una parte, el ciclo de modelización desde una perspectiva cognitiva y, por otra parte, la promoción del aprendizaje autorregulado en las clases de matemática. Para su diseño se consideró una estructura que permitiera a los participantes resolver problemas de modelización, analizar la actividad matemática subyacente a este proceso, y reflexionar a través de preguntas que fomentan la autorregulación durante el trabajo con este tipo de problemas. Además, en este escrito se comenta la implementación de la primera sesión del taller, desarrollada en modalidad virtual. Finalmente, se plantean algunas reflexiones sobre las implicancias de considerar la autorregulación en el trabajo con modelización matemática en el aula.

**Palabras clave**: aprendizaje autorregulado, formación de profesores, modelización matemática

**Abstract**:
This paper reports a reflection on the design and implementation of a workshop aimed at secondary school mathematics teachers. Its objective was to introduce the participants to mathematical modelling from the perspective of self-regulated learning. As theoretical basis for this workshop, we took into account, on one hand, the modelling cycle from a cognitive perspective and, on the other hand, the promotion of self-regulated learning in mathematics lessons. To design it, we considered a structure that would allow participants to solve modelling problems, to analyse the mathematical activity underlying this process, and to reflect through questions that encourage self-regulation while working with this type of problems. In addition, in this paper, we comment on the workshop first session implementation, which was carried out in virtual mode. Finally, we propose some reflections on the implications of considering self-regulation when working with mathematical modelling in the classroom.

**Keywords**: self-regulated learning, teacher training, mathematical modelling

## Introducción

En las últimas décadas se ha investigado sobre el conocimiento profesional del profesor de matemática, el cual contempla los saberes que están relacionados con las problemáticas a las cuales se enfrentará en su futura praxis docente. Esto ha llevado a los investigadores a centrarse en el desarrollo de, principalmente, dos tipos de competencias profesionales.

Por una parte, se tienen las competencias transversales, como la autorregulación del aprendizaje. El desarrollo de esta competencia aporta herramientas al estudiante para organizar y estructurar mejor sus aprendizajes, y al docente a la hora de planificar y gestionar sus prácticas, como también la capacidad para adaptarse a diversos contextos. Además, diversas investigaciones han confirmado que aquellos estudiantes con un alto grado de autorregulación poseen un mayor éxito académico (Altun y Erden, 2013; Cueli et al., 2013). Estas investigaciones también muestran que la autorregulación aumenta la motivación de los estudiantes y potencia la autoeficacia en el aprendizaje (Lavasani et al., 2011).

Por otra parte, existe un consenso internacional sobre la importancia de desarrollar competencias matemáticas que permitan relacionar los conocimientos de los individuos en la resolución de problemas del mundo real, donde se destaca la modelización matemática (Kaiser, 2020). Esta competencia se considera: a) Un aspecto central de la evaluación internacional PISA para la resolución de problemas (Organisation for Economic Co-operation and Development, 2019); b) Un proceso que trae consigo una serie de beneficios para el aprendizaje de la matemática (Blum, 2011); c) Un factor indispensable a considerar para la formación de individuos capaces de relacionar sus conocimientos matemáticos a las necesidades y exigencias contemporáneas (Doerr y Lesh, 2011). En este sentido, si se pretende formar a los estudiantes en modelización, se requiere que los profesores manejen estrategias de enseñanza asociadas a la implementación de esta competencia en el aula (Blum y Borromeo, 2009).

De este modo, dada la importancia tanto de la modelización como del aprendizaje autorregulado, en este trabajo se pretende responder a la pregunta: ¿Cómo reflexionan los profesores de matemática (en formación y en ejercicio) sobre las prácticas de autorregulación en el desarrollo de problemas de modelización? Para responderla, en este trabajo se reporta la experiencia de un taller dirigido a profesores de matemática (en formación y en ejercicio), con el objetivo de, por una parte, describir su diseño e implementación y, por otra parte, analizar las reflexiones de los participantes desde la perspectiva del aprendizaje autorregulado en el desarrollo de problemas de modelización.

## Fundamento teórico

Este taller se fundamenta en dos referentes teóricos, a saber, el aprendizaje autorregulado y la modelización matemática, los cuales han sido previamente analizados bajo el lente del Enfoque Onto-Semiótico (EOS) (Godino et al., 2007). El EOS es un modelo teórico sobre la cognición e instrucción matemáticos que articula diversos puntos de vista sobre el conocimiento, la enseñanza, y el aprendizaje de la matemática. Dado que el EOS aporta una serie de herramientas teórico-metodológicas para el análisis de distintos aspectos involucrados en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática (Godino et al., 2016), los referentes teóricos considerados utilizaron algunas de éstas, como se explica en los párrafos correspondientes.

El aprendizaje autorregulado es un proceso activo en el cual los estudiantes establecen metas para su aprendizaje, donde monitorean, regulan, y controlan su cognición, motivación, y conducta, guiados por sus metas de aprendizaje y por aspectos contextuales (Pintrich, 2000). Este aprendizaje puede ser promovido a través de diversas prácticas docentes (Hidalgo-Moncada et al., 2020), las cuales, por una parte, consideran aspectos de diversos autores que hablan acerca de cómo promover el aprendizaje autorregulado en la enseñanza de la matemática y, por otra parte, se caracterizan según los seis Criterios de Idoneidad Didáctica, que es una de las herramientas que plantea el EOS (véase Tabla 1). Tales prácticas son indispensables en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, ya que permiten, tanto al docente como al estudiante, desarrollarse de forma autónoma; ser capaces de planificar el tiempo y los medios de los que disponen para enseñar o aprender; mejorar o mantener la motivación; y superar las dificultades, entre otras. En este taller, estas prácticas se trabajan mediante diversas preguntas que guían la reflexión de los participantes, las cuales son detalladas en la sección Descripción del taller y diseños didácticos.

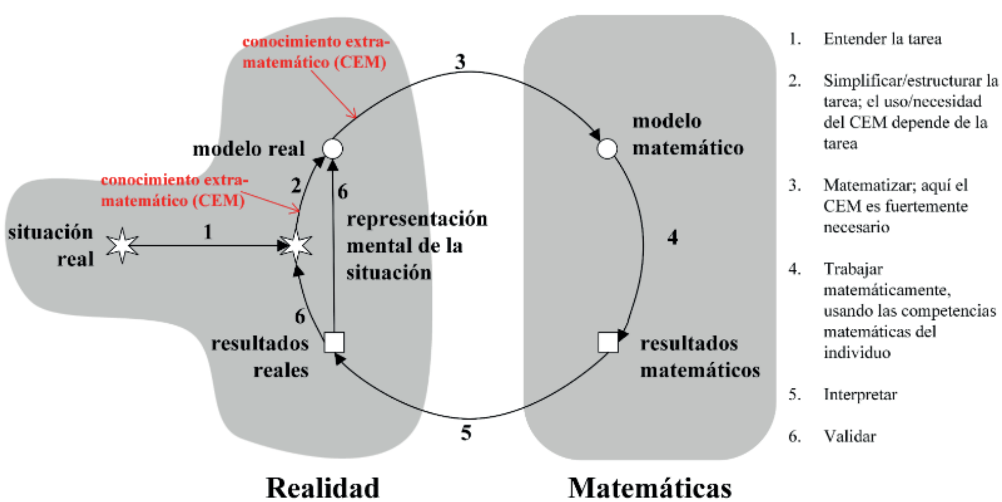
**Tabla 1.** *Descripción de los Criterios de Idoneidad Didáctica.*

| Criterios | Descripción |
|---|---|
| Epistémico | Para valorar si las matemáticas que se enseñan son unas "buenas matemáticas". |
| Cognitivo | Para valorar, antes de iniciar el proceso instruccional, si lo que se quiere enseñar está a una distancia razonable de lo que saben los estudiantes. |
| Interaccional | Para valorar si la interacción ha resuelto dudas y dificultades de los estudiantes. |
| Mediacional | Para valorar la adecuación de los recursos materiales y temporales utilizados en el proceso instruccional. |
| Afectivo (o emocional) | Para valorar la implicación (interés, motivación) de los estudiantes en el proceso instruccional. |
| Ecológico | Para valorar la adecuación del proceso instruccional al proyecto educativo del centro, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social y profesional, etc. |

**Fuente:** Adaptado desde Breda et al. (2018).

La modelización es considerada, en términos generales, como un proceso en que una situación-problema tomada desde la «realidad» es resuelta con las herramientas del «mundo matemático», a fin de darle una solución plausible en el «mundo real». En el plano teórico se han diseñado diferentes ciclos para explicar este proceso (Borromeo, 2006), así como distintas perspectivas sobre su implementación (Abassian et al., 2020; Kaiser y Sriraman, 2006), lo cual se justifica en la diversidad de posturas en torno a la modelización (Borromeo, 2013). Para el diseño de este taller se adoptó el Ciclo de Modelización desde una Perspectiva Cognitiva (véase *Figura 1*), propuesto por Borromeo (2018), en el que se explican las fases por las que transita un individuo para resolver un problema de modelización. La elección de este ciclo en particular se justifica en el conocimiento de sus autores en su utilización.

**Figura 1.** *Ciclo de modelización desde una perspectiva cognitiva.*




**Fuente:** Adaptado desde Borromeo (2018, p. 15)

La explicación de este ciclo se realiza con base en uno de los problemas (véase *Figura 2*) incluidos en el diseño de este taller.

**Figura 2.** *Problema de modelización "El Faro".*

# El Faro

En la bahía de la ciudad de Bremen, fue construido directamente sobre la costa en 1884 un faro de 30,7 m de altura llamado "Red Sand". Con su baliza advertía a los barcos que se estaban aproximando a la costa.

*¿Cuán lejos estaba un barco de la costa cuando veía el faro por primera vez?* (Redondea en enteros los kilómetros)

**Fuente:** Adaptado desde Blum y Borromeo (2009, p. 48)

La *situación real* es entendida como una situación-problema tomada desde la realidad, es decir, el problema de *El Faro* a través de una imagen. A partir de ello, el individuo forma una *representación mental de la situación* en que entiende la tarea y reconstruye mentalmente la situación, por ende, relaciona el enunciado a la costa y a sus experiencias propias con faros (*conocimiento extra-matemático*), y comprende que debe determinar la distancia a la que se encontraba un barco cuando veía por primera vez la luz del faro. Para la construcción de un *modelo real*, el individuo debe, por una parte, simplificar la imagen mental que se ha formado, por lo que se puede simplificar la Tierra como una circunferencia, al faro como un segmento de recta, y al barco como un punto sobre la circunferencia; y, por otra parte, estructurarla mediante una representación. El *modelo matemático* toma en cuenta los objetos matemáticos que permiten explicar la *situación real* (Abassian et al., 2020), y será el producto de la matematización (traducción al lenguaje matemático) del *modelo real* y las contribuciones del *conocimiento extra-matemático* del individuo. En el caso del problema *El Faro* se puede utilizar como *modelo matemático* al teorema de Pitágoras. A partir del trabajo con el *modelo matemático* es que se obtienen los *resultados matemáticos* que, en este problema, serían aproximadamente $\sqrt{395}$. Al interpretarse estos *resultados matemáticos* en el contexto de la *situación real*, conducirán a la obtención de *resultados reales* (validados mediante la comparación de la triada *resultados reales* ↔ *representación mental de la situación* ↔ *modelo real*), los que llevarían a una respuesta plausible para el problema propuesto, en este caso, una distancia aproximada de 20 km (un análisis más detallado de este problema se encuentra en Ledezma et al., en prensa).

A lo largo de este ciclo está presente la *competencia en modelización matemática*, la cual consiste en ser capaz de trabajar (construir, analizar críticamente, evaluar) con modelos matemáticos y tomar en cuenta, de forma adecuada, tanto los elementos del dominio extra-matemático como el progreso de las fases del ciclo de modelización (Niss y Højgaard, 2019). Esta competencia se desarrolla a través de las diferentes *sub-competencias de modelización* (numeradas al lado derecho de la *Figura 1*), que permiten la transición entre las distintas fases del ciclo (Maaß, 2006).

El problema de *El Faro* se considera que es de modelización pues cumple con ciertas características (en cursivas) que permiten determinarlo como tal. En primer lugar, este problema es *abierto* y *complejo*, ya que no se encuentra limitado a una respuesta o procedimiento específico y, dada la información que aporta el enunciado, los estudiantes deben seleccionar (o buscar) la información relevante para su resolución. En segundo lugar, el problema es *realista* y *auténtico*, pues el enunciado incorpora elementos del mundo real (el faro, el barco, la ciudad de Bremen) y la situación descrita es consonante con un fenómeno que ha ocurrido o que pueda ocurrir en el «mundo real» (en términos de Palm, 2007). Finalmente, esta tarea es un *problema* que debe ser *solucionable mediante un ciclo de modelización* puesto que, por una parte, no se puede resolver aplicando algoritmos conocidos (Schoenfeld, 1994), aunque requiere de estrategias para su resolución (Lesh y Doerr, 2003) y, por otra parte, para resolverlo se necesitan llevar a cabo las fases del proceso de modelización (Borromeo, 2018).

Desde la perspectiva del marco teórico del EOS, la modelización se considera como un *híper* o *mega proceso* (Godino et al., 2007), puesto que implica otros *procesos* más elementales de la actividad matemática (representación, argumentación, idealización, etc.). Además, el EOS aporta herramientas para analizar la actividad matemática subyacente al proceso de modelización como la *configuración onto-semiótica* (véase Ledezmaet al., 2022).

## Descripción del taller y diseños didácticos

El taller que aquí se reporta tuvo por objetivo introducir a los participantes en la modelización matemática desde la perspectiva del aprendizaje autorregulado, y es el resultado de la adaptación de una serie de experiencias previamente implementadas (por ejemplo, Llanes et al., 2021) en distintos niveles de formación de profesores (pregrado, máster, y doctorado) en el contexto español, con sustento en las reflexiones teóricas desarrolladas por sus autores (véase Hidalgo-Moncada et al., 2022a, sobre el aprendizaje autorregulado; Ledezma et al., 2022, sobre la modelización matemática). En la Tabla 2 se describe la estructura del taller, el cual se implementó en la modalidad virtual que permitió el evento.

**Tabla 2.** *Descripción de las actividades del taller por sesiones.*

| Sesiones | Actividades |
|---|---|
| Primera | – Presentación del taller, de sus expositores, y de la dinámica de trabajo.<br>– Resolución de un problema de modelización (*El Faro*).<br>– Análisis del problema desde las prácticas de autorregulación.<br>– Análisis del problema desde el ciclo de modelización. |
| Segunda | – Se continúa con la resolución de otro problema de modelización (*Pan de Azúcar*).<br>– Reflexión sobre las actividades implementadas y su aplicabilidad en el aula. |

**Fuente:** Elaborado por los autores.

Como se presenta en la tabla anterior, el primer problema de modelización que se planteó a los participantes fue *El Faro* (véase *Figura 2*), en el que se les solicitó calcular a qué distancia se encontraría un barco cuando veía por primera vez la luz de un faro en la costa. Luego, el problema en cuestión se analizó desde dos perspectivas: primero, se invitó a reflexionar a través de preguntas que consideran diversos aspectos que promueven un aprendizaje autorregulado durante el desarrollo del problema de modelización; y, segundo, se presentó la resolución del problema mediante las fases del ciclo de modelización considerado, tal como se describió en la sección Fundamento teórico. En la Tabla 3 se presentan las preguntas de reflexión que se plantearon a los participantes del taller (primera columna), junto con la práctica de autorregulación que allí se promueve (segunda columna), y el criterio de idoneidad con la cual se relaciona cada práctica (tercera columna). Este análisis permitió que los participantes asumieran los roles tanto de estudiantes como de profesores cuando se enfrentaron al problema de modelización que se les propuso.

**Tabla 3.** *Preguntas que promueven la autorregulación en las matemáticas.*

| Preguntas | Prácticas de autorregulación | Criterios de idoneidad |
|---|---|---|
| ¿Qué conceptos matemáticos están implicados en la resolución de este problema?, ¿qué consideraciones intra y extra- matemáticas se deben tener en cuenta? | Enseñar a los estudiantes a comprobar su comprensión respecto a un contenido matemático. | Cognitivo |
| ¿Existen distintas vías de solución para este problema?, Si su respuesta es sí, ¿qué otra(s) forma(s) de resolver este problema existe(n)? | Proponer la búsqueda y comparación de diferentes vías de solución para un mismo problema. | Epistémico |
| ¿Qué vínculos se pueden observar entre lo matemático y su propio entorno en este problema? | Vincular el estudio de los contenidos matemáticos al entorno y vida cotidiana. Mostrar conexiones intra e interdisciplinares. | Ecológico |
| ¿Creen que este problema consideró sus intereses?, ¿qué cambios se podrían aplicar al problema para que sea más atractivo y motivador? | Considerar los intereses de los estudiantes, su contexto familiar y social, para generar actividades a fines con sus intereses, permitiendo un mejor estado emocional, motivacional y actitudinal. | Afectivo |
| ¿Qué errores creen que cometerían sus estudiantes al resolver este problema?, ¿consideran que es importante discutir acerca de los errores con sus estudiantes?, ¿por qué? | Promover en los estudiantes la identificación de errores cometidos, las causas de estos y cómo evitarlos. | Epistémico |
| ¿Es posible fomentar la argumentación en sus estudiantes con este tipo de problemas?, ¿por qué? | Promover la argumentación y explicación de procedimientos utilizados. | Epistémico |
| ¿Se podrían utilizar las TICs u otro tipo de material para la presentación y resolución del problema? Si tu respuesta es sí, ¿podrían mencionar algunos?, ¿cuáles serían sus beneficios? | Implementar diferentes medios de enseñanza que potencien la búsqueda, procesamiento y obtención de información que debe asimilar el alumno, los cuales ayudarán a la comprensión de los conceptos, tareas o actividades matemáticas. | Mediacional |

**Fuente:** Elaborado por los autores con adaptaciones desde Hidalgo-Moncada et al. (2020).

Desde la perspectiva de los expositores, y tomando en cuenta factores como: a) la diversidad de marcos teóricos de la Didáctica de la Matemática; b) la pluralidad de intereses de los participantes del taller; y c) la modalidad virtual en que se implementó el taller, el soporte digital utilizado (presentación con diapositivas) se diseñó para introducir a los asistentes, tanto en los antecedentes teóricos que sustentan esta propuesta como en la dinámica de las actividades del taller, además de ser los expositores quienes guiaron las etapas de reflexión y conclusión. Desde la perspectiva de los participantes, y siguiendo una dinámica activo-participativa, ellos pusieron de manifiesto sus concepciones sobre el tema del taller, asumiendo un rol tanto de estudiantes como de profesores al momento de abordar y reflexionar sobre las prácticas de autorregulación que se desprenden del trabajo con un problema de modelización.

## Resultados de la implementación

En esta sección se dan a conocer las reflexiones dadas por los asistentes durante la primera sesión del taller. Dado que el taller se desarrolló en modalidad virtual, la primera sesión se registró en video, lo cual posibilitó la recolección de los datos que aquí se reportan. Para efectos de análisis, los participantes que intervinieron se rotularon como A*x*, donde *x* es un número identificativo para cada uno).

De acuerdo con la dinámica establecida para el taller, luego de dar un tiempo prudente a los participantes para que resolvieran el problema de modelización propuesto (*El Faro*), se les invitó a reflexionar respecto a dos conjuntos de preguntas.

El primer conjunto estaba dirigido a que ellos respondieran como si fueran estudiantes. A continuación, se describen algunas de las respuestas dadas:

1) ¿Qué conceptos matemáticos están implicados en la resolución de este problema?, ¿qué consideraciones intra y extra- matemáticas se deben tener en cuenta?

Para la primera parte de esta pregunta, los participantes respondieron a través de un enlace a la plataforma Mentimeter que se compartió durante la presentación del taller, registrando las siguientes respuestas: *geometría*, *funciones trigonométricas*, *longitud*, *aritmética*, *triángulos*, *distancia plano cartesiano*, entre otras. Para la segunda parte de esta pregunta, los asistentes opinaron que: A1) *Se debería tener en cuenta la forma de la tierra, cómo funciona un faro*; A2) *El ángulo de observación de un faro o el radio de la Tierra, entre otras, como posibles conexiones extra-matemáticas*.

Discutir acerca de los conceptos involucrados en la resolución del problema permite comprobar de forma autónoma la comprensión respecto a los contenidos matemáticos implicados en el problema.

2) ¿Existen distintas vías de solución para este problema?, Si su respuesta es sí, ¿qué otra(s) forma(s) de resolver este problema existe(n)?

Los asistentes señalaron que: A1) *Una forma de resolver seria utilizando trigonometría, calculando el ángulo de depresión del faro*; A2) *Otra forma podría ser con la geometría esférica, profundizando en formas curvas.*

Discutir los distintos métodos para resolver un problema es una forma de aprendizaje entre pares, ya que no sólo aprenden otras formas, sino también les permite, por una parte, desarrollar la argumentación a través del debate y, por otra parte, consolidar los aprendizajes adquiridos.

3) ¿Qué vínculos se pueden observar entre lo matemático y su propio entorno en este problema?

Para esta pregunta los asistentes respondieron que: A1) *Si bien no es de mi entorno, puedo asociarlo con lo que trabajo, con medición de terreno, sistemas de información geográfico en los cuales ya incluyen la curvatura de la tierra*; A2) *No tiene vínculo con mi entorno*; A3) *Sí que se relaciona con mi entorno, ya que vivo en Lima que es una ciudad costera, y hay un distrito que tiene un faro que está en una colina, por lo que traté de acoplar este conocimiento con el enunciado para poder resolver el problema*; A4) *Lo puedo relacionar con la iluminación de una lámpara o una linterna*.

Esta pregunta buscó hacer reflexionar a los asistentes respecto a la importancia de considerar contextos cercanos a quienes deben resolver el problema matemático, dado que, de esta manera, lo podrán asociar con los conocimientos matemáticos previos, facilitando así la comprensión del problema.

4) ¿Creen que este problema consideró sus intereses?, ¿qué cambios se podrían aplicar al problema para que sea más atractivo y motivador?

Para esta pregunta los asistentes señalaron que: A1) *Yo cambiaría el faro por una linterna con un objeto o sombra*; A2) *Adaptarlo a algún escenario accesible a los estudiantes.*

Para esta pregunta, los asistentes no se refirieron a sus intereses propiamente tal, sino más bien pensaron en adaptarlo a un contexto cercano a sus estudiantes. Sin embargo, lo que buscó esta pregunta era que se reflexionaran acerca de la importancia de considerar los intereses de quienes resuelven el problema, para que sea motivador para ellos y lo enfrenten con una actitud positiva.

El segundo conjunto de preguntas estaba dirigido a que ellos respondieran en su rol de profesor. A continuación, se describen algunas de las respuestas dadas.

5) ¿Qué errores creen que cometerían sus estudiantes al resolver este problema?, ¿consideran que es importante discutir acerca de los errores con sus estudiantes?, ¿por qué?

Ante esta pregunta, los asistentes señalaron que: A1) *Los estudiantes podrían pensar que la curvatura es despreciable. Es importante trabajar con los errores, ya que de ellos se aprende, incluso nosotros los profesores*; A2) *Los estudiantes suelen mezclar las unidades de longitud, como metros y kilómetros*; A3) *Pueden decir que no tiene solución*; A4) *Podrían decir que al problema le falta información.*

Esta pregunta permitió que los asistentes no olvidasen que los errores es un buen método o instancia de aprendizaje, pero además mostrarles que esto permite a los estudiantes desarrollar otras habilidades como la argumentación y el debate. Un aspecto para destacar de la respuesta de A4 es la relación que se puede establecer entre la transición 'entender la tarea' del ciclo de modelización (véase *Figura 1*, no. 1), y las características de un problema de este tipo, el cual – entre otras – debe ser abierto y complejo. En este sentido, el enunciado debe ser desafiante para el resolutor, lo cual no implica que sea imposible de resolver.

6) ¿Es posible fomentar la argumentación en sus estudiantes con este tipo de problemas?, ¿por qué?

Para estas preguntas los asistentes señalaron que: A1) *La argumentación dependerá de cómo maneje el ambiente el profesor, frente a las respuestas de los estudiantes*; A2) *Al explicar por qué no tiene solución, los estudiantes utilizarían conceptos matemáticos y su relación*; A3) *En un escenario que permita a los estudiantes investigar acerca de los faros y allí construir la argumentación y solución al problema. De esta manera se podrían analizar y evaluar las estrategias de los demás*.

Esta pregunta buscó que los asistentes pudieran imaginar las diversas formas en que se puede fomentar la argumentación con este tipo de problemas y otras habilidades que se pueden desarrollar a partir de la argumentación, tales como, el debate.

7) ¿Se podrían utilizar las TICs u otro tipo de material para la presentación y resolución del problema? Si tu respuesta es sí, ¿podrían mencionar algunos?, ¿cuáles serían sus beneficios?

Frente a esta pregunta los asistentes señalaron que: A1) *Se puede utilizar alguna simulación en GeoGebra u otro software de geometría dinámica, para observar la curvatura y poder empezar a resolver el problema*.

Esta pregunta permitió que los asistentes observaran que el uso de las TICs puede facilitar tanto la explicación de este problema matemático como su resolución. Además, permite a los estudiantes trabajar de forma autónoma, como también aumentar la motivación por las matemáticas.

## Consideraciones finales

Tal como se declaró en las secciones anteriores, el objetivo de este taller fue introducir a los participantes en la modelización matemática desde la perspectiva del aprendizaje autorregulado. La dinámica del taller permitió que los participantes, por una parte, conocieran las características de un problema de modelización, resolvieran una tarea de este tipo, y conocieran un modelo de análisis para este proceso; y, por otra parte, mediante preguntas de reflexión, observaran que, la ejecución de diversas acciones, como considerar un contexto cercano a sus estudiantes, permitirles discutir acerca de las diferentes vías de solución del problema, trabajar los errores como medio de aprendizaje, o fomentar la argumentación, entre otras, permiten promover un aprendizaje autorregulado al momento de trabajar con problemas de modelización matemática. La importancia de fomentar este tipo de acciones en los estudiantes debe ser un conocimiento que los docentes deben desarrollar desde su formación inicial (Hidalgo-Moncada et al., 2022b), ya que toda práctica o acción que promueva un aprendizaje autorregulado permitirá a los estudiantes desarrollar la autonomía en su aprendizaje y a lo largo de la vida (Díaz-Vicario et al., 2020; Hidalgo-Moncada et al., 2020).

En el trabajo de Blum y Niss (1991) se plantean una serie de argumentos que justifican la incorporación de la modelización en la enseñanza de la matemática, los cuales han servido de base para distintos propósitos. Por una parte, estos argumentos han permitido el asentamiento de este proceso como una competencia que forme parte tanto de los currículos escolares a nivel internacional (Kaiser, 2020) como de los procesos de formación de profesores de matemática en niveles de pregrado y postgrado. Por otra parte, estos argumentos han dado paso al logro de consensos – o principios – que guían esta incorporación curricular y formativa pues, como competencia propia de la matemática, la modelización comparte principios fundamentales de la Didáctica de la Matemática como disciplina de estudio (Ledezma et al, 2022). Sin embargo, un elemento a destacar es que no basta con que sólo se forme a los profesores en modelización, sino que también es conveniente que la experimenten (Maaß, 2007), por ejemplo, en las prácticas educativas durante su proceso de formación profesional o de postgrado (según el contexto educativo nacional/local).

Tomando como punto de conexión basal la noción de idoneidad didáctica, el trabajo con modelización matemática mejora la idoneidad del proceso de enseñanza y aprendizaje cuando se implementa en el aula (Sala et al., 2017), lo cual se relaciona con parte de los fundamentos del aprendizaje autorregulado. Dicho esto, con la experiencia de implementación aquí reportada, se pretenden establecer potenciales relaciones entre una competencia profesional propia de la matemática – como lo es la modelización – con una competencia profesional transversal – como lo es el aprendizaje autorregulado – las cuales se siguen profundizando desde la perspectiva del desarrollo profesional docente.

## Referencias bibliográficas

Abassian, A., Safi, F., Bush, S. y Bostic, J. (2020). Five different perspectives on mathematical modeling in mathematics education. *Investigations in Mathematics Learning, 12*(1), 53-65. https://doi.org/10.1080/19477503.2019.1595360

Altun, S. y Erden, M. (2013). Self-regulation-based learning strategies and self-efficacy perceptions as predictors of male and female students' mathematics achievement. *Procedia – Social and Behavioral Sciences, 106*, 2354-2364. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2013.12.270

Blum, W. (2011). Can modelling be taught and learnt? Some answers from empirical research. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo y G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling: ICTMA 14* (pp. 15-30). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_3

Blum, W. y Borromeo, R. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application, 1*(1), 45-58.

Blum, W. y Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects – State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics, 22*(1), 37-68. https://doi.org/10.1007/bf00302716

Borromeo, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38*(2), 86-95. https://doi.org/10.1007/bf02655883

Borromeo, R. (2013). Mathematical modelling in European education. *Journal of Mathematics Education at Teachers College, 4*(2), 18-24.

Borromeo, R. (2018). *Learning How to Teach Mathematical Modeling in School and Teacher Education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68072-9

Breda, A., Font, V., Lima, V. M. R. y Villela, M. (2018). Componentes e indicadores de los criterios de idoneidad didáctica desde la perspectiva del enfoque ontosemiótico. *Transformación, 14*(2), 162-176.

Cueli, M., García, T. y González-Castro, P. (2013). Autorregulación y rendimiento académico en matemáticas. *Aula Abierta, 41*(1), 39-48.

Díaz-Vicario, A., Mercader, C., Boixader, M., Cano, E. y Pons, L. (2020). *Pràctiques per a l'autoregulació de la tasca docente dels i les mestres. Material de suport*. Universitat Autònoma de Barcelona. Recuperado desde https://ddd.uab.cat/record/233350

Doerr, H. M. y Lesh, R. (2011). Models and modelling perspectives on teaching and learning mathematics in the twenty-first century. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo y G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling: ICTMA 14* (pp. 247-268). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_26

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM – Mathematics Education, 39*(1-2), 127-135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

Godino, J. D., Batanero, C., Font, V. y Giacomone, B. (2016). Articulando conocimientos y competencias del profesor de matemáticas: el modelo CCDM. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 285-294). SEIEM.

Hidalgo-Moncada, D., Díez-Palomar, J., y Vanegas, Y. (2020). Formación de maestros de educación primaria en el contexto de confinamiento. La importancia del aprendizaje autorregulado en las matemáticas. *Magister: Revista de Formación del Profesorado e Investigación Educativa*, *32*(1), 40–48. https://doi.org/10.17811/msg.32.1.2020.40-48

Hidalgo-Moncada, D., Díez-Palomar, J., y Vanegas, Y. (2022a). Perception of future mathematics teachers on the promotion of self-regulation of learning. En C. Fernández, S. Llinares, A. Gutiérrez y N. Planas (Eds.), *Proceedings of the 45th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, p. 229). PME.

Hidalgo-Moncada, D., Díez-Palomar, J., y Vanegas, Y. (2022b). Percepción y reflexión de futuros profesores de matemáticas sobre acciones que promueven un aprendizaje autorregulado en el aula. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas, y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 335–343). SEIEM.

Kaiser, G. (2020). Mathematical modelling and applications in education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (2da ed.) (pp. 553-561). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_101

Kaiser, G. y Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38*(3), 302-310. https://doi.org/10.1007/BF02652813

Lavasani, M. G., Mirhosseini, F. S., Hejazi, E. y Davoodi, M. (2011). The effect of self-regulation learning strategies training on the academic motivation and self-efficacy. *Procedia – Social and Behavioral Sciences, 29*, 627-632. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2011.11.285

Ledezma, C., Font, V., y Sala-Sebastià, G. (en prensa). Modelización matemática desde una articulación teórica entre los enfoques cognitivo y onto-semióticoEn *Actas del Primer Congreso Internacional de Didáctica de las Matemáticas (CIDIDMAT)*.

Ledezma, C., Font, V., y Sala, G. (2022). Analysing the mathematical activity in a modelling process from the cognitive and onto-semiotic perspectives. *Mathematics Education Research Journal*. Artículo individual. https://doi.org/10.1007/s13394-022-00411-3"

Ledezma, C., Font, V., Sala-Sebastià, G., y Breda, A. (2022). Principios de la modelización matemática desde la perspectiva de la idoneidad didáctica. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas, y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 345–354). SEIEM.

Llanes, A., Ledezma, C., y Font, V. (2021). Propuesta de actividades para la modelización matemática. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *34*(2), 559–568.

Lesh, R. y Doerr, H. M. (2003). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving. En R. Lesh y H. M. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching* (pp. 3-33). Lawrence Erlbaum.

Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38*(2), 113-142. https://doi.org/10.1007/bf02655885

Maaß, K. (2007). Modelling in class: What do we want the students to learn? En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum y S. Khan (Eds.), *Mathematical Modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics* (pp. 63-78). Horwood. https://doi.org/10.1533/9780857099419.2.63

Niss, M. y Højgaard, T. (2019). Mathematical competencies revisited. *Educational Studies in Mathematics, 102*(1), 9-28. https://doi.org/10.1007/s10649-019-09903-9

Organisation for Economic Co-operation and Development. (2019). *PISA 2018 Assessment and Analytical Framework*. OECD Publishing. https://doi.org/10.1787/b25efab8-en

Palm, T. (2007). Features and impact of the authenticity of applied mathematical school tasks. En W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn y M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI Study* (pp. 201-208). Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1_20

Pintrich, P. R. (2000). Multiple goals, multiple pathways: The role of goal orientation in learning and achievement. *Journal of Educational Psychology, 92*(3), 544-555. https://doi.org/10.1037/0022-0663.92.3.544

Sala, G., Font, V., Giménez, J. y Barquero, B. (2017). Inquiry and modelling in a real archaeological context. En G. Stillman, W. Blum y G. Kaiser (Eds.), *Mathematical Modelling and Applications: Crossing and Researching Boundaries in Mathematics Education* (pp. 325-335). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-62968-1_28

Schoenfeld, A. H. (1994). Reflections on doing and teaching mathematics. En A. H. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical Thinking and Problem Solving* (pp. 53-70). Erlbaum.

# TECNOLOGIAS DIGITAIS NO ENSINO DE MATEMÁTICA: A FORMAÇÃO TECNOLÓGICA DO PROFESSOR E OS DESAFIOS DA PRÁTICA DOCENTE

# DIGITAL TECHNOLOGIES IN MATHEMATICS TEACHING: THE TECHNOLOGICAL EDUCATION OF TEACHERS AND THE CHALLENGES OF TEACHING PRACTICE

**Robson Kleemann, Celiane Costa Machado**
**Universidade Federal do Rio Grande – FURG. (Brasil)**
robson.kleemann@hotmail.com, celianemachado@furg.br

**Resumo**:
Este artigo apresenta resultados parciais de uma pesquisa de doutorado pelo Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências, da Universidade Federal do Rio Grande – FURG, e tem por objetivo dialogar sobre as formações inicial e continuada de professores de matemática, no viés tecnológico, aliado aos desafios da prática docente. Busca-se responder a seguinte questão: Como os professores, participantes desta pesquisa, percebem as influências das formações tecnológicas na prática docente de sala de aula? A pesquisa tem cunho qualitativo, e as informações foram produzidas com um grupo de 10 professores que atuam na educação básica. Para análise das informações, utiliza-se do método da Análise Textual Discursiva, proposto por Moraes e Galiazzi (2016). Os resultados indicam que os professores têm ciência da importância de utilizar as tecnologias digitais como estratégia metodológica no ensino de matemática, mas ainda enfrentam vários desafios associados a sua formação, dificultando a utilização em sala de aula.

**Palavras-chave**: formação de professores de matemática, tecnologias digitais, desafios da prática docente

**Abstract**:
This article presents provisional results of a doctoral research by the Graduate Program in Science Education, in the Federal University of Rio Grande – FURG . It is aimed at reflecting on the initial and continuing education of mathematics teachers, from a technological point of view, allied to the challenges of teaching practice. It looks for answering the following question: How do teachers, who are participants of this research, perceive the influences of technological education on classroom teaching practice? The research has a qualitative nature, and the information was produced with a group of 10 elementary education teachers. To analyze the information, the Discursive Textual Analysis method is used, proposed by Moraes and Galiazzi (2016). The results indicate that teachers are aware of the importance of using digital technologies as a methodological strategy in mathematics teaching, but they still face several challenges associated with their education, making it difficult to use digital technologies in the classroom.

**Keywords**: mathematics teacher education, digital technologies, challenges of teaching practice

## Introdução

A formação de professores abrange diversos fatores que influenciam diretamente na prática docente. Nesse contexto, as formações inicial e continuada ganham destaque, já que são pilares fundamentais na constituição dos profissionais que atuam na Educação. Por esse motivo, torna-se relevante aprofundar continuamente estudos sobre o tema, discutindo ações que contribuam no processo formativo e que tragam impactos significativos à prática docente em sala de aula.

Diante disso, o presente trabalho tem por objetivo dialogar sobre as formações inicial e continuada de professores de matemática, no viés tecnológico, aliado aos desafios da prática docente. Busca-se responder a seguinte questão: Como os professores, participantes desta pesquisa, percebem as influências das formações tecnológicas na prática docente em sala de aula? Dessa forma, inicialmente, apresentam-se algumas considerações teóricas de autores que pesquisam o campo da Educação Matemática e que investigam sobre o assunto, seguidas de uma discussão de resultados parciais de uma pesquisa de doutorado vinculada ao programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências, da Universidade Federal do Rio Grande – FURG, cujas informações foram produzidas junto a um grupo de professores de matemática que atuam na educação básica, dialogando constantemente com o referencial teórico.

Para análise das informações utilizou-se do método da Análise Textual Discursiva (ATD), proposto por Moraes e Galiazzi (2016). Dos resultados, aponta-se que os professores têm ciência da importância da utilização das tecnologias digitais (TD) como estratégia metodológica no ensino de matemática, mas que ainda enfrentam vários desafios associados às formações inicial e continuada, principalmente acerca da falta de conhecimentos sobre as TD, dificultando que a ação docente com o uso de recursos tecnológicos se efetive de forma satisfatória na sala de aula. Além disso, defende-se que os processos que envolvem a formação continuada devem ser planejados e organizados a partir da escuta aos professores, elevando as chances de despertar o interesse pela busca de novos conhecimentos, desenvolvendo a criatividade para planejar ações que facilitem a aprendizagem do estudante. Diante disso, é essencial que se desenvolvam estudos e formações continuamente, com um olhar atento às formações disponibilizadas aos professores, permitindo-os obter resultados que impactem nas ações diárias nos espaços escolares.

Na próxima seção, apresenta-se um diálogo entre os referenciais teóricos tomados como pilares nessa pesquisa.

## Formações inicial e continuada do professor de matemática: possibilidades e desafios sob o viés tecnológico

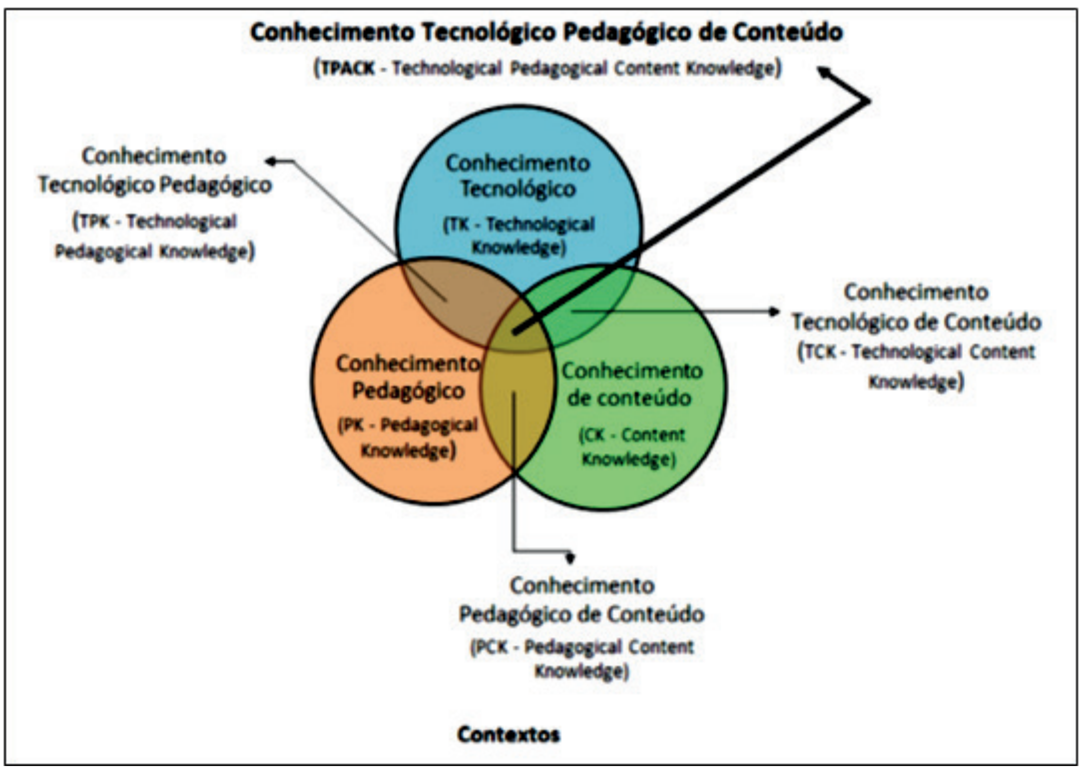
A formação de professores é um assunto relevante, discutido constantemente nas pesquisas científicas. As mudanças decorrentes das transformações do contexto social exigem dos profissionais um formar-se continuamente, permitindo-os conhecer, investigar, praticar e utilizar diferentes estratégias metodológicas de ensino. Paiva (2013), ancorada em Shulman (1986), aponta a necessidade do professor ter domínio também de conhecimentos distintos àqueles exigidos para ser matemático, destacando o conhecimento da disciplina, o pedagógico-disciplinar e o curricular.

A autora pontua uma relevância ao conhecimento pedagógico-disciplinar, indicando que para a construção desse conhecimento é necessária uma formação docente que propicie um domínio amplo e diversificado da Matemática, além de explorar os vários enfoques dos conteúdos. Para que isso aconteça, há necessidade de conhecer e dominar o uso de metodologias diferenciadas de ensino, além da habilidade de articular conhecimentos (Paiva, 2013). Assim, o professor precisa estar em constante formação e processo de reflexão sobre seus objetivos e sobre a consequência de seu ensino durante sua formação, na qual ele é o principal protagonista, assumindo a responsabilidade por seu próprio desenvolvimento profissional, e na qual seus saberes práticos – e não saberes da prática ou saberes sobre a prática – são construídos. (Paiva, 2013, p. 92)

Neste trabalho, ao citar os termos formação inicial e/ou formação continuada, toma-se por referência as Diretrizes Curriculares para a Formação de Professores da Educação Básica (Brasil, 2015), que compreendem a formação inicial como: os cursos de graduação de licenciatura, os cursos de formação pedagógica para graduados não licenciados e os cursos de segunda licenciatura. Ainda, definem a formação continuada como aquela que compreende dimensões coletivas, organizacionais e profissionais, bem como o repensar do processo pedagógico, dos saberes e valores. Ademais, envolve atividades de extensão, grupos de estudos, reuniões pedagógicas, cursos, programas e ações para além da formação mínima exigida ao exercício do magistério na educação básica, tendo como principal finalidade a reflexão sobre a prática educacional e a busca de aperfeiçoamento técnico, pedagógico, ético e político do profissional docente. Assim, percebe-se que o professor não deve ficar restrito à sua formação inicial. Muito além disso, é preciso assídua participação em formações continuadas, envolvendo desde cursos básicos de capacitação de professores, até cursos de especialização, mestrado e/ou doutorado.

Considerando as diferentes possibilidades que podem ser trabalhadas nas formações inicial e continuada de professores, diversos modelos são propostos. Um exemplo é o modelo TPACK (Technological Pedagogical Content Knowledge*)*, proposto por Mishra e Koehler (2006), que consiste no conjunto de conhecimentos que os professores necessitam para ensinar com e sobre as TD nas diversas áreas do conhecimento, não descartando discussões de questões pedagógicas sobre o uso das TD no estudo de conteúdos específicos, evidenciados, preferencialmente, a partir de uma contextualização. Na Figura 1, Batista e Barcelos (2015), pautados em Mishra e Koehler (2006), apresentam uma sistematização do modelo TPACK.

**Figura 1.** *Modelo TPACK (Technological Pedagogical Content Knowledge).*




**Fonte:** Batista e Barcelos (2015, p. 44).

Pautando-se nisso, Vanini, Rosa, Justo e Pazuch (2013) argumentam acerca da Cyberformação na formação de professores, compreendendo-a como a interseção das formações específica, pedagógica e tecnológica, identificando sua necessidade e importância à prática docente em sala de aula. Apontam ainda, que os conhecimentos (específico, pedagógico e/ou tecnológico) são fundamentais, mas que precisam ser aperfeiçoados constantemente, primando por acompanhar as inovações e atualizações. Diante disso, torna-se necessária a formação continuada do professor, aprofundando possíveis lacunas da formação inicial, e permitindo-o mediar sua prática docente explorando coletivamente os diferentes vieses.

Isso se reforça com os estudos de Richit (2010), quando destaca que na formação inicial em licenciatura em matemática há vertentes que não são exploradas suficientemente, como a formação tecnológica, por exemplo, prevalecendo em maior proporção a formação específica na área. A mesma autora expõe compreensões analíticas sobre a formação docente em TD e seus desdobramentos na prática pedagógica de sala de aula, tomando por cenário um programa de política pública, voltado à informatização da educação. Do estudo, a autora concluiu que "[...] a formação de professores em tecnologias digitais tem sido atribuída ao docente, caracterizando-se quase que como autoformação, que tem a experiência profissional, constituída ao longo da carreira, como sua principal via propulsora." (Richit, 2015, p. 91). Isso demonstra que os órgãos governamentais não atribuem tamanha atenção à formação tecnológica de professores, implicando em dificuldades para que estes façam uso das TD nas ações docentes em sala de aula.

Complementam Leite, Ribeiro, Leite e Uliana (2018) que, mesmo que se tenha ciência de sua relevância, nos cursos de licenciatura em matemática pouco se evidencia a formação tecnológica, implicando em dificuldades para o professor fazer uso pedagógico das TD em sala de aula, necessitando ampliar seus conhecimentos e experiências, a partir das formações continuadas. Pautando-se nisso, Scheffer, Sperandio e Battisti (2021, p. 149) sinalizam que

> a educação não pode se isolar dos recursos tecnológicos informáticos, mas aliar-se a eles buscando conciliá-los e, principalmente, convergi-los ao ensino da matemática. Nesse contexto, a escola passa a ser um local de aquisição e aperfeiçoamento de competências, pela exploração de vários recursos tecnológicos informáticos e por estar envolvida com o desenvolvimento e a construção de diferentes conceitos. (Scheffer, Sperandio & Battisti, 2021, p. 149).

Como um aspecto positivo, resultados de estudos mais recentes evidenciam que as TD estão cada vez mais presentes na formação inicial dos professores, sendo amarradas com as formações pedagógica e de conteúdo (Colling & Richit, 2019, 2020). Porém, não se descarta a necessidade de atenção contínua à formação tecnológica de professores, considerando que as influências e transformações sociais implicam no (re)adaptar-se constantemente.

Ao dialogar sobre as TD no contexto da Educação Matemática, Borba, Silva e Gadanidis (2018) compreendem-nas como uma tendência metodológica no ensino de matemática. Assim, é necessário que o professor possua conhecimentos sobre as TD para que possa utilizá-las como um instrumento metodológico de ensino, potencializando a aprendizagem. Para isso, é essencial que, continuamente, os professores participem de formações que os permitam conhecer melhor as TD, criando estratégias para utilizá-las em sala de aula.

Ao encontro disso, Kalinke, Loss, Elias e Motta (2021, p. 5) evidenciam "[...] a importância de o professor apropriar-se de informações sobre diferentes TD, buscando agregar a elas o conteúdo a ser estudado, priorizando a prática pedagógica." Assim, previamente, é necessário que o professor explore os recursos tecnológicos, compreendendo suas potencialidades e limitações, permitindo utilizá-los com segurança em suas aulas. Para isso, "[...] a formação continuada é um momento para o professor conhecer as TD específicas da área, a fim de utilizá-las no decorrer de seu percurso profissional, vindo contribuir com sua prática pedagógica e com sua formação pessoal." (Kalinke *et al*., 2021, p. 6).

Em contrapartida, no exercício profissional do professor, ao falar sobre dilemas, desafios e perspectivas frente aos avanços tecnológicos, Maier e Dambros (2021) afirmam que a formação de professores no Brasil ainda está distante da excelência almejada pelos pesquisadores, consequência de diversos fatores. Ao analisar o histórico da formação docente, as autoras evidenciam "[...] a falta de preocupação e de investimentos do poder público com a formação dos profissionais da educação e demonstra que, por décadas, os professores enfrentaram muitos desafios, sobretudo para buscar formação profissional." (Maier & Dambros, 2021, p. 122).

Assim, destaca-se que as TD têm elevado potencial na formação de professores e nos processos de ensino e aprendizagem. Em contrapartida, em muitas escolas ainda há precariedades no acesso aos recursos tecnológicos, bem como carência de investimentos na formação de professores, fatores que dificultam a utilização das TD de modo eficiente no ensino de matemática.

Dando seguimento, na próxima seção, apresenta-se a metodologia empregada neste trabalho, evidenciando as etapas da pesquisa, os instrumentos de produção das informações, o método de análise, culminando com as considerações acerca dos principais resultados.

## Metodologia

A presente pesquisa tem abordagem de cunho qualitativo, já que “[...] privilegiam-se descrições de experiências, relatos de compreensões, respostas abertas a questionários, entrevistas com sujeitos, relatos de observações e outros procedimentos que deem conta de dados sensíveis, de concepções, de estados mentais, de acontecimentos.” (Bicudo, 2020, p. 113).

Este trabalho apresenta resultados parciais de uma pesquisa de doutorado, vinculada ao Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências, pela Universidade Federal do Rio Grande – FURG, cujo projeto teve aprovação no Comitê de Ética em Pesquisa sob certificado de apreciação ética número 35989220.6.0000.5324. Como parte integrante das ações desenvolvidas, realizou-se uma intervenção com um grupo de 10 professores de matemática que atuam na educação básica, por meio de um curso online de formação, no ano de 2021, explorando o uso das TD como possibilidade no ensino de matemática. Os professores participantes da pesquisa atuam em escolas de educação básica pertencentes à 29ª Coordenadoria Regional de Educação, que atende 6 municípios do estado de Santa Catarina – Brasil.

Tem-se por objetivo dialogar sobre as formações inicial e continuada de professores de matemática, no viés tecnológico, aliado aos desafios da prática docente. Busca-se responder a seguinte questão: Como os professores, participantes desta pesquisa, percebem as influências das formações tecnológicas na prática docente de sala de aula?

As informações que compõem o corpus de análise dessa pesquisa foram as escritas registradas pelos professores no decorrer do curso, em 8 fóruns de interação, distribuídos em 5 tópicos. Nesse espaço, os cursistas relataram experiências sobre o uso das TD, das práticas em sala de aula, de suas formações (inicial e/ou continuada), sempre com o acompanhamento dos pesquisadores. Ao término do curso, os relatos apresentados nos fóruns foram transcritos e resultaram em 7 laudas.

Para o estudo e análise das informações, tomou-se por base o método da ATD, proposto por Moraes e Galiazzi (2016, p. 33), buscando “[...] interpretar os fenômenos que investiga a partir de uma análise rigorosa e criteriosa desse tipo de informação”. Complementa-se que a ATD “[...] não pretende testar hipóteses para comprová-las ou refutá-las ao final da pesquisa; a intenção é a compreensão, a reconstrução de conhecimentos existentes sobre os temas investigados” (Moraes & Galiazzi, 2016, p. 33). Uma vez definido o corpus, tal método prevê a desmontagem dos textos e a identificação de unidades de significado, seguido do processo da unitarização, da categorização e da escrita dos metatextos, culminando em novas compreensões.

Iniciando o processo de análise, realizou-se a desconstrução dos textos que compõem o corpus, identificando unidades de significado. Primando pela organização das informações, as unidades de sentido foram transcritas em uma planilha eletrônica, seguido do processo de codificação. Cada participante da pesquisa foi identificado por um pseudônimo, seguido das numerações do tópico, do fórum e da unidade de significado, separados por ponto. Por exemplo, “Isaac.T2.F1.05” indica a quinta unidade de significado do participante Isaac, que consta no primeiro fórum de interação do segundo tópico do curso. Na Tabela 1 apresenta-se um recorte da identificação, contendo três unidades de significado, em que são apresentadas.

**Tabela 1.** *Recorte da identificação das unidades de significado e seu respectivo código.*

| Unidade de significado | Código |
|---|---|
| Os alunos aceitam e gostam quando o professor utiliza as tecnologias para ensinar matemática. | Émilie.CE.T4.F1.01 |
| Utilizar as tecnologias nas aulas de matemática facilita a compreensão dos conceitos de geometria. | Arquimedes.CE.T1.F1.01 |
| A utilização de sites, aplicativos, softwares, plataformas e outros recursos tecnológicos no ensino de matemática | Euclides.CE.T1.F1.01 |

**Fonte:** Elaborado pelos (as) autores (as).

Após a desmontagem dos textos, identificaram-se 143 unidades de significado, atribuindo-se um título sugestivo para cada unidade (unitarização). Analisando as relações entre as unidades, classificou-se, combinando-as por proximidades. Disso gerou-se um total de 45 categorias iniciais. Na Tabela 2, apresenta-se um recorte dessa etapa da análise, contemplando unidades de significado relacionadas às duas categorias iniciais.

**Tabela 2.** *Recorte da aplicação do método da ATD sobre as informações analisadas.*

| Unidades de significado | Categorias Iniciais |
|---|---|
| - Isaac.T1.F1.02 – Há carência de formação tecnológica de professores para/com o uso de tecnologias.<br>- Hipácia.T1.F1.03 – Pouca oferta de formação de professores com direcionamento à formação tecnológica.<br>- Leonhard.T1.F1.02 – Defasagem tecnológica nas escolas, o que dificulta ao professor utilizar as tecnologias. Faltam recursos tecnológicos físicos e também formação tecnológica.<br>- Elena.T2.F4.01 – Há falta de formações com direcionamento específico ao professor de matemática. | - Há carência na oferta de formações específica e tecnológica, implicando que o professor precisa buscar externamente, a fim de atender suas necessidades em sala de aula. |
| - Maria.T3.F1.01 – O uso das tecnologias nas aulas de matemática são de fundamental importância para o processo de ensino e aprendizagem.<br>- Charlotte.T3.F1.02 – Na medida do possível, os professores buscam utilizar em suas aulas as tecnologias que estão à disposição e que se tem conhecimento suficiente para utilizá-las de forma pedagógica.<br>- Sophie.T1.F1.01 – Os professores têm ciência da importância do uso das tecnologias no ensino de matemática. | - Os professores têm ciência da importância de utilizar as tecnologias como recurso metodológico no ensino de matemática. |

**Fonte:** Elaborado pelos (as) autores (as).

Conforme prevê o método da ATD, o corpus foi revisitado e novas interpretações permitiram realizar uma aproximação das categorias iniciais, obtendo-se 13 categorias intermediárias, que a partir de uma nova aproximação, resultou em duas categorias finais, intituladas: A formação tecnológica do professor de matemática; e, Investimentos na formação de professores e na infraestrutura física das escolas. Os resultados da categoria Investimentos na formação de professores e na infraestrutura das escolas, foram publicados nos anais do XIV Encontro Nacional de Educação Matemática, e podem ser consultados em Kleemann e Machado (2022). Os autores indicam que os órgãos governamentais investem pouco em recursos tecnológicos físicos, no acesso à internet de qualidade e na formação de professores para o uso pedagógico das TD. Destacam ainda, que os professores – devido às longas jornadas de trabalho – possuem pouco tempo para destinar ao planejamento das aulas. (Kleemann & Machado, 2022).

Na sequência, na presente investigação, discute-se a categoria A formação tecnológica do professor de matemática, que originou-se a partir de 7 categorias intermediárias, que emergiram de 28 categorias iniciais. Elencam-se, a seguir, as categorias intermediárias: i) Os cursos de licenciatura em matemática possuem carência de formação tecnológica de professores; ii) A formação continuada acontece de diferentes maneiras, primando pelo aperfeiçoamento da formação inicial e pelo enriquecimento da prática docente; iii) Os professores têm ciência da importância de utilizar as TD como um recurso metodológico na prática docente em sala de aula; iv) Utilizar atividades diferenciadas em sala de aula motiva o aluno e facilita o desenvolvimento da aprendizagem; v) Possibilidades metodológicas no ensino de matemática, com ênfase à utilização das TD; vi) Nas formações continuadas oferecidas pelos órgãos governamentais há carência de formações específica e tecnológica, e o professor precisa buscar, por si só, formações externas que atendam suas necessidades da sala de aula; vii) Os professores sentem-se insatisfeitos com as formações oferecidas pelos órgãos governamentais, já que pouco impactam na prática docente em sala de aula.

Dando seguimento na análise, o próximo passo é a apresentação dos resultados expressos na forma de um texto interpretativo, denominado metatexto. “A produção escrita na análise textual discursiva caracteriza-se por sua permanente incompletude e pela necessidade de crítica constante.” (Moraes & Galiazzi, 2016, p. 54). A escrita do metatexto permite articular as interpretações dos pesquisadores sobre o material analisado, com base no referencial teórico adotado. Na sequência, verte-se uma discussão evidenciando algumas compreensões dos pesquisadores, com base nos principais elementos que emergiram no decorrer do processo de categorização.

## ■ A formação tecnológica do professor de matemática e os desafios da prática docente

No contexto da formação de professores, diversas são as possibilidades de qualificar-se profissionalmente. Pautando-se no exposto em Brasil (2015), pontua-se que a formação inicial é o passo introdutório, tendo seguimento no decorrer da formação continuada, que se estende paralelamente ao percurso de atuação profissional. No decorrer do processo formativo, surgem diversas vertentes que podem ser exploradas e/ou aprofundadas, com diferentes direcionamentos. A Cyberformação, proposta por Vanini *et al*. (2013), é uma alternativa que permite ao professor a formação em diferentes vieses, destacando-se as diferentes possibilidades de interseção entre as formações específica, pedagógica e/ou tecnológica.

O interesse por formações pautadas no contexto da Cyberformação é notório no diálogo com professores de matemática da educação básica, pois afirmam que “é importante que os cursos de formação de professores explorem os conteúdos específicos, pedagógicos e tecnológicos, desenvolvendo no aluno o conhecimento, habilidades, atitudes e valores.” (Maria.T2.F4.05, 2021). Além do mais, “os cursos de formação permitem a troca de experiências e a socialização de saberes” (Elena.T4.F1.01, 2021), indicando que “a troca de experiências entre os professores enriquece a prática docente em sala de aula.” (Sophie.T1.F1.03, 2021). Assim, percebe-se que o professor reconhece os cursos de formação como momentos que possibilitam a partilha de conhecimentos, refletindo nas suas ações em sala de aula.

Diversas são as possibilidades de recursos metodológicos pensados e disponibilizados para o ensino de matemática. Conforme já pontuado por Borba, Silva e Gadanidis (2018), as TD são instrumentos facilitadores ao professor no contexto da Educação Matemática, enriquecendo a prática docente em sala de aula, decorrente de suas potencialidades. Dentre outras, destacam-se: os softwares matemáticos (como exemplo o GeoGebra e o Scratch), aplicativos educacionais, plataformas virtuais, materiais concretos, sólidos geométricos, jogos, laboratórios de matemática (físicos e virtuais), lousa digital. Diante dessas possibilidades, salienta-se que “quando o professor utiliza-se das tecnologias em suas aulas, percebem-se melhores resultados associados à aprendizagem” (Maria.T2.F3.02, 2021), o que torna o processo de ensino e aprendizagem diversificado, atrativo e mais prazeroso. A inserção das TD nos ambientes escolares, nas suas diferentes formas, contribui para o desenvolvimento de práticas pedagógicas, despertando o interesse dos estudantes e facilitando a aprendizagem.

A atenção permanente às políticas de formação de professores é uma ação fundamental, já que no decorrer da carreira profissional diversas inovações vão surgindo, sendo necessário adaptar-se a elas. O saber do professor não se constitui em um conjunto fechado de conhecimentos, mas sim como um processo construído gradativamente. O contexto vivenciado enquanto formação inicial vai sofrendo transformações, decorrentes das mudanças sociais, tornando-se mais complexo e diversificado (Paiva, 2013). Isso atinge principalmente aqueles profissionais que já possuem um período mais longo de atuação.

Um exemplo dessas mudanças são as TD, que nas últimas décadas trouxeram grandes impactos à Educação Matemática (Colling & Richit, 2019, 2020; Richit, 2010). Porém, destaca-se que ainda permanecem algumas lacunas no processo de formação tecnológica do professor de matemática, tanto no contexto da formação inicial como da formação continuada, implicando em dificuldades para que o professor faça uso pedagógico das TD em sala de aula. (Leite *et al*., 2018).

Isso se reforça na fala de uma professora: "Decorrente do período/ano da formação inicial de muitos professores, estes precisam de capacitação tecnológica contínua para o uso das tecnologias no ensino de matemática." (Charlotte.T2.F2.03, 2021). Assim, corroborando com Scheffer, Sperandio e Batistti (2021), ressalta-se que o professor não pode se distanciar dos recursos tecnológicos; muito pelo contrário, é preciso desafiar-se buscando por formação sobre sua utilização como instrumentos metodológicos de ensino, enriquecendo e agregando potencialidades à prática docente em sala de aula. Para isso, as formações continuadas tornam-se alternativas que possibilitam ao professor suprir eventuais lacunas do seu processo formativo, bem como atualizar-se acerca de diferentes alternativas metodológicas.

No tocante ao processo de desenvolvimento dessa pesquisa, percebeu-se que os professores têm ciência da relevância do uso das TD como uma metodologia no ensino de matemática, mesmo que muitos reconhecem suas dificuldades para utilizá-las de forma pedagógica, decorrente da falta de conhecimento sobre as mesmas. Apontam o "[...] grande potencial das tecnologias no ensino de matemática, se comparado com o uso apenas do pincel e quadro" (Isaac.T1.F1.05, 2021), mas enfatizam que "o professor precisa conhecer sobre as tecnologias para que possa utilizá-las em suas aulas, estimulando os alunos." (Maria.T1.F1.01, 2021). Isso corrobora com o já exposto por Kalinke *et al*. (2021), ao compreender a necessidade de que o professor tenha, suficientemente, conhecimentos e experiências acerca dos recursos tecnológicos antes de utilizá-los em sala de aula, apontando as formações continuadas como possíveis alternativas para auxiliá-lo na busca por esse conhecimento sobre as TD.

Em contrapartida, ainda há insatisfação por parte de muitos professores, em relação as formações continuadas que são oferecidas pelos órgãos governamentais, principalmente aquelas cujo direcionamento seja à formação tecnológica. Isso torna-se evidente na fala de uma professora: "Os cursos de formação de professores distanciam-se muito da verdadeira realidade da sala de aula, principalmente em relação aos recursos tecnológicos." (Maria.T2.F4.02, 2021). Assim, percebe-se, notoriamente, a insatisfação dos professores com as formações oferecidas, já que raramente trazem contribuições significativas à prática docente.

Nesse sentido, fazer uso pedagógico das TD em prol da aprendizagem dos conceitos matemáticos, torna-se difícil e desafiador para o professor. Decorrente disso, e pensando em suprir eventuais lacunas de sua formação inicial e da prática docente em sala de aula, muitos professores precisam buscar por formações complementares externas aos órgãos de trabalho a que estão vinculados, com maior proporção àquelas cujo direcionamento sejam às TD, mesmo que possuem pouco tempo disponível para dedicar a esse tipo de formação, consequência de atuarem por longas jornadas de trabalho. Tais compreensões corroboram com os estudos de Richit (2015) e Maier e Dambros (2021).

Assim, finaliza-se a escrita desse metatexto indicando sobre a necessidade de maiores investimentos na formação tecnológica de professores de matemática, tanto na formação inicial, como na formação continuada. Além do mais, é preciso um olhar atento à infraestrutura física das escolas, com atenção especial aos recursos tecnológicos físicos e à acessibilidade de internet. Há "defasagem tecnológica nas escolas, o que dificulta ao professor utilizar as tecnologias. Faltam recursos tecnológicos físicos e também formação tecnológica." (Leonhard.T1.F1.02, 2021). A precariedade de equipamentos e/ou de acessibilidade às TD, a carência de conhecimento sobre o uso pedagógico das TD, e a insuficiência de formação de professores no viés tecnológico, são algumas lacunas ainda presentes nos ambientes escolares e que dificultam a prática docente para/com o uso das TD como estratégia metodológica de ensino.

## Considerações finais

Dos estudos realizados, pontua-se que as TD consistem em uma alternativa metodológica para o ensino de matemática, impactando significativamente no processo de aprendizagem. Ademais, possibilitam ao professor utilizá-las como instrumentos mediadores, tornando o processo mais dinâmico e atrativo. Para isso, faz-se necessário que os professores tenham conhecimento suficiente sobre o uso das TD, permitindo-os compreender as potencialidades e limitações, além de facilitar a utilização de forma satisfatória em suas aulas, evidenciando a essencialidade de atenção contínua ao processo formativo do professor.

A formação tecnológica do professor de matemática é fundamental, já no processo de formação inicial, estendendo-se progressivamente no decorrer da formação continuada. Porém, dos estudos realizados junto ao grupo de participantes desta pesquisa, e com o suporte dos referenciais teóricos adotados, destaca-se que na formação inicial ainda existem diversas lacunas em relação ao viés tecnológico, prevalecendo em maior proporção, direcionamentos formativos aos vieses específico e/ou pedagógico. Além disso, complementa-se que em muitas situações, a formação continuada ofertada aos professores, apresenta um distanciamento entre os conhecimentos específicos, pedagógicos e/ou tecnológicos, dificultando o aproveitamento efetivo na prática docente em sala de aula.

Aponta-se que a formação continuada torna-se uma alternativa para suprir eventuais lacunas, permitindo ao professor compreender de diferentes modos o conhecimento, além de desenvolver habilidades frente às novas possibilidades que as TD proporcionam para o ambiente escolar. Porém, os resultados deste estudo sinalizam que os professores possuem dificuldades para encontrar formações que atendam às suas expectativas, e que aquelas disponibilizadas pelos órgãos governamentais distanciam-se da realidade vivenciada em sala de aula, não implicando em contribuições significativas para o processo de ensino e aprendizagem, principalmente em ações voltadas para/com o uso das TD.

Salienta-se sobre a importância das TD para o ensino de matemática, já que diversificam e enriquecem a prática docente em sala de aula, contribuindo na aprendizagem do aluno. É relevante que estudos e formações sejam desenvolvidos continuamente, considerando que professor e aluno são sujeitos que convivem em ambientes sociais e evoluem a partir das transformações sociais. Diante disso, é necessário um olhar atento às formações que são disponibilizadas aos professores, objetivando resultados satisfatórios e que tragam impactos nas ações diárias do ensinar e do aprender.

Portanto, das compreensões que emergiram deste estudo, no que se refere ao uso das TD, defende-se que os processos que envolvem a formação continuada devem ser planejados e organizados a partir de uma escuta aos professores, contemplando suas demandas e especificidades associadas às diferentes realidades que estão envolvidos cotidianamente. Considerando essa escuta prévia, elevam-se as chances de despertar o interesse do professor pela busca de novos conhecimentos, desenvolvendo a criatividade para planejar ações que facilitem a aprendizagem do estudante.

## Apoio e fomento

O presente trabalho teve apoio e fomento do Programa de Bolsas Universitárias de Santa Catarina - UNIEDU/FUMDES.

## Referências bibliográficas

Batista, S. C. F. & Barcelos, G. T. (2015). Reflexões sobre o uso pedagógico de tablets: ações na formação inicial de professores de matemática. In: G. T. B. Peixoto, S. C. F. Batista, B. F. T. Azevedo & A. F. U. Mansur (Orgs.). *Tecnologias digitais na Educação: pesquisas e práticas pedagógicas.* (41-56). Essentia.

Bicudo, M. A. V. (2020). Pesquisa qualitativa e pesquisa qualitativa segundo a abordagem fenomenológica. In: M. de C. Borba & J. de L. Araújo (Orgs.). *Pesquisa qualitativa em Educação Matemática.* (107-109). Autêntica.

Borba, M. de C. Silva, R. S. R. da S. & Gadanidis, G. (2018). *Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática: sala de aula e internet em movimento.* Autêntica.

Brasil. Ministério da Educação. (2015). *Resolução CNE/CP n° 2, de 01 de julho de 2015. Define as diretrizes curriculares nacionais para a formação inicial em nível superior e para a formação continuada.* Acesso em 30 de junho de 2022 de http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&task=doc_download&gid=17719&Itemid.

Colling, J. & Richit, A. (2019). Conhecimento pedagógico, tecnológico e do conteúdo na formação inicial do professor de matemática. *Educ. Mat. Pesqu.* 21(2), 394-421. https://doi.org/10.23925/10.23925/1983-3156.2018v21i2p394-421.

____. (2020). Aspectos transversais da articulação dos conhecimentos profissionais na formação inicial de professores de matemática**.** *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática.* 13(1), 17-25. https://doi.org/10.17921/2176-5634.2020v13n1p17-25.

Kalinke, M. A., Loss, T., Elias, A. P. de A. J. & Motta, M. S. (2021). Caminhos percorridos por professores da Educação Básica em cursos de formação continuada sobre o uso das tecnologias digitais. In: A. Richit & H. Oliveira (Orgs.). *Tecnologias na formação e prática docente.* (01-18). Livraria da Física.

Kleemann, R. & Machado, C. C. (2022). Os investimentos na formação de professores e nos espaços da escola. In: *Anais do XIV Encontro Nacional de Educação Matemática.* https://www.even3.com.br/anais/xivenem2022/477189-os-investimentos-na-formacao-de-professores-e-nos-espacos-da-escola/.

Leite, E. A. P., Ribeiro, E. da S., Leite, K. G. & Uliana, M. R. (2018). Alguns desafios e demandas da formação inicial de professores na contemporaneidade. *Educ. Soc.*, 39(144), 721-737. https://doi.org/10.1590/ES0101-73302018183273.

Maier, L. R. & Dambros, M. (2021). A formação de professores no contexto brasileiro: dilemas, desafios e perspectivas frente aos avanços tecnológicos. In: A. Richit & H. Oliveira (Orgs.). *Tecnologias na formação e prática docente.* (111-129). Livraria da Física.

Mishra, P. & Koehler, M. J. (2006). Technological Pedagogical Content Knowledge: a framework for teacher knowledge. *Teachers College Record*. 108(6), 1017-1054.

Moraes, R. & Galiazzi, M. do C. (2016). *Análise Textual Discursiva.* Unijuí.

Paiva, M. A. V. (2013). O professor de matemática e sua formação: a busca da identidade profissional. In: A. M. Nacarato & M. A. V. Paiva (Orgs.). *A formação do professor que ensina matemática: perspectivas e pesquisas.* (89-111). Autêntica.

Richit, A. (2010). *Apropriação do conhecimento pedagógico-tecnológico em Matemática e a formação continuada de professores.* (Tese de Doutorado em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista). Repositório Institucional UNESP. http://hdl.handle.net/11449/102123.

_____. (2015). Formação de professores em tecnologias digitais: desdobramentos nas práticas escolares em face do Programa Um Computador por Aluno. *Uni-Pluriversidad*, 14(3), 81-93.

Scheffer, N. F., Sperandio, P. & Battisti, S. (2021). Tecnologias digitais e políticas de formação de professores. In: A. Richit & H. Oliveira (Orgs.). *Formação de professores e tecnologias digitais*. (143-166). Livraria da Física.

Shulman, L. S. (1986). *Those who understand: knowledge growth in teaching.* EUA: Educational Researcher, 15 (2), 4-14.

Vanini, L., Rosa M., Justo, J. C. R. & Pazuch, V. (2013). Cyberformação de professores de matemática: olhares para a dimensão tecnológica. *Revista Acta Scientiae*, 15(1), 153-171.

VOL 36, NÚMERO 1, AÑO 2023

# UN ESTUDIO SOBRE LA HABILIDAD DEL PROFESOR PARA ANALIZAR EL PENSAMIENTO MATEMÁTICO DE LOS ESTUDIANTES

# A STUDY ON THE TEACHER'S SKILL TO ANALYZE STUDENTS' MATHEMATICAL THINKING

**Sebastián Parodi, Cristina Ochoviet, Javier Lezama**

**Consejo de Formación en Educación. (Uruguay), Instituto Politécnico Nacional. (México)**

parodiseb@gmail.com, cristinaochoviet@gmail.com, jlezamaipn@gmail.com

**Resumen**:

Se examina la habilidad para analizar el pensamiento matemático en situaciones que involucran el signo igual. Los participantes fueron futuros profesores de matemática, cursando el último año de su carrera docente, y estaban a cargo de un grupo en la escuela secundaria. Se adoptó como perspectiva teórica la mirada profesional y una categorización de los significados del signo igual. Todos los participantes asistieron a un experimento de enseñanza donde se aplicó una secuencia de actividades con el fin de analizar la forma en que interactúan y se desarrollan las habilidades profesionales de los futuros docentes. Algunas de las conclusiones indican que los participantes tienden a seguir procedimientos formales para la resolución de tareas. Adicionalmente, el análisis de las evidencias relacionadas con las habilidades de interpretar y decidir sugiere una relación de dependencia entre estas dos habilidades de la mirada profesional.

**Palabras clave**: conocimiento del profesor, formación docente, experimento de enseñanza

**Abstract**:

This research examines the skill to analyze the mathematical thinking in situations involving the equal sign. The participants were mathematics prospective teachers, studying the last year of their teaching degree course, and who were in charge of a group in secondary school. It adopted as the theoretical perspective the professional noticing, and a categorization of the equal sign meanings. All the participants attended a teaching experiment where a sequence of activities was applied in order to analyze the way in which professional skills of prospective teachers interact and develop. Some of the conclusions indicate that the participants have a tendency to follow formal procedures for solving tasks. In addition, the analysis of the evidence related to interpreting and deciding skills suggests a dependency relationship between these two skills of the professional noticing.

**Keywords**: teacher knowledge, teacher training, teaching experiment

## Introducción

Estudios que exploran la comprensión del signo igual en la enseñanza media reportan una tendencia de los alumnos a interpretar el signo igual como el indicador del resultado de una operación o como una señal de hacer algo, en lugar de interpretarlo como el indicador de una relación de equivalencia, que resulta ser una interpretación imprescindible para el abordaje del álgebra (Kieran, 1981; Burgell y Ochoviet, 2015; Parodi et al., 2017, 2020; entre otros). Esta manera operacional de entender el signo igual queda en evidencia, por ejemplo, cuando los estudiantes se enfrentan a una sentencia numérica para completar (por ejemplo, Burgell y Ochoviet, 2015) o a una expresión algebraica para interpretar (por ejemplo, Parodi et al., 2020) o a una ecuación para resolver (por ejemplo, Parodi et al. 2017).

Asimismo, investigaciones que indagan sobre el conocimiento del profesor acerca de la enseñanza, en lo relativo al signo igual, señalan que los profesores no identifican que los significados de este signo representan una dificultad para los estudiantes (Stephens, 2006; Asquith et al., 2007; Prediger, 2010; Trivilin y Ribeiro, 2015; Vermeulen y Meyer, 2017; entre otros). En particular, estas investigaciones reportan dificultades de los docentes para anticipar objetivos de enseñanza, estrategias de resolución u obstáculos en el abordaje de tareas que involucran la interpretación del signo igual (por ejemplo, Stephen, 2006). De igual forma, se explora la relación que existe entre el conocimiento matemático para la enseñanza y la habilidad de los docentes para interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes, o bien se implementan experiencias de formación destinadas a enriquecer ese conocimiento o desarrollar esa habilidad del profesor (por ejemplo, Prediger, 2010).

Por otra parte, trabajos realizados en el contexto de la enseñanza primaria muestran que favorecer la comprensión del profesor acerca del pensamiento matemático de los alumnos, así como promover la utilización de esa comprensión para tomar decisiones relativas a la enseñanza, contribuye con el aprendizaje de los estudiantes (por ejemplo, Jacobs et al., 2007). Esto forma parte de lo que varios autores denominan desarrollar la habilidad de mirar profesionalmente del profesor (por ejemplo, Mason, 2002).

A partir de esta problemática, que refiere a la dificultad de los estudiantes con respecto a las interpretaciones del signo igual y a la invisibilidad de esta situación por parte de los docentes, resulta pertinente realizar un estudio con el objetivo de explorar la habilidad de mirar profesionalmente del futuro profesor de enseñanza media en situaciones que involucran al signo igual. Los hallazgos obtenidos brindarán insumos para tomar mejores decisiones relativas a los procesos de enseñanza en formación docente, que a su vez podrá repercutir positivamente en el aprendizaje de los estudiantes de enseñanza media.

## Marco conceptual

En el marco conceptual de este trabajo confluyen dos perspectivas teóricas: el constructo de la mirada profesional del pensamiento matemático de los estudiantes (Jacobs et al., 2010) y los significados del signo igual (Matthews et al., 2012).

### *Mirada profesional*

Con respecto a la mirada profesional, Jacobs et al. (2010) identifican tres destrezas interrelacionadas que permiten conceptualizar y caracterizar esta habilidad: percibir las estrategias de los estudiantes, interpretar la comprensión de los estudiantes y decidir cómo responder a partir de esa comprensión. Percibir las estrategias de los estudiantes, refiere a la capacidad de identificar elementos matemáticos relevantes en las estrategias que utilizan los estudiantes, en el entendido de que estos elementos pueden proporcionar una vía de acceso al pensamiento matemático de los alumnos. Interpretar la comprensión de los estudiantes, alude a la capacidad de razonar y reflexionar acerca de las estrategias de los estudiantes, vinculando las evidencias concretas con un marco de análisis general. Decidir cómo responder sobre la base de la comprensión de los estudiantes, refiere al razonamiento desarrollado por los docentes para tomar decisiones de enseñanza que favorezcan el aprendizaje de los estudiantes.

### *Signo igual*

Con respecto a los significados del signo igual, Matthews et al. (2012) proponen una trayectoria de aprendizaje del signo igual que consta de cuatro niveles: operacional rígido, operacional flexible, relacional básico y relacional comparativo. Estos niveles de comprensión difieren principalmente en el tipo de sentencias numéricas ligadas al signo igual que interviene en cada caso. El nivel operacional rígido implica evaluar o completar sentencias en un contexto de «operaciones–igual–respuesta»: por ejemplo, 5+2=7; mientras que el nivel operacional flexible refiere a sentencias que son compatibles a una visión operacional, pero que trascienden el caso típico anterior: por ejemplo, 7=5+2. Tanto el nivel relacional básico como el nivel relacional comparativo refieren a sentencias planteadas en un contexto de operaciones a ambos lados del signo igual (por ejemplo, 52+25=50+27); la diferencia radica en las estrategias implementadas por los estudiantes al completar o evaluar este tipo de sentencias, ya sea a través de cálculos o mediante la comparación de expresiones, respectivamente. A partir de esta trayectoria de aprendizaje, se identifican elementos matemáticos relevantes y momentos de comprensión del signo igual, así como prácticas de enseñanza que sugiere la literatura para enriquecer el conocimiento de este signo.

### *Mirada profesional y signo igual*

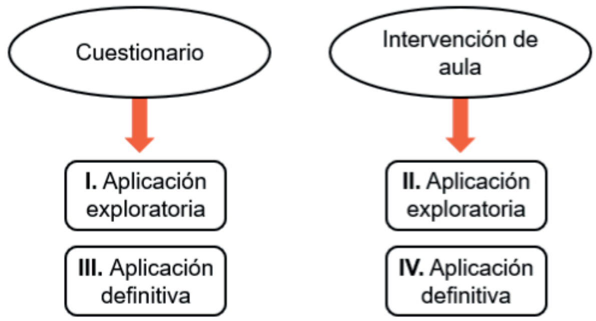
La conjunción de estas dos perspectivas teóricas (Figura 1), que puede consultarse en detalle en Parodi (2021), sienta las bases para el diseño metodológico y el análisis de los datos obtenidos en esta investigación.

**Figura 1.** *Conjunción de las dos perspectivas teóricas que conforman el marco conceptual de la investigación.*


## Metodología

Desde el punto de vista metodológico, se propone un estudio de casos con nueve estudiantes de profesorado que cursan el último año de la carrera de profesor en un instituto de formación docente de Uruguay y que tienen un grupo a cargo en la enseñanza media. Se diseña e implementa un experimento de enseñanza (Molina et al., 2011) dirigido a todos los participantes, en el que se aplica un cuestionario y se implementa una intervención de aula. En ambos casos, se realiza una exploración previa en otro grupo de estudiantes de profesorado, para valorar el diseño de estos instrumentos y realizar los ajustes necesarios (Figura 2).

**Figura 2.** *Diseño metodológico de la investigación.*




***Cuestionario***

El cuestionario consta de dos actividades (por ejemplo, Figura 3). En cada actividad, a partir de una tarea que está dirigida a estudiantes de segundo año de enseñanza media y que involucra implícitamente las interpretaciones del signo igual, los participantes deben anticipar las posibles estrategias de resolución, identificar los conocimientos matemáticos involucrados en la resolución y proponer una intervención de enseñanza para favorecer el aprendizaje de la temática que aborda cada tarea. Con cada actividad se pretende explorar la forma en que los participantes perciben, interpretan y deciden respecto del tópico matemático en cuestión, a partir de las estrategias de resolución que ellos mismos anticipan. En particular, se indaga si las decisiones de los participantes se apoyan en la interpretación de la comprensión matemática de los estudiantes y si esta interpretación toma en cuenta los elementos matemáticos relevantes que han sido percibidos.

**Figura 3.** *Consigna de la actividad 2 del cuestionario.*

Un profesor de segundo año de liceo les propuso a sus estudiantes la siguiente tarea:

*Completa el espacio con el número que falta. Si piensas que hay más de una posibilidad, indícala. Explica tu respuesta.*

$$14 \times 3 = \_\_\_ - 3$$

a) ¿Cómo resolvería esta tarea un alumno de segundo año de liceo? Describa cada una de las estrategias que el alumno podría desarrollar.

b) Desde su perspectiva, ¿qué conocimientos matemáticos están involucrados en la resolución de esta tarea?

c) Elija una de las respuestas de los alumnos que usted consideró en la parte a. Si un alumno presenta esta respuesta, ¿cómo lo ayudaría a progresar en su aprendizaje relativo a la temática que propone la tarea?

La tarea incorporada a la actividad 2 del cuestionario, en particular, para su análisis por parte de los participantes, admite dos estrategias de resolución: la estrategia de *sustituir* y la estrategia de *resultado después del signo igual*. La estrategia de *sustituir* consiste en buscar un número que verifique la igualdad (en este caso, 45), ya sea mediante tanteo o a través del planteo y la resolución de una ecuación. Esta estrategia se apoya en la idea del igual como signo que relaciona cantidades iguales (de aquí en más, E2) y deja al descubierto una interpretación de este signo como indicador de una relación de equivalencia numérica (M3, de aquí en más). La estrategia de *resultado después del signo igual*, en tanto, consiste en completar el espacio en blanco con el resultado de la operación que está planteada a la izquierda del signo igual (en este caso, 42). Esta estrategia no toma en cuenta la simetría de la igualdad (E1, de aquí en más) y revela una interpretación del igual como indicador del resultado de una operación (M1, de aquí en más). A partir de estas dos estrategias de resolución, se pueden implementar distintas intervenciones de enseñanza para favorecer la comprensión del signo igual: por ejemplo, abordar tareas que requieran analizar o completar otras sentencias numéricas en contextos no estándar de operaciones–igual respuesta.

La pregunta 2*a* solicita anticipar posibles estrategias de resolución de la tarea planteada, así como la descripción de cada una de estas. Las respuestas de los participantes a esta pregunta del cuestionario pondrán en evidencia principalmente la destreza de percibir. Se espera que todos anticipen la estrategia de sustituir, que será interpretada como una evidencia de percepción de la igualdad de cantidades (E2). En menor proporción, se espera que los participantes anticipen la estrategia de resultado después del signo igual, que podrá configurar evidencias de percepción de la simetría de la igualdad (E1).

La pregunta 2*b* indaga los conocimientos matemáticos que están involucrados en la resolución de la tarea en cuestión. Las respuestas de los participantes a esta pregunta del cuestionario pondrán en evidencia principalmente la destreza de interpretar. Se espera que la mayoría destaque que esta tarea guarda relación con las estrategias de resolución de ecuaciones o con las técnicas operatorias en el conjunto de los números reales. En particular, toda referencia al entendimiento del concepto de solución de una ecuación, sumado a la previsión de la estrategia de sustituir, podrá configurar evidencia de interpretación del momento de comprensión relacional básico (M3); al igual que toda referencia a la interpretación del signo igual o la noción de igualdad, ligado a la anticipación de la estrategia de resultado después del signo igual, podrá constituir evidencia de interpretación del momento de comprensión operacional rígido (M1) del signo igual.

La pregunta 2*c* solicita una devolución para favorecer el aprendizaje de la temática que propone la tarea, tomando como partida una de las estrategias de resolución anticipadas con anterioridad. Las respuestas de los participantes pondrán en evidencia principalmente la destreza de decidir. Se espera que la mayoría proponga una intervención para desarticular el tanteo y promover el planteo y la resolución de una ecuación, en el marco de la estrategia de sustituir. En menor proporción, si se prevé que un estudiante de enseñanza media complete el espacio en blanco con un número que no verifica la igualdad, los participantes podrán solicitar la verificación correspondiente para evidenciar el error del estudiante.

***Intervención de aula***

A partir de los resultados obtenidos tras la aplicación del cuestionario, se panifica e implementa una intervención de aula con el propósito de promover el desarrollo de la mirada profesional en situaciones que involucran al signo igual. En esta intervención, realizada una semana después de la aplicación del cuestionario, se propone una dinámica de taller en torno al análisis de un caso de una alumna de enseñanza media resolviendo tareas que involucran interpretaciones del signo igual. Los tres equipos conformados reciben las distintas actividades para discutir internamente y luego abordar colectivamente. Cada actividad se presenta al concluir la puesta en común de la actividad anterior.

## ■ Resultados

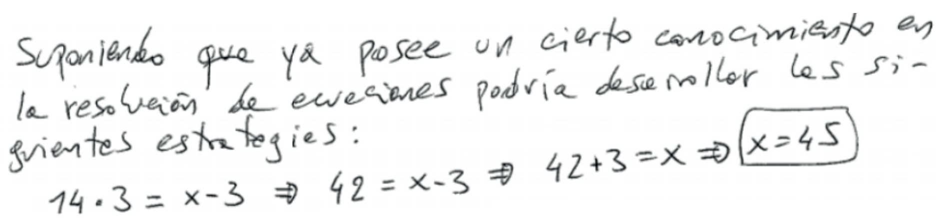
En este escrito, para ejemplificar el análisis realizado en la investigación, se focalizará en los principales hallazgos obtenidos tras la aplicación del cuestionario, en lo que refiere específicamente a la actividad 2.

***Respuestas a la pregunta 2a***

Todos los participantes anticipan la estrategia de sustituir, que consiste en buscar un número que verifique la igualdad, ya sea mediante tanteo (8 EPM) o a través del planteo y la resolución de una ecuación (7 EPM). A su vez, menos de la tercera parte de los participantes anticipa la estrategia de resultado después del signo igual, que consiste en completar el espacio en blanco de la sentencia con el resultado de la operación que está planteada a la izquierda del signo igual (2 EPM).

Gustavo, por ejemplo, es uno de los siete participantes que, en respuesta a esta pregunta, muestra evidencias de percepción de un solo elemento matemático relevante del signo igual: la igualdad de cantidades (E2) (Figura 4).

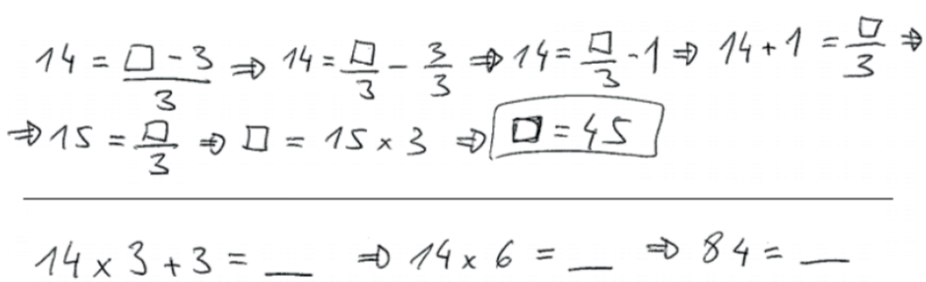
**Figura 4**. *Extracto de la respuesta de Gustavo a la pregunta 2a del cuestionario.*


Suponiendo que ya posee un cierto conocimiento en la resolución de ecuaciones podría desarrollar las siguientes estrategias:

$14 \cdot 3 = x-3 \Rightarrow 42 = x-3 \Rightarrow 42+3 = x \Rightarrow \boxed{x=45}$

El futuro profesor prevé que los estudiantes asocien la tarea con el tema ecuaciones y recurran a una técnica aprendida en clase para proceder a su resolución. Si bien esta estrategia se apoya en la idea del igual como signo que relaciona cantidades iguales, porque posibilita la obtención de un número que verifica una igualdad con operaciones a ambos lados del signo igual, la estrategia prevista por el EPM no incluye la realización de una verificación explícita o la implementación de otra alternativa que evidencie esta idea relativa al signo igual. Por consiguiente, Gustavo alude implícitamente a la igualdad de cantidades (E2) para anticipar la estrategia de sustituir y mostrar evidencias de percepción de un solo elemento matemático relevante del signo igual.

**Figura 5.** *Extracto de la respuesta de Gustavo a la pregunta 2a del cuestionario.*

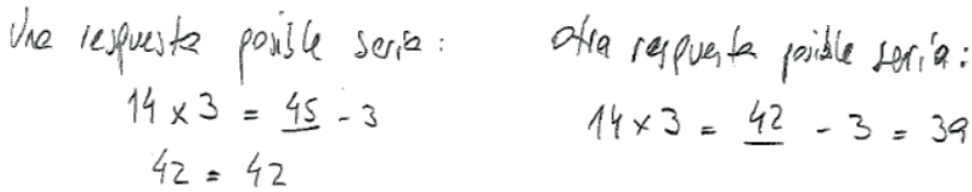

$14 = \frac{\square - 3}{3} \Rightarrow 14 = \frac{\square}{3} - \frac{3}{3} \Rightarrow 14 = \frac{\square}{3} - 1 \Rightarrow 14 + 1 = \frac{\square}{3} \Rightarrow 15 = \frac{\square}{3} \Rightarrow \square = 15 \times 3 \Rightarrow \boxed{\square = 45}$

$14 \times 3 + 3 = \_\_ \Rightarrow 14 \times 6 = \_\_ \Rightarrow 84 = \_\_$

En particular, se destacan dos aspectos de la respuesta de Gustavo (Figura 5). Por un lado, se prevé una secuencia de transformaciones poco plausible que conduce al número buscado, a través de una serie de despejes no esperables en un estudiante de enseñanza media ante la resolución de este tipo de tareas. Por otro lado, se advierte la posibilidad de que los alumnos cometan un error de corte operatorio que está relacionado con el orden jerárquico en que se realizan las operaciones, pero este error tampoco es habitual en este contexto. Esto muestra una dificultad de los profesores en formación, ligada al uso del conocimiento de los estudiantes y la enseñanza, que dificulta la anticipación de posibles estrategias de resolución, así como la previsión de errores frecuentes y esperados en el ámbito escolar.

Joaquín, en tanto, es uno de los dos EPM que al responder esta pregunta muestra evidencias de percepción de dos elementos matemáticos relevantes del signo igual: igualdad de cantidades (E2) y simetría de la igualdad (E1) (Figura 6).

**Figura 6.** *Extracto de la respuesta de Joaquín a la pregunta 2a del cuestionario.*




Aquí se prevé la búsqueda de un número que verifique la igualdad y se explicita la verificación correspondiente: «42=42». Esta estrategia involucra la idea del igual como signo que relaciona cantidades iguales (E2), lo que constituye evidencias de percepción de este elemento matemático relevante del signo igual. A su vez, se considera la posibilidad de completar el espacio en blanco con el número 42, que es el resultado de la operación 14x3, y se agrega un segundo signo igual a la derecha de la sentencia con el resultado de la operación que lo precede: «14x3=42–3=39». Esta estrategia de resolución se apoya en una lectura unidireccional del signo igual, de izquierda a derecha, donde las operaciones se plantean solamente a la izquierda de este signo y el resultado de estas operaciones a la derecha. Por lo tanto, Joaquín alude a la simetría de la igualdad (E1), en el marco de la otra estrategia de resultado que anticipa, mostrando evidencias de percepción de un segundo elemento matemático relevante del signo igual.

***Respuestas a la pregunta 2b***

Los conocimientos matemáticos que los participantes asocian a la tarea planteada, con mayor frecuencia, refieren a las operaciones en el conjunto de los números reales (7 EPM) o a las estrategias de resolución de una ecuación (6 EPM). Asimismo, la mitad de los participantes hace referencia a la noción de igualdad numérica (4 EPM) o a los significados del signo igual (1 EPM). En menor proporción, otros conocimientos matemáticos son identificados por los participantes: por ejemplo, el concepto de solución de una ecuación (1 EPM) o la noción de incógnita (2 EPM).

Federico es uno de los dos EPM que al responder esta pregunta no muestra evidencias de interpretación de momentos de comprensión del signo igual: «desde mi perspectiva están implicadas las operaciones y las propiedades de las operaciones en el conjunto de los números reales, creo que el alumno podría completar el espacio correctamente utilizando estas propiedades y operaciones, como un juego y no formalmente». Si bien la tarea planteada en esta actividad requiere de una destreza operatoria, porque propone la búsqueda de un número que verifique una igualdad, el participante no hace mención alguna a la interpretación relacional del signo igual o al entendimiento de la noción de igualdad numérica que subyace a la estrategia de sustituir que el propio participante anticipa en respuesta a la pregunta 2*a*.

David, en tanto, es uno de los cinco EPM que al responder esta pregunta muestra evidencias de interpretación de un solo momento de comprensión del signo igual: relacional básico (M3). En concreto, este participante señala que la tarea planteada está relacionada con tres conceptos o habilidades matemáticas que enlista de la siguiente manera: «resolución de ecuaciones polinómicas de primer grado, conjunto solución de una ecuación y operaciones en el conjunto de los números enteros y sus propiedades». En el entendido que el EPM se refiere al concepto de solución de una ecuación cuando alude al «conjunto solución de una ecuación», sumado a que en respuesta a la pregunta 2*a* anticipa una estrategia de resolución que implica buscar un número que verifique una igualdad, se infiere que, para este participante, la aplicación de la estrategia de sustituir revela una interpretación relacional del signo igual, que configura evidencias de interpretación de M3.

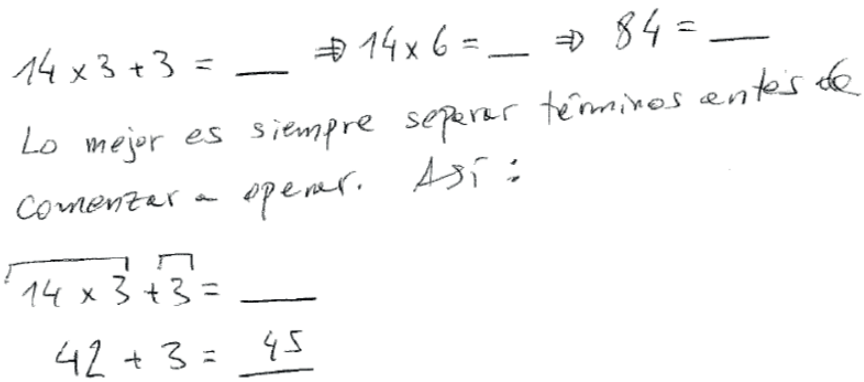
Martín, por último, es uno de los dos EPM que al responder esta pregunta del cuestionario muestra evidencias de interpretación de dos momentos de comprensión del signo igual: operacional rígido (M1) y relacional básico (M3). Este participante brinda una respuesta que clarifica el vínculo entre la tarea analizada, las estrategias de resolución anticipadas y el conocimiento relativo al signo igual involucrado en cada una de estas: «lo que implica resolver una ecuación, propiedades que cumple una ecuación, concepción del símbolo igual, reducción y suma de números opuestos». En este caso, el EPM alude explícitamente al significado del signo igual como uno de los conocimientos necesarios para el abordaje de la tarea que, ligado a la anticipación previa de las estrategias de sustituir y de resultado después del signo igual, constituye evidencias de interpretación de M1 y M3.

***Respuestas a la pregunta 2c***

La mitad de los participantes propone una intervención para favorecer una variante de la estrategia de sustituir (4 EPM) o enriquecer la interpretación del signo igual (4 EPM). En menor proporción, las decisiones adoptadas por los participantes pretenden abordar un error de tipo operatorio (1 EPM). Para alcanzar estos propósitos, se prevé la formulación de preguntas (4 EPM), el planteamiento de otra tarea (2 EPM) o la explicación y presentación de ejemplos (3 EPM).

Gustavo es uno de los cinco EPM que, en respuesta a esta pregunta, toma una decisión que no abona a la comprensión del signo igual. Específicamente, el participante propone una explicación para favorecer la superación de un error operatorio anticipado previamente, que subraya la importancia de identificar el orden en el que se realizan las operaciones en el contexto de un cálculo combinado (Figura 7).

**Figura 7**. *Extracto de la respuesta de Gustavo a la pregunta 2c del cuestionario.*


$14 \times 3 + 3 = \_\_\_ \Rightarrow 14 \times 6 = \_\_\_ \Rightarrow 84 = \_\_\_$

Lo mejor es siempre separar términos antes de comenzar a operar. Así:

$14 \times 3 + 3 = \_\_\_$

$42 + 3 = \underline{45}$

En este caso, para abordar el error previsto, el profesor en formación elabora una explicación que destaca la necesidad de «separar términos antes de comenzar a operar» y, sobre la base de esta apreciación, muestra una forma correcta de proceder en este caso. Entonces, Gustavo focaliza en un error poco plausible, de tipo operatorio, que no guarda relación alguna con las interpretaciones del signo igual involucradas en la resolución de la tarea analizada.

Juan, en tanto, es uno de los dos EPM que, al responder esta pregunta, toma una decisión que se apoya en un solo elemento matemáticamente relevante del signo igual para favorecer la comprensión de este signo. Específicamente, propone la formulación de preguntas para abonar a la superación de un error que el participante había anticipado, en el que se concluía erróneamente que el número buscado era –45:

Plantearía preguntas guía como: ¿a qué conjunto pertenecen los números 14 y 3? Si los operamos, ¿a qué conjunto pertenece el resultado? ¿Puedes entonces dar ese valor? Realiza ambas operaciones: ¿el resultado es el mismo? ¿Qué pudo haber sucedido? ¿Se cumple la igualdad planteada? ¿Se te ocurre alguna estrategia distinta a la que has planteado?

El participante propone una serie de preguntas que conducen a la verificación de la sentencia, para el valor erróneo obtenido, así como a la exploración de otras estrategias de resolución. Juan se apoya en la idea del igual como signo que relaciona cantidades iguales, para abonar a la interpretación de este signo como indicador de una relación de equivalencia, porque promueve la realización de cálculos, en una sentencia numérica con operaciones a ambos lados del signo igual, para constatar que no se verifica una igualdad.

Asimismo, el participante deja entrever la posibilidad de transitar, por ejemplo, de la resolución de una ecuación a la aplicación de la técnica de tanteo, en dirección contraria a la decisión adoptada por otros participantes que, en el contexto de la estrategia de sustituir, pretenden favorecer el tránsito de la técnica de tanteo a la resolución formal de una ecuación.

Joaquín, por último, es uno de los dos EPM que, al responder esta pregunta, toma una decisión que se apoya en los tres elementos matemáticamente relevantes del signo igual para abonar a la comprensión de este signo. Propone una tarea que apunta a transitar de la estrategia de resultado después del signo igual a la tarea de sustituir (Figura 8).

**Figura 8.** *Extracto de la respuesta de Joaquín a la pregunta 2c del cuestionario.*

Elijo la segunda respuesta.
Para ayudarlo a progresar le propondría ejercicios que trabajen el concepto de igualdad desde otra perspectiva y que se relacione con las propiedades que cumple una relación de equivalencia
Ejemplos de ejercicios

$\_\_ = 5+3$, $10+5 = 5+\_\_$, $\_\_ = 3$, $4 = \_\_$,

$$\left.\begin{array}{l} 3+3 = 4+2 \\ \text{y } 4+2 = 1+5 \end{array}\right\} \Rightarrow 3+3 = \_\_ + 5$$

, $\_\_ + 2 = 3+4$

La actividad que propone Joaquín consiste en completar un conjunto de sentencias numéricas, en un contexto no estándar de ausencia de operaciones o de operaciones solamente a la derecha del signo igual, así como sentencias en las que figuran operaciones a ambos lados del signo igual. Estas sentencias requieren una lectura unidireccional del signo igual (por ejemplo, «__=5+3»), o bien se apoyan en la idea del igual como signo que relaciona cantidades iguales (por ejemplo, «__+2=3+4») o como signo que conserva la igualdad (por ejemplo, «10+5=5+__»). Es decir, el participante alude a la simetría de la igualdad (E1), la igualdad de cantidades (E2) y la conservación de la igualdad (E3) para favorecer el momento de comprensión relacional básico (M3) que requiere la tarea analizada en este caso, así como los momentos de comprensión operacional flexible (M2) y relacional comparativo (M4) del signo igual. En otras palabras, la intervención de Joaquín alude a todos los elementos matemáticos relevantes del signo igual, así como a todos los momentos de comprensión de este signo que se pretenden enriquecer.

## Conclusiones

Los resultados obtenidos ponen de relieve dificultades específicas de los participantes con respecto a cada una de las tres destrezas de la mirada profesional en situaciones que involucran al signo igual. Estas dificultades se concentran principalmente en las respuestas al cuestionario que han sido presentadas en este escrito, así como en la puesta en común de las primeras tres actividades de la intervención de aula.

Estos hallazgos, por ejemplo, revelan una dificultad de los futuros profesores para percibir los elementos matemáticos relevantes del signo igual, en casos en que el conocimiento de estos aspectos es crucial para la resolución exitosa de las tareas que se analizan. Al anticipar las estrategias de resolución de la tarea de la actividad 2 del cuestionario, en particular, menos de la tercera parte de los participantes considera la posibilidad de que los alumnos completen el espacio en blanco de la sentencia con el resultado de la operación que está escrita a la izquierda del signo igual, desviándose la atención del hecho de que la simetría de la igualdad es un aspecto matemático relevante en la resolución de la tarea en cuestión. Ligado a lo anterior, quienes participan en esta investigación, muestran una tendencia a suponer que los estudiantes resolverán con éxito las tareas analizadas o que cometerán errores poco plausibles en este tipo de situaciones.

También se infieren dificultades de los futuros profesores para interpretar la comprensión matemática de los estudiantes en torno al signo igual. Menos de la mitad de los participantes declara explícitamente que la resolución de las dos tareas del cuestionario requiere una interpretación relacional del signo igual. Estos resultados permiten inferir una limitación de los profesores en formación para reconocer o explicitar que, al no considerar la idea del igual como signo que relaciona cantidades iguales, por ejemplo, puede interpretarse el signo como el indicador del resultado de una operación, y que esta interpretación operacional puede obstaculizar la resolución de las tareas en cuestión.

Al tomar decisiones de enseñanza, en tanto, el foco de atención de los participantes trasciende la comprensión relacional del signo igual y revela una preferencia de los futuros profesores por focalizar en lo instrumental sobre lo conceptual (Skemp, 2006), debido a que menos de la mitad de los participantes toman una decisión para abordar la superación de un error o enriquecer la comprensión del signo igual. En particular, las evidencias recogidas ponen de relieve una dificultad de los futuros profesores para anticipar intervenciones desafiantes (Guberman y Leikin, 2013) que favorezcan la interpretación de este signo. De hecho, los participantes recurren con frecuencia a la formulación de preguntas poco efectivas o al planteo de tareas no desafiantes para alcanzar el propósito de enseñanza considerado.

Tanto al percibir, como al interpretar y decidir, se destaca un apego de los participantes hacia los procedimientos formales de resolución de tareas. Por ejemplo, quienes asocian la tarea de la actividad 2 del cuestionario con el planteo y la resolución de una ecuación, ya sea al anticipar esta estrategia de resolución o al tomar una decisión para alentar su implementación, están promoviendo la aplicación mecánica de una técnica aprendida en clase, sin advertir que la tarea en cuestión también puede resolverse a través de estrategias personales de resolución ligadas al tanteo o a la comparación de expresiones. Este apego condiciona y desvirtúa el análisis de las distintas situaciones, porque se realizan inferencias acerca de lo que los estudiantes comprenden o deberían haber comprendido, que no se corresponden con el conocimiento que emana de la práctica profesional y de los resultados de investigación relativos a las interpretaciones del signo igual.

Un análisis conjunto de las evidencias relativas a las destrezas de interpretar y de decidir, en tanto, también deja entrever una relación de dependencia entre estas dos destrezas de la mirada profesional. Esta relación de dependencia está presente, por ejemplo, cuando los participantes que toman una decisión para favorecer el tránsito de la interpretación operacional a la interpretación relacional del signo igual son aquellos que mostraron evidencias de interpretación de estos dos momentos de comprensión del signo igual. Se infiere que el desarrollo de la destreza de interpretar puede proveer mejores condiciones para desarrollar la destreza de decidir sobre la base de la comprensión de los estudiantes.

## Referencias bibliográficas

Asquith, P., Stephens, A., Knuth, E. y Alibali, M. (2007). Middle school mathematics teachers' knowledge of students' understanding of core algebraic concepts: equal sign and variable. *Mathematical Thinking and Learning, 9*(3), 249–272.

Burgell, F. y Ochoviet, C. (2015). Significados del signo de igual y aspectos de su enseñanza. Un estudio realizado con estudiantes de primer año de enseñanza secundaria y sus profesores. *Enseñanza de las Ciencias*, *33*(3), 77–98.

Guberman, R. y Leikin, R. (2013). Interesting and difficult mathematical problems: changing teachers' views by employing multiple-solution tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education, 16*(1), 33–56.

Jacobs, V., Franke, M., Carpenter, T., Levi, L. y Battey, D. (2007). Professional development focused on children's algebraic reasoning in elementary school. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(3), 258–288.

Jacobs, V., Lamb, L. y Philipp, R. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(2), 169–202.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics, 12*(3), 317–326.

Mason, J. (2002). *Researching your own practice: The discipline of noticing.* Routledge Falmer.

Matthews, P., Rittle–Johnson, B., McEldoon, K. y Taylor, R. (2012). Measure for measure: what combining diverse measures reveals about children's understanding of the equal sign as an indicator of mathematical equality. *Journal for Research in Mathematics Education, 43*(3), 316–350.

Molina, M., Castro, E., Molina, J. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias, 29*(1), 75–88.

Parodi, S. (2021). *La habilidad de mirar profesionalmente del futuro profesor en situaciones que involucran al signo igual* (tesis de doctorado no publicada). CICATA–IPN.

Parodi, S., Ochoviet, C. y Lezama, J. (2017). La comprensión del signo de igual en la entrada al álgebra: el diseño de tareas y la conversación en la clase de matemática. *Enseñanza de las Ciencias, 35*(3), 51–67.

Parodi, S., Ochoviet, C. y Lezama, J. (2020). Interpretaciones del signo igual en un contexto algebraico de polinomios. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 34*(68), 1264–1284.

Prediger, S. (2010). How to develop mathematics–for–teaching and for understanding: the case of meanings of the equal sign. *Journal of Mathematics Teacher Education, 13*(1), 73–93.

Skemp, R. (2006). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *12*(2), 88-95.

Stephens, A. (2006). Equivalence and relational thinking: preservice elementary teachers' awareness of opportunities and misconceptions. *Journal of Mathematics Teacher Education, 9*(3), 249–278.

Trivilin, L. y Ribeiro, A. (2015). Conhecimento matemático para o ensino de diferentes significados do sinal de igualdade: um estudo desenvolvido com professores dos anos iniciais do ensino fundamental. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 29*(51), 38–59.

Vermeulen, C. y Meyer, B. (2017). The equal sign: teachers' knowledge and students' misconceptions. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education, 21*(2), 136–147.

# MAPEAMENTO DE TRABALHOS DE CONCLUSÃO DE CURSO EM CURSOS DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA OFERTADOS NO BRASIL

# MAPPING OF COURSE COMPLETION PAPERS IN UNDERGRADUADE COURSES IN MATHEMATICS OFFERED IN BRAZIL

**Kaline Silva, Celiane Machado, Denise M. V. Martinez**
**Universidade Federal do Rio Grande – FURG. (Brasil)**
kalinems26@gmail.com, celianecmachado@gmail.com, denisevmartinez@gmail.com

**Resumo**:
A elaboração do Trabalho de Conclusão de Curso consiste em uma importante etapa para a formação acadêmica. Nesse sentido, esta pesquisa tem como objetivo descrever um mapeamento de Trabalhos de Conclusão de Curso desenvolvidos nos cursos de Licenciatura em Matemática de universidades federais com sede no estado do Rio Grande do Sul, Brasil. Metodologicamente, trata-se de uma pesquisa qualitativa de caráter exploratório e bibliográfico e tem como base o Mapeamento Teórico de Biembengut (2008). Na análise dos dados mapeados emergiram oito categorias, denominadas: Práticas Pedagógicas, Intervenções Didáticas no Ensino Básico, Matemática Avançada, Questões Investigativas sobre o Ensino, Educação de Jovens e Adultos, Experiência Docente, Inclusão Social e História da Educação Matemática. De modo geral, esta pesquisa permitiu identificar os assuntos explorados, proporcionou o conhecimento sobre a dimensão das produções realizadas e oportunizou a reflexão sobre as identidades acadêmicas profissionais.

**Palavras-chave**: trabalhos de conclusão de curso, licenciatura em matemática, mapeamento

**Abstract**:
The Course Completion Paper consists in an important step to the academic training. In this sense, this research aims to describe a mapping of the Course Completion Papers developed in Mathematics degree courses at federal universities located in the state of Rio Grande do Sul, Brazil. Methodologically, it is qualitative research with an exploratory and bibliographic nature and it is based on the Theoretical Mapping of Biembengut (2008). In the analysis of the mapped data, eight categories emerged, the so called: Pedagogical Practices, Didactic Interventions in Basic Education, Advanced Math, Investigative Questions on Teaching, Education of Young and Adults, Teaching Experience, Social Inclusion and History of Math Education. In general, this research allowed us to identify the explored subjects, providing knowledge on the dimension of the productions that were made, and it made it possible to reflect on professional academic identities.

**Keywords**: course completion papers, Mathematics degree course, mapping

## Introdução

O Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), se caracteriza como um momento que contribui para a aprendizagem dos acadêmicos. Esse tipo de trabalho pode ser descrito como uma pesquisa desenvolvida por estudantes que estão finalizando sua trajetória universitária em um curso de graduação no Ensino Superior. A elaboração do TCC exige uma construção crítica e destemida sobre o tema que será discutido no referido trabalho e, em muitos casos, é na construção desse estudo que o estudante consegue firmar as competências desenvolvidas durante o curso.
Nesse sentido, a presente pesquisa possui o objetivo de descrever um mapeamento de TCC desenvolvidos nos cursos de Licenciatura em Matemática de universidades federais com sede no estado do Rio Grande do Sul (RS), Brasil. Ao que se refere à metodologia, esta pesquisa caracteriza-se como qualitativa, com caráter exploratório e bibliográfico, e também baseia-se no Mapeamento Teórico proposto por Biembengut (2008).
Vale destacar que participaram da pesquisa as universidades federais que oferecem o curso de Licenciatura em Matemática, possuem a disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso no Quadro de Sequência Lógica (QSL) e disponibilizam esses trabalhos em formato *on-line* em seus repositórios institucionais. Assim, três instituições atenderam a essas condições, sendo elas: a Universidade Federal do Rio Grande, a Universidade Federal do Rio Grande do Sul e a Universidade Federal do Pampa (Campus Bagé). Destaca-se que foi considerado o recorte temporal compreendido entre 2015 e 2019.

A abordagem considerada nesta pesquisa, além de identificar os temas pesquisados, viabiliza conhecer a abrangência das produções acadêmicas já realizadas. Ter conhecimento sobre os assuntos abordados nos TCC é importante, pois a partir dos temas discutidos nesses trabalhos tem-se a informação sobre quais são os assuntos mais considerados ou menos considerados pelos estudantes. Além disso, segundo Teixeira (2016), a elaboração de um mapeamento contribui para a reflexão sobre o processo de construção do conhecimento.
Assim, entende-se que este estudo poderá proporcionar a reunião de informações identificando os diversos conhecimentos produzidos no âmbito dos cursos de Licenciatura em Matemática das instituições participantes da pesquisa. Logo, para dar seguimento a esse estudo, na próxima seção é evidenciada a fundamentação teórica, na sequência é apontada a metodologia utilizada, posteriormente são apresentados os resultados obtidos e, por fim, são destacadas as conclusões, os agradecimentos e as referências bibliográficas.

## Fundamentação Teórica

Um curso de Licenciatura em Matemática no Brasil possui como principal finalidade a formação de professores de Matemática para trabalhar com a Educação Básica, possibilitando aos licenciados conhecimentos, habilidades e atitudes para atuar nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio (Brasil, 2001). Além disso, o curso busca formar professores que tenham consciência acerca de seu papel como educadores, que sejam comprometidos com o ensino da Matemática e criativos na ação pedagógica, sendo capazes de agir como pesquisadores e mediadores no processo de aprendizagem dos estudantes.

Segundo Perentelli (2008), o perfil de professor que um curso brasileiro de Licenciatura em Matemática deseja formar é o de um profissional com competência para formular questões que estimulem a reflexão de seus estudantes, elabore hipóteses e proposições de soluções aos problemas. Além do mais, pretende que o educador matemático proporcione em suas aulas um ambiente de aprendizagem de Matemática, criando situações adequadas, por meio de modelos que se adaptem às condições de ensino.

A produção do TCC é uma atividade que reforça a formação nos cursos de graduação. Enquanto componente curricular, configura-se como uma oportunidade de problematizar o ensino, além de investigar estratégias que potencializem a aprendizagem dos estudantes. Ademais, de acordo com Santana (2018), o referido trabalho consiste em estudos que visam a preparar o estudante para a pesquisa, propiciando o desenvolvimento do seu senso crítico. Nesse sentido, requer do estudando de graduação pesquisar, compreender, analisar e avaliar o assunto que deseja explorar, a fim de que seja capaz de proporcionar a autonomia na busca do conhecimento. Para Veiga, Lemos e Garbin (2010):

O TCC sinaliza a possibilidade de o aluno consolidar ou aprofundar os conhecimentos acumulados durante a sua formação, descobrir respostas para questões relacionadas às diversas áreas do conhecimento, inventar novas técnicas e criar novos produtos que a sociedade necessita e valoriza (p. 3).

Assim, um TCC caracteriza-se como produção de conhecimentos em que o aluno-autor estabelece relação com diferentes opiniões sobre o seu tema de estudo, por isso trata-se de um trabalho que lhe prepara para a pesquisa, direciona para a interdisciplinaridade e aumenta a sua capacidade de análise (Pereira y Silva, 2011). Destaca-se ainda que, “a realização do TCC vem a possibilitar um importante momento de constituição do futuro professor, à medida que permite ao mesmo desenvolver uma pesquisa que articule aspectos empíricos e teóricos intrínsecos do fazer profissional docente” (Silva, 2020, p. 6).

Fundamentando-se em Pereira e Silva (2011), o TCC é uma experiência formadora e incentivadora da produção científica e da construção de novos valores educacionais. Além disso, caracteriza-se pelo rigor epistemológico, estrutural e metodológico, pautados por normas de trabalho acadêmico adotadas pelas instituições de ensino. Logo, esse trabalho, enquanto componente curricular, fortalece o campo educacional uma vez que permite uma aproximação entre o ensino e a pesquisa acadêmica.

Assim, torna-se importante investigar os TCC já elaborados, visto que esse ato proporciona clareza quanto às produções já realizadas e também contribui para o entendimento dos direcionamentos tomados nessas pesquisas. Biembengut (2008) aponta que o ato de mapear propicia a identificação de relevantes resultados sobre estudos já elaborados e oportuniza o aprofundamento de conhecimentos. Além disso, segundo Fiorentini, Passos e Lima (2016), o mapeamento em trabalhos oportuniza uma reflexão a respeito das identidades acadêmico-científicas que estão sendo constituídas nos espaços acadêmicos.

Segundo Fernandes (2009), realizar estudos referentes ao conhecimento produzido em certa área de pesquisa é relevante para os pesquisadores do âmbito acadêmico, pois esse movimento sinaliza temáticas e problemas com o intuito de gerar novas investigações. Angelo (2014) também destaca que esse tipo de estudo auxilia no reconhecimento de aspectos pouco abordados, o que contribui para a realização de futuras pesquisas.

Os autores Vizzotto, Mackedanz e Miranda (2017, p. 140) ainda ressaltam ser “importante que toda produção científica e acadêmica seja mapeada a fim de conseguir obter indicativos de produção, e também para que outros autores, antes de iniciarem suas pesquisas, consigam analisar o conhecimento do que já foi produzido”. Assim, o mapeamento possibilita saber as diferentes esferas em que as pesquisas científicas são desenvolvidas, promove o acompanhamento do processo de constituição das áreas do conhecimento e colabora para o desenvolvimento de estudos que irão fortalecer o crescimento da ciência.

## Metodologia

O presente estudo refere-se a uma pesquisa qualitativa; quanto aos objetivos, é entendida como exploratório; e em relação aos procedimentos, refere-se a uma pesquisa bibliográfica (Gerhardt y Silveira, 2009). Segundo os autores Moraes e Galiazzi (2007), a pesquisa qualitativa tem a intenção de investigar determinado fato por meio de uma análise rigorosa e sistemática.

O foco desta pesquisa é apresentar o Mapeamento Teórico de Biembengut (2008), que compreende três etapas: *identificação, classificação/organização e reconhecimento/ análise.* Na etapa de *identificação* é necessário estabelecer o tema central da pesquisa e, após, verificar as possíveis fontes. Já na etapa de *classificação/organização* é preciso identificar os pontos relevantes que servirão como guia para entender o que já foi pesquisado e expresso, de maneira a permitir a elaboração de um sistema de explicação. E a etapa de *reconhecimento/análise* é a apresentação teórica, destacando os principais resultados obtidos, implicando na união de diversos dados.

Para realizar o mapeamento dos TCC, elaborados por acadêmicos de cursos de Licenciatura em Matemática e produzidos no período de 2015 a 2019, foram consideradas as universidades federais, com sede no estado do RS, Brasil, que ofertam o curso de Licenciatura em Matemática, possuem a disciplina de TCC no QSL e disponibilizam esses trabalhos em formato *on-line* em seus repositórios institucionais. Ao adotar esses critérios, foram identificadas três instituições: Universidade Federal do Rio Grande, Universidade Federal do Rio Grande do Sul e Universidade Federal do Pampa (Campus Bagé).

Ao iniciar a realização do Mapeamento Teórico (Biembengut, 2008), na etapa de *identificação*, foram elencados os trabalhos mapeados. Nesse momento, encontrou-se um total de 128 trabalhos, sendo, desse total, 27 desenvolvidos na Universidade Federal do Rio Grande, 88 na Universidade Federal do Rio Grande do Sul e 13 na Universidade Federal do Pampa.

A próxima etapa considerada no mapeamento é a etapa de *classificação/organização* (Biembengut, 2008), que enfatiza a importância de identificar os pontos necessários para o desenvolvimento da pesquisa. Assim, após a identificação dos trabalhos, realizou-se uma análise individual, destacando o título, a autoria e o ano de defesa, além da leitura dos resumos para observar outros elementos que permitissem conhecer com mais detalhes cada uma das pesquisas. Na sequência, optou-se por realizar a análise a partir da elaboração de categorias que foram construídas com base nas temáticas presentes nos trabalhos. A nomeação das categorias foi feita conforme o assunto principal presente em cada TCC.

A seguir, na Tabela 1, são apresentadas as categorias seguidas do número de trabalhos.

**Tabela 1.** *Organização dos TCC em categorias.*

| Categoria | Número de trabalhos |
|---|---|
| Práticas Pedagógicas | 37 |
| Intervenção Didática no Ensino Básico | 30 |
| Matemática Avançada | 25 |
| Questões Investigativas sobre o Ensino | 11 |
| Educação de Jovens e Adultos | 10 |
| Experiência Docente | 9 |
| Inclusão Social | 4 |
| História da Educação Matemática | 2 |
| **Total** | **128** |

**Fonte:** As autoras, 2021.

De acordo com os dados contidos na Tabela 1, observa-se que a partir dos 128 trabalhos mapeados foram definidas oito categorias, denominadas: Práticas Pedagógicas, Intervenção Didática no Ensino Básico, Matemática Avançada, Questões Investigativas sobre o Ensino, Educação de Jovens e Adultos, Experiência Docente, Inclusão Social e História da Educação Matemática. Além disso, a categoria Práticas Pedagógicas é a que possui maior abordagem, já a categoria História da Educação Matemática foi a menos explorada.

Dando continuidade ao mapeamento, a etapa chamada *reconhecimento/análise* busca ressaltar a necessidade de compreensão dos dados mapeados. A referida etapa será apresentada na próxima seção.

## Resultados

Após o movimento de agrupamento dos trabalhos por categorias, foi realizado um diagnóstico dos dados obtidos. Esse movimento de construção do mapeamento é conhecido como a etapa de *reconhecimento/análise*. Biembengut (2008) destaca que o processo de reconhecimento é essencial para a compreensão dos fatos, e que a partir dessa etapa é possível começar a entender sobre os assuntos presentes nas pesquisas mapeadas.

A categoria Práticas Pedagógicas envolve 37 trabalhos, sendo 6 realizados na Universidade Federal do Rio Grande nos anos de 2015, 2017, 2018 e 2019; 29 na Universidade Federal do Rio Grande do Sul entre os anos 2015 e 2019; e 2 na Universidade Federal do Pampa no ano de 2019. A referida categoria busca agrupar os TCC que abordam o desenvolvimento de uma atividade e sua aplicação em sala de aula com os estudantes. Ressalta-se que tais atividades não se concentram em um único encontro com os estudantes, sendo elas, em grande parte, desenvolvidas durante o estágio curricular obrigatório. Essa vivência contribui para a formação dos acadêmicos enquanto estudantes dos cursos de Licenciatura em Matemática, visto que a participação dos autores no planejamento e desenvolvimento de práticas pedagógicas promove a reflexão sobre o ser professor, e também propicia a construção e a vivência com uma proposta educativa que busca potencializar a aprendizagem.

As pesquisas mapeadas que compõem a categoria Práticas Pedagógicas exibem distintas metodologias de ensino e diversos conteúdos matemáticos. Os TCC apresentam atividades que fazem uso de tecnologias digitais, jogos didáticos, materiais lúdicos, material concreto e situações recorrentes do cotidiano. São discutidas situações sobre o ensino de Estatística, Álgebra e Análise Combinatória, a utilização do GeoGebra para conceitos de Funções Quadráticas e Elipse, o cálculo de área por meio da composição e decomposição de Figuras Planas, e conceitos de Geometria Espacial. Além desses conteúdos, também são propostas atividades que exploram outros assuntos, como, por exemplo, o futebol como base para o ensino-aprendizagem, o uso da bicicleta em um ambiente de aprendizagem de Modelagem Matemática, a utilização dos *plickers*, as potencialidades do uso do *Scratch* e outros assuntos relacionados aos ensinamentos de Matemática.

A categoria Intervenções Didáticas no Ensino Básico reúne 30 trabalhos, sendo 5 realizados na Universidade Federal do Rio Grande nos anos 2018 e 2019; 23 na Universidade Federal do Rio Grande do Sul nos anos 2016, 2017, 2018 e 2019; e 2 na Universidade Federal do Pampa no ano de 2016. A temática em discussão considera todos os TCC que buscam realizar mediações com estudantes para, a partir desse momento, ser produzido um trabalho com base no que foi vivenciado com eles. Vale afirmar que os trabalhos que consideram esse assunto têm o propósito de desenvolver ações pontuais realizadas em um único encontro com os estudantes e que servirão como base para serem analisadas e discutidas no TCC.

Os trabalhos analisados que pertencem à categoria Intervenções Didáticas no Ensino Básico indicam diversas discussões relacionadas às ações didáticas no espaço escolar. Nos TCC são consideradas situações que envolvem o uso de jogos como potencializadores da aprendizagem, a criação e o relato de atividades para o ensino de Matemática, a reflexão sobre o ato de avaliar os estudantes, o conhecimento sobre a contextualização, os processos de aprendizagem, o ensino em ambientes de aprendizagem e outros tópicos. Ademais, os assuntos presentes nas pesquisas referem-se a acontecimentos que buscam aprimorar e investigar situações que estão ligadas à aprendizagem da Matemática. Além disso, essas intervenções possuem o intuito de explorar como os estudantes percebem o ensino de conceitos de Matemática por meio de estratégias de aprendizagem descontraídas, como, por exemplo, rodas de conversas, oficinas, leitura de histórias e atividades com jogos.

A categoria Matemática Avançada é composta por 25 trabalhos, sendo 10 realizados na Universidade Federal do Rio Grande entre os anos 2015 e 2019; 8 na Universidade Federal do Rio Grande do Sul entre os anos 2015 e 2018; e 7 na Universidade Federal do Pampa nos anos 2016, 2017 e 2019. Na referida categoria são agrupados os trabalhos que exploram temas relacionados a conteúdos de Matemática trabalhados no Ensino Superior.

A escolha por esse assunto permite que o acadêmico se aproprie de inúmeros procedimentos utilizados durante a graduação. Além disso, esses estudos proporcionam ao estudante uma reflexão sobre conceitos já trabalhados no decorrer do curso e possibilitam o desenvolvimento de novas metodologias de ensino a partir do que já foi estudado.

Os TCC investigados que integram a categoria Matemática Avançada possuem relação com Álgebra Abstrata, Análise Numérica e outras disciplinas. Os licenciados em Matemática, autores dos trabalhos investigados, discutem em seus estudos casos relacionados à Teoria das Álgebras de Hopf, Ações Parciais de Grupos, Introdução a Anéis e Corpos, Teoria de Galois, Estudo das Equações Diferenciais Parciais, História do Quinto Postulado e suas implicações, Figuras Planas e o Mundo Isoperimétrico, Cálculo Fracionário na Modelagem da Memória e da Aprendizagem, Simulação Numérica das Equações de Navier-Stokes e Realidade Aumentada e Interfaces Naturais. Além disso, são desenvolvidas também atividades com graduandos sobre as propostas de formações para o ensino de conceitos presentes na grade curricular do curso.

A categoria Questões Investigativas sobre o Ensino engloba 11 trabalhos, sendo 1 realizado na Universidade Federal do Rio Grande no ano de 2017; e 10 na Universidade Federal do Rio Grande do Sul nos anos de 2015, 2018 e 2019. Na referida categoria são considerados os TCC que buscam explorar determinadas situações referentes às aprendizagens de Matemática fora do ambiente escolar. A escolha por pesquisar questões que não estão ligadas, diretamente, ao que é visto em sala de aula, mas que fazem parte do ensino de Matemática, proporciona ao educador em formação vivenciar experiências significativas que vão além do espaço da escola. Assim, estudar essas questões oportuniza ao licenciando explorar áreas da Licenciatura em Matemática que potencializem sua formação enquanto docente e suscitem novos conhecimentos que vão além do ensinar Matemática em sala de aula.

Os assuntos presentes nos trabalhos que pertencem à categoria Questões Investigativas sobre o Ensino referem-se a ensinar e aprender conceitos matemáticos, além de estudar as investigações sobre os diversos contextos relacionados à Matemática. Os trabalhos abordam temas sobre a Prova Brasil, os Números Fracionários, aprendizagens sobre a Educação Financeira, a relação da Matemática com a música, concepções do ensino de Estatística, o Cálculo e a transição do Ensino Médio para o Ensino Superior, o protagonismo no cenário de socioeducação, questões de Matemática do Exame Nacional do Ensino Médio e uma investigação nos registros de Matemática. Essas pesquisas são desenvolvidas por meio de análises de livros didáticos e documentos, mapeamentos em artigos, entrevistas com jovens, sequência didática aplicada em participantes de projetos e questionários respondidos por professores.

A categoria Educação de Jovens e Adultos é composta por 10 trabalhos, todos produzidos na Universidade Federal do Rio Grande do Sul entre os anos de 2015 e 2019. A referida categoria busca agrupar os TCC que discutem sobre a Educação de Jovens e Adultos (EJA) e investigam o papel da Matemática nessa modalidade de ensino. A EJA é um campo amplo para estudos e produção de conhecimento, por isso se faz necessário ampliar as investigações nessa área. Ademais, os estudos que envolvem a EJA são relevantes no meio científico, pois possibilitam um olhar atento para os conhecimentos que integram esse assunto. Essa modalidade de ensino tem suas especificidades e as investigações sobre ela perpassam contextos sociais, políticos e pedagógicos.

O principal tema presente nos TCC que pertencem à categoria Educação de Jovens e Adultos é a exploração do processo de ensino-aprendizagem de Matemática em distintos contextos, por meio das perspectivas apontadas pelos estudantes. São consideradas: questões sobre a Matemática na EJA e os processos de inserção escolar, reflexões sobre experiências realizadas no espaço da referida modalidade de ensino, rodas de conversa com o público-alvo, olhares sobre a EJA perante as situações do cotidiano e análise de alternativas para o ensino de Matemática.

A categoria Experiência Docente é composta por 9 trabalhos, sendo 3 realizados na Universidade Federal do Rio Grande no ano de 2017; 4 na Universidade Federal do Rio Grande do Sul entre os anos de 2015 e 2018; e 2 na Universidade Federal do Pampa nos anos de 2016 e 2017. A categoria em questão reúne pesquisas que discutem as vivências dos professores que já estão exercendo a docência em sala de aula. A abordagem desse assunto é importante, pois proporciona conhecimentos em relação à prática docente e ainda revela a realidade do professor, seus anseios, angústias e a vontade de promover a diferença na vida dos estudantes. Além disso, essa temática aponta a relevância da discussão, ainda no âmbito da graduação, de temas relacionados com a realidade do futuro campo profissional do estudante em formação.

Os trabalhos analisados que compõem a categoria Experiência Docente referem-se às ações dos professores de Matemática ao exercer a docência, suas vivências e concepções sobre o ser professor nos dias de hoje. São considerados pelos autores, situações que envolvem investigações sobre o Tecnostress, vivências de mal-estar docente, perspectivas teórico-pedagógicas sobre o ato de ensinar, tecnologias educacionais na prática docente, questões referentes às perspectivas da formação de professores, motivos pelos quais é feita a escolha pela profissão de professor e aspectos que fazem referências a propostas curriculares no contexto escolar.

A categoria Inclusão Social envolve 4 trabalhos, sendo 2 realizados na Universidade Federal do Rio Grande nos anos de 2017 e 2019; e 2 na Universidade Federal do Rio Grande do Sul nos anos de 2016 e 2019. Os estudos inseridos nesta categoria abordam o ensino de Matemática na Educação Básica para estudantes com necessidades específicas. Embora esse tema tenha sido discutido nos espaços de formação, as práticas nos ambientes de ensino ainda são incipientes. Vale ressaltar que um assunto tão desafiador como a Inclusão Social precisa ser ainda muito explorado e trabalhado, não somente em cursos de graduação como também nos cursos de formação de professores, de modo geral.

Os TCC que pertencem à categoria Inclusão Social discutem como a inclusão pode ser trabalhada nas aulas de Matemática com estudantes que possuem deficiência visual e Transtorno do Espectro Autista (TEA). Três trabalhos que compõem esse assunto apresentam como objetivos a promoção de reflexões sobre o ensinar Matemática para deficientes visuais e também como esses estudantes construíram seus conhecimentos matemáticos. O outro estudo presente neste tema buscou compreender de que maneira ocorre o ensino de Matemática para estudantes com TEA e como a inclusão pode ser trabalhada em sala de aula para que o estudante possa dispor dos mesmos recursos e atividades educacionais que os outros colegas de sala. Assim, essas pesquisas apresentam estratégias de ensino que consideram o desenvolvimento, a criação e a ampliação de instrumentos pedagógicos que pertencem ao universo da inclusão escolar.

Por fim, a categoria História da Educação Matemática é composta apenas por 2 trabalhos realizados na Universidade Federal do Rio Grande do Sul nos anos de 2018 e 2019. A referida categoria busca agrupar os TCC que desejam investigar as diversas práticas matemáticas ao longo dos anos. Essa abordagem explora os caminhos que a Educação Matemática percorreu durante um extenso período, possibilitando ao pesquisador contar histórias que fazem parte do passado, contribuindo para sua formação e, também, para a formação de outros professores.

Os assuntos presentes nos estudos que compõem essa última categoria são referentes às histórias relacionadas ao Laboratório de Matemática do Instituto de Educação General Flores da Cunha e à reconstrução dos traços de aulas de Matemática em tempos passados. Um dos trabalhos tem o objetivo de investigar sobre o significado do referido Laboratório de Matemática, que é uma escola centenária e patrimônio histórico do Rio Grande do Sul. Já na outra pesquisa, o autor tem como foco a análise das aulas de Matemática de um colégio nos anos de 1960, e apresenta como ponto de partida do estudo uma análise em cadernos escolares antigos.

Diante da discussão sobre os trabalhos investigados, constata-se que a presente pesquisa trata sobre as contribuições que os estudantes dos cursos sinalizam durante a elaboração dos TCC. Além disso, quando apresentado o panorama sobre os trabalhos que emergiram durante o mapeamento a partir das oito categorias, observa-se que são diversos os assuntos escolhidos pelos estudantes. Nesse sentido, o ato de mapear os TCC permite que seja identificada a dimensão das produções acadêmicas realizadas no período de 2015 a 2019 nas universidades brasileiras consideradas.

## Conclusões

A fim de conhecer os assuntos abordados nos TCC produzidos por futuros professores de Matemática, a presente pesquisa teve como objetivo descrever um mapeamento de TCC desenvolvidos nos cursos de Licenciatura em Matemática de universidades federais com sede no estado Rio Grande do Sul, Brasil. Foi feita a leitura do resumo de cada trabalho e, em concordância com as ideias que surgiram, foi realizado um agrupamento que deu origem a oito categorias, elaboradas conforme as temáticas presentes nos estudos. As categorias identificadas foram: Práticas

Pedagógicas, Intervenções Didáticas no Ensino Básico, Matemática Avançada, Questões Investigativas sobre o Ensino, Educação de Jovens e Adultos, Experiência Docente, Inclusão Social e História da Educação Matemática.

Ao agrupar os trabalhos nas suas respectivas categorias, verifica-se que: a categoria Práticas Pedagógicas apresenta o maior número de estudos e inclui trabalhos das três universidades pesquisadas; as categorias Intervenções Didáticas no Ensino Básico, Matemática Avançada e Experiência Docente também são compostas por trabalhos elaborados em todas as universidades participantes; as categorias Questões Investigativas sobre o Ensino e Inclusão Social possuem trabalhos com autoria de estudantes das instituições Universidade Federal do Rio Grande e Universidade Federal do Rio Grande do Sul; as categorias Educação de Jovens e Adultos e História da Educação Matemática são constituídas apenas por trabalhos de estudantes da Universidade Federal do Rio Grande do Sul; a categoria História da Educação Matemática é a que possui o menor número de TCC.

Além das considerações recentemente citadas, ao analisar os assuntos abordados foi possível perceber a presença de temas que são importantes para a formação do futuro professor, mas que às vezes, por algum determinado motivo, são pouco explorados durante a graduação. Vale destacar também que os alunos-autores apresentaram trabalhos sobre diferentes temáticas e contextos.

De maneira geral, pesquisa em discussão aponta resultados que reforçam o fato de o TCC ser um componente curricular que potencializa a formação acadêmica, uma vez que ao pesquisar sobre a temática escolhida, o estudante depara-se com diferentes informações, ampliando seus conhecimentos. Ademais, com esta investigação foi possível compreender o que vem sendo pesquisado, bem como as aproximações e os afastamentos entre os diferentes trabalhos mapeados.

Assim, com os resultados obtidos, constata-se que o mapeamento possibilitou conhecer as questões consideradas pelos estudantes na elaboração de seus trabalhos. Além disso, o mapa apresenta um panorama da produção científica nos cursos de Licenciatura em Matemática das instituições brasileiras participantes e evidencia as dimensões que têm sido enfatizadas pelos estudantes no desenvolvimento dos TCC. Portanto, a presente pesquisa auxilia o avanço das produções científicas voltadas aos trabalhos de conclusão e possibilita entender as contribuições, para o âmbito da Matemática, que os estudos realizados pelos graduandos dos cursos de Licenciatura em Matemática exibem nos anos de 2015 a 2019.

**Agradecimentos:** À Universidade Federal do Rio Grande – FURG, Brasil, pela formação recebida.

## Referências bibliográficas

Angelo, C. B. (2014). *Cenário da produção acadêmica em história da matemática no ensino de matemática: uma análise reflexiva das teses e dissertações (1990-2010).* Tese de doutorado em Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Brasil.

Brasil. Lei nº 1.302/2001. (2001). *Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura.* Brasil.

Biembengut, M. S. (2008). *Mapeamento na Pesquisa Educacional.* Rio de Janeiro: Ciência Moderna.

Fernandes, R. C. A. (2009). *Tendências da pesquisa acadêmica sobre o ensino de ciências nas séries iniciais da Escolarização (1972-2005).* Disponível em: http://repositorio.unicamp.br/bitstream/REPOSIP/251669/1/Fernandes_RebecaChiacchioAzevedo_M.pdf. Acesso em: 01 dez. 2021.

Fiorentini, D., Passos, C. L. y Lima, R. C. (2016). (Org.). *Mapeamento da pesquisa acadêmica brasileira sobre o professor que ensina Matemática:* período 2001 – 2012. Campinas, SP: FE/UNICAMP.

Gerhardt, T. E. y Silveira, D. T. (2009). *Métodos de pesquisa.* Porto Alegre: Editora da UFRGS. Brasil.

Moraes, R. y Galiazzi, M. C. (2007). *Análise Textual Discursiva.* Ijuí: Editora da Unijuí. Brasil.

Pereira, A. A. C. y Silva, M. L. R. (2011). *O trabalho de conclusão de curso: constructo epistemológico no currículo formação, valor e importância.* Laboratório de Pesquisa Multimeios, Salvador. Brasil.

Perentelli, L. F. (2008). *A prática como componente curricular: um estudo em cursos de licenciatura em matemática.* Dissertação de mestrado em Educação, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Brasil.

Santana, K. (2019). *Mapeamento dos Trabalhos de Conclusão de Curso na Licenciatura em Química:* uma análise documental das produções acadêmicas. Amargosa: UFRB. Brasil.

Silva, D. B. (2020). *Trabalhos de Conclusão de Curso:* um olhar para as produções de um componente curricular do curso de Licenciatura em Matemática - Período de 2012 a 2019. Unijuí. Brasil.

Teixeira, C. G. (2016). *Mapeamento dos trabalhos de conclusão de curso de Licenciatura em Educação Física na UFPEL.* Dissertação de Mestrado em Educação Física, Universidade Federal de Pelotas. Brasil.

Veiga, I. P. A., Lemos, M. E. P. y Garbin, N. (2010). Trabalho de conclusão de curso: tempo-espaço formativo. *Universitas Humanas*, v. 7, n. 1, p. 29-53.

Vizzotto, P., Mackedanz, L. y Miranda, A. (2017). Física Aplicada ao Trânsito: uma revisão de literatura. *Revista Thema,* v. 14, n. 1, p. 137-163. Disponível em: http://revistathema.ifsul.edu.br/index.php/thema/article/view/426. Acesso em: 2 dez. 2021

# O ENSINO DE MATEMÁTICA PRESENTE EM UM LIVRO DIDÁTICO DA EDUCAÇÃO INFANTIL

# MATHEMATICS TEACHING IN AN EARLY CHILDHOOD EDUCATION DIDACTIC TEXTBOOK

**Ana Paula Bolsan, Sagrilo Silveira, Edvonete Souza de Alencar, Marcus Vinicius da Costa**
**Universidade Federal da Grande Dourados UFGD. (Brasil), Universidade Federal da Grande Dourados UFGD. (Brasil), Universidade Estadual do Mato Grosso do Sul UEMS. (Brasil)**
anapaulabsagrilo@hotmail.com, edvonete.s.alencar@hotmail.com, promarcusviniciusdacosta@hotmail.com

**Resumo**:
Este trabalho tem o objetivo de apresentar como autores didáticos e editores de um dos livros do Programa Nacional do Livro Didático de 2019 descrevem algumas práticas pedagógicas de ensino de matemática para os professores da Educação Infantil. Para tanto realizamos uma pesquisa qualitativa do tipo documental. Diante disso, foram eleitas para esta pesquisa as unidades que tratam especificamente da área matemática, são elas: *Contar e registrar* e *No mundo dos números*. Logo, com os resultados alcançados conclui-se que o livro tenta descontruir a ideia de um ensino de matemática mecânico e sem sentido, mas não explora tantos conteúdos matemáticos como poderia e, ainda se verificou que ele contempla alguns conhecimentos do *MathematicsTeachers' SpecializedKnowledge*, assim tornando a formação dos educadores mais significativa, porém há algumas limitações. Nesse sentido é importante haver investigações com esse tipo de material.

**Palavras-chave**: matemática, ensino, educação infantil, livro, formação de professores

**Abstract**:
This paper aims to present how didactic authors and editors of one of the books of the National Program of the Didactic Textbook of 2019 describe some pedagogical practices of mathematics teaching for Early Childhood Education teachers. Furthermore, we carried out a qualitative research of documentary type. Thus, we chose the units that specifically deal with the area of Mathematics, namely: *Counting and recording* and *In the world of numbers*. Then, based on the results achieved, we conclude that the book in question attempts to deconstruct the idea of a mechanical and meaningless teaching of mathematics, but it does not explore as many mathematical contents as it could. We also verified that it includes some knowledge from Mathematics Teachers' Specialized Knowledge, making the training of educators more meaningful, however, with some limitations. In this sense, it is important to carry out investigations with this type of material.

**Keywords**: mathematics, teaching, early childhood education, book, teacher training

## Introdução

Mesmo diante de vários avanços tecnológicos, o sistema educacional brasileiro vem aderindo cada vez mais os livros como recurso para os professores utilizarem na organização de seu trabalho, pois desde o ano de 2019, a partir do Programa Nacional do Livro e do Material Didático – PNLD, esse tipo de material foi inserido na primeira etapa da Educação Básica das escolas públicas. Com esse advento, os livros passaram a contribuir com a formação dos professores da Educação Infantil. E, essa formação abrange a área matemática, a qual deve "[...] visar à investigação, à resolução de problemas, às aplicações, assim como uma análise história, sociológica e política do desenvolvimento da disciplina" (D'Ambrosio, 1993, p. 39), pois mesmo se tratando de educadores de crianças pequenas, os quais não são formados especificamente em matemática, é necessário que eles compreendam o ensino da matemática com essa perspectiva.

Logo, para compreendermos como um dos livros do Professor da Educação Infantil pertencente ao PNLD do ano de 2019 é capaz de contribuir com a formação dos professores e, consequentemente, com o ensino de matemática, levantamos as seguintes questões: o livro pode ser um aliado dos educadores que pretendem ensinar matemática para os pequenos que estão na creche e na pré-escola? O livro do Professor da Educação Infantil contribui para um ensino de matemática lúdico, criativo e significativo?

Nessa perspectiva, este artigo tem como objetivo apresentar como autores didáticos e editores de um dos livros do PNLD de 2019, mais especificamente do livro *Aprender com a criança: experiência e conhecimento* descrevem algumas práticas pedagógicas de ensino de matemática para os professores da Educação.

O recorte temporal compreende o ano de 2019, porque foi nessa data que o PNLD passou a produzir e distribuir livros para a primeira etapa da educação básica brasileira, a Educação Infantil. Visto que, antes desse período, o PNLD somente produzia e distribuía esse tipo de material para o Ensino Fundamental, o qual abrange do primeiro ao nono ano e, para o Ensino Médio, que corresponde do primeiro ao terceiro ano.

Para tanto, este estudo é relevante, porque abarca um material novo no contexto educacional e que viabiliza lançar um olhar analítico, crítico e reflexivo sobre como o ensino de matemática para o público da Educação Infantil pode acontecer com base no que propõe um dos objetos mais presentes nas instituições educacionais, o livro. Ainda, o tema abordado é pertinente, porque há poucos estudos sobre esses materiais, principalmente quando se trata do ensino da disciplina de matemática.

Utilizamos como perspectiva teórica para sustentar essa investigação o estudo denominado *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge* (MTSK), desenvolvido por Carrilo, Climent, Contreras e Muñoz-Catalán (2013). Optamos por esse referencial, porque ele "assume um foco analítico [...]" (Carrillo-Yañez, Climent, Montes, Contreras, Medrano, Ávila, Vasco, Rojas, Flores, González, Ribeiro, & Muñoz-Catalán, 2018, p. 4) e devido ele apresentar um conjunto de subdomínios que envolvem os saberes que os professores de matemática devem se apropriar para exercer sua profissão de maneira eficaz.

Deste modo, a pesquisa é qualitativa, pois para realizá-la foi utilizado o processo de redução, apresentação e conclusão/verificação de dados, etapas que são destacadas por Miles e Huberman (1994) em uma obra que versa sobre estudo qualitativo (Gil, 2008). Ademais, esta escrita é do tipo documental, porque o material ainda não passou por uma análise ou, se passou, pode ser reorganizado de acordo com as finalidades da pesquisa (Gil, 2008).

Diante do exposto, para apresentar essas discussões, este artigo, além de contar com a introdução, foi organizado em outras três seções: A primeira, *Algumas notas do nosso referencial teórico: MTSK*, descreve, de maneira sucinta, a origem e constituição do modelo teórico MTSK. A segunda, *Percurso metodológico*, discorre o tipo de metodologia adotada e a trajetória percorrida para realizar a análise do livro. A terceira*, Análise das unidades: Contar e registrar* e *No mundo dos números*, expõe a análise dos fragmentos do livro que elegemos para concretização deste estudo. A quarta, *Resultados*, como o próprio nome diz, tece alguns resultados levantados durante as análises. E, por último, são descritas algumas considerações finais sobre os resultados alcançados.

**Algumas notas do nosso referencial teórico: MTSK**

O MTSK é um modelo teórico que emergiu a partir da influência de outros estudos que já vinham acontecendo e que tratavam dos conhecimentos necessários para os professores. Entre esses estudos se destaca o de Shulman (1986), sendo que:

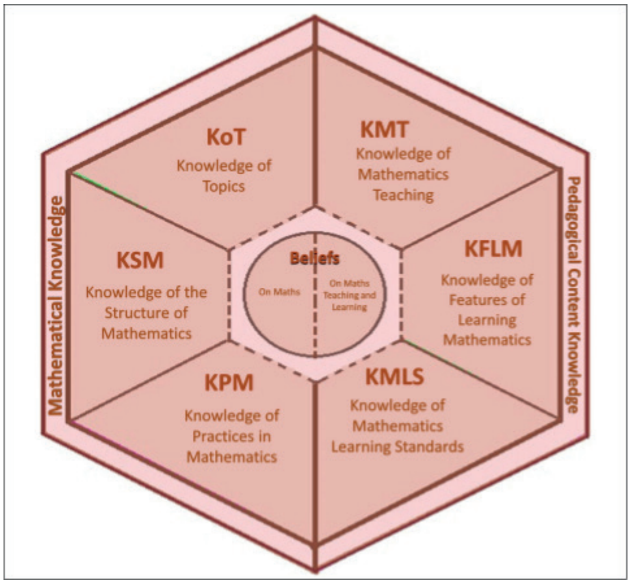
> Resumidamente, as pesquisas e publicações de Lee Shulman envolvem temas como processo ensino-aprendizagem, formação de professores, base dos conhecimentos dos professores, educação médica, a instrução psicológica no ensino de ciências, matemática, e medicina, sobre a lógica da pesquisa educacional e a qualidade do ensino nas instituições de educação superior. Todos seus estudos têm, ao longo dos anos, enfatizado a importância do ensino enquanto propriedade comunitária, com papel fundamental das *scholarships* do ensino como fator essencial de mudança de cultura no ensino superior (Gaia, Cesário, & Tancredi, 2007, p. 146).

Conforme o exposto, devido Shulman (1986) tratar de uma variedade de aspectos relevantes direcionados a educação, acabou tornando-se referência para o contexto educacional. Porém, para a constituição do MTSK a maior contribuição desse estudioso foi os conhecimentos por ele organizado, os quais são classificados em: Conhecimento da Matéria (SMK), Conhecimento do Conteúdo Pedagógico (PCK) e Conhecimentos Curriculares (CK). Esses três conhecimentos do "[...] modelo proposto por Shulman descreve, de modo geral, o conhecimento necessário para ensinar, porém sem focalizar uma determinada área como Física, Geografia ou Matemática que é o nosso foco" (Junior, & Wielewski, 2017, p. 128).

Então, a partir dessa organização de Shulman, uma pluralidade de outros trabalhos foram criados para conceituar os conhecimentos dos educadores. Dentro dessa enorme gama de estudos destacou-se e contribuiu significativamente para a edificação do MTSK o *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT) de Ball, Thames e Phelps (2008) que é "[...] um refinamento das categorias de Shulman [...]" (Junior, & Wielewski, 2017, p. 128) e está sistematizado da seguinte forma: domínio Conhecimento de Assunto (SMK) com suas subdivisões chamadas de Conhecimento de Conteúdo Comum (CCK), Conhecimento de Conteúdo Especializado (SCK) e Conhecimento de Conteúdo no Horizonte (HCK) e o domínio Conhecimento do Conteúdo Pedagógico (PCK) com suas subdivisões intituladas de Conhecimento de Conteúdo e Ensino (KCT), Conhecimento de Conteúdo e Alunos (KCS) e Conhecimento de Conteúdo e Currículo (KCC).

Entretanto, apesar de Ball et al. (2008) ter apresentado algumas melhoras em relação a modelos anteriores, alguns problemas foram detectados na sua sistematização e, como consequência, originou-se o modelo *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge* (MTSK), o qual foi elaborado pelo *Seminario de Didáctica de lá Matemática* (SIDM), da Universidade de Huelva, situada na Espanha e está configurado em dois domínios e seis subdomínios, sendo três destes para cada um dos domínios. A seguir demonstramos o hexágono que dispõe da representação gráfica do modelo MTSK e descrevemos brevemente cada um dos subdomínios com base em Montes, Contreras e Carrillo (2013); Flores- Medrano, Montes, Carrillo, Contreras, Muñoz-Catalán e Linán (2016).

**Figura 1.** *Hexágono do Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK).*




**Fonte:** Montes e Carrillo (2015, p.321).
**Nota:** Imagem retirada de Montes e Carrillo (2015)

Como mencionado anteriormente e como é perceptível observar na figura, o MTSK compõe dois domínios. O primeiro é chamado Conhecimento Matemático (MK) que está estruturado em três subdomínios "[...] que dão sentido ao conhecimento matemático do professor de matemática" (Flores-Medrano *et al.*, 2016, p. 5).

Logo, o primeiro subdomínio é o Conhecimento de tópicos (KOT). Este contempla conceitos fenomenológicos; significados e definições de conceitos; exemplos exclusivos dos temas que estão sendo discutidos e conteúdos disciplinares da área da matemática, os quais muitas vezes são vistos nos livros, manuais ou escritas de assuntos matemáticos.

O segundo subdomínio é o chamado de Conhecimento da Estrutura Matemática (KSM). Ele não trata dos conteúdos isoladamente, pois envolve o conhecimento acerca das relações existentes entre os tópicos matemáticos e a integração dos conteúdos; das ideias principais ou transversais de conteúdos distintos e da compreensão de conceitos avançados a partir dos elementares ou de conceitos elementares através de ferramentas mais avançadas.

Já, o terceiro subdomínio é intitulado de Conhecimento de Prática Matemática (KPM), o qual corresponde ao conhecimento de saber pensar em matemática e como o conhecimento é gerado; as diversas formas de conhecer, criar, definir, argumentar, fazer deduções, induções ou demonstrar a matemática. Logo se observa que abarca o conhecimento da prática matemática e não da prática de ensinar matemática; formas de proceder em matemática e não saber como usar procedimentos com objetos matemáticos.

Na sequência, há o segundo domínio que é denominado Conhecimento de Conteúdo Pedagógico (PCK). Este, assim como o anterior, organiza-se em três subdomínios. Esses subdomínios reconhecem o conhecimento do professor sobre o conteúdo como um artifício de aprendizagem, de ensino e, também, são os conhecimentos dos modelos de aprendizagem matemática.

Nesse sentido, o primeiro subdomínio do PCK é o Conhecimento de Ensino Matemático (KMT), que corresponde ao conhecimento das mais distintas estratégias adotadas pelos professores para apresentar o conteúdo; da capacidade dos recursos e materiais pedagógicos para a concretização das tarefas matemáticas e, ainda, inclui os exemplos ou modos de representação apropriados para cada um dos conteúdos. Convém destacar, que neste subdomínio, bem como no anterior, o conhecimento pode ter como suporte teorias que surgiram de pesquisas em educação matemática ou da própria reflexão da tarefa matemática realizada em aula.

Em seguida há o Conhecimento das Características de Aprendizagem da Matemática (KFLM), o qual contempla o conhecimento dos aspectos relacionados ao processo de entendimento e aprendizagem dos educandos sobre os mais variados conteúdos de matemática, assim envolve erros, dificuldades, potencialidades e obstáculos associados à aprendizagem e encontrados para cada um dos conceitos matemáticos. Ainda, convém destacar que esse conhecimento pode ser baseado nas teorias pessoais do professor ou ser algo institucionalizado.

Por fim há o Conhecimento dos Padrões de Aprendizagem da Matemática (KMLS), o qual se refere ao conhecimento que o educador deve ter sobre o que os discentes precisam aprender em um determinado momento, pois são os conhecimentos dos currículos institucionais, dos livros didáticos, produções que tratam de investigações da área e opiniões de professores especialistas.

Reconhecendo que esses conhecimentos trazem um significado muito valoroso para os estudos que envolvem o campo da matemática, passamos na seção seguinte a apresentar o caminho metodológico que adotamos para analisar o material.

## Percurso metodológico

Está é uma pesquisa de natureza qualitativa e de cunho documental. Refere-se à primeira, porque como bem pontua Menezes, Duarte, Carvalho e Souza (2019):

> [...] numa pesquisa de cunho qualitativo, a interpretação do pesquisador apresenta uma importância fundamental. Afinal, não se trata apenas de um conjunto de informações fechadas cujo valor numérico é o único aspecto a ser levado em consideração, devido à própria natureza do fenômeno investigado. (p. 29)

Para tanto, ao fazer a investigação do objeto aqui estudo, Livro do Professor de Educação Infantil, procuramos analisar e interpretar os dados que se encaixam como relevantes para esta escrita, assim, não ficando restrito ao ato de quantificar as informações.

No entanto, como dito antes, este trabalho também trata de uma vertente documental, pelo fato de que

> Embora este tipo de pesquisa seja semelhante à bibliográfica, difere dela por fazer uso de materiais ainda não estudados. Devido a isso, o pesquisador tem a vantagem de ir direto à fonte, sem que haja a possibilidade de reproduzir algum erro ou análise precipitada [...] (Menezes et al., 2019, p.38)

Em vista disso, o livro optado para compor esse trabalho ainda não foi investigado com o mesmo olhar que esse artigo lançou sobre ele, pois até encontra-se alguns estudos que o utilizaram como objeto de pesquisa, no entanto, esses trabalhos apresentam uma abordagem diferenciada.

Deste modo, para concretizar esta pesquisa, dos quatro livros do PNLD do ano de 2019 produzidos para os professores da Educação Infantil - *Práticas comentadas para inspirar: formação do professor de educação infantil; Cadê? Achou!: educar, cuidar e brincar na ação pedagógica da Creche; Pé de brincadeira: pré-escola* e *Aprender com a criança: experiência e* conhecimento – optamos em analisar este último, o qual pertence à editora Autêntica e é das autoras Monique Deheinzelin, Priscila Monteiro e Ana Flávia Castanho.

Selecionamos este livro, porque ele é o único destinado a todo o público da Educação Infantil (creche e pré-escola), em outras palavras, compreende as crianças de 0 a 5 anos e 11 meses. Ainda, optou-se por esse material, porque ele apresenta duas unidades, uma no capítulo dois e outra no capítulo três, em que o ensino de Matemática está explícito. Isso significa que no capítulo dois há o momento *Contar e registrar* e no capítulo três o momento *No mundo dos números*.

Desta forma, para concretizar a análise dos dados, primeiramente, foi realizada uma leitura integral do livro. Posteriormente, foram selecionadas para análise as unidades que tratam especificamente da área matemática. Na sequência foram averiguadas, detalhadamente, todas as tarefas e itens que compreendem o recorte do estudo e, a partir dessa investigação foram eleitos para esta pesquisa os seguintes tópicos que compõem o livro e encontram-se nos fragmentos escolhidos: as partes que descrevem as tarefas; os ícones de materiais gráficos, que estabelecem uma ligação entre o conteúdo e o material gráfico ou de avaliação disponíveis no material digital; os textos que trazem temas fundamentais para a Educação Infantil, referencias de autores e reflexões sobre a prática e, por último, os quadros que discorrem sobre as atividades propostas e os objetivos de desenvolvimento e aprendizagem pertencentes a cada um dos cinco campos de experiência da BNCC. Já, os demais itens que organizam o livro não são colocados no rol desta investigação, porque não constam em ambas as partes que recortamos para analisar nesta pesquisa.

***Análise das unidades: Contar e registrar e No mundo dos números***

Tomando como referência a sucinta apresentação do referencial teórico elegido para conduzir esta pesquisa e da metodologia adotada, a seguir, será demonstrada uma análise de algumas práticas pedagógicas de ensino de matemática descritas no livro *Aprender com a criança: experiência e conhecimento.*

Ao verificar as atividades discorridas nos dois subtítulos, um do capítulo dois, que é denominado *Contar e registrar* e outro do capítulo três, que é intitulado *No mundo dos números*, constatou-se a presença da descrição de seis tarefas. Sendo que, no primeiro, estão as seguintes propostas: *Conhecimento prévio, Distribuição de materiais* e *Conferir os objetos de uso comum.* Já, no segundo encontram-se: *Recitar e contar, Jogos de percurso* e *Receitas.*

Deste modo, na atividade *Conhecimento prévio* é descrito que toda criança possui uma bagagem de conhecimentos, por isso elas devem ser conduzidas a troca de saberes entre seus pares e reflexão sobre esses saberes compartilhados. Nesse sentido, os momentos de rotina como, por exemplo, contar quantas crianças estão na sala de aula para distribuir os materiais, são ótimas oportunidades, pois os educadores podem viabilizar situações-problemas para que aconteça o diálogo e a contagem e registro de quantidades.

Na atividade *Distribuição de materiais* é discorrido que uma diversidade de ações cotidianas envolve a ideia de distribuição de materiais como, por exemplo, colocar um pincel para cada pote de tinta. Logo, os docentes podem fazer com que procedimentos como esse desencadeiem situações-problemas significativas e desenvolvam nas crianças a habilidade de contagem.

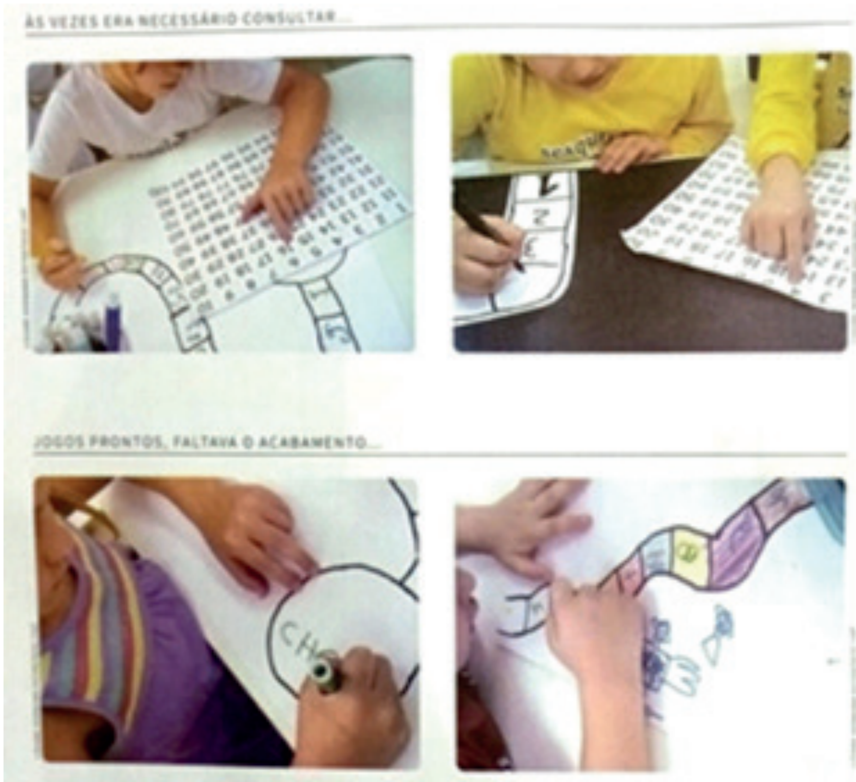
No momento *Conferir objetos de uso comum* destaca-se que a prática do dia a dia de verificar e guardar materiais que são utilizados com frequência como, por exemplo, brinquedos e tesouras, são situações valorosas que envolvem contagem e registro e, que os professores podem usar para ensinar de maneira significativa os pequenos.

Já, na primeira tarefa da unidade seguinte, *Recitar e contar*, é exposto que o ato de contar e recitar estão presentes em diversas culturas e que são detentores de sentidos distinto. Essa distinção acontece, porque a primeira significa falar os números em sequência sem estar em uma situação de numeração e a segunda é fazer uso da série numérica em ocasiões de numeração. Para tanto, uma pluralidade de ações pedagógicas podem explorar esses conceitos matemáticos como, por exemplo, brincar de esconde-esconde e recitar uma parlenda.

Posteriormente, no momento *Jogos de percurso*, é apresentada uma sequência didática em que os educadores podem selecionar um jogo ou propor aos seus alunos a confecção de um jogo de tabuleiro com pistas. A partir desses recursos é possível aprimorar a aprendizagem matemática das crianças com intervenções, desafios e estratégias. Ainda, após a concretização dos jogos os pequenos podem trocar ideias e estratégias adotadas durante a atividade, o que amplia seus saberes em relação ao reconhecimento da grafia dos números, da ideia de antecessor e sucessor, de quantificação, proporção e outras.

Na última ação educativa investigada neste trabalho, a intitulada *Receitas,* é mencionado que textos instrucionais como, receita, permitem aprendizagens do uso de números em um contexto de medidas. Diante disso, há uma didática em que os professores inicialmente devem conversar com as crianças sobre os textos que tratam de receitas, na sequência, explorar esse gênero textual observando seu título, páginas, diagramação e ilustrações e, por último, possibilitar as crianças um momento em que poderão preparar uma receita juntamente com os colegas. Para demonstrar, segue abaixo, uma das atividades que descrevemos:

**Figura 2.** *Imagem da tarefa sobre Confecção de jogos de percurso da unidade 'No mundo dos números'.*




**Fonte:** Livro Aprender com a criança: experiência e conhecimento 2018.
**Nota:** Imagem do exemplo retirado de Deheinzelin, Monteiro e Castanho (2018)

Logo, ao fazer esse estudo, essas atividades que envolvem conteúdos matemáticos evidenciam que o Conhecimento de Ensino de Matemática (KMT) está presente, pois em todas elas são relatados exemplos de estratégias para desenvolver habilidades matemáticas nos pequenos. Ademais, em algumas tarefas vê-se a presença do Conhecimento das Características da Aprendizagem Matemática (KFLM), essa afirmação acontece, porque ao fazer uma sondagem das crianças sobre o que sabem do tema a ser estudado ou dialogar com os pequenos durante a concretização das propostas lançadas, o educador consegue levantar o que elas já dominam sobre o assunto ou quais são as dificuldades que possuem. O Conhecimento de Tópicos (KOT) também é encontrado em algumas dessas atividades, pois a tarefa *Recitar e Contar* trás os conceitos desses dois procedimentos, assim demonstrando que o conteúdo contagem e recitação dos numerais é algo que se almeja que as crianças aprendam de maneira mais profunda. Porém, como estamos falando da relação de dois conteúdos matemáticos, o Conhecimento da Estrutura Matemática (KSM) também está presente.

Prosseguindo o estudo, ao verificar o item *Material Gráfico*, na unidade *Contar e Registrar* há um ícone que trata da uma resenha de livro e outro da resenha de um filme. Já, na unidade *No mundo dos números* há um ícone que aborda a respeito de dígitos, ábaco e algarismo e, o segundo e o terceiro falam de artigos, dado que, aquele versa sobre jogos de percurso e este a cerca da criança e o conhecimento matemático. Para demonstrar, selecionamos o seguinte ícone:

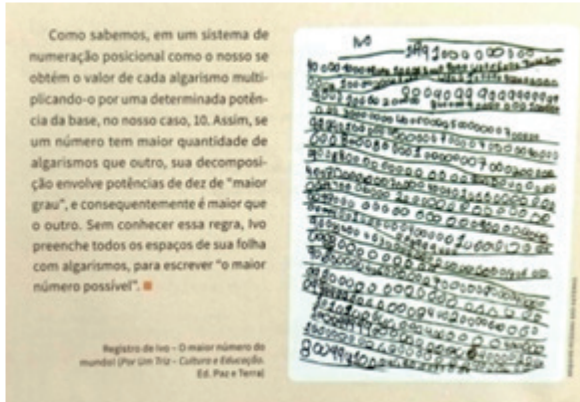
**Figura 3.** *Imagem de um dos ícones de materiais gráficos que consta na unidade 'Contar e registrar'*


**Fonte:** Livro Aprender com a criança: experiência e conhecimento 2018.
**Nota:** Imagem do exemplo retirado de Deheinzelin et al. (2018)

Assim, diante dessa análise, constata-se que novamente o Conhecimento de Ensino de Matemática (KMT) está manifesto nesse item. Tal afirmação ocorre, pelo fato dele ser um conhecimento que advém das mais variadas fontes como das publicações de pesquisas matemáticas. Ademais, o Conhecimento dos Padrões de Aprendizagem em Matemática (KMLS), também está em voga, pois ele contempla as produções de investigações da área matemática.

Para além do exposto, as unidades possuem o item que versa sobre textos que destacam temas relevantes para a Educação Infantil. Dado que, na parte do *Contar e registrar*, há um desses textos, o qual descreve uma ação em que as crianças foram conduzidas a criar etiquetas com a quantidade de tesouras que havia na sala de aula. Na outra unidade, *No mundo dos números,* está presente seis desses textos, um trata sobre o maior número do mundo, o qual demonstra que um docente propôs as crianças uma pluralidade de tarefas com números e que elas escrevessem o maior número que pudesse e comparassem com a de um colega; outro texto fala sobre o ato de enumerar e quantificar e trás exemplos; o próximo texto transcreve um diálogo do documentário *Ser e ter* para os educadores refletirem como podem agir na sala de aula, por último, há três textos, os quais trazem receitas de pães, as quais podem ser aplicadas nas práticas educativas. Para demonstrar destacamos o seguinte fragmento de um dos textos:

**Figura 4.** *Imagem de um fragmento de um dos textos da unidade No mundo dos números.*



Como sabemos, em um sistema de numeração posicional como o nosso se obtém o valor de cada algarismo multiplicando-o por uma determinada potência da base, no nosso caso, 10. Assim, se um número tem maior quantidade de algarismos que outro, sua decomposição envolve potências de dez de "maior grau", e consequentemente é maior que o outro. Sem conhecer essa regra, Ivo preenche todos os espaços de sua folha com algarismos, para escrever "o maior número possível".

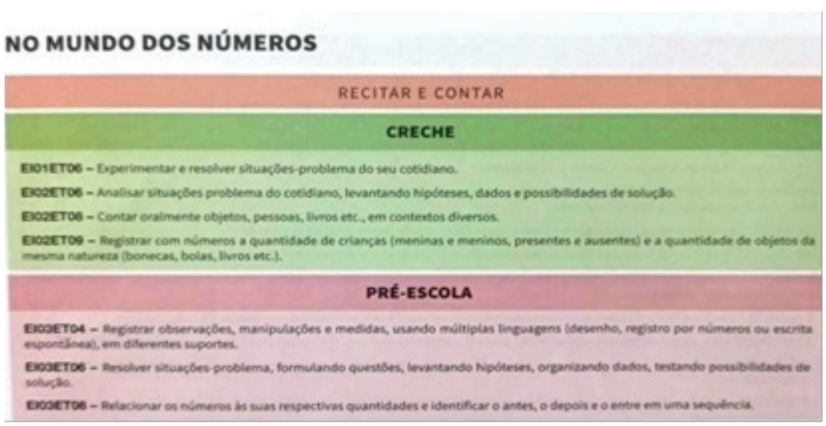
Registro de Ivo – O maior número do mundo! (Por Um Triz – Cultura e Educação. Ed. Paz e Terra)

**Fonte:** Livro Aprender com a criança: experiência e conhecimento 2018.
**Nota:** Imagem do exemplo retirado de Deheinzelin et al. (2018)

Ao averiguarmos esse item, pela terceira vez o Conhecimento de Ensino de Matemática (KMT) se destaca. Verifica-se esse conhecimento, pelo motivo de que em todos os textos são relatados exemplos de como o ensino pode ser realizado, pois é discorrido como uma educadora conduziu a construção de etiquetas para representar a quantidade de objetos; como um professor realizou um jogo em que as crianças deveriam escrever o maior número que pudesse; como os docentes podem colocar as crianças em situações aritmetizáveis; como um diálogo abre portas para ampliar o universo de recitação da sequência numérica e como as receitas são capazes de facilitar a aprendizagem de matemática.

Por fim, as duas unidades trazem um quadro que possui uma avaliação minuciosa dos temas e atividades propostas nos capítulos de acordo com os objetivos de desenvolvimento e aprendizagem em cada um dos cinco campos de experiência da creche e pré-escola.

**Figura 5.** *Imagem de um dos quadros da unidade No mundo dos números.*



NO MUNDO DOS NÚMEROS

| RECITAR E CONTAR |
| --- |
| **CRECHE** |
| **EI01ET06** – Experimentar e resolver situações-problema do seu cotidiano. |
| **EI02ET06** – Analisar situações problema do cotidiano, levantando hipóteses, dados e possibilidades de solução. |
| **EI02ET08** – Contar oralmente objetos, pessoas, livros etc., em contextos diversos. |
| **EI02ET09** – Registrar com números a quantidade de crianças (meninas e meninos, presentes e ausentes) e a quantidade de objetos da mesma natureza (bonecas, bolas, livros etc.). |
| **PRÉ-ESCOLA** |
| **EI03ET04** – Registrar observações, manipulações e medidas, usando múltiplas linguagens (desenho, registro por números ou escrita espontânea), em diferentes suportes. |
| **EI03ET06** – Resolver situações-problema, formulando questões, levantando hipóteses, organizando dados, testando possibilidades de solução. |
| **EI03ET08** – Relacionar os números às suas respectivas quantidades e identificar o antes, o depois e o entre em uma sequência. |

**Fonte:** Livro Aprender com a criança: experiência e conhecimento 2018.
**Nota:** Imagem do exemplo retirado de Deheinzelin et al. (2018)

Ao investigar essa parte do livro, visualiza-se a presença do Conhecimento dos Padrões de Aprendizagem em Matemática (KMLS), pois esse conhecimento contempla o currículo e nesses espaços está de maneira explicita a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), em outras palavras, está transcrito os códigos alfanuméricos e objetivos de aprendizagem que constam na BNCC que é o atual currículo que rege todo o sistema educacional brasileiro.

## Resultados

Com base no estudo apresentado na sessão anterior, é possível averiguar que dos dois domínios que constituem o MTSK foi o Conhecimento Didático do Conteúdo (PCK) que ganhou destaque. Já o Conhecimento Matemático (MK) foi apresentado, mas não contemplou todos os seus subdomínios e os que apareceram não tiveram tanta visibilidade quanto os do PCK.

Além disso, dos seis subdomínios que fazem parte do KMLS, foi o Conhecimento de Ensino de Matemática (KMT), Conhecimento das Características da Aprendizagem Matemática (KFLM) e o Conhecimento dos Padrões de Aprendizagem em Matemática (KMLS) que sobressaíram, pois ficou notável que o livro tem uma grande preocupação em descrever e demonstrar ações educativas para os professores refletirem sobre elas. Também, que ele tenta ao máximo demonstrar aos seus leitores que está fortemente embasado no currículo em vigor, a BNCC, pois todas as práticas pedagógicas descritas trazem os códigos alfanuméricos e o objetivo de aprendizagem que consta nesse documento legal. Ainda, demonstra, de maneira menos incisiva, que tenta por meio de algumas de suas propostas verificar qual é a compressão dos alunos sobre os assuntos matemáticos. No entanto, em relação ao Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KOT) e Conhecimento da Estrutura Matemática (KSM) eles constam no material, mas seu espeço é bem limitado e, o Conhecimento da Prática Matemática (KPM) não é trazida por esse material, situação que nos deixa inquietos, pois para haver um ensino de matemática ideal é necessário que seja lançado um olhar sobre esse tipo de conhecimento.

## Considerações finais

Ao finalizar este artigo, conseguimos atingir o objetivo que é apresentar como autores didáticos e editores de um dos livros do Programa Nacional do Livro e do Material Didático – PNLD – de 2019 descrevem algumas práticas pedagógicas de ensino de matemática para os professores da Educação Infantil. Para tanto, conclui-se que o livro tenta descontruir a ideia de um ensino de matemática mecânico e sem sentido, mas ainda não explora tantos conteúdos matemáticos como poderia, pois os que estão presentes, na maioria das vezes, já são pensados pelos professores e acabam não sendo novidade.

Ainda verificou-se que o livro contempla alguns conhecimentos do MTSK, assim tornando a formação dos educadores mais significativa. No entanto, ficou evidente uma limitação desses materiais, que é a inexistência do Conhecimento da Prática Matemática – KPM. Situação que coloca em destaque a falta de preocupação em estimular nos educadores da Educação Infantil o conteúdo matemático em si. E, infelizmente, essa postura, a qual deixa de lado esses conhecimentos, faz com que a prática pedagógica não aconteça da melhor maneira possível, visto que é crucial os professores de creche e pré-escola dominarem os conteúdos para saberem qual a melhor didática e os melhores recursos a serem aplicados.

Portanto, conclui-se que há necessidade de ocorrer investigações com esse tipo de material, uma vez que, ele exerce um papel significativo no fazer pedagógico, possui um papel formativo relevante para os educadores e pode abrir horizontes para novas pesquisas.

## Referências

Brasil (2017). Base Nacional Comum Curricular – BNCC: Educação Infantil e Ensino Fundamental. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica.

Carrillo-Yañez, J., Climent, L. C., Montes, M. A., Contreras, M. C., Medrano, E., Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., González, A., Ribeiro, M., & Muñoz-Catalán, M. C. (2018, julho). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education.* 1-18.

Carrillo, J., Climent, L. C., Contreras, M. C., & Muñoz- Catalán, M. C. (2013). Determining Specialised Knowledge For Mathematics Teaching. In: UBUZ, B.; HASER, C. *et al.* (Ed.). *VIII Congresso the European Society* *for Research in Mathematics Education (CERME 8).* Antalya, Turkey: Midlle East Technical University, Ankara, 2985-2994.

D'ambrosio, B. H. (1993). Formação de professores de matemática para o século XXI: o grande desafio. *Proposições* [online], 4(1), 35-41. https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php./proposic/article/view/8670626.

Flores-Medrano, E., Montes, M. A., Carrillo, J., Contreras, L. C., Muñoz-Catalán, M. C., & Liñán, M. M. (2016, abril). El Papel del MTSK como Modelo de Conocimiento del Profesor en las Interrelaciones entre los Espacios de Trabajo Matemático. *Bolema*, 30(54), 204-221.

Gaia, S., Cesário, M., & Tancredi, R. M. S. P. (2007, setembro). Formação profissional e pessoal: a trajetória de vida de Shulman e suas contribuições para o campo educacional. *Revista eletrônica de Educação*, 1(1), 142-155. https://www.reveduc.ufscar.br.

Gil, A. C. (2008). *Métodos e técnicas de pesquisa social* (6ª ed.). Atlas.

Junior, J. G. M., & Wielewski, J. G. M. (2017). Base de Conhecimento de Professores de Matemática: do Genérico ao Especializado. *Revista Ensino, Educação e Ciências Humanas*, 18(2), 126-133.

Menezes, A. H. N., Duarte, F. R., Carvalho, L. O. R., & Souza, T. E.S. (2019) *Metodologia Científica: teoria e aplicação na educação à distância*. Universidade Federal do Vale do São Francisco.

Montes, M. A., Contreras , L. C, & Carrillo, J. (2013). Conhecimento do Professor de Matemática: Abordagens para o MKT e do MTSK. In A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa, & N, Climent (Eds.). *Pesquisa em Educação Matemática XVII* (pp. 403-410). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Shulman, L.S. (1986, fevereiro). Those who understand. Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.

## Fonte consultada

Deheinzelin, M., Monteiro, P., & Castanho, A. F. (2018). *Aprender com a criança: experiência e conhecimento.* Autentica Editora.

VOL 36, NÚMERO 1, AÑO 2023

# MODELO PEDAGÓGICO PARA LA FORMACIÓN DE LOS DOCENTES DE MATEMÁTICAS DE LA EDUCACIÓN BÁSICA PRIMARIA, USANDO COMO HERRAMIENTA EL LABORATORIO DE MATEMÁTICAS

# PEDAGOGICAL MODEL FOR PRIMARY SCHOOL MATHEMATICS TEACHERS' TRAINING, BY USING THE MATHEMATICS LABORATORY AS A TOOL

**Alfonso Romero Huertas**
**Universidad Antonio Nariño. (Colombia)**
**romerohuertas78@gmail.com**

**Resumen**:
Como resultado de investigación realizada con docentes no licenciados en matemáticas, que atienden esta área en el nivel de educación básica primaria, se presenta en este artículo la construcción de un modelo pedagógico para la formación del docente en el área en mención. La investigación se ha centrado en la pregunta ¿cómo fomentar la formación en el conocimiento disciplinar y el conocimiento pedagógico del contenido, en el docente de la educación básica primaria en el área de matemáticas? Al respecto, se ha considerado pertinente la metodología investigación basada en diseño, dentro del enfoque cualitativo, para dirigir la propuesta y construir el modelo a medida que se avanzó en el desarrollo del proyecto.

**Palabras clave**: formación docente, laboratorio de matemáticas

**Abstract**:
As a result of a study carried out with teachers who do not have a degree in mathematics, and who deal with this area at the basic primary education level, this article presents the construction of a pedagogical model for teacher training in the area in question. The research has focused on the question: how to promote training in disciplinary knowledge and pedagogical knowledge of the content, in a basic primary education mathematics teacher? In this regard, the design-based research methodology has been considered relevant, within the qualitative approach, to direct the proposal and to build the model as the project development progressed.

**Keywords**: teacher training, mathematics laboratory

## Introducción

En Colombia se han implementado una variedad de iniciativas dirigidas a la formación docente, a través de programas que se han fortalecido significativamente en la última década, los cuales buscan fortalecer las competencias del docente en su práctica pedagógica, para mejorar el desempeño escolar de sus estudiantes. Sin embargo, estos programas aún no logran un impacto significativo en los aprendizajes de los estudiantes y en sus resultados de evaluaciones nacionales e internacionales. Luego, es evidente que el mejoramiento de la educación básica en Colombia requiere cambios significativos en la política y en la práctica. Los maestros, escuelas y colegios deben garantizar que los currículos, las evaluaciones y el tiempo que se invierte en los diferentes espacios académicos sean empleados de forma eficaz para facilitar el desarrollo de competencias.

Según estudios preliminares, en algunos países del mundo el laboratorio de matemáticas es una estrategia que ha impactado positivamente en la formación de estudiantes y docentes. Por ejemplo, según Bartolini Bussi y Maschietto (2006), en su *"Laboratorio de Máquinas Matemáticas (MMLab)",* en el Departamento de Matemáticas de Módena Italia, contiene una colección de instrumentos geométricos (máquinas matemáticas), reconstruidos con un objetivo didáctico, según el diseño descrito en textos históricos desde la Grecia clásica hasta el siglo XX. El MMLab trabaja tanto para la investigación didáctica como para la divulgación de las matemáticas. Este trabajo fue el punto de partida del proyecto *"Ciencias y Tecnología - Laboratorio de Matemáticas*" para la formación de profesores (2008-2013), en el que muchos profesores construyeron y propusieron sesiones de laboratorio con máquinas matemáticas para sus prácticas pedagógicas.

Por lo anterior y desde las demás investigaciones que se analizaron de diferentes partes del mundo, se indica que la formación docente debe contar con un enfoque más práctico que teórico a fin de preparar adecuadamente a los maestros; por lo tanto, se ha desarrollado el proyecto de investigación en esta línea, con el objetivo de consolidar un modelo para la formación de los docentes en ejercicio que atienden el área de matemáticas en el nivel de educación básica primaria, teniendo en cuenta que la gran mayoría de ellos no son licenciados en matemáticas y se ha evidenciado la falta de profundización en los diferentes componentes que estructuran el área, insuficiente para el desarrollo del pensamiento matemático en el primer y fundamental nivel de formación de los educandos.

Dentro de este proyecto se ha propuesto un sistema de actividades, cuidadosamente diseñadas para formar a los docentes en el conocimiento disciplinar y pedagógico del contenido en el área de matemáticas, teniendo como referencia las dificultades que presentan en el ejercicio de su práctica pedagógica, los aprendizajes de los estudiantes y sus desempeños en las pruebas de estado, en cada uno de los componentes que el Ministerio de Educación de Colombia establece a través de los referentes de calidad educativa para el área en mención.

## Marco Teórico

Se sitúa al lector en los aspectos teóricos que implican el propósito de la investigación.

### *¿Qué es un modelo pedagógico?*

Shulman, L (1987), Chávez, H.L. (2008), Kitchen y Petrarca (2016), definen un modelo pedagógico como una propuesta teórica que incluye conceptos de formación, de conocimiento disciplinar y pedagógico del contendido, principalmente; estos se encargan de organizar el currículo de acuerdo a fines y principios de la educación, y al cómo desarrollar la práctica pedagógica en coherencia con los referentes teóricos.

Por su parte, y centrados en las diferentes tradiciones de formación del profesorado en Estados Unidos, Liston y Zeichner (1991) distinguen tres tradiciones de la formación del profesorado en el siglo XX: eficiencia social, desarrollo evolutivo, y tradición académica. Esta última, basada en una concepción liberal-humanista de la educación, concibe al profesor como un especialista en un campo disciplinar, por lo que preparar para enseñar requiere una seria formación disciplinar, complementada con prácticas en las instituciones educativas.

En la actualidad y según Vaillant, D. y Marcelo, C. (2021), en el siglo XXI los diferentes sectores experimentan cambios constantes en sus dinámicas; por lo tanto, los docentes deben desarrollar habilidades en coherencia con los desafíos actuales y mediados por la tecnología como protagonista. Al respecto, estos autores consideran que los docentes adquieren estas habilidades a través del aprendizaje informal, el aprendizaje experiencial; e igualmente, mediante los programas de formación continua de docentes.

***Laboratorio de matemáticas en la formación docente***

Teniendo en cuenta la literatura y los objetivos propuestos para la investigación, se define laboratorio de matemáticas como un espacio físico diferente del aula, en cuanto se pretende construir un modelo de formación continua de docentes en ejercicio, lo cual requiere un espacio específico en cada institución educativa o en sitios estratégicos donde sea posible focalizar a profesores de varias instituciones.

El laboratorio de matemáticas tendrá a disposición diversidad de materiales: manipulativos concretos y virtuales, herramientas tradicionales de dibujo (escuadra, regla, compás) y máquinas matemáticas. Igualmente, el laboratorio estará equipado con mesas y sillas, garantizando la comodidad de los estudiantes (docentes) para el trabajo que, en su mayor parte, está diseñado para realizarlo de forma grupal.

***La resolución de problemas***

La educación matemática, desde el punto de vista de la enseñanza, debe ser dirigida a la construcción de significado robusto de conceptos, más que como un mero desarrollo mecánico de destrezas, debe desarrollar en los estudiantes la habilidad de aplicar los aprendizajes en las necesidades de su entorno. De este modo, y como lo concibe el Ministerio de Educación Nacional a través de los lineamientos curriculares, MEN. (1998), la resolución de problemas debe ser eje central del currículo de matemáticas, y como tal, es un objetivo primario de la enseñanza y parte integral de la actividad matemática. Por tal razón, y con el fin de atender a los objetivos de la investigación, se exponen las consideraciones de algunos referentes en la resolución de problemas.

George Polya (1945), estructura la actividad de resolución de problemas en matemáticas en cuatro pasos principales, conocidos también como el programa heurístico de Polya. Entender el problema, configurar un plan, ejecutar el plan y visión retrospectiva o mirar hacia atrás; cada una de estas con sus características a través de las cuales se brinda al docente y educando una estrategia que se ha consolidado e incluido en diversos textos dirigidos a la enseñanza de las matemáticas en los diferentes niveles de formación.

Para Harel (2008), la resolución de problemas es el medio para aprender. Al respecto, afirma que cuando se encuentra una situación problemática, necesariamente se experimentan fases de desequilibrio, a menudo intercaladas por fases de equilibrio. El desequilibrio, o perturbación, es un estado que se produce cuando se encuentra un obstáculo. Su efecto cognitivo es que "obliga al sujeto a ir más allá de su estado actual y a emprender nuevas direcciones" (Piaget, 1985, p. 10) citado por Harel (2008). El equilibrio es un estado en el que se percibe el éxito en la eliminación de dicho obstáculo. En términos de Piaget, es un estado en el que uno modifica su punto de vista (acomodación) y es capaz, como resultado, de integrar nuevas ideas hacia la solución del problema (asimilación).

Stacey, Burton y Mason (1982), en su libro "*Pensar Matemáticamente"* proponen mostrar cómo acometer cualquier problema, es decir, cómo establecer e iniciar a construir camino hacia la solución, ir aprendiendo de la experiencia y de esta forma fortalecer el pensamiento matemático; estos autores establecen un modelo que han consolidado en trabajo con estudiantes desde la educación básica primaria e incluso en formación de docentes, modelo de trabajo en la resolución de problemas, estructurado en tres fases: abordaje, ataque y revisión, el paso de una fase a la otra evidencia el progreso en la asimilación del problema.

## Metodología

Para el desarrollo de la propuesta, se ha considerado la investigación basada en diseño, cuyo enfoque es cualitativo, ha sido desarrollada dentro del campo de las ciencias y se nutre de un amplio campo multidisciplinar que incluye la antropología, la psicología educativa, la sociología, la neurociencia e igualmente las didácticas específicas, entre otros (Confrey, 2006; Sawyer, 2006; Molina y Castro, 2011). En la siguiente figura se ilustran las características.

**Figura 1**. *Características de la investigación basada en diseño.*


**Fuente**: Elaboración propia

La propuesta de investigación se desarrolló a través de un diplomado que se gestionó con la Universidad Antonio Nariño de Bogotá Colombia, denominado *"formación matemática del docente de primaria, usando como herramienta el laboratorio"*, en el cual han participado 12 docentes en ejercicio, no licenciados en el área de matemáticas y provenientes de los municipios de Chocontá, Sesquilé, Guatavita y Gachancipá, 10 de ellos del sector público y 2 del sector privado.

Se desarrolló un sistema de actividades, a través del cual se propuso situaciones estratégicamente diseñadas para que los docentes construyeran significado robusto de conceptos y resolvieran problemas en el laboratorio de matemáticas, usando material concreto en un primer momento, materiales convencionales y/o máquinas matemáticas y software dinámico GeoGebra en momentos posteriores.

Se planteó en cada una de las actividades, un objetivo que describe el alcance de formación a lograr por los docentes; igualmente, se establecen unos aprendizajes esperados con el fin de guiar las intenciones del investigador. Para el desarrollo de las actividades, los docentes se han distribuido en grupos, con el fin de facilitar el trabajo en equipo, una de las estrategias que se ha considerado pertinente en la investigación.

Las actividades están compuestas por desafíos que incluyen problemas retadores, cada uno con su respectivo objetivo de aprendizaje y materiales necesarios en el laboratorio de matemáticas a disposición de los docentes participantes.

Como cierre en cada una de las actividades, los docentes proponen otros desafíos con la proyección de ser desarrollados con los estudiantes en sus respectivos contextos escolares, estos fueron socializadas en plenaria como una forma de retroalimentar y ajustar antes de llevarlos a la práctica en el aula. Finalmente, el investigador analizó los resultados, ajustó y refinó conjeturas de acuerdo a las evidencias en cada actividad y a los fundamentos teóricos sobre enseñanza y aprendizaje procedentes de la literatura.

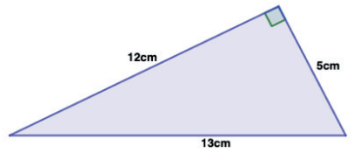
*Recolección, análisis de los resultados, evolución y construcción del modelo pedagógico*

Se aplicó inicialmente una actividad de entrada o diagnóstico, con el fin de fortalecer los criterios del diseño de las actividades de formación a desarrollar con los docentes participantes. Al respecto, en esta sesión se presentan algunos episodios, evidencias y su respectivo análisis mediante rúbrica establecida para tal fin.

*Actividad de entrada:*

- El docente dibuja en el tablero el siguiente triángulo indicando sus respectivas medidas:

**Figura 2.** *Triángulo rectángulo propuesto como contexto para el análisis de su respectiva altura.*

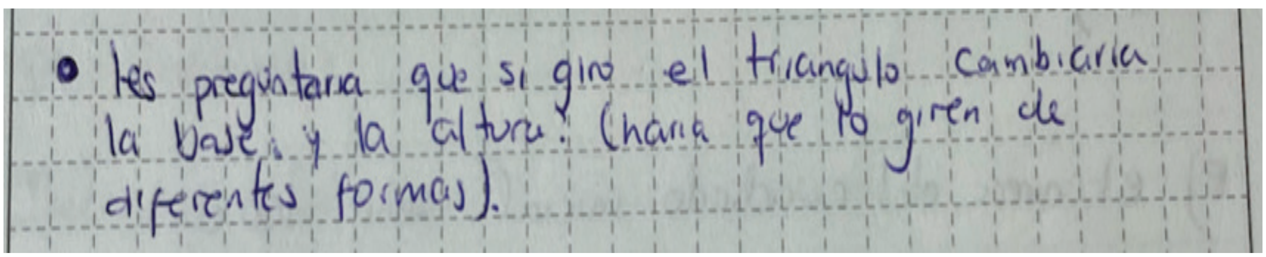



**Fuente**: Elaboración propia

Luego, propone a sus estudiantes calcular el área. Sin embargo y casi de inmediato, uno de los estudiantes, manifiesta que calcular el área de este triángulo es imposible porque la altura del mismo no está dada.

- ¿Cree que el estudiante tiene la razón? Argumentar. *"No tiene la razón porque se puede hallar la altura midiendo"*, responden 8 de los 12 docentes participantes en el diplomado.
- Si la respuesta a la anterior pregunta es negativa, dé un ejemplo de una buena práctica de enseñanza que podría reducir el error conceptual del estudiante. En la siguiente imagen uno de los grupos responde: *"Les preguntaría que, ¿si giro el triángulo cambiaría la base y la altura?, (haría que lo giren de diferentes formas)"*

**Figura 3.** *Propuesta de un grupo de docentes.*


- les preguntaria que si giro el triangulo cambiaria la base y la altura? (haria que lo giren de diferentes formas).

Como se muestra en la evidencia según imagen, sólo un grupo conformado por 3 docentes reconoce la altura que se indica en el triángulo.

A continuación, se presenta la rúbrica de análisis correspondiente a la actividad de entrada.

**Tabla 1**. *Rúbrica de análisis correspondiente a la actividad de entrada.*

| Componente | Nivel | Características |
|---|---|---|
| Plantea y ejecuta estrategias de comprensión de un problema | Nivel Bajo: El 75% de los docentes participantes, presentan dificultades para comprender un problema | Las dificultades de comprensión se deben a la falta de manejo de conceptos. Principalmente en los componentes geométrico, aleatorio y variacional. Limitado lenguaje técnico, aspecto que les dificulta la descripción y comunicación en cada uno de los problemas planteados. |
| Uso de manipulativos concretos en la | Nivel Medio: Sólo el 50% de los docentes | Utilización del material manipulativo de acuerdo a instrucciones y sugerencias que se realizan en la actividad. |

| | | |
|---|---|---|
| resolución de problemas. | participantes, utiliza material manipulativo de manera efectiva en la resolución de problemas. | No llegan a conclusiones correctas por no tener en cuenta aspectos del material manipulativo que influyen en la solución del problema.<br>El material manipulativo no es una prioridad en la resolución de problemas, y no se realizan propuestas de incorporación de nuevos manipulativos. |
| Uso de manipulativos virtuales en la resolución de problemas. | Nivel Bajo: El uso de manipulativos virtuales le es irrelevante en la resolución de problemas. | El 75% de los docentes no consideran los manipulativos virtuales importantes en la resolución de problemas.<br><br>Los docentes no reportan experiencia sobre el uso de la tecnología en la resolución de problemas. |
| Aplicación de procesos de metacognición | Nivel medio: Sólo el 50% de los docentes participantes, reflexiona sobre el proceso de aprendizaje y toma conciencia de sus procesos mentales. | Los docentes reflexionan sobre el proceso desarrollado en cada etapa realizada en la consecución de los objetivos, proceso que realizan de acuerdo a orientaciones.<br><br>No proponen estrategias de revisión y evaluación de procesos. |

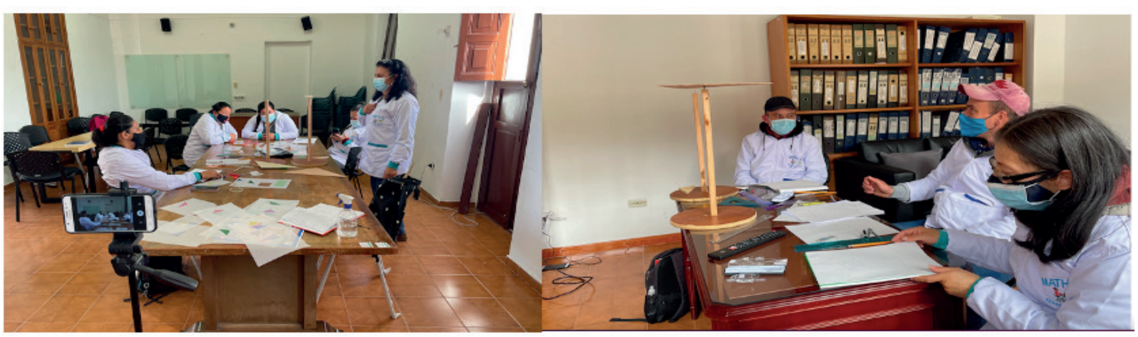
**Fuente**: Elaboración propia

El análisis a través de la rúbrica, permite evidenciar las necesidades de formación de los docentes, insumo relevante para el diseño de las actividades desarrolladas en el diplomado.

*A continuación, se presenta algunos episodios dentro de las actividades de formación.*

- *Desafío dentro de la actividad "puntos y rectas notables de un triángulo".* Ubicar los triángulos de madera en los soportes que se indican, estos elementos los encuentran disponibles en el laboratorio. Exponer el trabajo realizado en equipo, los recursos y conceptos los cuales les permitieron cumplir con la tarea asignada.

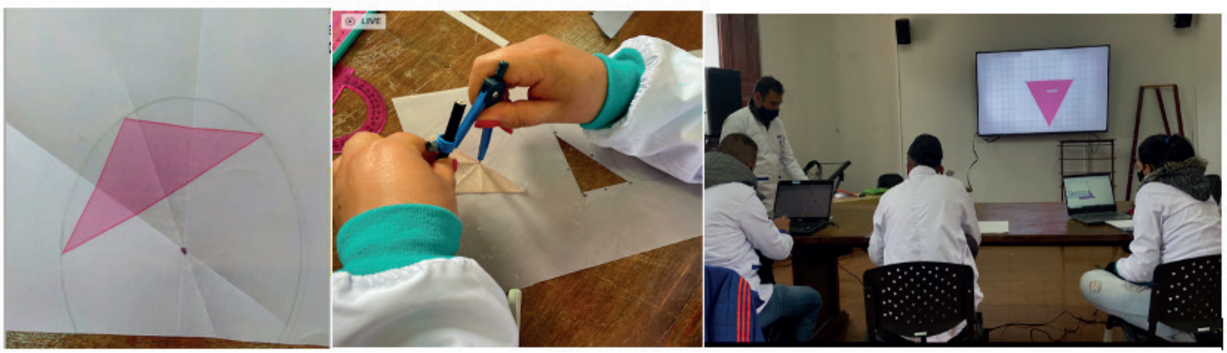
**Figura 4.** *Docentes participantes equilibrando los triángulos en el laboratorio de matemáticas.*



Los docentes alcanzaron el objetivo, equilibrando diferentes figuras en la base soporte que observamos en la imagen anterior, proceso que logran después de varios intentos, revisando y ajustando a la mejor ubicación del punto que permite este hecho. A continuación, la guía les pide trazar las medianas de uno de los triángulos que les fue posible equilibrar; es así como los docentes descubren el baricentro de un triángulo y sus respectivas medianas.

e) Trazar la mediatriz de cada uno de los lados de los triángulos 1, 2 y 3 (disponibles en el material en hoja tipo calca).

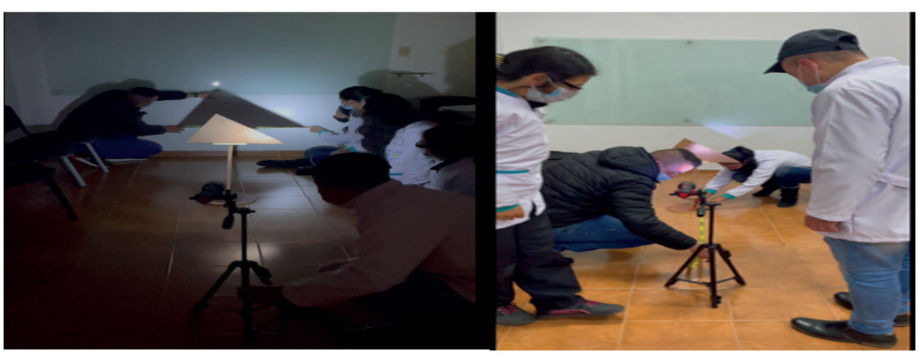
**Figura 5.** *Construcción de los puntos y rectas notables del triángulo, por parte de los docentes participantes.*



Como se observa en la imagen, los docentes realizan la tarea propuesta mediante manipulativos concretos (hojas tipo calca) en un primer momento, igualmente a través de herramientas tradicionales (regla, escuadra y compás) y mediante el software dinámico GeoGebra en momentos posteriores.

- *Desafío dentro de la actividad "semejanza"*
  Realice el montaje que le permita proyectar figuras en la pared o plano de proyección. En la siguiente imagen se observa a los docentes realizando la proyección de un triángulo.

**Figura 6.** *Docentes participantes en el diplomado, en proyección de figuras geométricas.*



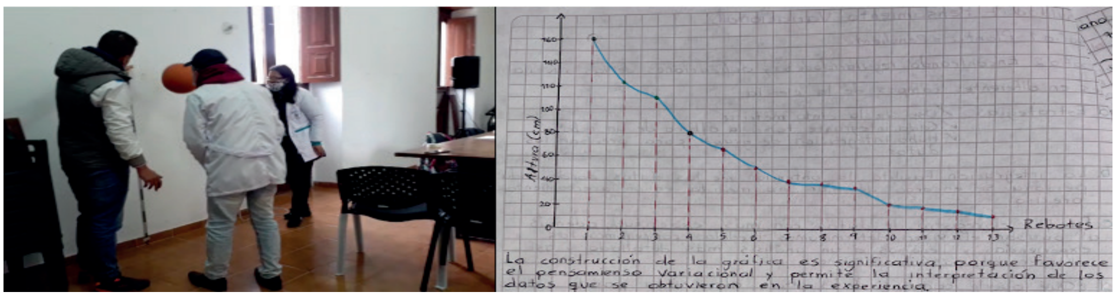
- Teniendo en cuenta el montaje anterior, sin alterar la distancia del objeto y el plano de proyección, ubique la linterna de tal manera que se genere como proyección una figura con la misma forma del objeto (figura geométrica), y que además cada uno de los lados de esta sean el doble. Argumente cada uno de los pasos, justificando las condiciones que se deben cumplir para lograr la tarea asignada.

Los docentes a través de la experimentación logran la tarea, determinando que el objeto a proyectar debe ubicarse en este caso para que se cumplan las condiciones dadas, en el punto medio entre la linterna y el tablero de proyección; igualmente, a través de la medición directa, calculan las áreas y realizan la comparación entre estas, determinando que el área de la proyección, corresponde a 4 veces el área de la figura dada.

- *Desafío dentro de la actividad "álgebra temprana"*

Toma la pelota que encuentra dentro de los materiales disponibles y llevarla a la altura que le permita el brazo, luego soltarla. Su tarea consiste en estimar y registrar la altura que logra la pelota en cada rebote. Argumentar sobre las estrategias que utilizaron al respecto, fortalezas y dificultades.

**Figura 7.** *Docentes participantes en el diplomado, en experimentación, observación y registro de datos.*

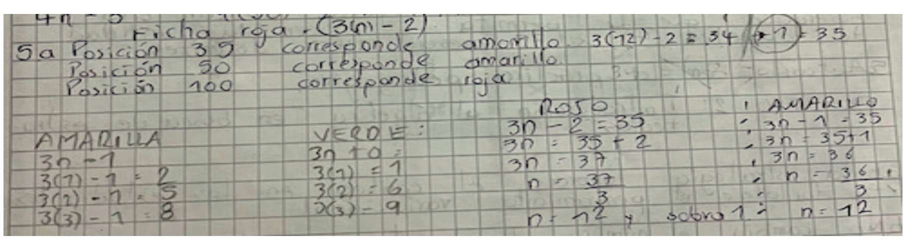



- *Desafío dentro de la actividad "álgebra temprana"*

Teniendo en cuenta la secuencia la cual pueden reconstruir utilizando las fichas de colores, responder:

¿Qué color le corresponde al cuadrado de la posición 35, 50, y 100?, ¿qué estrategia ha utilizado para identificarlo?

**Figura 8.** *Evidencia de trabajo de un grupo de docentes, en actividades "álgebra temprana".*




Como se puede observar en la imagen producto de los docentes, ellos representan cada color mediante una secuencia de números, lo cual les facilita construir el termino general, como estrategia para solucionar la situación planteada.

**Tabla 2**. *Rúbrica general de análisis de las actividades.*

| Componente | Nivel | Características |
|---|---|---|
| Uso de material manipulativo en la construcción de significado de conceptos. | Nivel Alto: el 100% de los docentes utilizan material manipulativo de manera efectiva en la construcción de significado de conceptos. | La representación a través de manipulativos concretos se vuelve habitual en el transcurso del desarrollo de la experiencia, así como la representación pictórica y el apoyo del software dinámico GeoGebra. |
| Plantea y ejecuta estrategias de comprensión de un problema | Nivel Alto: De manera acertada el 100% de los docentes exponen las tareas a realizar en la resolución de problemas. | Los docentes exponen las tareas a realizar para plantear y resolver problemas propuestos, proceso que es apoyado con manipulativos concretos. |
| Planteamiento y ejecución de estrategias en la resolución de problemas. | Nivel Alto: Los docentes plantean y ejecutan estrategias que les permite de manera acertada solucionar problemas. | Los 12 docentes participantes plantean y ejecutan estrategias que les permite solucionar los retos propuestos, apoyados en manipulativos concretos, software dinámico GeoGebra. |
| Uso de manipulativos virtuales en la resolución de problemas. | Nivel Medio: El 75% de los docentes se apoya en el software dinámico GeoGebra, en la resolución de problemas que implican geometría del espacio. | Los 12 docentes consideran relevante el uso de la tecnología (software dinámico, Excel y otras app en línea; sin embargo, 3 de lo 12 docentes participantes presentan dificultad para usarlos de forma adecuada. |
| Aplicación de procesos de metacognición | Nivel Alto: El 100% de los docentes reflexiona sobre el proceso de aprendizaje y toma conciencia de sus procesos mentales. | Los 12 docentes reflexionan sobre el proceso desarrollado en cada etapa realizada en la consecución de los objetivos, exponen los diferentes momentos, presentando los recursos y los diferentes medios utilizados para lograr los objetivos.<br>Los docentes reflexionan sobre los resultados de los compañeros como una forma de complementar los aprendizajes mediante el trabajo en equipo. |

**Fuente**: Elaboración propia

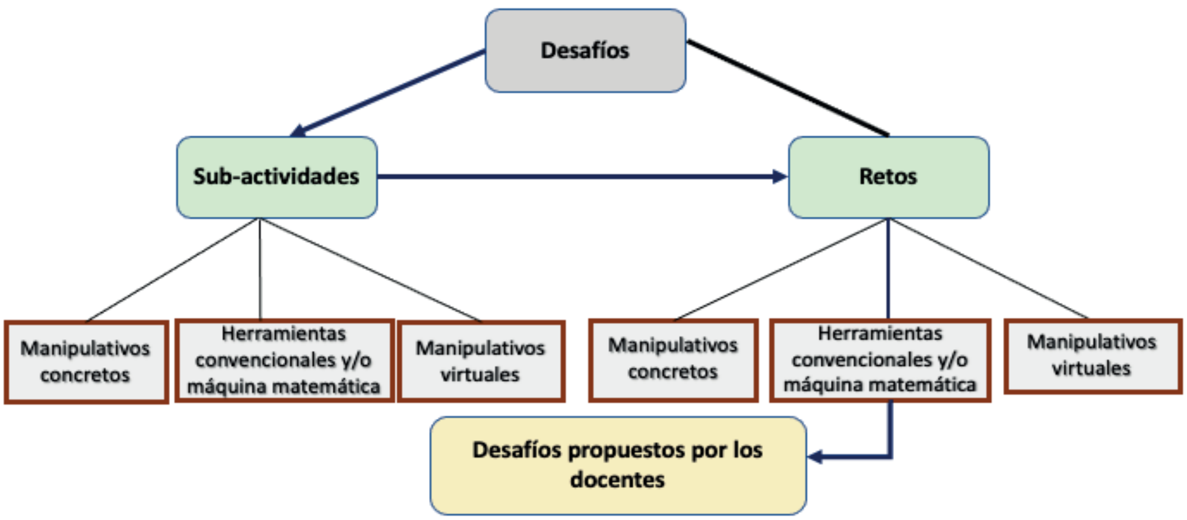
El análisis de contraste entre las rubricas, la apropiación y percepción de los docentes participantes, resultó fundamental en la consolidación del modelo pedagógico de formación.

## Resultados

Finalmente, para dar respuesta a la pregunta de investigación ¿cómo fomentar la formación en el conocimiento disciplinar y el conocimiento pedagógico del contenido, en el docente de la educación básica primaria en el área de matemáticas?, se ha construido el modelo que se describe a continuación.

El modelo pedagógico tiene como protagonista a los materiales manipulativos, en cuanto están presentes en todas las actividades diseñadas para formar a los docentes. Según Piaget (1966), citado por Bartolini & Maschietto (2008), los niños necesitan manipulativos concretos para desarrollar conceptos matemáticos abstractos. Sin embargo, en el laboratorio de matemáticas de Módena, estos autores extienden la concepción de Piaget, en cuanto se afirma que los manipulativos concretos y virtuales deben utilizarse en la construcción de significado robusto de conceptos, no sólo con los niños sino también con los alumnos de mayor edad, hasta el nivel terciario. Por lo tanto, las actividades dentro del modelo de formación se componen de desafíos, los cuales a su vez se dividen en sub-actividades y retos (problemas retadores); los cuales los pueden abordar con manipulativos concretos en un primer momento, herramientas convencionales y manipulativos virtuales en momentos posteriores, estructura que se presenta en la siguiente imagen.

**Figura 9.** *Estructura de las actividades de formación docente.*




**Fuente**: Elaboración propia

La puesta en práctica del modelo se realiza a través de la metodología que propone la investigación basada en diseño. Al respecto, se establecen cuatro ciclos, los cuales atienden a los componentes del área de matemáticas: numérico, variacional, aleatorio y espacial. Cada uno de estos ciclos está compuesto por varias actividades, las cuales se han denominado iteraciones en cuanto retoman el ciclo para transitar por las diferentes fases, luego de su respectiva reflexión y análisis, abordando nuevos aprendizajes, pero conservando la estructura planteada en la figura anterior.

La validación del modelo se realizó mediante adaptación del enfoque basado en argumentos, propuesto por Messick, S (1989) y citado por Camargo, S.L (2017). Al respecto se establece una matriz en la cual se resalta la interpretación de los datos en coherencia con la teoría, se analizó sobre el uso de estos resultados y las consecuencias sociales en articulación con los objetivos de la investigación.

**Tabla 3.** *Modelo pedagógico de formación docente.*

<table>
<tr><th>Enfoque</th><th colspan="5">Constructivista</th></tr>
<tr><th colspan="6">Diagnóstico</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Fases</td><td></td><td colspan="4">Planeación y diseño de experimento de enseñanza</td></tr>
<tr><td rowspan="3">I</td><td colspan="4">Implementación del experimento de enseñanza</td></tr>
<tr><td>Etapa 1</td><td>Etapa 2</td><td>Etapa 3</td><td>Etapa 4</td></tr>
<tr><td>Exploración de la actividad</td><td>Planteamiento y ejecución de estrategias</td><td>Consolidación de estrategias y metacognición</td><td>Planteamiento de experimentos de enseñanza y relación con otros contextos.</td></tr>
</table>

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | II | Revisión y análisis | | | |
| | | Se realiza reflexión y análisis en referencia con los logros alcanzados y los objetivos de la investigación, analizando los recursos y medios que lo sustentan como insumo para diseñar un nuevo experimento de enseñanza y reiniciar el ciclo en la fase 1 con una nueva iteración. | | | |
| **Validación** | Enfoque basado en argumentos | | | | |
| | Bases de evidencia | Interpretación de la experiencia | Uso de la experiencia | Consecuencias sociales | |

**Fuente**: Elaboración propia

## Conclusiones

En coherencia con la pregunta de investigación y objetivos, se establece en relación con:

***El conocimiento disciplinar y conocimiento pedagógico del contenido***

Las construcciones logradas por los docentes participantes, como fueron los puntos y rectas notables del triángulo mediante dobleces de papel, para la mayoría de ellos corresponden a terminología que la escuchan por primera vez, tales como mediatriz, medianas, alturas y bisectrices, con sus respetivos puntos notables, circuncentro, baricentro, ortocentro e incentro, respectivamente; son para los docentes, nuevos aprendizajes.

Algunos de los aprendizajes los han construido a través de actividades lúdicas, mediados por juegos tradicionales, tales como la rayuela o golosa, el cubo soma, dados de parqués, juegos de estrategia, entre otros.

Posterior a la participación en el diplomado, 10 de los 12 docentes participantes, por iniciativa propia, compartieron evidencias de sesiones de clase en ambiente de laboratorio, apoyadas por manipulativos concretos y software dinámico GeoGebra.

Algunas novedades que aporta el desarrollo de la propuesta respecto a los aprendizajes logrados por los docentes, la forma y los medios utilizados son:

- Lenguaje matemático y conceptos básicos que la mayoría de los docentes desconocían, tales como: el concepto de altura de un triángulo, las demás rectas y puntos notables, el concepto de homotecia el cual fue consolidado mediante la proyección de figuras (montaje de figuras y su respectiva sombra), juegos de estrategia y fractales.
- Los docentes han fortalecido su conocimiento base, que según Harel (2008), lo define en términos de tres componentes: conocimiento de las matemáticas, conocimiento del aprendizaje de los estudiantes y conocimiento de la pedagogía.
- Los docentes en su totalidad consideran que la metodología empleada en el diplomado ha despertado el interés para abordar las actividades propuestas de formación, cambiando significativamente las formas de aprender y enseñar las matemáticas, mediados por el laboratorio y donde resaltan el uso de material concreto para construir, fortalecer conceptos y resolver problemas.
- Los docentes manifiestan que los desafíos planteados en cada una de las actividades propician la interacción entre compañeros y el trabajo en equipo, generando en ellos confianza para abordar temáticas específicas con mayor profundidad en la educación básica primaria; consideran que las temáticas complementan el plan de estudios, a través del laboratorio de matemáticas como herramienta que favorece la construcción de conceptos, comprensión y resolución de problemas en contextos matemáticos y otras áreas.

***Una mirada diferente a las matemáticas***

Más allá de fortalecer el conocimiento disciplinar y pedagógico del contenido en los docentes participantes simultáneamente a través del desarrollo de las actividades, como se describe en la sesión anterior para destacar, los docentes han cambiado su actitud frente a las matemáticas, en cuanto ellos consideraban inicialmente que los procesos con cierto grado de complejidad correspondían exclusivamente al nivel de básica secundaria y con su respectivo docente licenciado en matemáticas.

El empoderamiento y apropiación de la metodología por parte de los docentes les ha generado mayor confianza para abordar las matemáticas, en tanto a medida que transcurre el desarrollo de la propuesta, adquieren hábitos y familiarización con los manipulativos concretos y virtuales, de tal forma que son considerados como una estrategia de primera mano en la construcción de significado robusto de conceptos y en la resolución de problemas. Las propuestas que presentan, y sus respectivos argumentos, evidencian la evolución que han adquirido en el transcurso del diplomado.

## Referencias bibliográficas

Bartolini Bussi, M. G., & M. Maschietto. (2006). Gli strumenti meccanici: le macchine per tracciare curve e realizzare trasformazioni. *Macchine matematiche: dalla storia alla scuola*, 1-32.

Bartolini Bussi, M. G., & M. Maschietto. (2008). Machines as tools in teacher education. *In The Handbook of Mathematics Teacher Education*: Volume 2 (pp. 183-208). Brill Sens.

Camargo, S. L. (2017). En búsqueda de consenso sobre el concepto de validez: Un estudio Delphi. *Psicología.*

Chávez, H. L. (2008). Los modelos pedagógicos en la formación de profesores. Revista Iberoamericana de educación, 46(3), 1-8.

Confrey, J. (2006). The evolution of design studies as methodology, en Sawyer, R.K. (ed.). *The Cambridge Handbook of the Learning Sciences*, pp. 135-152. Nueva York: Cambridge University Press.

Harel, G. (2008). A DNR perspective on mathematics curriculum and instruction. Part II: with reference to teacher's knowledge base. ZDM, 40(5), 893-907.

Harel, G. (2008). DNR perspective on mathematics curriculum and instruction, Part I: focus on proving. ZDM, 40(3), 487-500.

Kitchen, J. y Petrarca, D. (2016). Approaches to teacher education. En J. Loughran y L. Hamilton (Eds.), International handbook of teacher education (pp. 137-185). Springer.

Liston, D. P., & Zeichner, K. M. (1991). Traditions of reform in US teacher education. *Teacher education and the social conditions of schooling*, 1-36.

MEN. (1998). Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Messick, S. (1989). Validity. En: R. L. Linn (Ed.), *Educational Measurement*. (pp. 13-103). Washington, D.C.: American Council on Education.

Molina, M., Castro, E., Molina, J. L., & Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 75-88.

Pólya, G. (1945). *How to solve it*. New York: Doubleday Anchor Books.

Sawyer, R.K. (2006). The New Science of Learning, en Sawyer, R.K. (ed.). *The Cambridge Handbook of the Learning Sciences,* pp. 1-18. Nueva York: Cambridge University Press.

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard educational review*, 57(1), 1-23.

Stacey, K., Burton, L., & Mason, J. (1982). *Thinking mathematically*. Addison-Wesley.

Vaillant, D. y Marcelo, C. (2021). Formación inicial del profesorado: Modelo actual y llaves para el cambio. REICE. Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación, 19(4), 55-69.

# SECCIÓN 5

## USO DE LOS RECURSOS TECNOLÓGICOS EN EL PROCESO DE APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS


VOL 36, NÚMERO 1, AÑO 2023

# DISEÑO DE UNA TRAYECTORIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAJE PARA ABORDAR LAS PRUEBAS DE HIPÓTESIS DESDE UN ACERCAMIENTO INFORMAL

# DESING OF A HYPOTHETICAL LEARNING TRAJECTORY TO ADDRESS HYPOTHESIS TESTS FROM AN INFORMAL APPROACH

**Eleazar Silvestre Castro, Ilseth Johana Leyva Zazueta, Maricela Armenta Castro**
**Universidad de Sonora, Colegio Americano de San Carlos. (México)**
eleazar.silvestre@unison.mx, ilsethleyva@hotmail.com, maricela.armenta@unison.mx

**Resumen**:
El enfoque informal a la inferencia estadística puede contribuir significativamente al aprendizaje de técnicas básicas de la estadística inferencial. En este trabajo se presenta y analiza el primer ciclo de una trayectoria hipotética de aprendizaje que introduce la prueba de hipótesis desde un enfoque informal, dirigida a estudiantes del nivel universitario. La trayectoria constó de tres tareas, que se enfocan en introducir la noción de hipótesis nula, la manera de evaluarla, y la exploración del mecanismo de la prueba cuando se modifican dos de sus componentes. Con base en el análisis de las respuestas de un grupo de 39 estudiantes universitarios mexicanos ante las tareas, nuestros resultados sugieren que la trayectoria favorece la emergencia y desarrollo del razonamiento con el concepto, pero también que adoptar una perspectiva hipotética para llevar a cabo la prueba y su exploración constituye un reto de alta complejidad.

**Palabras clave**: prueba de hipótesis, enfoque informal a la inferencia, trayectoria hipotética de aprendizaje

**Abstract**:
The informal approach to statistical inference can significantly contribute to learning basic techniques of inferential statistics. This paper presents and analyzes the first cycle of a hypothetical learning trajectory that introduces hypothesis test from an informal approach, aimed at university students. The trajectory consisted of three tasks, which focus on introducing the notion of null hypothesis, the way to evaluate it, and the exploration of the test mechanism when two of its components are modified. Based on the analysis of the responses of a group of thirty-nine Mexican university students to the tasks, our results suggest that the trajectory favors the emergence and development of reasoning with the concept, but also that adopting a hypothetical perspective to carry out the test and its exploration constitutes a highly complex challenge.

**Keywords**: hypothesis test, informal approach to inference, learning hypothetical trajectory

## Introducción

Muestreo e inferencia son consideradas ideas estadísticas fundamentales (Burril, 2019). Los conceptos de prueba de hipótesis (PH) e intervalos de confianza están presentes en prácticamente cualquier licenciatura que contemple una introducción a la inferencia estadística. Además de cumplir un rol importante en la formación estadística de diversos profesionistas, dado que constituyen herramientas clave para la investigación científica, también posibilitan el desarrollo de la capacidad de ser un ciudadano crítico a la información estadística encontrada en el día a día (Gal, 2002). No obstante, la investigación en educación estadística ha documentado una amplia gama de errores y dificultades, tanto por parte de estudiantes como de profesores, respecto al dominio de sus múltiples aspectos procedimentales y conceptuales.

En particular, muchas de las dificultades de aprendizaje relacionadas con la PH se enfocan en la interpretación incorrecta de sus distintos componentes. Harradine et al. (2011) señalan que a menudo estudiantes universitarios asumen la hipótesis nula como aquella que se desea probar, o bien a interpretar el nivel de significancia como la probabilidad de que la hipótesis nula sea verdadera cuando ha sido rechazada, e incluso también intercambiar el concepto de p-valor con el nivel de significancia. Así mismo, se ha documentado que la PH es vista como una prueba matemática formal que ofrece una prueba probabilística (i.e., bajo una perspectiva bayesiana) o determinista (i.e., que permite probar la veracidad o falsedad) acerca de alguna de las hipótesis involucradas (Lane-Getaz, 2017; Inzunsa y Jiménez, 2013).

Para el caso de profesores de bachillerato y del nivel superior, se han reportado otras dificultades. Por ejemplo, Liu y Thompson (2009) evidenciaron que una muestra de profesores de bachillerato fue incapaz de asumir una perspectiva distributiva para evaluar la atipicidad de un resultado muestral, mientras que López-Martín et al. (2019) identificaron que profesores de secundaria y bachillerato en formación, dieron más peso al aspecto procedimental en la realización de las pruebas de hipótesis por parte de sus estudiantes, lo cual abona a una comprensión incipiente respecto a sus múltiples aspectos conceptuales.

En respuesta a esta problemática, distintas investigaciones han evidenciado que un *enfoque informal* para la enseñanza de la prueba de hipótesis ofrece ventajas favorables y significativas para el aprendizaje del concepto (ver por ejemplo Zieffler et al., 2008). Batanero y Díaz (2015) argumentan que en este enfoque la PH podría plantearse desde la lógica de Fisher, que consiste en conceptualizarla como un procedimiento que permite refutar de manera empírica una determinada hipótesis nula. Rossman (2008) señala que este planteamiento es apropiado para introducir a los estudiantes novatos al mecanismo de la prueba y sugiere iniciar con el tratamiento de situaciones en las que la hipótesis nula es la de “no diferencia” o “modelo 50-50”. Además, en este enfoque se utilizan simulaciones computarizadas para generar la distribución muestral del estadístico de manera empírica, privilegiando así el aspecto más conceptual que procedimental de la PH.

Case y Jacobbe (2018), al igual que otras investigaciones (ver por ejemplo Inzunza e Islas, 2019), evidencian que el uso de este enfoque no previene ni resuelve los múltiples conflictos y dificultades asociadas con la enseñanza y aprendizaje de la PH, pero también que ofrece, en general, ventajas significativas para el aprendizaje de los estudiantes cuando se compara con el método de enseñanza formal y tradicionalista. En nuestra consideración, persiste la necesidad de profundizar en la comprensión de cómo estructurar una serie de actividades o tareas que, desde un enfoque informal, promuevan aprendizajes clave sobre la PH, así como profundizar en el cómo se desarrolla el aprendizaje de los estudiantes en el marco de dicho acercamiento didáctico.

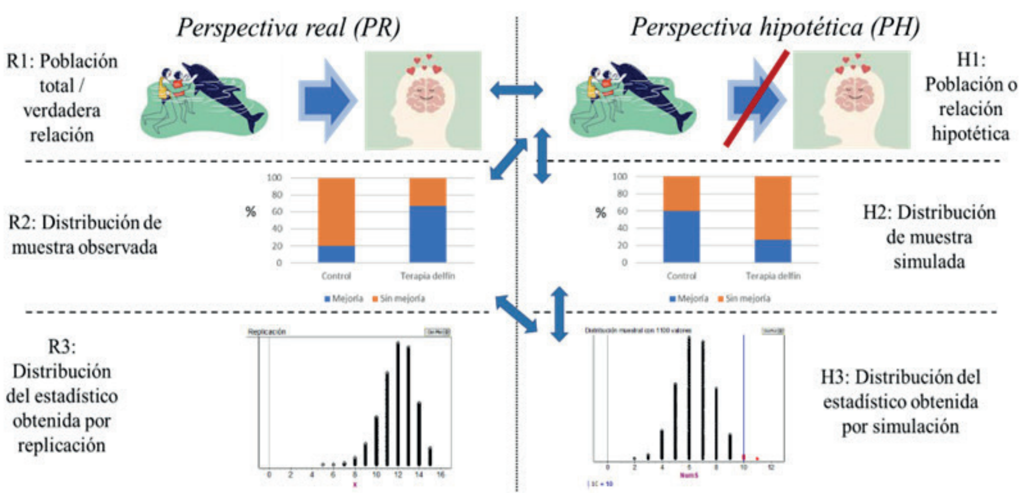
El presente trabajo es un esfuerzo en esta dirección, su objetivo general es presentar el proceso de diseño y evaluación de un primer ciclo de diseño de una trayectoria hipotética de aprendizaje cuyo objetivo es introducir la PH en el nivel universitario desde un enfoque informal. Para ello presentamos las consideraciones del diseño de la trayectoria, su proceso de implementación y las evidencias correspondientes que, en conjunto, nos llevan a reflexionar acerca de su funcionamiento y potencial modificación de componentes en aras de lograr un impacto significativo en el aprendizaje de los estudiantes acerca del concepto.

## Marco conceptual

Trayectoria hipotética de aprendizaje (THA): su objetivo es acercar los conocimientos, intuiciones y propuestas matemáticas de los estudiantes con los objetivos de aprendizaje pretendidos por el profesor (Simon, 2014). Se compone de tres elementos relacionados entre sí: a) objetivos de aprendizaje, b) un conjunto de tareas o actividades cuyo objetivo es propiciar la actividad matemática de interés, y c) las hipótesis de aprendizaje (o de razonamiento) entendidas como una relación de acciones probables que tomará el estudiante durante la resolución de las tareas. La elaboración de una THA está basada en la comprensión inicial de los estudiantes involucrados y, dado su carácter hipotético, el profesor se involucra frecuentemente en la modificación de sus componentes. Una THA puede entenderse como un vehículo para apoyar tanto el diseño didáctico como la actividad docente y la investigación; en nuestro caso, utilizamos las THA como instrumento de diseño y de investigación dentro de un *experimento de diseño*. Utilizamos el mecanismo de la trayectoria para relacionar distintos elementos que la conforman, tales como los contenidos estadísticos involucrados, las situaciones problema que provocan su emergencia, la generación de tareas que desarrollan las situaciones problema, los materiales y las acciones necesarias para su implementación, y las expectativas de aprendizaje correspondientes para los estudiantes.

Perspectiva dual y multinivel acerca de la PH: Case y Jacobbe (2018) argumentan que la realización de la prueba de hipótesis requiere la coordinación entre dos perspectivas, una hipotética y otra real, y entre múltiples conceptos estadísticos y probabilísticos que operan en tres niveles de abstracción:

**Figura 1**. *Perspectivas y niveles implicados en la prueba de hipótesis.*




**Fuente**: Adaptado de Case y Jacobbe (2018).

En la figura 1 se ilustran las perspectivas y niveles en el contexto del efecto benéfico que puede tener la terapia con delfines. Si se observa que un grupo experimental arroja mayor número de pacientes con reducción de estrés y ansiedad (R2), a raíz de participar en la terapia, no se puede garantizar que la verdadera relación entre el beneficio y la terapia sea de esta naturaleza (R1). Es posible que la terapia no tenga efecto benéfico alguno en los pacientes; esta perspectiva se asume como la hipótesis nula que se refutará mediante la prueba (H1).

Para evaluar dicha hipótesis nula, es necesario considerar el comportamiento de resultados muestrales (empíricos) generados por dicho modelo, transitando entonces a una perspectiva hipotética de la situación bajo estudio. El resultado experimental mostrado en H2 se produce por un modelo probabilístico que se deriva de la hipótesis nula, aproxima la variabilidad de los resultados muestrales considerando únicamente la aleatoriedad del muestreo o la de una asignación aleatoria entre dos grupos.

Haciendo uso de dispositivos físicos o computarizados, el proceso de generación de resultados muestrales (empíricos) generados por el modelo de la hipótesis nula se repite una gran cantidad de veces, resultando en una distribución del estadístico mostrada en H3. Esta distribución es el concepto base para evaluar la fuerza del resultado experimental obtenido en la perspectiva (o dimensión) real de la situación bajo estudio (R2), en este caso, mediante la estimación e interpretación del p-valor.

## Método

Participantes y escenario del experimento: participaron 39 estudiantes de la Licenciatura en Finanzas de la Universidad de Sonora, quienes habían completado un curso de Estadística en el semestre previo y en el que se atendieron contenidos de estadística descriptiva y nociones de probabilidad. El experimento se realizó al inicio de su curso de Estadística Inferencial, llevado a cabo durante agosto a diciembre de 2021, y en modalidad virtual utilizando la plataforma Microsoft Teams. Para resolver las tareas, se organizó a los estudiantes aleatoriamente en equipos de tres personas cada uno; por motivos ajenos a nuestro control, para la realización de la tarea 2 se presentaron 12 de los 13 equipos.

Instrumentos y ejecución: como primera acción para el diseño de la trayectoria, utilizamos referencias educativas que consideramos pertinentes para identificar situaciones que permitieran desarrollar razonamientos clave sobre las PH. La tabla 1 muestra los razonamientos que se detonarían al realizar las tareas iniciales de la trayectoria:

**Tabla 1.** *Referencias educativas para enmarcar la THA.*

| Tarea | Hipótesis general | Referencias |
|---|---|---|
| 1 | Partiendo de una situación inferencial de interés, en la que se trabaja con datos categóricos, los estudiantes utilizarán su conocimiento estadístico y contextual para evaluar la hipótesis nula de “no diferencia / no efecto / modelo 50-50”. | Partir de y utilizar conocimientos previos de estudiantes Zieffler et al. (2008). |
| | | El enfoque de Fisher y el trabajo con datos categóricos son vía de acceso favorable a la PH (Rossman, 2008; Batanero y Díaz, 2015). |
| 2 | Analizando la misma situación, los estudiantes utilizarán la distribución muestral del estadístico que modeliza la hipótesis nula como vehículo para clasificar el resultado experimental como atípico, por lo cual la rechazarán. | La distribución muestral empírica es más accesible que su versión abstracta (Rossman, 2008; Batanero y Díaz, 2015; Case y Jacobbe, 2018). |
| | | Se debe transitar apropiadamente entre perspectiva real e hipótetica y entre niveles conceptuales (Case y Jacobbe, 2018). |
| 3 | Los estudiantes realizarán cambios en el resultado experimental y repetirán la prueba, para identificar que éste afecta al cálculo del p-valor; realizarán cambios en el tamaño de muestra y repetirán la prueba, para identificar que se altera la variabilidad de la distribución de probabilidad que modeliza la hipótesis nula. Identificarán que el resultado de la prueba puede alterarse al modificar alguno de estos elementos. | Aprovechamiento del acercamiento informal para identificar rol de elementos clave en la PH (Rossman, 2008; Batanero y Díaz, 2015). |

**Fuente**: elaboración propia.

La tarea 1 consistió en introducir la noción de hipótesis nula en función del modelo 50-50 y su procedimiento de evaluación; su objetivo de aprendizaje fue provocar que los estudiantes relacionen la evaluación de la hipótesis nula con su conocimiento estadístico y contextual de la situación bajo estudio. Al iniciarla, los estudiantes analizaron el experimento realizado por Hamlin et al. (2007), en el cual un grupo de psicólogos analizaron si infantes preverbales son capaces de considerar a un sujeto como aversivo o simpático basándose en la observación de su interacción con otros.

En uno de los componentes del experimento, 16 infantes de diez meses de edad vieron "interactuar" por separado a dos objetos con un tercero, para después elegir alguno de los primeros con cual jugar. Dado que uno de los objetos mostró un comportamiento aversivo con el tercero y el otro no, 14 de los 16 infantes eligieron al segundo como juguete tras observar las interacciones. Tras analizar este planteamiento, se hicieron las siguientes preguntas a los estudiantes, para que las respondieran de manera libre y en equipo: A) Considerando lo sucedido en el estudio, ¿te parece que la hipótesis nula "los infantes no tienen preferencia, dan la misma probabilidad de elegir a cada juguete", es correcta? B) Y si consideras es incorrecta, ¿qué procedimiento o experimento harías para argumentarlo?

Así, las hipótesis de aprendizaje de la tarea 1 fueron, los estudiantes:

HA1. Rechazan la hipótesis nula con base en su conocimiento contextual de la situación.

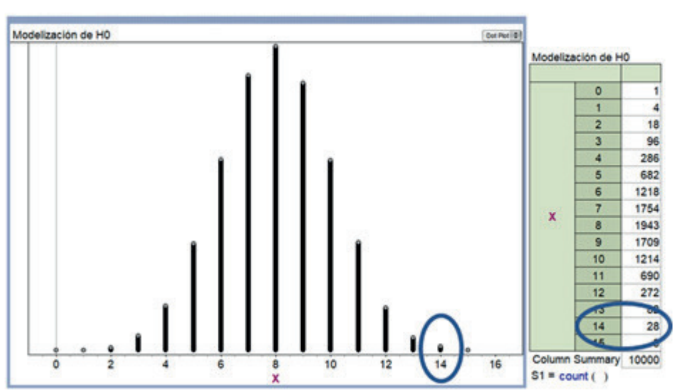
HA2. Rechazan la hipótesis nula utilizando un argumento inductivo (i.e., argumentando que, asumiéndola como verdadera, la proporción muestral es atípica de obtener).

HA3. Calculan la probabilidad de la proporción muestral vía un modelo binomial, asumiendo H0 como verdadera, para justificar su rechazo.

La tarea 2 consistió en introducir la evaluación de la hipótesis nula con base en su distribución muestral empírica, por lo que su objetivo de aprendizaje fue el de tratar que los estudiantes relacionen su evaluación con su conocimiento estadístico (i.e., vía su modelización). En esta tarea, los estudiantes evaluaron nuevamente la hipótesis nula de no diferencia (los infantes del estudio tienen probabilidad de .5 de elegir al juguete ayudante), pero disponiendo de la distribución muestral empírica (con modelo probabilístico binomial de parámetros n=16 y p=.5) que la modeliza (ver figura 2).

La distribución fue generada por el profesor utilizando Fathom y se solicitó a los estudiantes, organizados en los mismos equipos, responder a los cuestionamientos de: con base en esta información, ¿qué puedes decir sobre la hipótesis nula "los niños eligen al juguete ayudante con probabilidad de .5"? Si la consideras incorrecta, ¿qué puede concluirse sobre ella tras realizar este procedimiento?

**Figura 2.** *Distribución muestral empírica utilizada en la tarea 2.*




**Fuente**: elaboración propia.

Así, las hipótesis de aprendizaje de la tarea 2 fueron, los estudiantes:

HA4. A la luz de la distribución muestral que modeliza la hipótesis nula, identifican que el dato experimental tiene baja frecuencia de aparición, lo cual lo hace atípico o muy improbable de ocurrir si la hipótesis nula fuese verdadera.

HA5. Rechazan la hipótesis de que la proporción de éxitos es .5, en oposición a aceptar que un evento atípico ha ocurrido únicamente por azar.

HA6. Asumen que la conclusión de la hipótesis nula es de carácter no determinista.

La tarea 3 consistió en la exploración y consolidación del mecanismo de la PH vía la modificación de sus componentes; su objetivo de aprendizaje fue provocar que los estudiantes exploren e identifiquen el papel del resultado experimental y el tamaño de muestra en el mecanismo de la PH. La tarea se realizó en el contexto de esta misma situación y se exploró qué sucedería con el mecanismo de la prueba y su resultado si se modificaran dos de sus componentes, a saber: el resultado experimental y el tamaño de muestra que se utilizaron en el estudio de Hamlin et al (2007).

Los estudiantes, organizados en los mismos equipos, dieron respuesta a: ¿qué pasaría con el procedimiento y resultado de la prueba si, al finalizar la etapa de experimentación, 10 de los 16 infantes hubieran elegido al juguete ayudante? ¿Y qué pasaría con el procedimiento y resultado de la prueba si hubieran participado 140 infantes y 84 eligieron al juguete ayudante?

Es importante considerar que, al momento de enfrentarse a esta tarea, los estudiantes manipularon Fathom por cuenta propia, además de contar con el procedimiento institucionalizado para realizar la prueba (que incluye la manera de estimar el p-valor vía la distribución muestral empírica).

Así, las hipótesis de aprendizaje de la tarea 3 fueron, los estudiantes:

HA7. Identifican que solo modificar el resultado experimental afecta al cálculo del p-valor.

HA8. Reconocen que un resultado experimental considerado típico de obtener bajo la hipótesis nula implica que no puede rechazarse.

HA9. Identifican que, si el tamaño de muestra aumenta, la variabilidad de la distribución de probabilidad que modeliza la hipótesis nula se reduce.

HA10. Reconocen que el resultado de la prueba puede alterarse al modificar ya sea el resultado experimental o el tamaño de muestra.

Evidencias y análisis: para este reporte, la fuente primaria de evidencias fueron las respuestas de los estudiantes ante los cuestionamientos de las tres tareas. Dado que el experimento se desarrolló de manera virtual, los estudiantes utilizaron Excel para registrar sus respuestas y entregaron el documento electrónico correspondiente al final de cada sesión. Respecto a su análisis, cada autor de este reporte realizó primero una codificación abierta de las respuestas que luego fueron contrastados y refinados. Posteriormente, el análisis de los códigos se interpretó según el tránsito entre las perspectivas real e hipotética y las relaciones conceptuales implicadas en el modelo de Case y Jacobbe (2018) que describimos en la sección previa. Finalmente, se realizó una valoración cualitativa para asignar una etiqueta (nula, débil, media o fuerte) al grado de presencia o cumplimiento de cada hipótesis de aprendizaje. Para la ilustración de los tipos de respuesta, en la siguiente sección, utilizamos respuestas que consideramos prototípicas de cada categoría.

## Resultados

Tarea 1: 11 de los 13 equipos argumentaron que había (o no) relación causa-efecto entre la decisión de los infantes respecto a su exposición ante la interacción de los juguetes. Ocho equipos consideraron que la hipótesis nula “no es correcta” argumentando que los infantes eligieron al juguete ayudante por haberse comportado de manera empática o no aversiva. Esto es, los once equipos se ubicaron únicamente en la perspectiva real de la situación bajo estudio (R1 y R2), como es evidenciado por la respuesta del equipo 1 (E1), que argumentó que la hipótesis nula "es correcta" de la siguiente manera: "…son niños de 10 meses de edad y son curiosos al elegir al juguete, no demuestra si [la preferencia] es [por] lo simpático o agresivo…es razonable que elijan al azar, no por análisis previo".

Los dos equipos restantes argumentaron desde una perspectiva hipotética, es decir, asumieron que si la hipótesis nula fuese verdadera, lo obtenido en el experimento distaría demasiado del valor esperado de acuerdo con dicha expectativa. Al hacerlo, realizaron un pase hacia la dimensión hipotética de la situación bajo estudio (R1, R2 y H1), pues consideraron que la relación que busca probarse en el estudio (los infantes tienen preferencia genuina por el juguete ayudante) no era verdadera y desde esa perspectiva juzgaron la fuerza del resultado experimental, aunque sin el cálculo de un p-valor. Esto se evidencia en la respuesta del equipo 13, que comentó "…se puede observar que, en esa muestra de 16 niños, 14 eligieron el objeto ayudante, lo cual es una proporción de 0.875 y es demasiado alta si la hipótesis [nula] fuese verdadera".

Los diez equipos que rechazaron la hipótesis nula propusieron realizar una nueva experimentación. En las diferentes propuestas de los equipos se evidenció una intención de replicación del experimento de Hamlin et al. (2007), modificando algunas variables de la situación para así obtener una conclusión certera respecto a la naturaleza de la hipótesis nula. Tales equipos exhibieron adoptar una perspectiva real de la situación bajo estudio (R1, R2 y R3), en donde la nueva experimentación se concibe como un tipo de replicación del experimento que brindaría resultados deterministas sobre la hipótesis nula. Por ejemplo, el equipo 7 mencionó:

E7: …creemos que el tamaño de la muestra de los niños en el experimento es bastante pequeño, por lo tanto, para validar el dato, aumentaríamos el tamaño de la muestra…, por lo menos 2500…después analizaríamos cambiando factores que podrían afectar en la toma de decisiones, ya sea la figura, el color o el rol de los personajes en el experimento… podemos profundizar dentro del muestreo para así obtener datos los cuales evidencien que esta hipótesis es falsa.

Con relación al cumplimiento de las hipótesis de aprendizaje de esta tarea, dado que ningún equipo utilizó un modelo binomial para modelizar la hipótesis nula de no diferencia, la hipótesis HA3 no recibió apoyo empírico alguno. En cambio, la mayoría de los equipos recurrieron a su conocimiento contextual enmarcado en la experimentación científica, privilegiando la perspectiva real de la situación, buscando replicar el experimento de Hamlin et al. (2007); esto nos motivó a considerar que la hipótesis HA1 recibió un grado alto de apoyo por parte de las evidencias. Finalmente, la hipótesis HA2 recibió apoyo bajo dado que solo dos equipos asumieron la perspectiva hipotética al utilizar un razonamiento inductivo tipo 'modus tollens'.

Tarea 2: cuatro de los equipos ignoraron la distribución muestral empírica a la mano y abordaron la tarea de evaluar la hipótesis nula adoptando una perspectiva real de la situación (R1 y R2). Los equipos mantuvieron la estrategia de argumentar a favor o en contra de la hipótesis nula con base en la existencia de una relación causa-efecto entre la decisión de los infantes y su exposición a la interacción de los juguetes, como es evidenciado por la respuesta del equipo 7: "…diversos factores sí podrían influir al momento de la toma de decisiones…"; y la del equipo 8: "…sí [es correcta], se puede deber a las preferencias individuales de cada niño…".

Los siguientes cuatro equipos, para realizar su evaluación de la hipótesis nula, interpretaron la distribución muestral empírica como una especie de modelo de replicación del experimento con los infantes. Por ejemplo, el equipo 1 declaró que "…un lado es un juguete y el otro lado es otro juguete, se puede ver que casi tienen los mismos resultados…"; mientras que el equipo 2 señaló que "…con base a las pruebas matemáticas y cálculo se puede ver que la hipótesis nula muestra un cambio en las elecciones de los niños…". Así, estos equipos evidenciaron adoptar una perspectiva real de la situación que, en este caso, atraviesa los tres niveles conceptuales implicados en la prueba de hipótesis (R1, R2 y R3).

Los cuatro equipos restantes interpretaron la distribución muestral empírica como vehículo para evaluar cualitativamente la atipicidad del resultado experimental; aunque no realizaron la estimación del p-valor correspondiente, evidenciaron un tránsito apropiado entre las perspectivas real e hipotética de la prueba y a través de sus niveles conceptuales. Por ejemplo, el equipo 10 argumentó que “son 28 posibilidades [ocurrencias] de 10 mil [ensayos] para el [X=]14, el cual creemos poco probable…consideramos que fue un acto de preferencia ya que teniendo estadísticas fue muy improbable de suceder”.

Con relación al cumplimiento de las hipótesis de aprendizaje de esta tarea, la hipótesis HA4 recibió apoyo empírico bajo dado que ocho de los 12 equipos ignoraron o interpretaron incorrectamente la distribución empírica que modeliza la hipótesis nula. Esto conllevó a considerar que la hipótesis HA5 recibió apoyo empírico medio-bajo, en virtud de que solo cuatro de los ocho equipos que rechazaron la hipótesis nula lo hicieron correctamente utilizando la distribución muestral empírica a la mano. Y respecto a la hipótesis HA6, su apoyo empírico fue catalogado como medio puesto que, de los equipos que rechazaron la hipótesis nula, cinco eligieron la opción “Con este procedimiento se infiere que los niños eligen al juguete ayudante con probabilidad mayor a .5”.

Tarea 3: seis de los 13 equipos recurrieron a la estrategia de argumentar desde una perspectiva hipotética, asumiendo que la hipótesis nula de no diferencia era verdadera. Argumentaron, en general, que el resultado experimental no coincidía con el esperado y por ello debía ser rechazada. Ninguno utilizó la distribución muestral empírica para calcular un p-valor, por lo que sus respuestas evidencian un tránsito incipiente entre la perspectiva hipotética y real y los niveles de abstracción de la prueba (R1, R2 y H1). Como ejemplo de estas respuestas, el equipo E3 mencionó que “no la aceptamos [la hipótesis nula de no diferencia,] porque si se fueran a guiar con él .5 sería un resultado [esperado] entre el 7, 8 y 9”.

Dos equipos realizaron el procedimiento de la prueba de manera correcta y concluyeron (correctamente) que la hipótesis nula no podía ser rechazada; pero al hacerlo, también evidenciaron una tendencia al sincretismo entre la perspectiva hipotética y la real al interpretar la distribución muestral empírica que la modeliza (i.e., sincretismo entre R3 y H3). Por ejemplo, el equipo 9 sugirió que para tener mayor certeza en su conclusión acerca de la hipótesis nula, necesitaría realizar una nueva experimentación en la que participase un mayor número de infantes (i.e., aumentar el tamaño de muestra):

E9: el [p-]valor que nos dio a nosotros está muy lejos del 0.05, ya que nos dio 0.2106 la suma de los valores [de la frecuencia relativa] del [X=]10 al 15, la parte del procedimiento a cambiar es la muestra, ya que siento que ocupamos más niños para tener un resultado más conciso y correcto.

Los cinco equipos restantes realizaron correctamente el procedimiento de la prueba y concluyeron que no podía ser rechazada; realizaron un tránsito apropiado entre las perspectivas real e hipotética y los niveles de abstracción de la prueba, como lo evidencia la respuesta del equipo 5:

E5: …hay que cambiar es la del cálculo del p valor, esta vez se realizará a partir del intervalo de 10 a 16 infantes. El nuevo p valor que se obtuvo es un resultado de 0.2204, podemos concluir en que la hipótesis nula debe ser aceptada ya que este p valor es mayor que el nivel de significancia ($\alpha$=.05). El tipo de error que se podría cometer sería el número 2, el cuál es aceptar la hipótesis como verdadera cuando en realidad los infantes sí tenían una preferencia genuina por el juguete ayudante y no había forma de saberlo.

Al explorar la influencia del cambio de tamaño de muestra en el mecanismo de la prueba, siete de los 13 equipos se caracterizaron por adoptar solamente una perspectiva real de la situación y transitar por todos sus niveles (R1, R2 y R3), al asumir que el planteamiento de la nueva situación bajo análisis podía ser considerada realmente como una replicación del experimento. Tampoco generaron una distribución muestral empírica para modelizar la hipótesis nula de no diferencia y confundieron el concepto de probabilidad con el de p-valor. Por ejemplo, la respuesta del equipo 4 fue:

E4: …con estos dos experimentos nos podemos guiar en que la probabilidad de elección del juguete ayudante es mayor a 0.05%, esto tal vez porque los infantes aun teniendo 10 meses saben distinguir entre lo malo y lo bueno y la mayoría elige al juguete ayudante, por lo que se puede cambiar la hipótesis a que no es tanto al azar, sino que tenemos que tomar en cuenta que los infantes cuentan con cierto tipo de inteligencia y la mayoría elegirá la mejor opción.

Los seis equipos restantes realizaron correctamente el procedimiento de la prueba, evidenciando así un tránsito apropiado entre las perspectivas y niveles conceptuales involucrados. Por ejemplo, el equipo 8 respondió:

E8: …se transforma la hipótesis nula en modelo probabilístico binomial ya que el tamaño pasa a ser n=140 & p=0.5". El p-valor queda como .0108 porque el [X=]84 [en adelante] apareció 216 de 20,000 simulaciones. Podemos determinar después de estos resultados que la probabilidad de que 84 infantes elijan al juguete ayudante es muy baja en comparación con los demás posibles resultados, por lo tanto, se debe rechazar la hipótesis nula en la cual se establece que .05 sea el nivel de significancia. Podríamos caer en el error tipo 1.

Con relación al cumplimiento de las hipótesis de aprendizaje de esta tarea, la hipótesis HA7 recibió apoyo empírico bajo puesto que cinco de los 13 equipos identificaron el cambio en el p-valor a raíz de alterar el resultado muestral. La hipótesis HA8 recibió apoyo empírico medio-bajo, dado que si bien la mayoría de los equipos tomó la decisión correcta de rechazar la hipótesis nula de no diferencia, la mitad lo hizo a partir de la estimación del p-valor, y en ocasiones con dificultades para interpretar correctamente la distribución muestral empírica. La hipótesis HA9 recibió apoyo empírico medio-bajo, en virtud de que seis de los 13 equipos identificaron el cambio en la distribución muestral empírica a raíz de modificar el tamaño de muestra. En general, poco menos de la mitad de los equipos fue capaz de identificar que un cambio en el resultado experimental o el tamaño de muestra sería suficiente para alterar el resultado de la prueba, lo que motivó a considerar que la hipótesis HA10 recibió apoyo empírico medio-bajo.

## Discusión y conclusiones

Nuestros resultados sugieren que es factible provocar y desarrollar el razonamiento con la PH desde un enfoque informal. El contexto de la situación de Hamlin et al. (2007) fue accesible para los estudiantes y el trabajo en este contexto, junto al uso de simulaciones aleatorias, hizo visible el razonamiento de los estudiantes mientras daban sentido al mecanismo de la prueba. En general, el desempeño de casi la mitad de nuestros estudiantes se ubicó entre las categorías de respuestas correctas y parcialmente correctas. Considerando esto, nuestro trabajo aporta evidencias de que el enfoque informal para abordar la PH puede ser favorable para el aprendizaje de los estudiantes (Garfield et al., 2012; Case y Jacobbe, 2018). Si bien consideramos que nuestros estudiantes desarrollaron razonamientos importantes sobre el mecanismo de la prueba, en nuestro trabajo se destaca la alta complejidad que implica adoptar una perspectiva hipotética para el planteamiento de la hipótesis nula y su interpretación, además de coordinarse apropiadamente con la perspectiva real e hipotética durante el desarrollo de toda la prueba. Estos patrones han sido documentados en nuestras investigaciones de referencia (Lane-Getaz, 2017; Case y Jacobbe, 2018).

Dos retos para el aprendizaje especialmente complejos se detonan, respectivamente, al momento de interpretar la distribución muestral empírica que modela la hipótesis nula o al modificar algún componente de la prueba. Respecto al primer caso, nuestros resultados están en línea con lo reportado por Garfield et al. (2012) y Lane-Getaz (2017), puesto que muchos de nuestros estudiantes interpretaron en diferentes ocasiones que la distribución muestral empírica era un modelo de replicación de la situación bajo estudio. Respecto al segundo caso, el cumplimiento medio-bajo de nuestras hipótesis de aprendizaje en la última tarea sugieren que los estudiantes tienen un dominio muy inestable de los elementos estadísticos y probabilísticos involucrados en la prueba. Esto se basa en que alterar el tamaño de muestra o el resultado experimental representó considerables dificultades para mantener una apropiada coordinación entre la perspectiva real e hipotética en la PH y los elementos que la conforman; este patrón ha sido poco nulamente reportado en nuestra literatura de referencia. Finalmente, consideramos que un rediseño de la trayectoria que podría ser fructífero de explorar sería, como tercera tarea, explorar otra situación distinta a la de Hamlin et al. (2007), lo cual permitiría que los estudiantes realicen la PH manteniendo la hipótesis nula como un modelo 50-50 o de no diferencia y así consolidar un primer esquema general de su mecanismo. Este esfuerzo de investigación tendrá que ser explorado en otra contribución.

## Referencias bibliográficas

Batanero, C., y Díaz, C. (2015). Aproximación informal al contraste de hipótesis. En J. M. Contreras, C. Batanero, J. D. Godino, G.R. Cañadas, P. Arteaga, E. Molina, M.M. Gea y M.M. López (Eds.), *Didáctica de la*

*Estadística, Probabilidad y Combinatoria 2*, (pp. 207-214). Granada, 2015.

Burril, G. (2019). Building concept image of fundamental ideas in statistics: The role of technology. En G. Burril y D. Ben-Zvi (Eds.), *Topics and trends in current statistics education research* (pp. 123-149). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-03472-6_6.

Case, J., y Jacobbe, T. (2018). A framework to characterize student difficulties in learning inference from a simulation-based approach. *Statistics Education Research Journal*, *17*(2), 9-29. https://doi.org/10.52041/serj.v17i2.156

Gal, I. (2002). Adults' statistical literacy: Meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review*, 70, 1-51. https://doi.org/10.2307/1403713

Garfield, J., delMas, R., y Zieffler, A. (2012). Developing statistical modelers and thinkers in an introductory, tertiary-level statistics course. *ZDM–The International Journal on Mathematics Education*, *44*(7), 883-898. https://doi.org/10.1007/s11858-012-0447-5

Hamlin, J. K., Wynn, K., y Bloom, P. (2007). Social evaluation by preverbal infants. *Nature*, *450*, 557–559. https://doi.org/10.1038/nature06288

Harradine, A., Batanero, C., y Rossman, A. (2011). Students and teachers' knowledge of sampling and inference. In Batanero, C., Burrill, G. & Reading, C. (Eds.), Teaching Statistics in School Mathematics: Challenges for Teaching and Teacher Education. A Joint ICMI/IASE Study (pp. 235-246). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-1131-0_24

Inzunsa, S. y Jiménez, J. (2013). Caracterización del razonamiento estadístico de estudiantes universitarios acerca de las pruebas de hipótesis. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *16*(2), 179-211. https://doi.org/10.12802/relime.13.1622

Lane-Getaz, S. J. (2017). Is the p-value really dead? Assessing inference learning outcomes for social science students in an introductory statistics course. *Statistics Education Research Journal*, *17*(1), 357-399.

Liu, Y., y Thompson, P. W. (2009). Mathematics teachers' understandings of protohypothesis testing. *Pedagogies*, *4*(2), 126-138. DOI:10.1080/15544800902741564

López-Martín, M. D. M., Batanero, C. y Gea, M. M. (2019). ¿Conocen los futuros profesores los errores de sus estudiantes en la inferencia estadística?, *Bolema*, *33*(64), 672-693. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v33n64a11

Rossman, A. (2008). Reasoning about informal statistical inference: One statistician's view. *Statistics Education Research Journal*, *7*(2), 5-19. DOI:10.52041/serj.v7i2.467

Simon, M. (2014). Hypothetical Learning Trajectories in Mathematics Education. En: Lerman. S. (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education*, Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_72

Zieffler, A., Garfield, J., Delmas, R. y Reading, C. (2008). A framework to support research on informal inferential reasoning. *Statistics Education Research Journal*, *7*(2), 40-58. https://doi.org/10.52041/serj.v7i2.469

VOL 36, NÚMERO 1, AÑO 2023

# VIDEOJUEGO SERIO APLICADO EN LA TRANSFORMACIÓN DE GRAFICAS REPRESENTADAS EN $R^2$

# SERIOUS VIDEO GAME APPLIED IN THE TRANSFORMATION OF GRAPHICS REPRESENTED IN $R^2$

**Karla Liliana Puga Nathal, María Eugenia Puga Nathal, Erick Eduardo Gutiérrez de la Torre, Natalia Cisneros Aguilar**
**Tecnológico Nacional de México campus Ciudad Guzmán. (México)**
karlalpn4@gmail.com, maria.pn@cdguzman.tecnm.mx, M19291007@cdguzman.tecnm.mx, natalia.ca@cdguzman.tecnm.mx

**Resumen**:
Se presentan los resultados de un estudio cualitativo que consiste en la implementación de un videojuego serio creado para promover habilidades en estudiantes de nivel superior en la graficación de funciones mediante la técnica de transformaciones. La propuesta se fundamentó en la teoría de Representaciones Semióticas, enfatizando la conexión entre los registros geométrico y algebraico de funciones. Las etapas desarrollo e implementación progresaron de acuerdo con el Diseño Centrado en el Usuario. Un hallazgo importante en el estudio fue la motivación de los estudiantes adultos en el desarrollo de habilidades a través de escenarios lúdicos.

**Palabras clave**: videojuego serio, graficación, registros de representación

**Abstract**:
This paper presents the results of a qualitative study that consists of the implementation of a serious video game created to promote skills in university students in the graphing of functions through the technique of transformations. The proposal was based on the theory of Semiotic Representations, emphasizing the connection between the geometric and algebraic registers of the functions. The development and implementation stages progressed in accordance with User-Centered Design. An important finding in the study was the motivation of adult students in the development of skills through playful scenarios.

**Keywords**: serious video game, graphics, representation records

## Introducción

El análisis de graficas es necesario no solo para entender el comportamiento de una función mediante su representación geométrica, sino también para la comprensión del comportamiento de una gran variedad de fenómeno físicos, sociales, económicos, entre otros. En las carreras universitarias, la graficación y análisis de gráficas son conocimientos esenciales para cursos como cálculo diferencia e integral, cálculo multivariable, cálculo vectorial, ecuaciones diferenciales, entre otros y para asignaturas especializadas en diversos campos de la ciencia.

Existen trabajos en los que destaca la importancia del estudio de funciones y sus gráficas en los niveles de educación media y superior, así como las dificultades que enfrentan los estudiantes cuando se trata de contextualizar un modelo o analizar un fenómeno, o simplemente interpretar una gráfica (Real, 2013; Bejarano, 2017; González y Morelos, 2020; Choco, 2019; Sandoval, 2017). Algunos resultados demuestran que el estudiante presenta deficiencias relacionadas con la interpretación de la expresión matemática que define a una función, no logran obtener la gráfica a partir de esta, se les dificulta la interpretación de las escalas en los ejes, no logra comprende la relación que existe entre las variables y su dependencia, carecen de técnicas de análisis del comportamiento de gráficas, deficiencias en el concepto de función.

Los estudiantes presentan deficiencias en la notación de expresiones y no logran conectar algunos registros de representación del concepto como son el algebraico, geométrico y numérico. Desafortunadamente el tiempo que se le pude dedicar al estudio de las funciones y su grafica muchas veces no es suficiente para que el alumno adquiera habilidades e incluso logre un dominio del concepto. En ese tiempo se espera que el estudiante sea capaz de representar e interpretar una función en su forma numérica, gráfica y algebraica. Este problema provoca dificultades en el estudiante para la construcción de nuevos conceptos matemáticos y la incapacidad de interpretar fenómenos propios de determinada área del conocimiento, e interpretarlos a partir de su representación gráfica.

El primer acercamiento (y el más común) para la representación geométrica de una función a partir de su modelo matemático es el método *punto a punto*, que consiste en generar una serie de coordenadas (x, y), ubicarlos en el plano cartesiano y unirlos mediante pequeños segmentos rectilíneos o curvos. Lo limitado de esta técnica es que los estudiantes no tienen claro cuántos puntos son los suficientes para trazar su gráfica, no identifican detalles como concavidad, crecimiento y continuidad de la función. Si el estudiante no visualiza la existencia de discontinuidades une todos los puntos trazados y obtiene resultados erróneos.

Identificar las coordenadas de los puntos de una gráfica es necesario para entender algunas condiciones de la función, pero como técnica de graficación es limitada, es necesario complementar estos procesos con otro tipo de análisis. Existen propuestas interesantes que plantean la graficación de funciones a partir de un conjunto base de funciones $f(x)$. Se trata de analizar el efecto que tienen los parámetros a, b y c en estas funciones base cuando aparecen modelos de la forma $y = a f(x-c) + b$. Puntualmente se analizan transformaciones a $f(x)$ como traslaciones (horizontales y verticales, expansión y compresión, así como de reflexión. Graficar a partir de un conjunto base de funciones resulta un método accesible para el estudiante, por tanto, puede estudiarlo de manera autogestiva.

Existe en el mercado una gran cantidad de software creado para el área de matemáticas, pero en ocasiones carecen de un diseño instruccional para su uso que permita que el estudiante se apropie por sí mismo de algún concepto. Por esto, es necesario elaborar estrategias que promuevan el aprendizaje autogestivo y permitan al estudiante de manera independiente interactuar con materiales que coadyuven a la construcción de conceptos y desarrollo de habilidades, en este caso en el trazo y análisis de una gráfica. En la presente investigación se plantea como alternativa un videojuego serio diseñado mediante una metodología centrada en el usuario, para promover habilidades en la interpretación geométrica de gráficas bidimensionales a partir de la transformación de funciones.

## Marco teórico

La investigación se fundamenta desde dos vertientes. Primeramente, fue necesario entender los elementos teóricos que subyacen a la construcción del pensamiento matemático en estudiantes universitarios y por otro conocer la estructura teórica de los videojuegos serios.

***Construcción del pensamiento matemático del individuo***

La investigación epistemológicamente se fundamenta desde la de teoría de Representaciones Semióticas (Duval, 1993), que establece que los conceptos matemáticos, a diferencia de otros conceptos son tratados desde diversos registros de representación, ya que las diversas representaciones son las que permiten el acceso y la aplicación de los objetos matemáticos.

Particularmente en matemáticas, los signos corresponden a las diversas formas que existen de representar un mismo concepto, se destacan: la representación algebraica (modelo matemático), la representación geométrica (gráficas, figuras), la representación numérica (tablas, cantidades), la representación verbal (con palabras). En el caso de la propuesta, se incluyen dos registros de representación, el geométrico y el algebraico. El usuario transitará desde un registro a otro, lo cual permitirá observar la manera en que establece conexiones entre estas representaciones.

Duval hace referencia a la Semiosis como la actividad encargada de la producción de representaciones, la cual depende de los signos utilizados en el sistema que se desea representar y la Noesis que es la actividad que desarrolla el sujeto para obtener los conceptos y va acompañado de los métodos de aprendizaje y actividades que realizo (Hernández et al., 2017).

Según Duval, los sistemas semióticos deben permitir tres actividades cognitivas las cuales son:

- Encontrar las características de un objeto o concepto y de esta forma representarlo dentro de un sistema semiótico en concreto.
- Utilizar la representación del concepto u objeto y aplicar las reglas, funciones y leyes propias del sistema de representación semiótica, llevando a un aprendizaje más completo y profundo que solo la representación dentro del sistema.
- Utilizar la representación del concepto dentro del sistema y trasladarlo a una representación a otra correspondiente en otro sistema semiótico diferente.

En el caso del videojuego, como parte de la semiosis, el estudiante deberá caracterizar cada modelo matemático para asociarlos con la gráfica correspondiente y estudiar el comportamiento de las gráficas detalladamente para asociarlas con el modelo matemático que corresponda.

***Marco de referencia para el diseño de un juego serio***

Caillois (1986) define el juego como una actividad con las siguientes características:

1. Libre: en la que jugar no es obligatorio; si lo fuera, perdería todo su atractivo y calidad como diversión.

2. Independiente: limitada por límites de espacio y tiempo, definida y fijada con antelación.

3. Incierta: el curso de la cual no puede ser determinado, ni el resultado obtenido previamente, y deja espacio para innovación a la iniciativa del jugador.

4. Improductiva: no crea ni bienes, ni riqueza, ni nuevos elementos de ningún tipo; y, excepto por el intercambio de propiedad entre el jugador, termina en una situación idéntica a la que empezó.

5. Gobernado por reglas: bajo convenciones que suspenden las leyes ordinarias, y por el momento establece una nueva legislación.

6. Ficticio: Acompañada de una conciencia especial de una segunda realidad o de una irrealidad libre, en contraposición de la vida real.

Los juegos han constituido una poderosa herramienta de aprendizaje de conductas y actitudes necesarias para el eficiente desempeño sociocultural. Por otro lado, los videojuegos serios (Marcano, 2008) son aquellos que se usan para entrenar, informar y educar a la población. Se fundamentan principalmente en principios pedagógicos de acuerdo con sector social al que van dirigidos. Su finalidad no es la diversión sino la instrucción.

En la actual sociedad digital los videojuegos proveen a los *videojugadores* de habilidades y destrezas propias de la época que facilitan el aprendizaje de procesos complejos con eficacia (Marcano, 2008). Zyda (2005) define el videojuego serio como una prueba mental, llevada a cabo frente a una computadora de acuerdo con unas reglas específicas, que usa la diversión como modo de formación, con objetivos en el ámbito de la educación, sanidad, política pública y comunicación estratégica. Por lo tanto, los juegos serios están hechos para proporcionar un contexto de entretenimiento y auto fortalecimiento con el que motivar, educar y entrenar a los jugadores (Chipia, 2014).

Para ser eficaces, los juegos serios deben incorporar principios cognitivos, de aprendizaje y pedagógicos en su diseño y estructura. (Greitze et al., 2010). Es importante enfatizar que, mientras los juegos serios son frecuentemente vistos como instruccionales “de facto”, la combinación de entretenimiento y adquisición de conocimiento está lejos de ser inmediata. Los juegos son fácilmente motivadores por sí mismos, sin embargo, el siguiente paso hacia la efectividad instruccional es más difícil de conseguir. (Prieto y Medina, 2015).

La teoría de carga cognitiva (Sweller, 2020) menciona que la instrucción está basada en los hechos, leyes, principios y teorías que conforman el contenido de una disciplina (Kirschner et al., 2010). Kolb (1984) define el aprendizaje como “el proceso en donde se crea conocimiento a través de la transformación de la experiencia”. Kolb define cuatro posibles estilos de aprendizaje: divergente (sentir y mirar), asimilativo (mirar y pensar), convergente (hacer y pensar) y acomodativo (hacer y sentir). Estos estilos están posiblemente interrelacionados y pueden resultar en cuatro diferentes resultados: experiencia concreta (sentir), observación reflectiva (mirar), conceptualización abstracta (pensar) y experimentación activa (hacer).

Al diseñar un videojuego serio, se deben de tomar en cuenta las características de aprendizaje de los alumnos para que logren aplicar sus conocimientos en escenarios de la vida real. Se identificaron seis tipos de patrones para tomar en cuenta al diseñar un videojuego serio (Kiili et al., 2014):

- Patrones de integración: describen soluciones que integran los elementos del juego y los objetivos de aprendizaje de forma pedagógicamente significativa.
- Patrones de cognición: tratan de obtener la atención del jugador para enfocarla en contenido relevante y motivan al jugador para que reflexione en las experiencias obtenidas, valide hipótesis y forme nuevas estrategias.
- Patrones de presentación: Buscan asegurar que el procesamiento de la información por parte del jugador sea efectivo. Los alumnos son retados a extraer información relevante del mundo del videojuego, escoger las partes correspondientes de la información e integrar dichos elementos de manera coherente.
- Patrones de enseñanza y patrones de interacción social: Ambos están interrelacionados con los patrones de cognición y describen formas de facilitar el aprendizaje o la enseñanza a través de actividades sociales y elementos de juego construidos socialmente. Se propone incluir en el juego herramientas que faciliten el diagnóstico del aprendizaje y comportamiento de los jugadores.
- Patrones de compromiso: intentan motivar a los jugadores para mejorar su desempeño en el juego, incrementando el tiempo de juego y facilitando el aprendizaje.

## Metodología

### *Diseño del videojuego*

El desarrollo del videojuego se sustenta en el Diseño Centrado en el Usuario. Esta metodología propone involucrar a usuarios potenciales en el proceso de diseño, por medio de pruebas y análisis. Se fundamenta en un conjunto de métodos y técnicas que comparten un objetivo común: conocer y comprender las necesidades, limitaciones, comportamiento y características del usuario (Goodman & Kuniavsky, 2012).

Una de estas pruebas es *el test* de usuario, el cual consiste observar cómo un grupo de usuarios llevan a cabo una serie de tareas encomendadas por el evaluador, analizando los problemas de usabilidad con los que se encuentran durante el proceso. Es importante reclutar participantes que cumplan con el perfil que tendrán nuestros usuarios reales, para esto se propone seguir una secuencia de tres pasos propuesta por Goodman & Kuniavsky (2012): determinar la audiencia del sitio web a evaluar, localizar a miembros representativos de esa audiencia, y convencerles para participar.

De acuerdo con Nielsen (s.f.), realizar un total de tres pruebas espaciadas en tres etapas diferentes del desarrollo, con un aproximado de cinco participantes en cada una de ellas, logrará mejorar de forma iterativa la usabilidad de la aplicación. Dichas pruebas deben ser razonables, específicas, factibles, llevar a un objetivo mayor y tener una duración razonable. En la investigación, el diseño del videojuego se dividió en varias etapas, las actividades desarrolladas en cada una son las siguientes:

- Fase de planeación: En esta fase se elaboró la documentación necesaria y se diseñó la estructura general del juego, durante esta fase no se programó. Esta fase incluye las siguientes actividades:
    - Creación del documento de diseño: Se creó el documento de diseño en el que se describe el concepto general del videojuego, sus fundamentos y los aspectos técnicos del videojuego como los requisitos, plataformas compatibles, etc.
- Fase de prototipo: En esta fase se diseñan y programan las mecánicas básicas, evaluando cada una hasta encontrar las más adecuadas de acuerdo con el objetivo de aprendizaje planteados. Esta fase incluye las siguientes actividades:
    - Diseño de los fundamentos: Se diseñaron los fundamentos que sirvieron como base para el funcionamiento del juego.
    - Diseño y programación de las mecánicas básicas: Se probaron y diseñaron las mecánicas que se utilizaron en la creación de los diferentes desafíos del videojuego, llamados *niveles*.
- Fase Alfa: En esta fase se utilizaron las mecánicas junto con animaciones y sonidos temporales que fueron cambiados en las fases posteriores para crear una versión básica del videojuego.
    - Creación de la interfaz de la versión alfa: Se crearon los menús y las interfaces que verá el usuario, pero de una forma muy básica.
    - Creación de los gráficos y animaciones de la versión alfa: Se diseñaron las imágenes y animaciones de los personajes y fondos, así como las partículas y efectos gráficos, pero de una forma muy básica.
    - Creación del nivel cero: El nivel cero es el primer nivel que se crea en un juego y por lo general nunca aparece en la versión final. Este nivel sirve como un entorno de pruebas y permite al diseñador ver como interactúan las diferentes mecánicas entre sí.
- Primera fase de pruebas y corrección de errores: Se hicieron pruebas con usuarios que estudian la carrera de ingeniería en sistemas computacionales quienes evaluaron el prototipo. Además, profesores el área de matemáticas revisaron los contenidos y la estructura didáctica de la propuesta. En esta fase se corrigieron los errores encontrados y se modificó el videojuego de acuerdo con los resultados de la evaluación.
- Fase beta: En esta fase se mejoró el juego para que se vuelva lo más parecido posible al producto final.
    - Creación de la interfaz: Se crearon los menús y las interfaces que verá el usuario para reemplazar los de la versión alfa.
    - Creación de los gráficos y animaciones: Se diseñaron las imágenes y animaciones de los personajes y fondos, así como las partículas y efectos gráficos para reemplazar los de la versión alfa.
    - Creación y diseño de la música y sonido: Se diseñaron los efectos de sonido y la música de los niveles.
    - Diseño y programación de los niveles: Se diseñaron y crearon los niveles y la manera en la que progresará el usuario utilizando las interfaces, gráficos y animaciones de la versión beta.
- Segunda fase de pruebas y corrección de errores: Nuevamente se realiza una evaluación del videojuego. Las pruebas las realizan estudiantes de ingeniería quienes focalizan la dinámica del juego, así como la interfaz. Se

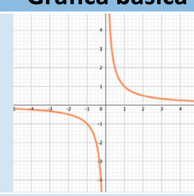
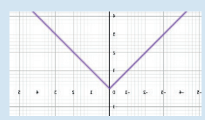
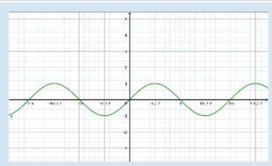
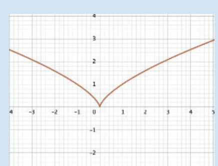
realizan las modificaciones pertinentes aunadas con la evaluación que nuevamente realiza el grupo de docentes del área de matemáticas.

Es importante resaltar que se realizó una tercera evaluación del videojuego, nuevos usuarios jugaron y profesores de matemáticas también participaron. En esta etapa se creó la versión adecuada para ser aplicada en estudiantes de ingeniería y así evaluar su impacto en el desarrollo de habilidades en la graficación de funciones. Esta versión, denominada *Beta*, consiste en un videojuego ambientado en una galaxia en donde mediante una nave espacial (piloteada por el usuario) se deben combatir invasores malignos que pretenden capturar a los habitantes de un planeta. El usuario puede transitar por 45 oleadas, que son los desafíos en el videojuego (niveles) y en la medida que progresan las oleadas aumenta el reto para el jugador.

Al videojuego se incorporan 14 familias de funciones denominadas f(x), reconoce la representación canónica de cada una, aleatorizar las constantes a, b, c del modelo

y = a f(x-b) + c y muestra al usuario el modelo matemático y éste deberá asociarlo con su gráfica y debe acertar para no ser derrotado. En la tabla 1 se muestran algunas funciones incorporadas.

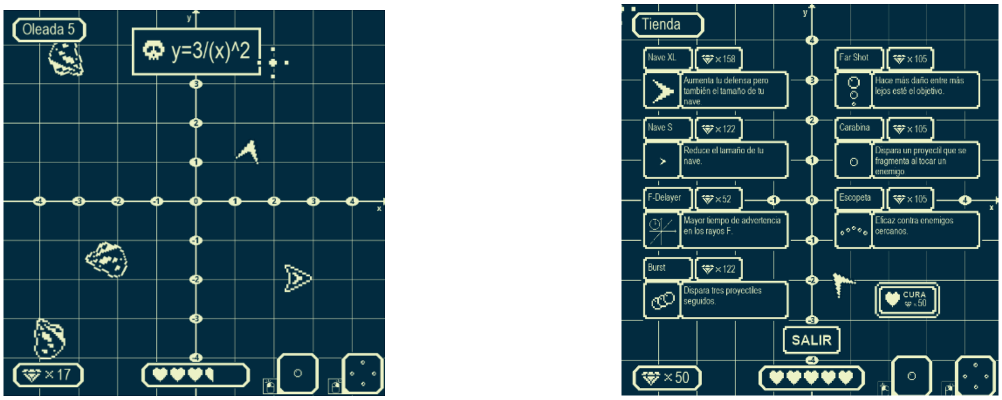
**Tabla 1.** *Algunas funciones base.*

| Forma canónica | Gráfica básica |
|---|---|
| f(x)= $\frac{1}{x}$ |  |
| f(x)= $\lvert x \rvert$ |  |
| f(x) = sin (x) |  |
| f(x)= $(x)^{\frac{2}{3}}$ |  |

**Fuente:** Gutiérrez (2021, p. 15).

En la figura 1 se muestra el ejemplo de un escenario del videojuego. Se incorporó un tutorial en donde se explica al usuario la técnica de graficación utilizada y otro apartado en el que se detalla la mecánica del juego.

**Figura 1.** *Videojuego serio Graficalax.*



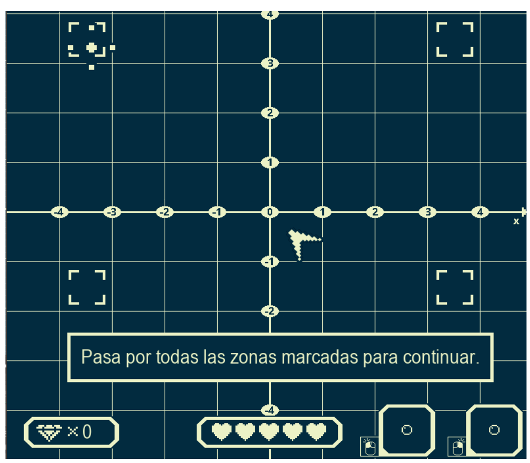

a) Señal de advertencia de los rayos F

b) Tienda para potenciar recursos del usuario

**Fuente:** Gutiérrez (2021, p. 33).

En la figura 2 se muestra la pantalla en la que el usuario es entrenado en la mecánica del juego. Esta etapa fue importante para la investigación ya que era menester asegurar que los usuarios comprendieran las reglas del juego y cómo jugar para que un mal manejo de este no afectara en la promoción de habilidades.

**Figura 2.** *Tutorial para controlar la nave.*




**Fuente:** Gutiérrez (2021, p. 34).

El trabajo de campo se realizó con 15 estudiantes universitarios de diferentes carreras de ingeniería. La muestra se conformó con voluntarios, el requisito de reclutamiento fue estar inscritos en el primer semestre de su carrera y que no conocieran la técnica de graficación abordada en la investigación. Se decidió esa cantidad de estudiantes debido a las condiciones de aislamiento social por la que atravesaba el país. La evaluación de la propuesta transitó a través de las siguientes etapas:

Etapa I.- Se aplicó un pretest a los estudiantes seleccionados, el cual consistió en preguntas relacionadas con el modelo $y = af(x - b) + c$ y construcción de gráficas.

Etapa II.- Se solicitó a los estudiantes que trabajaran con el videojuego y que previamente analizaran los tutoriales

Etapa III.- Se aplicó un post-test a los alumnos, el cual sigue el mismo formato que el pretest, pero con diferentes ecuaciones.

Etapa IV.- Se aplicó la prueba t-student para analizar los datos. El propósito de dicho análisis fue evaluar si la media del grupo experimental (estudiantes después de jugar con el videojuego *Graficalaxy*) es significativamente mayor a la media del grupo de control (estudiantes antes de jugar con *Graficalaxy*).

## Resultados

Uno de los resultados relevantes en la investigación es la implementación del videojuego serio para computadora, ya que resulta versátil e intuitivo, fue evaluado por estudiantes universitarios de diferentes semestres y carreras y los resultados de esta evaluación son satisfactorios Se demostró que los usuarios que jugaron mejoraron sus habilidades en la graficación de funciones, como se muestra en la figura 3.

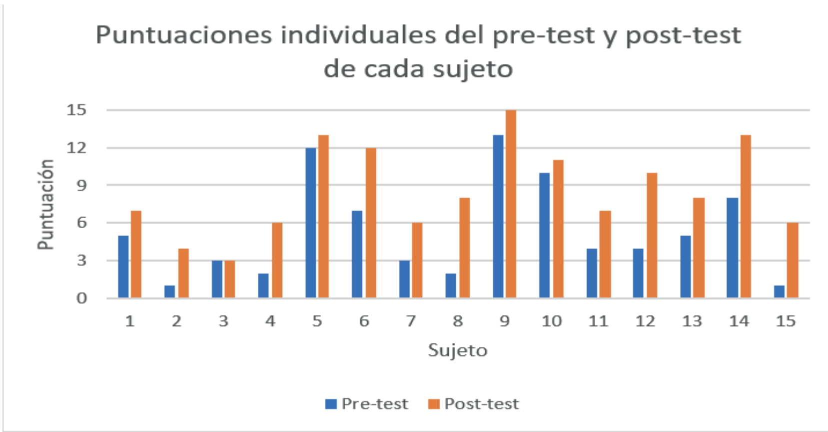
Se realizó una encuesta para conocer la experiencia de los estudiantes en el uso del videojuego. Se aplicó la escala de Linkert (Matas, 2018) ponderando de esta manera: Totalmente en desacuerdo (1), En desacuerdo (2), Ni de acuerdo ni en desacuerdo (3), De acuerdo (4) y Totalmente de acuerdo (5).

La encuesta consistió en las siguientes preguntas:

1. ¿Qué tan divertido te pareció el juego?
2. ¿Qué tan intuitivos eran los controles?
3. ¿Qué tan difícil fue el juego?
4. ¿Qué tan fácil era detectar los distintos elementos en pantalla?
5. ¿Qué tan claro era detectar el texto en pantalla?
6. ¿Qué tanto te gustó el estilo gráfico del juego?
7. ¿Qué tanto crees que aprendiste al jugarlo?
8. ¿Qué tan probable es que vuelvas a jugarlo?

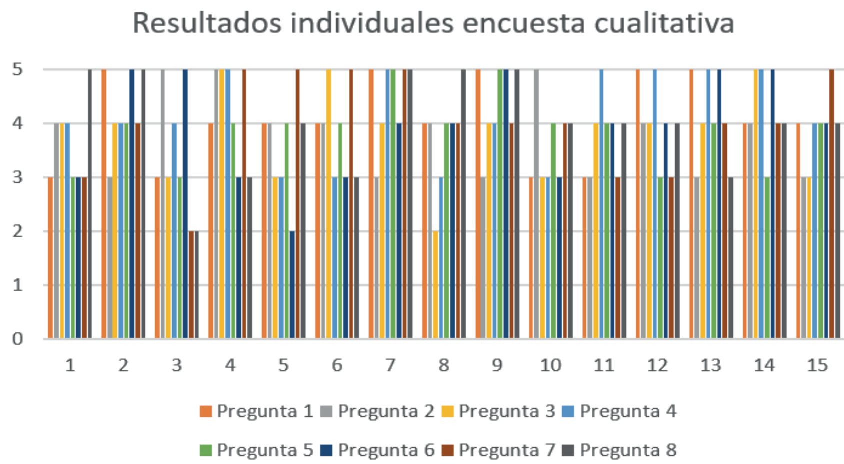
En la figura 4 se muestran los resultados de la encuesta. Se puede observar que los estudiantes se divirtieron con el videojuego, pese a que resultó todo un reto para la investigación seleccionar una temática. Esta se hizo con base a una encuesta, realizada previo a su diseño, que se aplicó a más de 100 estudiantes universitarios y la mayoría de las preferencias se inclinaron a juegos de estrategias, bélicos o espaciales, optándose por los primeros y terceros.

**Figura 3.** *Puntuaciones del pretest y postest.*




**Fuente:** Gutiérrez (2021, p. 37).

**Figura 4.** *Resultados de la evaluación del videojuego.*




**Fuente:** Gutiérrez (2021, p. 39).

## Conclusiones

Los resultados demuestran que las habilidades en la graficación de funciones de los usuarios mejoraron tras utilizar el videojuego serio bajo las condiciones en las que se aplicó. Se observó que el usuario interactúa con los distintos elementos del videojuego, asocia estos elementos con los conceptos que se quieren enseñar y, por medio de la repetición, desarrolla las habilidades en la graficación de funciones mediante la transformación de gráficas.

Una aportación importante de la investigación al campo de las matemáticas es la creación de una herramienta didáctica para la graficación de funciones, accesible para estudiantes de educación media y superior. Otra aportación que se destaca, de acuerdo con los resultados del estudio es la posibilidad de generar escenarios extracurriculares, diseñados metodológicamente y con una intención didáctica que enriquezcan los aprendizajes áulicos de manera autogestiva, que promuevan experiencias de aprendizaje y que sean atractivos.

El mayor reto al diseñar un videojuego dirigido estudiantes universitarios, es lograr el balance entre aprendizaje y entretenimiento, captar la atención de los estudiantes y dirigirla hacia los elementos didácticos del juego, así como motivarlo a seguir jugando por su cuenta. Encontrar los mecanismos para mostrar conceptos abstractos que comúnmente forman parte de la formación de los ingenieros y llevarlos como elementos centrales en un videojuego serio, es una de las mayores dificultades que se enfrentaron en la investigación al desarrollar un videojuego. Al respecto, el videojuego motivó a los estudiantes al estudio de las funciones y sus gráficas, su gamificación fue la adecuada para mantener la atención de los usuarios y de esta manera lograr el objetivo propuesto.

Como recomendación para quienes desean incursionar en la implementación de alternativas didácticas similares es tener presente que las mayores dificultades a las que se enfrentan los usuarios de videojuegos serios están en la curva de aprendizaje, encontrar la motivación para progresar y adaptarse a los controles y a la dificultad del videojuego. Esto se observó en todas las etapas de evaluación que se realizaron. Como trabajo futuro, se espera expandir el videojuego a diferentes plataformas para ampliar su alcance y crear opciones para multijugadores.

## Referencias bibliográficas

Bejarano-Arias, M.E., & Ortíz-Bultrago, J. (2017). Modelización matemática y GeoGebra en el estudio de funciones. Una experiencia con estudiantes de ingeniería. Revista de Ciencias de la Educación, 50(27), 348-379.

https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=7478886

Caillois, R. (1986). *Los juegos y los hombres, la máscara y el vértigo*. Fondo de Cultura Económica.

Chipia-Lobo, J. F. (2014). Juegos serios: Alternativa innovadora. Conocimiento libre y educación, 2(2), 3-21. https://www.researchgate.net/profile/Joan-Chipia-Lobo/publication/280880572_Juegos_Serios_Alternativa_Innovadora/links/55ca0b7508aebc967dfbd749/Juegos-Serios-Alternativa-Innovadora.pdf

Choco-Bonilla, A. F. (2019.). *Dificultades y errores de estudiantes de grado undécimo en torno al estudio de las funciones racionales* [Tesis de maestría, Universidad del Valle de Colombia]. Biblioteca Digital de la Universidad del Valle. https://bibliotecadigital.univalle.edu.co/bitstream/handle/10893/20759/Dificultades-Errores-Estudiantes-Chocó-Andrés-3469-C545d.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Science Cognitives*. Consultado el 3 de diciembre de 2021. https://mathinfo.unistra.fr/websites/math-info/irem/Publications/Annales_didactique/vol_05/adsc5_1993-003.pdf

González-Rodríguez, I., Zaldívar-Rojas, J. D. y Morelos-Escobar, S. C. (2020). Dificultades en la construcción e interpretación de gráficas de funciones en estudiantes de nivel superior. Acta Latinoamericana de matemática Educativa, 33(1), 40-47. https://www.clame.org.mx/documentos/alme33_1.pdf

Gutiérrez, E. E. (2021). *Videojuego serio para el desarrollo de habilidades en el análisis de gráficas bidimensionales* [Tesis de maestría no publicada, Tecnológico Nacional de México campus Ciudad Guzmán].

Greitzer, E., Tan, C. and Graf, M. (2010). *Internal Flow: Concepts and Applications*. Cambridge University Press.

Hernández, A., Cervantes, J., Ordoñez, J. y García, M. (2017). Teoría de Registros de Representaciones Semióticas. Consultado el 26 de diciembre de 2021. https://www.researchgate.net/publication/315814323_TEORIA_DE_REGISTROS_DE_REPRESENTACIONES_SEMIOTICA.

Kiili, K., Lainema, T., De Freitas, S., & Arnab, S. (2014). Flow framework for analyzing the quality of educational games. Entertainment Computing, 5(4), 367-377. https://doi.org/10.1016/j.entcom.2014.08.002

Kirschner, P., Sweller, J. & Clark, R. (2010). Why Minimal Guidance During Instruction Does Not Work: An Analysis of the Failure of Constructivist, Discovery, Problem-Based, Experiential, and Inquiry-Based Teaching. Educational Psychologist, 41(2), 75-86. http://dx.doi.org/10.1207/s15326985ep4102_1

Kolb, D. (1984). *Experiential learning experiences as the source of learning development.* Prentice Hall.

Goodman, E. & Kuniavsky, M. (2012). *Observing The User Experience: A Practitioner's Guide to User Research.* Elsevier.

Marcano, B. (2008). Juegos serios y entretenimiento en la sociedad digital. Teoría de la Educación. Educación y Cultura en la Sociedad de la información, 3(9), 93-107. http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=201017343006

Matas, A. (2018). Diseño del formato de escalas tipo Linkert: un estado de la cuestión. Revista electrónica de investigación educativa, 20(1), 4-16. https://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1607-40412018000100038

Nielsen, J. (s.f.). Why You Only Need to Test With 5 Users. UseIt.com Alertbox. https://www.nngroup.com/articles/how-many-test-users/

Prieto, R. A, & Medina, N. (2015). Serious Game: Systematic Mapping and Taxonomies for Clasification. Consultado el 20 de febrero de 2022.

https://www.researchgate.net/publication/303924118_GAME_SYSTEMATIC_MAPPING_AND_TAXONOMIES_FOR_CLASIFICATION

Real, M. A. (2013). Uso del ordenador como facilitador en el análisis y la graficación de funciones. SEMUR, Sociedad de Educación Matemática Uruguaya, 1(1), 919-922. http://funes.uniandes.edu.co/18413/1/Real2013Uso.pdf

Sandoval, L. (2017). Guía Didáctica para el análisis e Interpretación de gráficas en los estudiantes del primer ciclo de ingeniería mecánica y eléctrica de la universidad Nacional de Jaén. Consultado el 12 de enero del 2022. https://hdl.handle.net/20.500.12893/6186

Sweller, J. (2020). Cognitive load theory and the use of educational technology. Educational Technology. 68(1), 1-16. http://dx.doi.org/10.1007/s11423-019-09701-3.

Zyda, Michael. (2005). From visual simulation to virtual reality to games. Computer. 38 (9), 25-32. https://doi.org/10.1109/MC.2005.297

VOL 36, NÚMERO 1, AÑO 2023

# UN ACERCAMIENTO AL ESTUDIO DE ÓRDENES DE VARIACIÓN CON EL USO DE UN VIDEOJUEGO

# AN APPROACH TO THE STUDY OF VARIATION ORDERS BY USING A VIDEO GAME

**Francisco Agustín Zúñiga Coronel**
**Universidad de Los Altos de Chiapas. (México)**
maestro coronel@hotmail.com

**Resumen**:
En este trabajo se exponen algunos argumentos sobre el estudio de órdenes de variación con el uso de un videojuego. Se parte de la problemática sobre la dificultad que tienen estudiantes de nivel superior al analizar ideas variacionales en fenómenos físicos. Se consideran elementos de un sistema de referencia variacional para el diseño de una situación de aprendizaje conformada por la simulación de una montaña rusa, comportamientos y gráficas del movimiento, tablas y predicciones. Las actividades se implementaron con diez estudiantes de ingeniería civil de la Universidad de Los Altos de Chiapas. Se concluye que, los estudiantes relacionan la velocidad con la altura y la velocidad con el tiempo. Reconocen solo un primer orden de variación al argumentar que el tren sube y después baja sobre la montaña rusa. Presentan dificultades en articular un segundo y tercer orden de variación.

**Palabras clave**: sistema de referencia variacional, órdenes de variación, videojuego.

**Abstract**:
This research presents some arguments on the study of variation orders with the use of a video game. It starts from the difficulty of higher education students when analyzing variational ideas in physical phenomena. Elements of a variational reference system are taken into account for the design of a learning situation formed by the simulation of a roller coaster, behaviors and movement graphs, tables and predictions. The activities were implemented with ten civil engineering students at the University of Los Altos de Chiapas. It is concluded that students relate speed with height, and speed with time. They recognize only a first order of variation by arguing that the train goes up and then goes down on the roller coaster. They present difficulties in articulating a second and third order of variation.

**Keywords**: variational reference system, variation orders, video game.

## Introducción

El Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLVar) se encarga del estudio del cambio para la construcción de objetos matemáticos a partir de prácticas variacionales. Una de las problemáticas que plantea es la dificultad que tienen estudiantes de nivel superior al analizar ideas variacionales en fenómenos físicos. Esta dificultad se debe a que en el contexto escolar se priorizan procesos algorítmicos que se direccionan a un trabajo algebraico, donde las ideas variacionales no se reconocen (Vrancken & Engler, 2014; Cabrera & Zaldívar, 2021). Esto implica una limitada comprensión de los fenómenos físicos estudiados.

De acuerdo con Alanís & Salinas (2011):

> En la enseñanza de la matemática, es común encontrar una presentación del Cálculo como una teoría lógicamente estructurada y expresada en un lenguaje formal. Una estructuración tal se observa en los índices de múltiples libros de texto: números reales, funciones, límites, continuidad, derivada, aplicaciones de la derivada, integral y aplicaciones de la integral. Cada capítulo se desarrolla tomando en cuenta la información que el capítulo anterior se encargó de establecer […] una presentación así, deja la impresión de que el estudiante entiende un concepto con solo darle su definición, en términos de otros conceptos previamente definidos, y que comprende un resultado al presentarle su demostración; esto es, su deducción lógica a partir de otros resultados previamente demostrados; y que tal entendimiento y comprensión, permitirán al estudiante aplicar las matemáticas (p. 2).

Existe gran diversidad de investigaciones centradas en el PyLVar, tal es el caso de García y Dolores (2016) donde presentan un diseño de una situación de aprendizaje para la compresión de la derivada desde la variación, con la transición entre registros de representación semiótica. En el trabajo de Caballero (2018) se analiza el llenado de recipientes mediante un sistema de referencia variacional. Por su parte, Hernández (2019) estudia el comportamiento de un péndulo simple (contexto determinista) y un péndulo doble articulado (contexto caótico). El análisis de circuitos eléctricos mediante un sistema de referencia variacional lo establece Zúñiga (2020), Zúñiga, Muñoz y Morales (2021) y Zúñiga (2022).

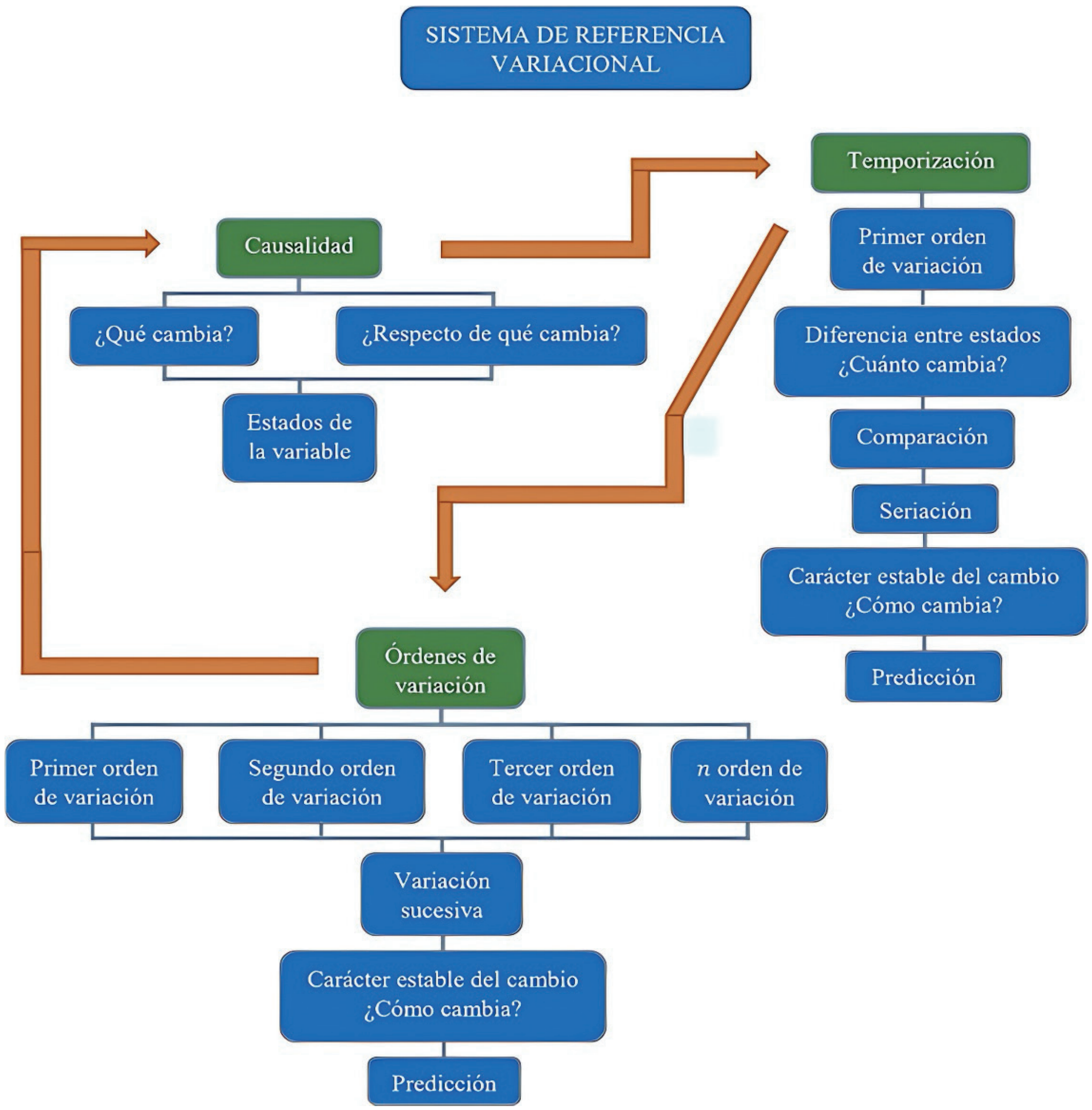
En la búsqueda de fenómenos de variación continua nos encontramos con el comportamiento de un móvil al simular “montañas rusas” en un videojuego. Entonces, se propone el uso del *Roller Coaster Tycoon 3* que modela el comportamiento de un tren que permita el análisis de órdenes de variación. Por tanto, para abordar la problemática se retoman elementos de un sistema de referencia variacional (Caballero, 2018). Desde las nociones de causalidad y temporización y los órdenes de variación en situaciones de predicción. Para ello se establece la pregunta: ¿cuáles son los argumentos que alumnos de ingeniería civil generan al estudiar órdenes de variación con el uso de un videojuego? Planteándose el objetivo de analizar órdenes de variación al interactuar con simulaciones de secciones de “montañas rusas”.

## Aspectos teóricos

El PyLVar estudia fenómenos físicos donde “su objeto principal de estudio son los fenómenos de cambio y su entendimiento” (Vrancken & Engler, 2014, p. 451). Los constructos que se estudian en esta línea de investigación tienen su desarrollo con las ideas de Newton, específicamente, con la noción del *Prædiciere*. Esta noción se asume como la acción y efecto de predecir el estado ulterior de una variable de acuerdo con el estado de facto (estado inicial) y sus variaciones. Por tanto, el *Prædiciere* se reconoce como una práctica social, es decir, es lo que orienta a querer predecir (Cantoral, 2019).

Para el estudio de cambio y la variación se requiere de un sistema de referencia variacional (figura 1). Este sistema permite el reconocimiento y la organización del cambio en situaciones de predicción (Caballero, 2018). Las dos nociones fundamentales de dicho sistema son: la causalidad y la temporización. La causalidad se refiere a la relación entre variables (qué cambia y respecto de qué cambia) y la temporización al reconocimiento de estados intermedios en dichas variables. Los órdenes de variación son cambios en los estados de las variables y en sus variaciones, que se determinan a partir de diferencias. Como señala Caballero (2018) “el primer orden consiste en la medición del incremento en el valor de la variable, el segundo orden en la medición del incremento en el incremento del primer orden de variación, y así sucesivamente para órdenes superiores […]" (p. 42). La variación sucesiva es la articulación de dos o más ordenes de variación, donde se reconoce el carácter estable del cambio (cómo cambia) para predecir estados futuros del fenómeno.

**Figura 1.** *Elementos de un sistema de referencia variacional con base en prácticas.*




**Fuente:** Zúñiga (2022, p. 198)

El análisis comienza con la relación entre dos variables, seguido del reconocimiento de estados intermedios donde se identifiquen estados posteriores y anteriores. Esta identificación permite calcular diferencias, que de acuerdo con Vrancken & Engler (2014) "las diferencias dan cuenta de cuánto cambia la variable en un proceso de variación" (p. 451). Estas diferencias permiten comparar un estado posterior respecto a un estado anterior. Si el estado posterior es mayor que el anterior la variable aumenta y si es menor la variable disminuye. Al obtener varias comparaciones se analizan en conjunto (seriación) y se reconoce el carácter estable del cambio (regularidad en el comportamiento del cambio). Esta regularidad permite predecir estados futuros. Entonces, se toma en cuenta la evolución de las prácticas variacionales que comienza en comparar, siguiendo con seriar, para luego predecir (Reyes, Palmeri &

Cantoral, 2019). Lo anterior corresponde al análisis de un primer orden de variación. Posteriormente se analiza un segundo orden de manera análoga. Se continua con el análisis del siguiente orden de variación y por último la variación sucesiva con el reconocimiento del carácter estable del cambio para predecir estados futuros con mayor precisión.

## Aspectos metodológicos

El videojuego, de acuerdo con Valcárcel (2013), es considerado como recurso didáctico para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Se elige el *Roller Coaster Tycoon 3* para su uso en el aula en un entorno virtual. Este videojuego es considerado de simulación donde se construyen secciones de "montañas rusas" en un parque de diversiones. Se propone que los órdenes de variación se reconocen al analizar el comportamiento de un móvil (tren) sobre la "montaña rusa". Entonces, se diseña una situación de aprendizaje centrada en el estudio de órdenes de variación con el uso de un videojuego, conformada por dos momentos (ver figura 2).

**Figura 2.** *Momentos de la situación de aprendizaje*

**MOMENTO 1**
Interacción con las herramientas del videojuego, identificación de variables y constantes, y análisis de gráficas.

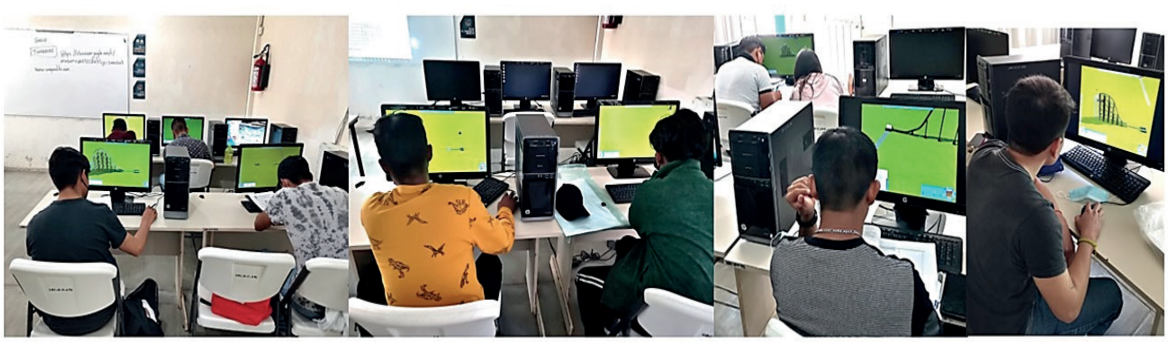
**MOMENTO 2**
Predicción con el análisis del primero, el segundo y el tercer orden de variación.

**Fuente:** Elaboración propia

En el momento 1 se interactúa con las herramientas del videojuego que permitan construir secciones de "montañas rusas". En este momento se reconoce la causalidad y la temporización al analizar gráficas de movimiento. Una vez construida la "montaña rusa" se reconocen variables y constantes. Se presentan algunas gráficas con la intención que los estudiantes las interpreten y elijan cuál de ellas representa el comportamiento del móvil. En el momento 2 se analizan órdenes de variación a partir de la gráfica elegida en el momento 1 y se analizan tablas de datos numéricos. Se hacen comparaciones y se analizan en conjunto (seriación) para reconocer el carácter estable del cambio, con la intención de predecir la altura del móvil en un tiempo determinado.

Para la implementación de la situación de aprendizaje se equipó un laboratorio con diez computadoras. En cada una de ellas se instaló el videojuego: *Roller Coaster Tycoon 3*. Los participantes fueron diez estudiantes de ingeniería civil de la Universidad de Los Altos de Chiapas, los cuales se les proporcionó hojas de trabajo con las actividades (figura 3).

**Figura 3.** *Estudiantes de ingeniería civil*



***Fuente:*** *Elaboración propia*

## Discusión de los resultados

La discusión de algunos resultados de la situación de aprendizaje se presenta a continuación:

***Momento 1***

Al inicio se espera que los estudiantes ejecuten el videojuego y que interactúen con sus herramientas. Se les pide que construyan una "montaña rusa" con el tren llamado "Mina salvaje madera" (figura 4A). Posteriormente construyan una estación y activen la cadena elevadora (figura 4B).

**Figura 4.** *A) Elección del tren (a la izquierda); B) Activación de la cadena elevadora (a la derecha)*


**Fuente:** Elaboración propia

Seguido se les pide que construyan una montaña rusa con la secuencia presentada en la tabla 1.

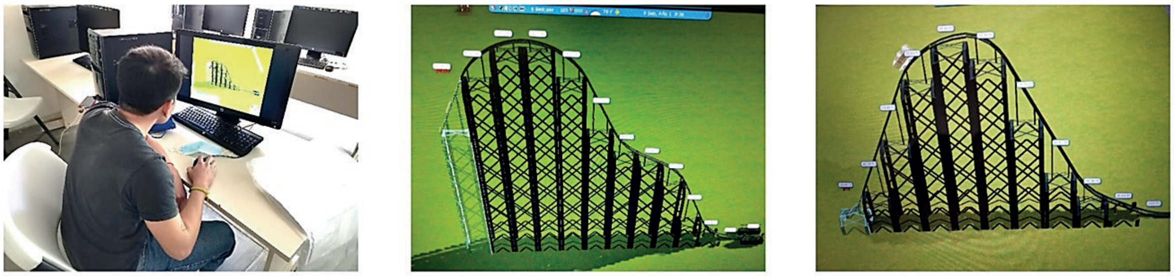
**Tabla 1.** *Secuencia de construcción*

| Número de raíles | Tipo de Raíl |
|---|---|
| 2 | Raíl Recto |
| 2 | Raíl con inclinación suave (subida) |
| 2 | Raíl con inclinación abrupta (subida) |
| 1 | Raíl con inclinación suave (subida) |
| 1 | Raíl Recto |
| 1 | Raíl con inclinación suave (bajada) |
| 1 | Raíl con inclinación abrupta (bajada) |

**Fuente:** Elaboración propia

Los estudiantes siguen la secuencia y construyen algunas montañas rusas, como se muestra en la figura 5. Al visualizar las construcciones nos percatamos que tienen diferente curvatura y están incompletas, con la intención de predecir la altura del móvil.

**Figura 5.** *Resultados de la secuencia*



**Fuente:** Elaboración propia

Al analizar el comportamiento del móvil reconocen las siguientes variables: velocidad, potencia, altura y aceleración; y como constantes: el tiempo, la estabilidad, el recorrido, la fuerza, la resistencia y el clima (ver figura 6). Se presentan dificultades al reconocer que las constantes no cambian. Por ejemplo, los colores de la estructura y del terreno o el tipo de tren.

**Figura 6.** *Reconocimiento de variables y constantes*

| Variables | Constantes |
|---|---|
| Velocidad | Tiempo |
| Potencia | Estabilidad |
| Altura | Recorrido |

| Variables | Constantes |
|---|---|
| Velozidad | Fuerza del Carrito |
| Altura | recistencia de la estructura |
| Aceleración | el Clima |

**Fuente:** Elaboración propia

Al cuestionar sobre qué variables están relacionadas uno de ellos responde que la velocidad respecto al tiempo y otro indica que la velocidad respecto a la altura (figura 7).

**Figura 7.** *Relación entre variables*

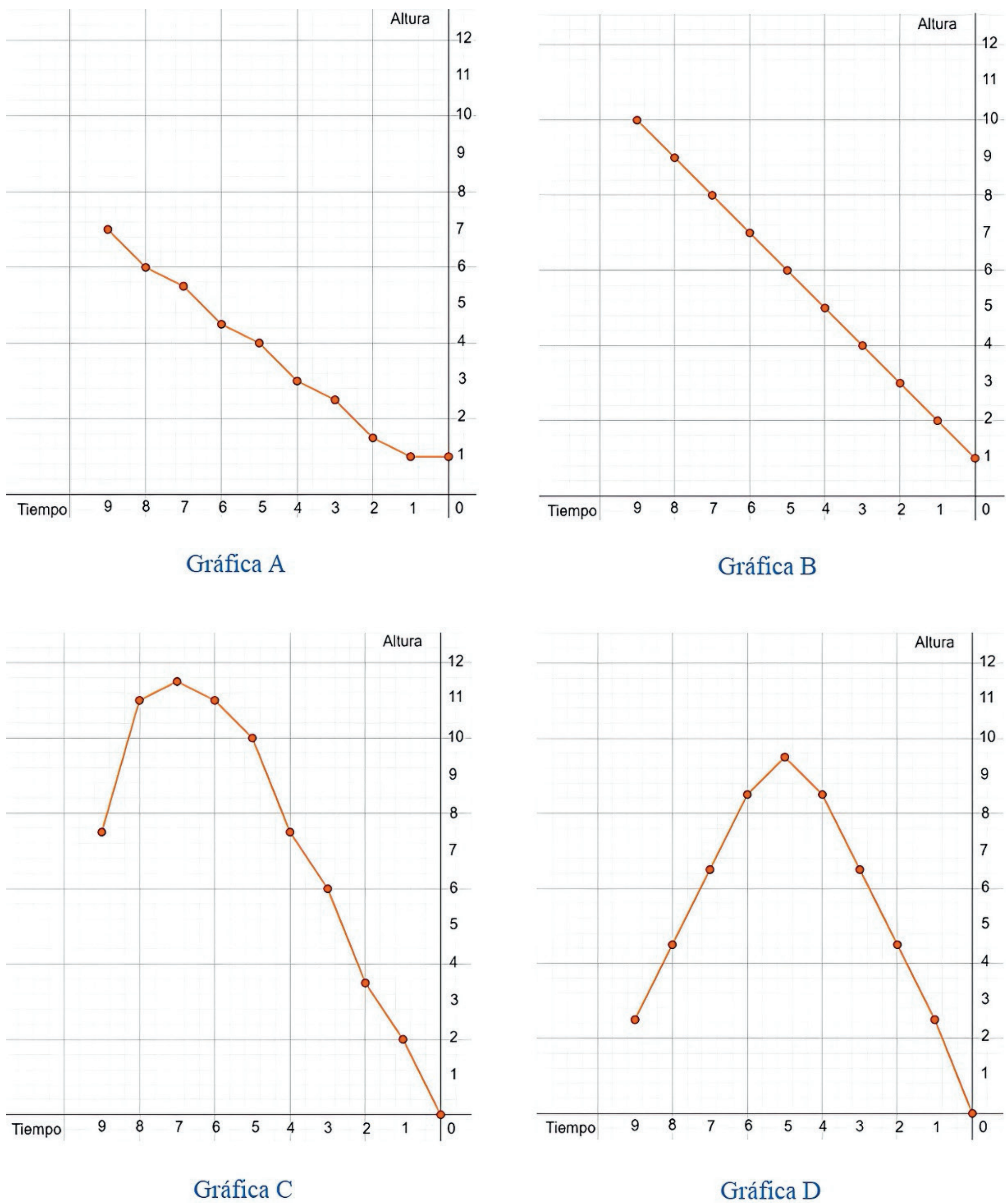
Responde lo siguiente:
¿Qué variables están relacionadas? Velocidad y potencia
¿Cuál cambia? Velocidad
¿Respecto de cuál cambia? Respecto a la altura

¿Qué variables están relacionadas? La Velozidad del Coche, La Altura
¿Cuál cambia? La velozidad
¿Respecto de cuál cambia? La Altura.

**Fuente:** Elaboración propia

Después se les pide que analicen las gráficas de la figura 8 y elijan cuál de ellas representa el comportamiento del tren sobre la montaña rusa.

**Figura 8.** *Gráficas de movimiento*




**Fuente:** Elaboración propia

En la tabla 2 se presentan algunos comportamientos de las gráficas. En la gráfica A se reconoce un primer orden de variación al observar que la altura del móvil va en aumento, esto quiere decir que, el estado posterior es mayor que el anterior en cada intervalo de tiempo y el móvil no baja sobre la montaña rusa. En la gráfica B se reconoce que la altura aumenta 1 metro por cada segundo que pasa. Entonces, el primer orden de variación indica que el móvil sube y no baja sobre la montaña rusa. La gráfica C muestra que del inicio al segundo 7 el móvil sube y del segundo 7 al 9 o posterior al 9, el tren baja. Al analizar el segundo orden de variación se establece que el móvil aumenta cada vez más lentamente hasta llegar a una altura máxima, posteriormente disminuye cada vez más rápido. Esta gráfica es la que representa el comportamiento del tren. En la gráfica D también se analiza un segundo orden de variación al visualizar que el tren aumenta cada vez más lentamente hasta llegar a una altura máxima, posteriormente disminuye.

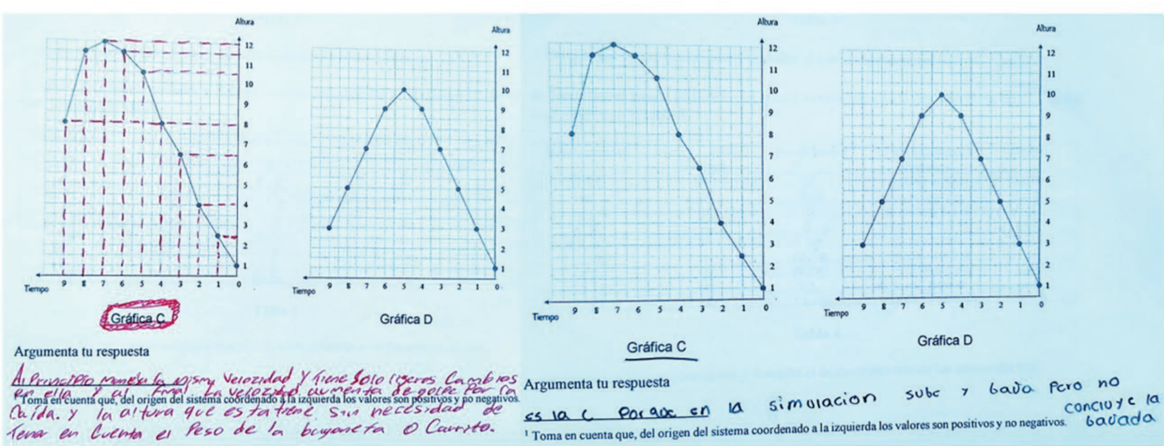
**Tabla 2.** *Análisis de las gráficas presentadas en la figura 8*

| Intervalo de tiempo | Altura Gráfica A | Altura Gráfica B | Altura Gráfica C | Altura Gráfica D |
|---|---|---|---|---|
| 0 – 1 | No cambia, se mantiene en $1m$ | Aumenta $1m$ | Aumenta $2m$ | Aumenta $2.5m$ |
| 1 – 2 | Aumenta $0.5m$ | Aumenta $1m$ | Aumenta $1.5m$ | Aumenta $2m$ |
| 2 – 3 | Aumenta $1m$ | Aumenta $1m$ | Aumenta $2.5m$ | Aumenta $2m$ |
| 3 – 4 | Aumenta $0.5m$ | Aumenta $1m$ | Aumenta $1.5m$ | Aumenta $2m$ |
| 4 – 5 | Aumenta $1m$ | Aumenta $1m$ | Aumenta $2.5m$ | Aumenta $1m$ |
| 5 – 6 | Aumenta $0.5m$ | Aumenta $1m$ | Aumenta $1m$ | Disminuye $1m$ |
| 6 – 7 | Aumenta $1m$ | Aumenta $1m$ | Aumenta $0.5m$ | Disminuye $2m$ |
| 7 – 8 | Aumenta $0.5m$ | Aumenta $1m$ | Disminuye $0.5m$ | Disminuye $2m$ |
| 8 – 9 | Aumenta $1m$ | Aumenta $1m$ | Disminuye $3.5m$ | Disminuye $2m$ |

**Fuente:** Elaboración propia

Los estudiantes eligen la gráfica C (figura 9) donde se argumenta que al principio el tren tiene la misma velocidad con ligeros cambios y al final aumenta de golpe por la caída. Otro argumento que el tren sube y después baja sin completar su recorrido.

**Figura 9.** *Argumentos sobre la gráfica C*




**Fuente:** Elaboración propia

Por tanto, en este momento identificamos que el videojuego permite construir algunas secciones de “montañas rusas” para analizar comportamientos del móvil.

### *Momento 2*

En este momento se espera que los estudiantes retomen el comportamiento de la gráfica elegida en el momento 1 y analicen tablas de datos numéricos. En la figura 10 establecen estados posteriores y anteriores del tiempo (temporización). Realizan comparaciones donde reconocen que el tiempo aumenta.

**Figura 10.** *Resultados E1*

| Estado posterior | Es mayor, menor o igual que | Estado anterior | El tiempo aumenta o disminuye | ¿Cuánto? |
|---|---|---|---|---|
| 1 | > | 0 | Aumenta | 1 |
| 2 | > | 1 | Aumenta | 1 |
| 3 | > | 2 | Aumenta | 1 |
| 4 | > | 3 | Aumenta | 1 |
| 5 | > | 4 | Aumenta | 1 |
| 6 | > | 5 | Aumenta | 1 |
| 7 | > | 6 | Aumenta | 1 |
| 8 | > | 7 | Aumenta | 1 |
| 9 | > | 8 | Aumenta | 1 |

| Estado posterior | Es mayor, menor o igual que | Estado anterior | El tiempo aumenta o disminuye | ¿Cuánto? |
|---|---|---|---|---|
| 1 | > | 0 | Aumenta | 1 |
| 2 | > | 1 | Aumenta | 1 |
| 3 | > | 2 | Aumenta | 1 |
| 4 | > | 3 | Aumenta | 1 |
| 5 | > | 4 | Aumenta | 1 |
| 6 | > | 5 | Aumenta | 1 |
| 7 | > | 6 | Aumenta | 1 |
| 8 | > | 7 | Aumenta | 1 |
| 9 | > | 8 | Aumenta | 1 |

**Fuente:** Elaboración propia

Respecto a la altura también reconocen estados posteriores y anteriores. Calculan diferencias y realizan comparaciones, donde establecen que en algunos intervalos de tiempo la altura aumenta y en otros disminuye (figura 11). Predicen que a los 10 segundos la altura es de 5 metros debido a que sigue disminuyendo.

**Figura 11.** *Resultados E2*

| Estado posterior | Es mayor, menor o igual que | Estado anterior | La altura aumenta o disminuye | ¿Cuánto? |
|---|---|---|---|---|
| 2.5 | > | 0 | Aumenta | 2.5 |
| 4 | > | 2.5 | Aumenta | 1.5 |
| 6.5 | > | 4 | Aumenta | 2.5 |
| 8 | > | 6.5 | Aumenta | 1.5 |
| 10.5 | > | 8 | Aumenta | 2.5 |
| 11.5 | > | 10.5 | Aumenta | 1 |
| 12 | > | 11.5 | Aumenta | 0.5 |
| 11.5 | < | 12 | Disminuye | 0.5 |
| 8 | < | 11.5 | Disminuye | 3.5 |

| Estado posterior | Es mayor, menor o igual que | Estado anterior | La altura aumenta o disminuye | ¿Cuánto? |
|---|---|---|---|---|
| 2.5 | > | 1 | Aumenta | 1.5 |
| 4 | > | 2.5 | Aumenta | 1.5 |
| 6.5 | > | 4 | Aumenta | 2.5 |
| 8 | > | 6.5 | Aumenta | 1.5 |
| 10.5 | > | 8 | Aumenta | 2.5 |
| 11.5 | > | 10.5 | Aumenta | 1.0 |
| 12 | > | 11.5 | Aumenta | 0.5 |
| 11.5 | < | 12 | Disminuye | 0.5 |
| 8 | < | 11.5 | Disminuye | 3.5 |

| Tiempo (segundos) | Altura del tren (metros) |
|---|---|
| ⋮ | ⋮ |
| 10 | 5 |

Describe tu procedimiento
Mentalmente

**Fuente:** Elaboración propia

Al analizar el segundo orden de variación reconocen estados posteriores y anteriores en el primer orden y calculan segundas diferencias en la altura (figura 12). Realizan comparaciones y establecen que la variación de la altura aumenta en algunos intervalos y disminuye en otros. Uno de ellos argumenta que en un tiempo la altura no aumenta ni disminuye. Indican que la predicción es de 5.5 metros sin argumentar sobre el procedimiento realizado.

**Figura 12.** *Resultados E3*

| Estado posterior | Es mayor, menor o igual que | Estado anterior | La variación de la altura aumenta o disminuye | ¿Cuánto? |
|---|---|---|---|---|
| 1.5 | > | 1 | A | .5 |
| 2 | > | 1.5 | A | .5 |
| 3.5 | > | 2 | A | 1.5 |
| 4 | > | 3.5 | A | .5 |
| 5.5 | > | 4 | A | 1.5 |
| 5.5 | = | 5.5 | Ni aumenta Ni d. | 0 |
| 5 | < | 5.5 | D | .5 |
| 3.5 | < | 5 | D | 1.5 |

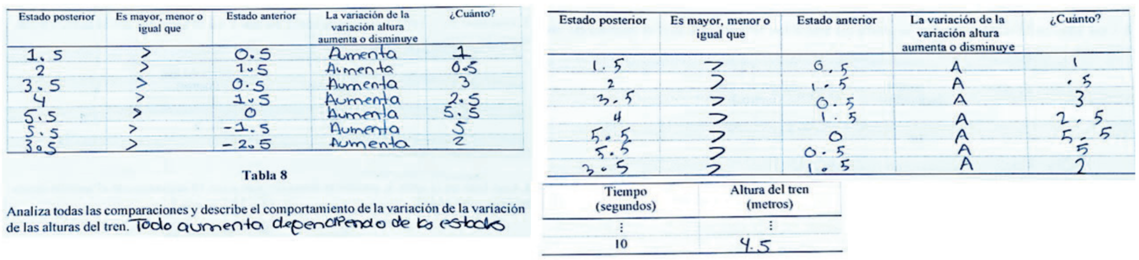
| Estado posterior | Es mayor, menor o igual que | Estado anterior | La variación de la altura aumenta o disminuye | ¿Cuánto? |
|---|---|---|---|---|
| 2.5 | > | 1 | Aumenta | 1.5 |
| 4 | > | 2.5 | Aumenta | 1.5 |
| 6.5 | > | 4 | Aumenta | 2.5 |
| 8 | > | 6.5 | Aumenta | 1.5 |
| 10.5 | > | 8 | Aumenta | 2.5 |
| 11.5 | > | 10.5 | Aumenta | 1 |
| 12 | > | 11.5 | Aumenta | 0.5 |
| 11.5 | < | 12 | Disminuye | 0.5 |

| Tiempo (segundos) | Altura del tren (metros) |
|---|---|
| ⋮ | ⋮ |
| 10 | 5.5 |

**Fuente:** Elaboración propia

Al analizar el tercer orden de variación reconocen estados posteriores y anteriores en el segundo orden y calculan terceras diferencias en la altura (figura 13). Realizan comparaciones y establecen que la variación de la variación de la altura aumenta. Indican que la predicción es de 4.5 metros sin argumentar sobre el procedimiento realizado.

**Figura 13.** *Resultados E4*



| Estado posterior | Es mayor, menor o igual que | Estado anterior | La variación de la variación altura aumenta o disminuye | ¿Cuánto? |
|---|---|---|---|---|
| 1.5 | > | 0.5 | Aumenta | 1 |
| 2 | > | 1.5 | Aumenta | 0.5 |
| 3.5 | > | 0.5 | Aumenta | 3 |
| 4 | > | 1.5 | Aumenta | 2.5 |
| 5.5 | > | 0 | Aumenta | 5.5 |
| 5.5 | > | -1.5 | Aumenta | 5 |
| 3.5 | > | -2.5 | Aumenta | 2 |

**Tabla 8**

Analiza todas las comparaciones y describe el comportamiento de la variación de la variación de las alturas del tren. Todo aumenta dependiendo de los estados

| Estado posterior | Es mayor, menor o igual que | Estado anterior | La variación de la variación altura aumenta o disminuye | ¿Cuánto? |
|---|---|---|---|---|
| 1.5 | > | 0.5 | A | 1 |
| 2 | > | 1.5 | A | .5 |
| 3.5 | > | 0.5 | A | 3 |
| 4 | > | 1.5 | A | 2.5 |
| 5.5 | > | 0 | A | 5.5 |
| 5.5 | > | 0.5 | A | 5 |
| 3.5 | > | 1.5 | A | 2 |

| Tiempo (segundos) | Altura del tren (metros) |
|---|---|
| ⋮ | ⋮ |
| 10 | 4.5 |

**Fuente:** Elaboración propia

Por tanto, en este momento identificamos que el videojuego muestra las alturas del móvil conforme pasa el tiempo. Estas alturas se representan en tablas y sobre ellas se analiza un primero, segundo y tercer orden de variación.

## Conclusiones

El sistema de referencia variacional permitió analizar algunos argumentos que estudiantes de ingeniería civil presentaron. La causalidad se reconoció al argumentar que la velocidad se relaciona con la altura y la velocidad con el tiempo. La temporización se identificó al establecer estados posteriores y anteriores del tiempo y la altura, respectivamente. El análisis del primer orden de variación se hizo al realizar comparaciones y en reconocer el carácter estable del cambio al argumentar que el tren sube y después baja. Los estudiantes tuvieron dificultades al predecir las alturas en un tiempo posterior, sin establecer argumentos al respecto. Así también, presentaron dificultades en articular un segundo y tercer orden de variación. Es decir, realizan comparaciones, pero no reconocen el carácter estable del cambio que les permita predecir con mayor precisión. Entonces, se propone rediseñar las actividades que se fortalezcan el análisis del segundo y tercer orden de variación que se direccionen en predecir estados futuros. Se puede optar por el análisis de gráficas donde los comportamientos se relacionen directamente con la simulación de "montañas rusas".

Las herramientas del videojuego son limitadas, debido a que solo se pueden construir tres tipos de secciones de "montañas rusas" (raíles rectos, con inclinación suave o inclinación abrupta). Estas construcciones permiten analizar un primero y segundo orden de variación con el comportamiento del móvil. Esto implica que no sea posible el análisis de un tercer orden de variación dado que no se pueden construir secciones de "montañas rusas" que representen su comportamiento. En este sentido, las tablas de datos numéricos puede ser una alternativa para el análisis de la variación sucesiva hasta un tercer orden de variación, donde el uso del videojuego aporta una herramienta para medir alturas que permita calcular diferencias de diferencias. Por tanto, este trabajo presenta un acercamiento al estudio de órdenes de variación con el uso de un videojuego.

## Referencias bibliográficas

Alanís, J., & Salinas, P. (2011). Cálculo de una variable: acercamientos newtoniano y leibniziano integrados didácticamente. *El Cálculo y su enseñanza. Enseñanza de las ciencias y la matemática, 2*(1), 1-22.

Caballero, M. (2018). *Causalidad y temporización entre jóvenes de bachillerato. La construcción de la noción de variación y el desarrollo del pensamiento y el lenguaje variacional* [Tesis de doctorado]. Centro de

Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.

Cabrera, L., & Zaldívar, J. (2021). Esquema de desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional. *Revista Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 34*(2), 189-199.

Cantoral, R. (2019). *Caminos del saber: pensamiento y lenguaje variacional*. Gedisa.

García, M., & Dolores, C. (2016). Diseño de una situación de aprendizaje para la comprensión de la derivada. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, (46), 49-70.

Hernández, J. (2019). *Elementos para el desarrolo del pensamiento y lenguaje variacional entre estudiantes de bachillerato: el caso de "lo errático"* [Tesis de doctorado]. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.

Varcárcel, C. (2013). *El videojuego como recurso didáctico en el aprendizaje de las matemáticas en primer curso de Educación Secundaria Obligatoria* [Tesis de maestría]. Universidad Internacional de La Rioja.

Vrancken, S., & Engler, A. (2014). Una Introducción a la Derivada desde la Variación y el Cambio: resultados de una investigación con estudiantes de primer año de la universidad. *Bolema, 28*(48), 449-468.

Zúñiga, F. (2020). Un análisis del sistema de referencia variacional en un contexto de circuitos eléctricos con estudiantes de nivel superior. *Investigación e Innovación en Matemática Educativa*, 5, 1-22. DOI: https://doi.org/10.46618/iime.76

Zúñiga, F. (2022). *Socioepistemología del Cálculo y Resignificación Didáctica de la Serie de Taylor en Contexto de Predicción en Circuitos Eléctricos* [Tesis de maestría]. Universidad Autónoma de Chiapas, México.

Zúñiga, F., Muñoz, G., & Morales, E. (2021). Fundamentos para diseñar situaciones de aprendizaje a través de la variación: simulación del comportamiento de un capacitor. En A. Rosas (Ed.), *Avances en Matemática Educativa. Actividad Docente* (pp. 79-96). Lectorum.

# GESTIÓN DIDÁCTICA PARA LA AUTONOMÍA DEL APRENDIZAJE MATEMÁTICO EN LOS ESTUDIANTES DE INGENIERÍA INFORMÁTICA EN TIEMPOS DE COVID-19

# DIDACTIC MANAGEMENT TO FAVOR MATHEMATICAL LEARNING AUTONOMY IN COMPUTER ENGINEERING STUDENTS IN TIMES OF COVID-19

**Daniella Evelyn Machado Montes de Oca, Olga Lidia Pérez González, Nancy Montes de Oca Recio, Carmen Fortuna González Trujillo**

**Universidad de Camagüey ¨Ignacio Agramonte Loynaz¨. (Cuba)**

daniella.machado@reduc.edu.cu,olga.perez@reduc.edu.cu, nancymontesde@gmail.com, carmen.fortuna@reduc.edu.cu

**Resumen**:

En este artículo se presenta la experiencia llevada a cabo con los estudiantes de primer año de la carrera de Ingeniería Mecánica de la Universidad Ignacio Agramonte Loynaz de Camagüey, Cuba durante el período de aislamiento por Covid-19, en el curso 2020-2021 para favorecer la autonomía del aprendizaje matemático a través de una gestión didáctica que tenga en cuenta el papel de las tecnologías como herramientas de mediación en el aprendizaje matemático; del mismo modo, se ofrece el marco de referencia y los requerimientos en los que se sustenta la propuesta, como resultado del proyecto ¨Perfeccionamiento de la enseñanza de la Matemática” del Programa Nacional ¨Problemas Actuales del Sistema Educativo Cubano, específicamente en la formación didáctico-matemática de docentes.

**Palabras clave**: gestión didáctica, aprendizaje matemático, ingeniería, autonomía, COVID 19

**Abstract**:

This paper presents a scientific study carried out with first-year students of Mechanical Engineering degree at Ignacio Agramonte Loynaz University, in Camagüey, Cuba, during Covid-19 social isolation, at the academic year 2020-2021. It was aimed at favoring the mathematical learning autonomy through a didactic management that takes into account the role of technologies as mediation tools in mathematical learning; likewise, the frame of reference and the requirements on which the proposal is based are offered, as a result of the project ¨Improvement of Mathematical Teaching” from the National Program “Current Problems of the Cuban Educational System”, specifically in teachers’ didactic-mathematical training.

**Keywords**: didactic management, mathematical learning, autonomy, engineering, COVID 19

## Planteamiento del problema

En el escenario actual, en un momento en que la COVID 19 amenaza al mundo e impacta en los sistemas educativos dando paso a un proceso de enseñanza-aprendizaje esencialmente virtual, se hace continua referencia por numerosos investigadores (Sánchez, 2020; Cantoral et al.,2020; Mercado, 2020; Saltos-Cedeño, Vallejo-Valdivieso y Moya-Martínez, 2020; Tamayo y Tuchapesk, 2020; Mesa, Torres y Mamani-Benito, 2021) a la necesidad de renovar los métodos y estrategias didácticas con el uso de las tecnologías de la información y las comunicaciones, de manera que los estudiantes sean capaces de autogestionar su aprendizaje a partir de las orientaciones de los docentes y las interacciones con estos, a través de las plataformas diseñadas para esos fines.

Específicamente, el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en la carrera de Ingeniería Informática de la Universidad de Camagüey ¨Ignacio Agramonte Loynaz¨ dio inicio en la modalidad virtual en el curso escolar 2020-2021, lo que ha significado un gran reto para los profesores que imparten esta asignatura y especialmente para los que laboran en el primer año de la carrera de referencia, debido a las características de los estudiantes que ingresan, los cuales aún no disponen de recursos y estrategias para enfrentar el aprendizaje universitario y que en su mayoría llegan a esta institución con vacíos en el contenido matemático de los niveles precedentes, por lo que los docentes deben asumir una gestión didáctica que les permita el logro de los aprendizajes en condiciones de virtualidad.

Para que estas aspiraciones logren concretarse, se debe intencionar la formación de estrategias que ayuden a organizar y regular el aprendizaje; para obtener, procesar y evaluar conocimientos, para implicarse en el proceso de estudio de manera efectiva hasta alcanzar las metas propuestas, prestando atención a los procesos metacognitivos. Lo señalado muestra la necesidad de reforzar la autonomía para aprender, lo cual exige movilizar y utilizar de manera intencional los recursos para hacer frente al proceso de aprendizaje.

En ese ámbito, desde antes del aislamiento por la Covid-19, numerosos autores que se han ocupado de los problemas relacionados con el proceso de formación de los ingenieros desde la disciplina de Matemática (Camarena, 2009; Chirino, 2015; Montes de Oca, Rubio y Núñez, 2016), consideren trascendente la necesidad de enfocar la enseñanza como un proceso de gestión del aprendizaje, donde se creen las condiciones para que los estudiantes no sólo se apropien de los contenidos específicos, sino que adquieran estrategias de aprendizaje que le permitan actuar de forma autónoma y creadora para resolver los problemas a los que deberá enfrentarse en su actuación profesional.

Igualmente se destacan autores que han abordado el uso de las tecnologías de la información y las comunicaciones, especialmente los asistentes matemáticos, como herramientas para el aprendizaje de la Matemática (Verschaffel, Depaepe, Mevarech, 2019) pero el escenario actual plantea además el reto, de que estas se conviertan en el medio a través del cual se producen las interacciones entre estudiantes y docentes y en este sentido aunque existen numerosas plataformas digitales para la enseñanza y aprendizaje de la Matemática, son escasos los trabajos que desde el punto de vista didáctico ofrezcan pautas para su gestión y que aborden cómo estas inciden en el resultado de los aprendizajes (Font, y Gemma, 2021).

Por otra parte, aún son insuficientes las propuestas que intencionen la formación de estrategias para organizar y regular el aprendizaje de contenidos matemáticos en la modalidad virtual y que, desde el punto de vista didáctico, ofrezcan criterios para favorecer el desarrollo de la autonomía en el aprendizaje matemático.

El objetivo del presente artículo es mostrar la experiencia llevada a cabo con los estudiantes de primer año de la carrera de Ingeniería Mecánica de la Universidad Ignacio Agramonte Loynaz de Camagüey, Cuba durante el período de aislamiento por Covid-19, en el curso 2020-2021 para favorecer la autonomía del aprendizaje matemático a través de una gestión didáctica que tenga en cuenta el papel de las tecnologías como herramientas de mediación en el aprendizaje matemático, se ofrece el marco de referencia y los requerimientos en los que se sustenta la propuesta, como resultado del proyecto ¨Perfeccionamiento de la enseñanza de la Matemática" del Programa Nacional ¨Problemas Actuales del Sistema Educativo Cubano, específicamente en la formación didáctico-matemática de docentes.

## La gestión didáctica: propuesta de un marco de referencia

Como es reconocido la eficacia de la Didáctica, descansa en la gestión que realiza el docente, que es quien toma decisiones importantes cada día en la planeación y el diseño de sus clases, en las interacciones con sus estudiantes, en las relaciones humanas que incluyen la comprensión de las dinámicas del grupo, en la evaluación y el control, entre otras.

En el trabajo se asume lo expresado por Montes de Oca (2020) en cuanto a la gestión didáctica, la cual la argumenta como el proceso de orientación, planeación, organización y ejecución, donde el control y la valoración se conciben transversalmente; que se concreta en un contenido y se desarrolla a través del sistema de relaciones e interacciones que se establecen entre estudiantes, estudiantes y docentes, entre docentes y otras fuentes humanas o tecnológicas, con un carácter dinámico que privilegia la comunicación para alcanzar los objetivos de aprendizaje.

Por esa razón, en la gestión didáctica, no se debe descuidar la planeación del proceso de enseñanza-aprendizaje, lo cual se manifiesta en la correspondencia entre los objetivos, las tareas o actividades de aprendizaje y la evaluación a través de criterios precisos, relaciones que le otorgan consistencia al sistema y que garantizan su coherencia. Además, cuando se alude a la gestión didáctica, también se connota la importancia del uso de las tecnologías de la información y las comunicaciones, el manejo situacional, así como la necesaria coherencia entre lo planificado y su ejecución.

De ahí que se asumen los postulados del enfoque histórico-cultural de Vigotsky (1979) y sus continuadores, en lo específico lo relativo al carácter mediatizado de la psiquis en el plano social y a través de los instrumentos, para considerar el aprendizaje de los objetos matemáticos como un proceso consciente de apropiación de “saberes matemáticos”, que se produce a través de la actividad mediada por el profesor en el plano social y las tecnologías digitales como mediadores instrumentales.

En este sentido, investigadores como Gallar, Rodríguez y Barrios (2015); Córdoba (2014); Chirinos (2015); Vega, Niño y Cárdena (2015) coinciden en el papel de las tecnologías como herramientas de mediación en el aprendizaje matemático. Ese marco permite reconocer la importancia de las interacciones entre los estudiantes, profesores y entre estos con el contenido y dichas tecnologías, donde los procesos de representación juegan un papel fundamental para hacer posible la construcción personalizada y colaborativa de significados mediante diversos procesos cognitivos, afectivos y volitivos, todo lo cual es compartido por las autoras del presente artículo y será ilustrado en la metodología y en la propuesta que se presenta.

En ese sentido en el escenario actual, signado por la modalidad virtual se connota la necesidad de que dicha gestión se dirija además a favorecer la autonomía en el aprendizaje matemático en los estudiantes de ingeniería, para lo cual en este trabajo se hizo necesario ofrecer una definición operacional de la autonomía del aprendizaje matemático y fundamentar dimensiones y criterios para valorar su desarrollo.

### *La autonomía del aprendizaje matemático: definición y criterios para su valoración*

Se parte de la definición de Cabrera (2009), el cual considera que la autonomía del aprendizaje significa que el estudiante es capaz de utilizar de manera intencional los recursos, captar las exigencias de las tareas, movilizar una serie de conocimientos, habilidades y hábitos integrados en torno a una dirección específica de aprendizaje, lo cual no niega el papel mediador del docente y de los otros, pues la mediación y las interacciones desempeñan un papel primordial en este sentido, a partir de lo cual es imperativo que se le enseñe a los estudiantes a elegir e incorporar progresivamente estrategias de aprendizaje, educarlos para que sean conscientes sobre la forma en cómo aprenden, para que así puedan enfrentar satisfactoriamente diversas situaciones de aprendizaje.

A partir de dicha postura, además de la observación llevada a cabo de los estudiantes en las clases de Matemática en el transcurso de varios años; las autoras del presente trabajo, en un proceso de análisis-síntesis, han considerado que la autonomía del aprendizaje matemático se manifiesta en:

- El planteamiento de metas relacionadas con las tareas de aprendizaje matemático.
- La gestión de conocimientos y recursos necesarios para resolver las tareas de aprendizaje matemático.
- La utilización de estrategias y procedimientos adecuados para resolver dichas tareas,
- La argumentación de los procedimientos empleados.
- Las explicaciones precisas y coherentes según las características de la actividad de aprendizaje.
- La valoración crítica del trabajo realizado.
- El reconocimiento de errores.
- La planeación de acciones y reconstrucción de las estrategias necesarias para el mejoramiento.

Lo que se expresa apunta a la necesidad de orientar adecuadamente a los estudiantes acerca de esos elementos, que se constituyen en criterios valorativos que han de concretarse en el desempeño ante la resolución de tareas para que puedan reconocer los logros y las dificultades; así como tomar conciencia sobre las acciones que han posibilitado la solución de las tareas; es decir, sobre cómo y cuándo las representaciones construidas, las decisiones tomadas en cuanto a recursos y saberes, han permitido resolver el problema y con ello acceder a nuevos conocimientos.

En la gestión didáctica para la autonomía del aprendizaje matemático, es necesario prestar atención desde la planeación, como momento esencial, a los recursos necesarios para el aprendizaje; al diseño de las tareas de aprendizaje que trasciendan el espacio-temporal del proceso de enseñanza-aprendizaje y que tengan en cuenta la diversidad del estudiantado; a la utilización de estrategias y métodos que propicien una apropiación consciente y autorregulada regida por objetivos y metas propios que tengan en cuenta las interacciones entre estudiantes, estudiantes y docentes, entre estos, el contenido, las tecnologías y el contexto.

## Metodología

La metodología propuesta es cualitativa, toma como referente el marco teórico argumentado y los requerimientos derivados del mismo. La misma contó con tres fases que a continuación se detallan:

***Fase 1: Proyectiva***

A continuación, se resumen las acciones que se desarrollaron en esta fase y que se consideran esenciales al momento de la **planeación** desde el marco teórico argumentado:

A nivel macro:

- Determinar la estructura y organización global del curso.
- Precisar los objetivos de los temas.
- Determinar los recursos a utilizar.
- Determinar la bibliografía básica y complementaria.
- Definir las tareas para comprobar el logro de los objetivos.

A nivel micro:

- Determinar la estructura de cada tema.
- Definir las actividades teóricas y prácticas.
- Diseñar las actividades teóricas teniendo en cuenta:
    - ⇨ La orientación hacia los conocimientos matemáticos previos necesarios para comprender los nuevos contenidos.
    - ⇨ La orientación hacia la obtención del conocimiento en diferentes fuentes (tecnológicas y humanas).
    - ⇨ La orientación hacia la búsqueda de alternativas para superar las dificultades que surgen durante el desarrollo del estudio.

- ⇨ La utilización de situaciones, videos, aplicaciones, etc. que muestren la importancia de la asignatura para la carrera.
- Diseñar las actividades prácticas que permitan:
  - ⇨ Desarrollar los estilos de pensamiento y métodos propios de la Matemática, realizar el tratamiento de los conceptos, relaciones, definiciones necesarias para resolver los problemas y su correspondiente comunicación argumentativa.
  - ⇨ Adaptarse a las condiciones del proceso y las características individuales de los estudiantes, según las condiciones personales y contextuales particulares (carácter flexible).
  - ⇨ Intencionar la utilización de estrategias y recursos para organizar la información, como resúmenes, mapas conceptuales, entre otros, para propiciar que gradualmente pueda alcanzar una mayor independencia en su aprendizaje.
- Habilitar espacios para reflexionar sobre las metas alcanzadas, compartir de forma crítica y reflexiva los procedimientos utilizados y las formas organizar el aprendizaje (foros, chats, etc.).
- Definir el sistema de evaluación de modo que posibilite:
  - ⇨ Valorar críticamente el trabajo realizado, reconocer los errores y reconstruir las estrategias necesarias para el mejoramiento.
  - ⇨ Orientar adecuadamente a los estudiantes acerca de los criterios de valoración de su aprendizaje que han de concretarse en un desempeño específico para que puedan reconocer los logros y las dificultades.
  - ⇨ Controlar el progreso del estudiante y proporcionar la retroalimentación necesaria.

Aunque la planeación es un momento esencial en la gestión didáctica, es necesario tener en cuenta determinadas exigencias para que la ejecución garantice que dicha gestión sea efectiva. A continuación, se expresan las más importantes:

- Fortalecer la disposición positiva hacia el aprendizaje de la asignatura.
- Motivar a los estudiantes para desarrollar las actividades en que se verán involucrados.
- Exploración de las características, creencias e intereses sobre la Matemática y su aprendizaje.
- Atender la diversidad y potenciar el trabajo personalizado y colaborativo.
- Orientar adecuadamente las actividades y tareas de aprendizaje que concreten los objetivos a alcanzar.
- Generar conflictos cognitivos, para que el estudiante permanentemente se enfrente a ellos y sea capaz de tomar decisiones y construir o reconstruir estrategias personales para su solución.
- Utilizar métodos didácticos que propicien la discusión de las tareas a partir del análisis de diferentes respuestas y con los que se logre la participación de los estudiantes.
- Propiciar la autoevaluación, la coevaluación, la comunicación y la argumentación crítica de los resultados, enfatizando en lo metacognitivo y lo metavalorativo, que facilite la aplicación de diferentes alternativas de aprendizaje y la reconstrucción de estrategias para aprender.

***Fase 2: Diseño***

En esta fase se diseñó el curso en la plataforma MOODLE, el cual quedó conformado por los siguientes elementos:

*PRESENTACIÓN INICIAL:*

- ⇨ Presentación de la asignatura y del claustro.
- ⇨ Avisos.
- ⇨ Bibliografía general
- ⇨ Consultas a los estudiantes.
- ⇨ Video acerca de la importancia de la asignatura para el ingeniero informático.
- ⇨ Enlaces que dirigen a artículos con aplicaciones de la Matemática en el contexto de la Covid-19.
- ⇨ Artículos de los docentes del grupo de Investigaciones de Matemática Educativa.

⇨ Cuestionario para la caracterización de los estudiantes.

*TEMAS:*

⇨ Bibliografía del tema.
⇨ Actividades teóricas: Conferencias en formato video y Power Point con orientaciones acerca de la esencia del contenido del tema y explicaciones acerca de los métodos y procedimientos matemáticos.
⇨ Videos ilustrativos del tema y aplicaciones.
⇨ Foros para intercambiar, debatir, socializar experiencias.
⇨ Actividades prácticas con pautas para la apropiación de los procedimientos y métodos específicos.
⇨ Actividades de sistematización.
⇨ Actividades evaluativas sistemáticas.

*EVALUACIONES*

⇨ En la opción Banco de preguntas del MOODLE se crean categorías en dependencia de los objetivos de cada tema, para cada una de las cuales se elaboran preguntas
⇨ Con la opción cuestionario del MOODLE se establece un tiempo para que los estudiantes realicen el examen y se conciben las características de la evaluación.
⇨ Luego se edita el cuestionario para agregarle las preguntas, de los cuales seleccionamos la opción agregar una pregunta aleatoria y elegimos la categoría correspondiente al examen.

Este procedimiento garantiza que, a cada estudiante, le corresponda una pregunta diferente elegida de manera aleatoria por la plataforma.

El estudiante solo visualizará la pregunta cuando se indique por parte del docente que inicie el examen. A partir de ese momento comienza a correr el tiempo establecido.

Como se observa en la estructura diseñada se ponen de manifiesto los elementos señalados en las acciones mencionadas para la planeación, entre las que se connotan.

- El diseño de una encuesta para caracterizar a los estudiantes respecto a sus intereses, creencias, motivaciones y hábitos de estudio. La misma permitió orientar a los estudiantes acerca de las condiciones que poseen para enfrentarse a los diferentes temas, cuáles son sus principales deficiencias y limitaciones, así como sus potencialidades.
- La utilización de artículos y videos donde aparecen aplicaciones del Álgebra Lineal a la Ingeniería.
- La concepción de las actividades prácticas y tareas de aprendizaje para favorecer la autonomía del aprendizaje matemático en el escenario actual.

***Fase 3: Ejecución y valoración de las tareas de aprendizaje***

La experiencia se desarrolló en la asignatura Matemática I, con los estudiantes de primer año de la carrera de Ingeniería Informática de la Universidad de Camagüey ¨Ignacio Agramonte Loynaz¨ durante el curso 2020-21. A continuación se ejemplifica a través de la siguiente tarea de aprendizaje, la cual ilustra los elementos expresados en las fases proyectiva y de diseño.

Tarea: Aprendo a resolver problemas que se modelan a través de sistemas de ecuaciones lineales (SEL).

Objetivo*:* Resolver problemas que se modelan a través de los SEL.

Dados los siguientes SEL.

**Figura 1.** *Sistemas de ecuaciones lineales*

1.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 &= 4 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 6 \\ 5x_1 + 2x_2 - 5x_3 &= 18 \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 1 \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 &= 3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 &= 2 \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 7 \end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 &= 6 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 &= 4 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 - 5x_4 &= 10 \end{aligned}$$

**Fuente:** Elaboración propia

*Orientaciones:*

- ✓ Lee el enunciado de la consigna y el objetivo de la tarea, a partir de ella localiza el conocimiento que necesitas para poderla resolver.
- ✓ Resume a partir de lo estudiado en la conferencia el procedimiento para resolver un SEL utilizando el método de Gauss, puedes incorporar otros aspectos del contenido que consideres necesario para darle solución a los ejercicios y problemas de la tarea de aprendizaje.
- ✓ Comparte en el grupo de WhatsApp o a través del foro del MOODLE el resumen realizado.
- ✓ Reflexiona en el grupo de WhatsApp o a través del foro del MOODLE si el resumen que ha realizado cada uno de los compañeros es adecuado o no y valora el que tu realizaste.
- ✓ Realiza si es necesario correcciones al resumen a partir de las aportaciones de todos sus miembros y de acuerdo con la discusión anterior.
- ✓ Analiza los ejemplos resueltos, enfatiza en los siguientes elementos: transformaciones elementales realizadas y conjunto solución de cada uno. Arriba a conclusiones.
- ✓ Formula preguntas a través de las cuales puedas aclarar las dudas del contenido.
- ✓ Planifica un sistema de acciones que te permitan organizar el proceso para la resolución de los SEL.
- ✓ Resuelve cada uno de los ejercicios y problemas orientados utilizando el método de Gauss.
- ✓ Encuentra regularidades y patrones de comportamiento de las variables en cada SEL. Generaliza el procedimiento utilizado.
- ✓ Teniendo en cuenta que cada ecuación posee varias de las características típicas de modelos matemáticos del mundo físico, que describe un proceso o sistema natural en términos matemáticos y representa una idealización y una simplificación de la realidad. Busca para cada una de ellas un proceso o evento de la profesión que se ajuste a dichas condiciones. (puedes realizar ciertas variaciones que no afecten la esencia del sistema y buscar ayuda de estudiantes de años superiores, profesores e ingenieros).
- ✓ Presenta un informe donde expreses: lo positivo, negativo e interesante de la tarea.

*Retroalimentación*

Lee atentamente y responde las siguientes preguntas:

- ✓ ¿De qué manera te organizaste para resolver los problemas propuestos?
- ✓ ¿Te fue fácil comprender el método de Gauss? ¿Por qué?
- ✓ ¿Qué hiciste para comprenderlo?
- ✓ ¿Qué pasos has seguido para resolver cada uno de los ejercicios y problemas?
- ✓ ¿Cuáles de ellos te presentaron mayor dificultad?
- ✓ ¿Cómo lograste superar estas dificultades?

A través de esta tarea se ilustra cómo se orienta a los estudiantes en el trabajo individual, contiene preguntas para orientarlos acerca del conocimiento que poseen sobre sus estrategias y recursos cognitivos para tener éxito en su solución, orientarlos acerca de cómo planificar, ejecutar, controlar y evaluar los procesos cognitivos, o sea, desarrollar habilidades metacognitivas tales como la planeación, la regulación y la evaluación cuando se realiza una tarea, todo lo cual permite instrumentar el componente reflexión metacognitiva. Durante su utilización, se observó que los estudiantes mantuvieron una actitud positiva mostraron satisfacción sobre la manera en que habían sido abordados los contenidos a través de la tarea.

***Valoración del desarrollo de la autonomía del aprendizaje matemático***

La valoración del desarrollo de la autonomía se realizó a partir de la observación del desempeño de los estudiantes como método fundamental, el análisis del producto de su actividad en la resolución de las tareas y los criterios emitidos en los grupos y foros, la triangulación de estos permitió obtener los resultados cualitativos que a continuación se expresan:

*Fortalezas:*

- En la mayoría de los estudiantes se promovió la disposición personal positiva para el aprendizaje matemático.
- La totalidad de los estudiantes identificaron sus condiciones para enfrentar el aprendizaje y reconocieron la importancia de organizar el tiempo.
- En todos se logró una mayor disposición para la búsqueda de los recursos necesarios para la solución las tareas, incluyendo las fuentes que le permiten acceder a nuevos conocimientos.
- Mas de la mitad del grupo realizó de manera independiente la planificación de metas y acciones para encontrar soluciones a las tareas.
- Todos los estudiantes realizaron resúmenes y un número significativo elaboraron mapas conceptuales.
- Se logró que la mayoría realizara la autovaloración del aprendizaje matemático.
- En sentido general el grupo mostró compromiso y responsabilidad ante en la ejecución de las tareas de aprendizaje y una implicación en el proceso de estudio de manera efectiva.

*Debilidades:*

- Resistencia de algunos estudiantes a ser activos en su aprendizaje.
- No todos lograron la argumentación de los procedimientos empleados en las tareas de aprendizaje.
- Algunos mostraron inseguridad en la realización de las tareas.

## Conclusiones

- El desarrollo de la experiencia permitió comprobar la importancia de las interacciones entre los estudiantes, los estudiantes y docentes y entre estos con los contenidos a través de las herramientas digitales como medio para favorecer la autonomía del aprendizaje matemático.
- Se corroboró la importancia de tener en cuenta la diversidad de los estudiantes para el diseño y ejecución de las actividades, específicamente sus condiciones personales, los conflictos o situaciones provocados por la COVID 19 con la finalidad de generar un adecuado clima que favorezca el aprendizaje.
- Las tareas de aprendizaje matemático utilizadas permitieron la indagación, la reflexión y la integración de conocimientos, que los estudiantes concientizaran las estrategias asumidas en la ejecución de las mismas, la planeación, ejecución y control de acciones para enfrentar nuevas metas de aprendizaje sobre la base del reconocimiento de las necesidades aún no resueltas y la necesidad de encontrar solución a las dificultades que se les fueron presentando durante el proceso de aprendizaje matemático.
- La utilización de videos y materiales de internet con aplicaciones de los contenidos del curso fueron aspectos muy bien valorados por los estudiantes, ya que reconocieron la importancia de la Matemática para su futura profesión y elevó la motivación por el aprendizaje.

## Referencias bibliográficas

Benson, P. (2007). Autonomy in language teaching and learning. State of the art article. *Language Teaching,* 40; 21-40. http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_ nlinks&ref =000087&pid=S0102-44502008000300003000008&lng=en

Cabrera, I. (2009). Autonomía en el aprendizaje: direcciones para la formación en la formación profesional. *Actualidades investigativas en educación.* 9(2) https://www.redalyc.org/pdf/447/44713058006.pdf

Camarena P. (2009) La Matemática en el contexto de la ciencia. México. *Revista Innovación educativa: Las Matemáticas y la educación*. 9(46); 15-25. https://www.redalyc.org/pdf/1794/179414894003.pdf

Cantoral, R.; Ríos, W.; Reyes, D.; Uriza, E.; Barrios, E.; Fallas, R. y Solano, A. (2020). Matemática Educativa, transversalidad y COVID-19. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 23(1), 1-20. https://revistas.reduc.edu.cu/index.php/transformacion/article/view/e3487

Chirinos, E. (2015). La mediación tecnológica para la construcción del conocimiento matemático desde la complejidad. *Multiciencias*, 15(1); 106-112. http://www.redalyc.org/html/904/90441655012/

Córdoba, F. (2014). *Las TIC en el aprendizaje de las matemáticas: ¿Qué creen los estudiantes?* Buenos Aires: Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación, 1-9.

Font, V y. Gemma, S (2021). Un año de incertidumbres para la Educación Matemática. *Bolema,*34(68). P. i-v. DOI: http://dx.doi.org/10.1590/10.1590/1980-4415v34n68e01

Gallar, Y., Rodríguez, I. y Barrios, E. A. (2015). La mediación con las TIC en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la educación superior. *Didasc@lia: Didáctica y Educación*, VI(6); 155-164. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=6678481

Mercado, G. (2020). Las matemáticas en los tiempos del Coronavirus. *Educación matemática,* 32(1), 7-10. http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/vol32/1/01REM32-1.pdf

Mesa, F.; Torres, J. y Mamani-Benito, O. (2021). Gestión educativa como factor determinante del desempeño de docentes de educación básica regular durante la pandemia COVID-19, Puno-Perú. Apuntes Universitarios, 11(1), 23-35. https://doi.org/10.17162/au.v11i1.543

Montes de Oca, N., Rubio, J. y Núñez, R (2016). La gestión didáctica del proceso de enseñanza-aprendizaje de las ciencias básicas en las carreras de ingeniería*. Transformación, 12 (3); 1- 13.* https://revistas.reduc.edu.cu/index.php/transformacion/article/view/1455

Montes de Oca, N. (2020). La Formación Didáctico-Matemática de Docentes: resultados teóricos. *Revista Paradigma, XLI*; 254-271. http://revistaparadigma.online/ojs/index.php/paradigma/article/view/867

Saltos-Cedeño, A.; Vallejo-Valdivieso, P. y Moya-Martínez, M. (2020). Innovación en educación matemática de básica superior durante el confinamiento por COVID-19. *EPISTEME KOINONIA,* 3(5), 142-161. http://portal.amelica.org/ameli/jatsRepo/258/2581039010/html/

Sánchez, C. (2020). Herramientas tecnológicas en la enseñanza de las matemáticas durante la pandemia COVID-19. *HAMUT'AY,* 7(2), 46-57. http://revistas.uap.edu.pe/ojs/index.php/HAMUT/article/view/2132

Tamayo, C. y Tuchapesk, M. (2020). Desafios e possibilidades para a Educação (Matemática) em tempos de “Covid-19” numa escola em crise. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática,* 13(1), 29-48. https://doi.org/10.22267/relatem.20131.39

Vega, J., Niño, F. y Cárdena, Y. (2015). Enseñanza de las matemáticas básicas en un entorno e-Learning: un estudio de casos de la Universidad Manuela Beltrán Virtual. *Revista Escuela de Administración de Negocios,* (79), 172-185. http://www.scielo.org.co/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0120-81602015000200011

Verschaffel, L.; Depaepe, F. y Mevarech, Z. (2019). Learning Mathematics in Metacognitively Oriented ICT-Based Learning Environments: A Systematic Review of the Literature. *Education Research International.* Volume 2019. https://www.hindawi.com/journals/edri/2019/3402035/

Vigotsky, L. S. (1979). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores.* Madrid: Grijalbo.

# REVISTA ACTA LATINOAMERICANA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA - ALME

## Principios:

La revista Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (en lo sucesivo ALME), es uno de los proyectos académicos del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa – CLAME, en el que se conjuga el respeto a la pluralidad de formaciones, tradiciones y acercamientos educativos, concebida y desarrollada con la función de difundir la Matemática Educativa en un marco en el que pueden relacionarse autores que comparten este interés común, además de investigadores y profesores de Latinoamérica. A partir de la divulgación de ALME se busca promover acciones que fomenten la investigación, la actualización, el perfeccionamiento y la profesionalización para el desarrollo científico y social de la región en lo referente a la Matemática Educativa.

La revista ALME se configura como el instrumento de CLAME para la difusión de trabajos de carácter científico, experiencias, convocatorias e información bibliográfica dentro del ámbito de la enseñanza/aprendizaje en Matemática Educativa en sus diferentes formulaciones y presentaciones.

La revista ALME es una revista científica arbitrada por pares y que se atiene a los estándares internacionales de calidad propios de las publicaciones científicas de prestigio.

## Misión y objetivos:

La misión de la revista ALME es la difusión de la investigación relativa a la Matemática Educativa, persiguiendo los siguientes objetivos:

- ✓ Difundir, preferentemente en lenguas española y portuguesa, relevantes y rigurosos trabajos de carácter científico en el ámbito de la matemática educativa.
- ✓ Ofrecer experiencias innovadoras, siempre relativas al ámbito de la matemática educativa.
- ✓ Potenciar la accesibilidad y visibilidad del conocimiento, favoreciendo el entorno de acceso abierto a la literatura científica en Matemática Educativa.

## Política editorial:

- ✓ *Idioma de los trabajos*. Podrán presentarse trabajos en lengua española y portuguesa.
- ✓ *Trabajo original*. Los artículos enviados a ALME para su publicación, deberán constituir una colaboración original no publicada previamente en soporte alguno, ni encontrarse en proceso de publicación o valoración en cualquier otra revista o proyecto editorial. Si el incumplimiento se detectase durante el proceso de revisión o evaluación se desestimará automáticamente la publicación del artículo.
- ✓ *Normas de redacción y presentación*. Los trabajos deberán atender las normas de redacción y presentación de carácter formal de ALME. Las colaboraciones enviadas a ALME que no se ajusten a ellas serán desestimadas.
- ✓ *Recepción de originales*. Los editores de ALME acusarán la recepción del manuscrito enviado por el autor/es. El Comité editorial revisará el artículo enviado informando al autor/es, en caso necesario, si se adecua al campo temático de la revista y al cumplimiento de las normas y requisitos formales de redacción y presen-

tación. En el caso de que todos los aspectos sean favorables, se procederá a la evaluación por parte de pares académicos del artículo.

- ✓ *Proceso de evaluación por pares académicos.* Los artículos propuestos serán evaluados en forma "**ciega**" por dos integrantes del comité de científico. En el proceso de evaluación se garantizará tanto el anonimato de los autores, así como de los evaluadores.
- ✓ *Información*. Los editores de ALME informarán a los autores de la decisión de aceptación, modificación o rechazo de cada uno de los artículos.
- ✓ *Política de privacidad*. Se mantendrá y preservará en todos los casos y circunstancias el anonimato de los autores y el contenido de los artículos desde la recepción del manuscrito hasta su publicación. La información obtenida en el proceso de revisión y evaluación tendrá carácter confidencial.
- ✓ *Fuentes*. Los autores citarán debidamente todas las fuentes de extracción de datos, figuras e información de manera explícita y tangible en las referencias. Si el incumplimiento se detectase durante el proceso de revisión o evaluación se desestimará automáticamente la publicación del artículo.
- ✓ *Responsabilidad*. ALME no se hará responsable de las ideas y opiniones expresadas en los trabajos publicados. La responsabilidad plena será de los autores de los mismos.
- ✓ *Formatos*. ALME se presentará en formato electrónico desde la página oficial de Comité Latinoamericano de Matemática Educativa – CLAME (http://clame.org.mx/actas/) y será de acceso libre y gratuito.
- ✓ *Periodicidad.* ALME tiene una periodicidad semestral.
- ✓ *Secciones:* Las secciones de la revista ALME son las siguientes:
    1. Análisis del discurso matemático escolar.
    2. Propuesta para la enseñanza de las matemáticas.
    3. Aspectos socioepistemológicos en el análisis y el rediseño del discurso matemático escolar.
    4. El pensamiento del profesor, sus prácticas y elementos para su formación profesional.
    5. Uso de recursos tecnológicos en el proceso de aprendizaje de las matemáticas.

## Directrices generales para los autores y las autoras:

1. Todo trabajo debe ser inédito y no estar en proceso de evaluación de ninguna otra revista u órgano editorial. Si el incumplimiento se detectase durante el proceso de revisión o evaluación se desestimará automáticamente la publicación del artículo.
2. Extensión: El escrito debe contener 10 páginas como mínimo y 12 como máximo, las cuales deben estar sin numerar. Dicha cantidad de página contiene el apartado de las referencias bibliográficas.
3. Las referencias bibliográficas (deben aparecer bajo ese título, por orden alfabético) habrán de colocarse en estilo APA (American Psychological Association), 7ª edición. Al respecto, se sugiere consultar el siguiente documento: https://drive.google.com/file/d/1NT65KZjVLWD4SZZRQcJXMymluHJinaJx/view?usp=sharing

Las referencias tendrán sangrías de 0.0 y sangría especial, sangría francesa de 1.27 cm.

Dos ejemplos de la estructura son los siguientes:

Alsina, Á. (2009). El aprendizaje realista: Una contribución de la investigación en Educación Matemática a la formación del profesorado. In González & J. Murillo (Eds.) (Ed.), Investigación en Educación Matemática XIII (pp. 119–127).

Barragan, D., & Carrillo, A. (2017). La Sistematización como Interpretación Crítica. El Buho. Corporación Síntesis.

4. La estructura base del artículo debe dar cuenta de: Un planteamiento del problema que incluye revisión de literatura de Matemática Educativa, indicaciones generales sobre la estructura teórica (marco teórico o conceptual o fundamentos teóricos), metodología implementada, desarrollo de algunos ejemplos, análisis de los resultados, conclusiones y referencias bibliográficas. Cabe aclarar, que si lo que se reporta es una investigación en curso, se debe hacer explícito en el escrito para que esto sea considerado en el momento de hacer la evaluación del documento.

5. También se podrán publicar artículos que no son productos de investigaciones, como puede ser: reporte de experiencia en aula, curso corto, taller, grupo de discusión o de laboratorio. Para los casos anteriores la estructura del escrito debería de reportar mínimamente: introducción, desarrollo del tema en donde se hará mención del planteamiento de un problema, así como los fundamentos teóricos y las conclusiones. El artículo deberá mostrar evidencia de revisión de referencias bibliográficas de Matemática Educativa.

   En el caso particular de los **reportes de investigación** deberán dejar explícito dos aspectos en su escrito:

   a. En la *problemática* deberán precisar la línea de investigación en la que se desarrolla la investigación.

   b. El tipo de investigación y el aporte que se hace a la disciplina. En particular habrán de colocarlo de manera enfática en las *conclusiones.*

6. No se aceptarán trabajos con notas a pie de página.

7. Cada uno de los manuscritos recibidos, pasa por una evaluación doblemente ciega (se retiran los nombres y datos de filiación de los autores de los documentos) y se envía a dos árbitros de nuestra comunidad, cuyos resultados, de manera anónima, son devueltos a los autores. En caso haya controversia entre los dos árbitros, se dará la propuesta a un tercer árbitro. La decisión de los árbitros es inapelable. Las evaluaciones pueden tener tres resultados posibles: Aceptado, Aceptado condicionado a modificaciones o Rechazado.

## Normas para la publicación del artículo:

✓ Microsoft Office Word 2007 o superior.

✓ Márgenes. Superior: 2,5 cm; inferior: 2,5 cm; izquierdo: 3,5 cm; derecho: 2,5 cm.

✓ Tipo de letra Times New Roman, tamaño 12. Color automático.

✓ Interlineado sencillo y justificado a derecha e izquierda. Sin sangría de primera línea.

- ✓ Sangría izquierda derecha 0 cm. Espaciado anterior y posterior 0 pto.
- ✓ Para las expresiones matemáticas debe usarse el **editor de ecuaciones**.
- ✓ Las figuras, tablas e imágenes que se incluyan en el artículo deben ser claras, legibles e incluir epígrafes que indiquen referencia de estas. Las imágenes deben estar en formato jpg. insertadas al texto.

  Las figuras, tablas e imágenes se presentan de manera centrada. En la parte superior el rótulo y número en negrita, con fuente Times New Roman tamaño 10 y con punto final. En la siguiente línea se ubica el nombre en cursiva y con fuente Times New Roman tamaño 10. Justificado a la izquierda. Con punto final. En la parte inferior la referencia con fuente Times New Roman tamaño 10. Justificado a la izquierda. Con punto final.

  Un ejemplo sería:

  **Figura 1.**

  *Gráfico realizado por estudiantes al simplificar asuntos de la situación.*


  **Fuente:** producción de estudiantes 2017.

  Nota: Imagen para el ejemplo tomada de Parra-Zapata et al. (2017)

## La estructura del trabajo debe tener el siguiente formato:

- ✓ Primer renglón: Título del trabajo, centrado, en mayúscula en español o portugués (**sin punto al final).**
- ✓ Segundo renglón: Título del trabajo, centrado, en mayúscula en inglés (**sin punto al final**), espacio entre títulos.
- ✓ Tercer renglón: Nombre de los autores separados por comas si hay más de un autor. (**Nombre y Apellido** en ese orden, **sin títulos de grado**)(**sin punto al final**).
- ✓ Cuarto renglón: Nombre de la institución separadas por comas si hay más de un autor. Punto. País al que pertenecen en paréntesis. (**No se considera válido el uso exclusivo de siglas**). (**Sin punto al final**).

- ✓ Quinto renglón: Dirección electrónica de los autores, separados por coma si hay más de uno y **sin hipervínculos**. (**sin punto al final**).
- ✓ Sexto renglón: Resumen de no más de 10 renglones de extensión en fuente Times New Roman, tamaño 10. Título de Resumen en negrita y el texto del resumen en el renglón siguiente. **(Con punto final).**
- ✓ Séptimo renglón: palabras clave (**a lo sumo cinco**). Si son frases, verificar de no extenderse de las cinco palabras. Dejar renglón luego del resumen. El título en negrita y no usar mayúscula inicial en ellas. (**Sin punto final**).
- ✓ Octavo renglón: Abstract en inglés, en fuente Times New Roman tamaño 10. Título de Abstract en negrita y el texto del resumen en el renglón siguiente. (**Con punto final**).
- ✓ Noveno renglón: Keywords, traducción al inglés de las palabras clave. Dejar renglón luego del abstract. El título en negrita y no usar mayúscula inicial en ellas. (**Sin punto final**).
- ✓ Décimo renglón: Inicia la primera sección del documento. Entre títulos de la sección se deja un renglón antes y uno después. Espacio sencillo entre cada párrafo del artículo. Y con punto al final del párrafo.

  Los títulos de nivel 1 sin punto final y con negrita.

  Los títulos de nivel 2 sin punto final y con negrita y con cursiva.

  Los títulos de nivel 3 sin punto final y en cursiva.
- ✓ Cuidar que no queden títulos solos al final de una página.
- ✓ Ortografía y digitación.

## Consideración para citaciones:

**Citas dentro del texto**. Las referencias a artículos o libros figurarán en el texto entre paréntesis, indicando el apellido del autor y el año de publicación, separados por una coma (Peters, 2001). En el caso de que en una misma referencia se incluyan varios libros o artículos, se citarán uno a continuación del otro por orden alfabético y separados por un punto y coma (García Aretio, 2002; Sarramona, 2001). Si en la referencia se incluyen varios trabajos de un mismo autor bastará poner el apellido y los años de los diferentes trabajos separados por comas, distinguiendo por letras (a, b, etc.) aquellos trabajos que se hayan publicado el mismo año (Casas Armengol, 1990, 1995, 2000a, 2000b, 2002, 2004). Si el nombre del autor forma parte del texto sólo irá entre paréntesis el año de publicación [Keegan (1992) afirmó que...].

**Citas textuales.** Las citas textuales con una extensión menor de 40 palabras irán entrecomilladas y, a continuación, y entre paréntesis, se indicará el apellido del autor del texto, el año y la página o páginas de las que se ha extraído el fragmento. Ejemplo: Si el autor no forma parte del texto "por educación a distancia entendemos [...] contacto ocasional con otros estudiantes" (Blanco, 1986, p. 16). Si el nombre del autor forma parte del texto, sería así: Como Martínez Sanz (2001) señala que "…………..” (p. 102). Las citas de 40 o más palabras deberán aparecer en un bloque de texto independiente, sin comillas y ajustado a la misma altura que la primera línea de un nuevo párrafo. Al final se indicará entre paréntesis, el autor, año y página/s.

## Consideración para referencias:

Únicamente se incluirán aquellas que se citan en el texto y deberán ordenarse por orden alfabético en un solo listado, tanto las de formato impreso como electrónico.

El formato será el siguiente:

- *Libro:* Apellido del autor/es, inicial del primer nombre. (Año). *Título del libro*. Editorial.

  Brzezinski, Z. (1970). *La era tecnotrónica*. Paidós.

- *Artículos de revistas:* Apellido del autor/es, inicial del primer nombre. (Año). Título del artículo. *Nombre de la Revista, número o volumen* (número), páginas que comprende el artículo dentro de la revista, si es que existen.

  García, L. (1999). Historia de la educación a distancia. *RIED. Revista Iberoamericana de Educación a Distancia, 2* (1), 11-40.

- *Capítulo o artículo en libro*: Apellido del autor, inicial del primer nombre. (Año). Título del artículo o capítulo. En inicial del primer nombre. Apellido del autor/es, (Ed. o Coord., si es el caso), *Título del libro*. (páginas que comprende el artículo o capítulo dentro del libro). Editorial.

  Oettinger, A. (1971). Communications in the national decision-making process. En M. Greenberger, (Ed.), *Computers, communication, and the public interest* (73-114). Johns Hopkins Press.

- *Informe del gobierno:* Nombre de la institución responsable. (Año). *Título del informe* (Número de publicación). Nombre de agencias presentes en la edición no nombradas en el nombre del autor.

  Instituto Nacional del Cáncer. (2019*). Tomando tiempo: Apoyo para personas con cáncer* (Publicación NIH No. 18-2059). Departamento de Salud y Servicios Humanos de EE. UU., Institutos Nacionales de Salud. https://www.cancer.gov/publications/patient-education/takingtime.pd

- *Artículos en publicaciones periódicas electrónicas* (Revistas electrónicas): Apellido del autor/es, inicial del primer nombre. (Año). Título del artículo. Nombre de la Revista, número o volumen (número), páginas que comprende el artículo dentro de la revista. DOI o en su defecto, URL de acceso.

  Schaefer, NK y Shapiro, B. (2019). Nuevo capítulo intermedio en la historia de la evolución humana. Science*, 365* (6457), 981–982. https://doi.org/10.1126/science.aay3550

- *Video de YouTube:* Nombre del canal. (Fecha de publicación). *Título del video* (Video). YouTube. Enlace de acceso.

  Universidad Harvard. (28 de agosto de 2019). Pinza robótica suave para medusas [Video]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=guRoWTYfxMs

- *Tweet:* Nombre del perfil [@usuario]. (Fecha de publicación). *Contenido del tweet* [Tweet]. Enlace de acceso.

  Gates, B. [@BillGates]. (2019, 7 de septiembre). Hoy en día, es difícil para los investigadores diagnosticar a los pacientes de #Alzheimers lo suficientemente temprano como para intervenir. Un diagnóstico confiable, fácil y preciso sería [Miniatura con enlace adjunto] [Tweet]. Twitter. https://twitter.com/BillGates/status/1170305718425137152

- *Publicación de Facebook:* Nombre del perfil. (Fecha de publicación). *Contenido de la publicación* [Actualización de estado]. Enlace de acceso.

  Noticias de la ciencia. (21 de junio de 2019). ¿Eres fanático de la astronomía? ¿Le gusta leer sobre lo que los científicos han descubierto en nuestro sistema solar y más allá? [Imagen adjunta] [Actualización de estado]. Facebook. https://www.facebook.com/ScienceNOW/photos/a.117532185107/10156268057260108/?type=3&theater

- *Página en un sitio web:* Apellido del autor/es, inicial del primer nombre. (Fecha de publicación). *Título de la publicación*. Nombre de la página web. Recuperado de fecha de acceso a la publicación. Enlace de acceso.

  Woodyatt, A. (10 de septiembre de 2019). Las siestas diurnas una o dos veces por semana pueden estar relacionadas con un corazón sano, dicen los investigadores. CNN https://www.cnn.com/2019/09/10/health/nap-hearthealth-wellness-intl-scli/index.html

✓ La información actualizada sobre la forma de citación puede ser consultada en la página de APA (American Psycological Association).

✓ Los esquemas, gráficos, tablas y fotografías deberán ser claros y se presentarán titulados, numerados e insertos en el cuerpo del texto.

## Forma de evaluación de los trabajos

Cada uno de los manuscritos recibidos, pasa por una evaluación doblemente ciega (se retiran los nombres y datos de filiación de los autores de los documentos) y se envía a dos árbitros de nuestra comunidad, cuyos resultados, de manera anónima, son devueltos a los autores. ***La decisión de los árbitros es inapelable.*** Las evaluaciones pueden tener tres resultados posibles: **Aceptado, Aceptado condicionado a modificaciones y rechazado.**

El equipo editorial podrá rechazar artículos que no cumplan con los criterios que se señalan a continuación:

1. Será rechazado un artículo que no cumpla con el formato indicado en la convocatoria.
2. Será rechazado un artículo que no cumpla con la extensión mínima señalada en la presente convocatoria (10 páginas).
3. Será rechazado un artículo enviado fuera de las fechas establecidas en la convocatoria.

Será rechazado un artículo enviado por otro medio distinto de la plataforma indicada en la convocatoria.

Clame

Comite Latinoamericano
de Matematica Educativa