Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Acta Latinoamericana de Matemática Educativa

VOLUMEN 36 » NÚMERO 2 » AÑO 2024 » ISSN 2448-6469

ALME 36

ACTA LATINOAMERICANA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA, Volumen 36, Número 2, agosto 2023, es una publicación semestral editada por el Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, Av. Universidad 1900, Oxtopulco Universidad, Delegación Coyoacán, C.P. 04460, Ciudad de México, www.clame.org.mx, articulos.alme@gmail.com. Reserva de Derechos al Uso Exclusivo 04-2015-082710244200-203, otorgado por el Instituto Nacional del Derecho de Autor, ISSN: 2448-6469. Se autoriza la reproducción total o parcial, previa cita a la fuente:

Autor(es) (2023). Nombre del artículo. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 36 (2)*. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

ALME es una publicación oficial del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, Clame A.C. Consejo Directivo: Presidenta: Carmen Evarista Matías Pérez (República Dominicana); Secretaria: Elizabeth Mariscal Vallarta (México); Tesorera: Santa Daysi Sánchez González (República Dominicana); Vocal Norteamérica: Evelia Reséndiz Balderas (México); Vocal Caribe: Anelys Vargas Ricardo (Cuba); Vocal Centroamérica: Rodolfo David Fallas Soto (Costa Rica); Vocal Sudamérica: Mónica Marcela Parra-Zapata (Colombia).

Traducciones al inglés de títulos y resumenes realizada por Norma Moredo (Cuba). Apoyo técnico editorial por Karen Melisa Ospina (Colombia).

Comité Científico de Evaluación

ARGENTINA

Elisa Silvia Oliva Díaz
Cecilia Rita Crespo Crespo
María Julia Améndola
Rodolfo Eliseo D´Andrea
Susana Beatriz Ruiz Hagman

BRASIL

Juliana Silva de Andrade

CHILE

Isabel García-Martínez

COLOMBIA

Paola Alejandra Balda Álvarez
René Alejandro Londoño Cano
Mónica Marcela Parra Zapata
Jhony Alexander Villa Ochoa
Maria Denis Vanegas Vasco
Maria Camila Ocampo Arenas

COSTA RICA

Islande Cristina Delgado Monge

CUBA

Valentina Badía Albanés

MÉXICO

Adriana Gómez Reyes
Alfonso Escorza Morales
Daniela Pagés Rostán
Edgar Ponciano Bustos
Elena Nesterova
Enrique Javier Gómez Otero
Gisela Montiel Espinosa
Horacio Saul Sostenes Gonzalez
José Rafael Couoh Noh
Karla Liliana Puga Nathal
Lorena Trejo Guerrero
Lorenzo Contreras Garduño
María de la Luz Huerta Ramírez
María del Carmen Fajardo Araujo
María Isabel Machado Solano
Nilda Iglesias Domecq
Valentina Badía Albanés
Rafael Pantoja Rangel
Raul Alonso Ramirez Escobar
Reyna Arcelia Brito Páez
Saúl Ezequiel Ramos Cancino
Silvia Ibarra Olmos
Silvia Guadalupe Maffey García

VENEZUELA

Ivonne Coromoto Sanchez Sanchez
Luis Andrés Castillo Bracho

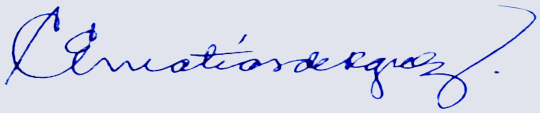
PRESENTACIÓN

Para este número la Revista Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (ALME) continúa como publicación semestral editada por un equipo editorial conformado por investigadoras e investigadores en Matemática Educativa procedentes de distintos países latinoamericanos que trabajan arduamente por visibilizar las acciones y la producción académica de la comunidad.

En este número de ALME continuamos como comunidad Latinoamericana y como nueva Junta aunando esfuerzos para alcanzar los propósitos académicos. El número visibiliza propuestas de investigación y enseñanza en el campo de la Matemática Educativa hacia el trabajo con diferentes recursos metodológicos, desde la evaluación y el seguimiento para fortalecer cada acción realizada en la comunidad.

En el ALME número 2 del volumen 36 presentamos 18 artículos de diversas posturas metodológicas y teóricas, agrupados en temáticas relacionadas con el análisis del discurso matemático escolar, las propuestas para la enseñanza de las Matemáticas, los aspectos socioepistemológicos para el análisis y el rediseño del discurso matemático escolar, el pensamiento del profesor, sus prácticas y su formación profesional, y el uso de recursos tecnológicos en el proceso de aprendizaje de las Matemáticas. Los documentos hicieron parte de las distintas ponencias y actividades académicas realizadas en la RELME 35.

Este número es fruto del trabajo arduo que realizaron las autoras y los autores y el equipo editorial para contribuir a la profesionalización de la Comunidad Latinoamericana de Matemática Educativa, y al fortalecimiento del desarrollo del pensamiento matemático en un contexto de retos e incertidumbres de la época actual.



Carmen Evarista Matías Pérez
Presidenta del Consejo Directivo CLAME
(2022-2026)

TABLA DE CONTENIDOS

SECCIÓN 1:
ANÁLISIS DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR

EL TEMA DE FUNCIONES EN LOS LIBROS DE TEXTO UN ANÁLISIS DE LAS TAREAS PROPUESTAS
María Fernanda Vargas González, Juan Francisco Ruiz-Hidalgo, José Antonio Fernández-Plaza 9

OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS Y DIDÁCTICOS EN LOS PROCESOS DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LOS NÚMEROS ENTEROS
Ivone Anahi Patagua, Carina Rosana Renfijes, Silvia Mabel Baspiñeiro 22

SECCIÓN 2:
PROPUESTAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

MOVILIZACIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES A PARTIR DE CONTEXTOS DE MODELADO MATEMÁTICO
Guillermo Enrique Ramírez Montes 33

UN EXPERIMENTO DE ENSEÑANZA PARA PROMOVER EL USO DE LAS CONEXIONES MATEMÁTICAS EN EL APRENDIZAJE DE LAS ECUACIONES LINEALES EN BACHILLERATO
Gabriel Barragán Mosso, Javier García-García 45

DISEÑO DE UNA SITUACIÓN AUTÉNTICA PARA EL ESTUDIO DE LA SEMEJANZA EN ALUMNOS DE BACHILLERATO
Sebastián Castañeda Martínez, Juan Carlos Macías Romero, Lidia Aurora Hernández Rebollar 58

DESARROLLO DEL SENTIDO NUMÉRICO AL EMPLEAR LA NOTACIÓN CIENTÍFICA
María del Pilar Beltrán Soria, René Gerardo Rodríguez Avendaño 67

INCLUSIÓN EN CLASE DE MATEMÁTICAS. LA CARACTERIZACIÓN DEL GRUPO DIVERSO
Haided Lised Arciniegas Rueda, Edith Johanna Mendoza Higuera 78

PROPUESTA DE UN TALLER BASADO EN LAS CONEXIONES MATEMÁTICAS PARA EL DISEÑO DE TAREAS
Karen Gisel Campo-Meneses, Magali Edaena Hernandez-Yañez, Javier García-García 88

TABLA DE CONTENIDOS

SECCIÓN 3

ASPECTOS SOCIOEPISTEMOLÓGICOS EN EL ANÁLISIS Y EL REDISEÑO DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR

PRÁCTICAS CON INSTRUMENTOS CIENTÍFICOS EN LA OBSERVACIÓN Y MEDICIÓN DEL TRÁNSITO DE VENUS SOBRE EL DISCO SOLAR EN LA NUEVA ESPAÑA, 1769
Maribel Moreno Ochoa 98

DE LA GEOMETRÍA AL CÁLCULO COVARIACIÓN LOGARÍTMICA EXPONENCIAL
Marcela Ferrari Escolá, José Antonio Bonilla Solano 108

SECCIÓN 4:

EL PENSAMIENTO DEL PROFESOR, SUS PRÁCTICAS Y ELEMENTOS PARA SU FORMACIÓN PROFESIONAL

LA INDAGACIÓN COMO ESTRATEGIA DE APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA EN LA FORMACIÓN INICIAL Y CONTINUA DE PROFESORES DE ENSEÑANZA BÁSICA
María Constanza Ripamonti Zañartu, Ivette Marie León Lavanchy 122

CONCEPCIONES DOCENTES SOBRE EL PROYECTO DE APRENDIZAJE ESTADÍSTICO (PAE) MOVILIZADAS EN UN GRUPO FOCAL
Cassio Cristiano Giordano, Mauren Porciúncula 134

PROPUESTA DE EVALUACIÓN FORMATIVA PARA DERIVADAS: ESTUDIO DE TRES CASOS EN EDUCACIÓN PERSONALIZADA
Evelyn Johana Cuevas Ortegón, Ivonne María Suarez Higuera, Herbert Dueñas Ruiz 143

ANÁLISIS DE UNA SECUENCIA DE ACTIVIDADES DE FRACCIONES COMO ESCENARIO PARA ESTUDIAR EL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS
Julián Andrés Meléndez Cruz, Eric Flores Medrano 154

UNA EXPERIENCIA DE PRÁCTICA PROFESIONAL VIRTUAL BASADA EN EL TPACK DE FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICA
Luis Fabián Gutiérrez-Fallas 162

CREENCIAS DE PROFESORES EN FORMACIÓN SOBRE LA NATURALEZA, ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMATICAS: DISEÑO Y VALIDACIÓN DE UN CUESTIONARIO PARA SU EVALUACIÓN
Karen Velasco Restrepo, José Gabriel Sánchez Ruíz 174

TABLA DE CONTENIDOS

SECCIÓN 5:

USO DE LOS RECURSOS TECNOLÓGICOS EN EL PROCESO DE APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

IMPLEMENTAÇÃO E CONSTRUÇÃO DE JOGOS ONLINE COM ALUNOS DOS ANOS INICIAIS
Míriam do Rocio Guadagnini, Marlene Alves Dias, Sirlene Neves de Andrade 181

ECUACIÓN CUADRÁTICA EN UNA VARIABLE: FUNDAMENTOS Y NOTACIÓN SIMBÓLICA EN EL BACHILLERATO TECNOLÓGICO
Ana María Ojeda Salazar, Héctor Santiago Chávez Rivera, Mario Armando Giordano Moreno 191

SECCIÓN 1

ANÁLISIS DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR

EL TEMA DE FUNCIONES EN LOS LIBROS DE TEXTO: UN ANALISIS DE LAS TAREAS PROPUESTAS

THE SUBJECT OF FUNCTIONS IN TEXTBOOKS: AN ANALYSIS OF THE PROPOSED TASKS

María Fernanda Vargas, Juan Francisco Ruiz-Hidalgo, José Antonio Fernández-Plaza
Universidad de Costa Rica. (Costa Rica), Universidad de Granada. (España)
mariafernanda.vargas@ucr.ac.cr, jfruiz@ugr.es, joseanfplaza@ugr.es

Resumen:
Este trabajo tiene como objetivo estudiar las tareas propuestas en 3 libros de texto costarricenses, utilizados en décimo año, para el tema de funciones que es uno de los tópicos que más dificultades presenta en Secundaria. Se realiza un análisis de contenido basado en una serie de categorías que contemplan aspectos estructurales de la tarea, de contenido (significado) y cognitivos. Tras el análisis se evidencia una tendencia en los tres libros analizados, destacando la baja demanda cognitiva de las tareas propuestas. Se espera que los resultados lleven a los docentes a reflexionar sobre las tareas que presentan a sus estudiantes y la forma de enriquecerlas.

Palabras clave: libros de texto, tareas escolares, demanda cognitiva, habilidades matemáticas, funciones

Abstract:
This work is aimed at analyzing the tasks proposed in 3 Costa Rican textbooks, used in tenth grade, for the subject of functions, which is one of the most difficult topics in secondary education. So, a content analysis is carried out based on a series of categories that involve structural aspects of the task, content (meaning), and cognitive aspects. After the analysis, a trend is evident in the three books analyzed, highlighting the low cognitive demand of the proposed tasks. It is hoped that the results will lead teachers to reflect on the tasks they present to their students and how to enrich such tasks.

Keywords: textbooks, school tasks, cognitive demand, mathematics skills, functions

Introducción

Aunque la mayoría de los libros son creados pensando en el estudiante, gran parte del uso suele dárselo el docente. Esto es debido a que muchos docentes los emplean como la principal herramienta para planear sus lecciones (Pepin y Haggarty, 2001). Por lo tanto, resulta importante estudiar y analizar el tipo de oportunidades de aprendizaje que esta herramienta proporciona. Randahl (2012) tras analizar el uso que se le da a un libro de texto de cálculo, concluye que este se percibe principalmente como fuente de tareas. De tal forma que este es un buen aspecto para considerar cuando se analizan libros de texto.

La relevancia de las tareas es tal, que diversos estudios afirman que lo que los estudiantes aprenden está determinado en buena medida por las tareas que los docentes asignan (Sullivan et al., 2013), pues se considera que es mediante estas que se brinda realmente oportunidades de aprendizaje al alumnado (Anthony y Walshaw, 2009), permitiendo desarrollar habilidades de razonamiento y pensamiento (Lee et al., 2016). De esta forma, las tareas transmiten mensajes sobre qué son las matemáticas y qué implica conocerlas.

Dada su importancia e influencia, la investigación y estudios sobre libros de texto ha aumentado en los últimos años. Las líneas de trabajo son diversas; por ejemplo, algunos se centran en la presentación de los contenidos (p. ej. (Park, 2016; Wang et al., 2017) y otros se enfocan en la comparación (p. ej. Martínez De La Rosa, 2015). Un aspecto bastante interesante que abordan numerosos trabajos sobre libros de texto tiene que ver con el tipo de tareas que se plantean y la demanda cognitiva que requieren (p. ej. Hadar y Ruby, 2019). E incluso, hay trabajos que analizan libros de texto para inferir el significado de un contenido matemático que pretende el currículo nacional (p. ej. Pino-Fan et al., 2019).

En esa línea, el presente artículo es una extensión del trabajo presentado en RELME 35, que da continuidad a otros estudios realizados (p. ej. Vargas et al., 2020) y tiene por objetivo analizar las tareas propuestas en tres libros de texto costarricenses para el tema de funciones con el foco de visualizar, de forma general, las ideas sobre función que se fomentan, con lo cual reflexionar sobre la influencia que estas podrían tener en la construcción del significado por parte del estudiantado.

El trabajar con el contenido de funciones se debe a las distintas dificultades manifestadas por parte de estudiantes, e incluso profesores, respecto a este tópico (Amaya De Armas et al., 2021; Yoon y Thompson, 2020). Pues se ha evidenciado que a menudo poseen nociones variadas y desconectadas del significado de función (Sfard, 1992).

Marco teórico

Para este trabajo utilizaremos el marco teórico desarrollado en Rico y Moreno (2016) que se denomina *Análisis Didáctico*. Este marco tiene un origen curricular y se estructura según cuatro tipos de análisis (contenido, cognitivo, instrucción y evaluación). En el caso concreto de este trabajo, las tareas matemáticas escolares son uno de los organizadores del análisis de la *instrucción escolar.*

Para esto, se entiende por tarea escolar como "una propuesta que solicita la actividad del alumno en relación con las matemáticas y que el profesor planifica como oferta intencional para el aprendizaje o como instrumento para evaluación del aprendizaje" (Moreno y Ramírez, 2016, p. 244). El análisis de las tareas propuestas en libros de texto escolares ha sido abordado de distintas maneras, enfocándose en distintos aspectos (Fan, 2013). En nuestro caso para llevar a cabo el análisis, organizamos las categorías de Moreno y Ramírez (2016), tal como lo hicimos en Vargas et al. (2020), en tres bloques:

1. Aspectos sintácticos (forma): se analiza la estructura y formulación de la tarea.
2. Aspectos semánticos (significado): considerando el análisis de contenido en Rico (2016), contemplamos el contenido, contexto y situación de la tarea.
3. Aspectos de aprendizaje o cognitivos: se incluye la demanda cognitiva potencial, el manejo de sistemas de representación, los procesos matemáticos que fomenta y las habilidades específicas que permitirían desarrollar.

Estas tres categorías nos ayudan entender no solo el tipo de tarea que propone para el tema de funciones, sino el nivel de dificultad con el que se espera sea abordado este contenido.

Metodología

Para este estudio se han analizado 3 libros de texto utilizados en Costa Rica en décimo año, a los cuales haremos referencia como libro A (Publicaciones Porras y Gamboa, 2015), libro B (Cambronero, 2017) y libro C (Gómez, 2015). Es importante mencionar que, en Costa Rica, el Ministerio de Educación Pública no define un libro que deba ser usado en todo el país, es el docente quien decide si emplea alguno o se basa en varios de ellos para sus lecciones. Por lo tanto, la escogencia de los tres que se analizaron se basa en una consulta realizada a algunos docentes sobre el material de apoyo que utilizan para planificar sus lecciones; además de la disponibilidad y acceso a los mismos. En la tabla 1 se aprecia el número de tareas propuestas, así como la cantidad de ítems o subapartados en los que se dividen, siendo nuestra unidad de análisis precisamente cada uno de los ítems propuestos. En total 1262 ítems.

Tabla 1. *Número de tareas en cada libro según área temática.*

<table>
<tr><th rowspan="2">Área temática</th><th colspan="3">Cantidad de tareas (cantidad de ítems)</th></tr>
<tr><th>Libro A</th><th>Libro B</th><th>Libro C</th></tr>
<tr><td>Introducción de la noción de función</td><td>28 (85)</td><td rowspan="2">9 (31)</td><td>254 (314)</td></tr>
<tr><td>Análisis de gráficas (monotonía, asíntotas)</td><td>35 (80)</td><td>180 (184)</td></tr>
<tr><td>Dominio máximo y composición de funciones</td><td>4 (13)</td><td>8 (15)</td><td>142</td></tr>
<tr><td>Función lineal y cuadrática</td><td>92 (181)</td><td>20 (45)</td><td>205</td></tr>
<tr><td>Total</td><td>159 (326)</td><td>37 (91)</td><td>781 (845)</td></tr>
</table>

Fuente: elaboración propia.

Pese a que cada libro tiene sus particularidades, abordan básicamente los mismos contenidos; aunque profundizando más o menos en cada uno de ellos. Por ejemplo, el libro B estudia en un mismo capítulo los aspectos básicos de una función y la representación gráfica (ver tabla 1). Un primer aspecto por destacar es la notoria diferencia en la cantidad de tareas que propone cada libro para el tema de funciones.

Sistema de categorías para el análisis

Tal como se señaló en el marco teórico, se contemplaron 9 variables distribuidas en 3 categorías. De la categoría *sintética* se analizaron:

- Estructura (abierta/cerrada): Ponte (2004) considera que una tarea cerrada es aquella en la que se expresa con claridad lo que se da y lo que se pide, mientras que una abierta no está del todo claro lo que se da, lo que se pide, o ambas cosas. Señala, además, que las tareas abiertas se pueden clasificar en proyectos o investigaciones, mientras que las cerradas en ejercicios o problemas.
- Planteamiento (directo/inverso): para Groetsch (2001), en una tarea directa se dispone de unos datos, cierto procedimiento y se solicita un resultado, el cual es único. En las tareas inversas, se desconocen los datos o el procedimiento que producen cierto resultado; estas tareas pueden tener múltiples soluciones o ser insolubles. Por ejemplo, una tarea directa es dar el criterio de una función y solicitar el cálculo de imágenes; una tarea inversa sería determinar el criterio de una función conociendo las imágenes de algunos elementos de su dominio.

De la categoría del *significado*, se analizó:

- Contenido: identificamos el contenido matemático en cada uno de los ítems.

- Situación: agruparemos los ítems según en la situación PISA en que se presentan: personales, sociales, laborales o científicas (OECD, 2016).
- Contexto: tomamos los distintos contextos matemáticos, funciones o necesidades a las que el contenido de función atiende en cada uno de los ítems.

De la categoría *cognitiva*:

- Demanda cognitiva potencial, donde se definen cuatro niveles: (a) memorización, (b) procedimiento sin conexión, (c) procedimiento con conexión y (d) hacer matemática (Stein et al., 1996).
- Manejo de sistemas de representación: basados en (Duval, 1999) se analizar si la tarea solicita transformaciones intra-sistemas (procesamiento) o conexiones entre sistemas (conversiones).
- Procesos matemáticos que fomenta: razonar y argumentar, resolver problemas, conectar, representar o comunicar (Ministerio de Educación Pública, 2012).
- Habilidades específicas por desarrollar de acuerdo con lo que establece el Ministerio de Educación Pública (2012) para décimo año.

Resultados

En el siguiente apartado se detallan los resultados obtenidos para cada una de las variables analizadas.

Estructura y formulación de la tarea

La *estructura* de prácticamente todas las tareas analizadas es cerrada, esto quiere decir que no se plantean proyectos o investigaciones que fomenten la indagación por parte del estudiantado. Sin embargo, se hallaron un par de ejemplos de ítems, en los que se aprovecha el contexto de la tarea para que el estudiantado reflexione sobre una problemática social.

Aunque es entendible que las tareas cerradas tengan más presencia, pues demandan menos tiempo de ejecución y esto permite poder realizar otras tareas, lo cierto es que las tareas abiertas fomentan una serie de habilidades necesarias como la indagación, selección y análisis de datos, por lo que sería deseable hallar más tareas de este tipo.

Ahora bien, es importante no confundir una tarea de estructura abierta con una de respuesta abierta. Las tareas de estructura abierta pueden llevar a distintas respuestas, pero también una tarea de estructura cerrada podría aceptar más de una respuesta válida. Por ejemplo, en la figura 1, se aprecia una tarea cerrada de respuesta abierta. Y aunque no formaba parte del análisis, detectamos que este tipo de tarea (respuesta abierta) también es poco común en los libros de texto analizados.

Figura 1.*Tarea propuesta en el libro C.*

Dibuje una gráfica que represente a la función $h:]-1,2[\rightarrow]-3,3[$ sobreyectiva y estrictamente decreciente.

Fuente: tarea tomada de Gómez (2015).

En cuanto a la *formulación* de la tarea, la tabla 2 muestra los resultados en cada caso. Es impresionante la diferencia entre el porcentaje de ítems formulados de forma directa y los inversos.

Tabla 2. *Formulación de los ítems analizados.*

Formulación	Porcentaje (%) de ítems según la formulación		
	Libro A N=359	Libro B N=9	Libro C N=845
Directa	94	95	93
Inversa	6	5	7
N= cantidad de ítems en cada libro			

Fuente: elaboración propia.

Debe señalarse que en el análisis de cada uno de los ítems se tomó en cuenta la intención de este; por lo que en algunos casos ítems que pudieran ser similares fueron clasificadas de forma distinta. Por ejemplo, “hallar el criterio de una función lineal conociendo dos de sus puntos” puede considerarse inversa, si se le plantea al estudiante antes de estudiar el procedimiento para determinar hallar el valor de m y b en la ecuación de la recta; pues al conocer las fórmulas podríamos hablar de un planteamiento directo: se dan unos datos, se espera se aplique un procedimiento para dar un resultado. Mientras que en la primera opción ese procedimiento no estaba establecido y demandaba de un razonamiento a la inversa.

Aunque ambos tipos de tareas son necesarios y provechosos en el proceso de aprendizaje, las tareas inversas tienen la particularidad que más que aplicar un procedimiento demandan la comprensión de este, por lo que son un recurso muy provecho que generalmente tienen una complejidad mayor.

Contenido

Como se indicó en la metodología, los temas abordados en cada uno de los libros fueron básicamente los mismos; no obstante, la profundidad de aspectos abordados y la cantidad de ejercicios propuestos en cada caso era distinta. En la tabla 3 se aprecia el porcentaje de ítems dedicados en cada caso, la clasificación o separación en cuanto al contenido se realizó considerando la separación que hacían los propios libros.

Tabla 3. *Contenido abordado en cada uno de los ítems analizados.*

Contenido	Porcentaje (%) de ítems según el contenido		
	Libro A N=359	Libro B N=91	Libro C N=845
Criterio de una función	8	9	6
Nociones gráficas funciones (variables dependiente e independiente, ámbito, dominio, imagen, cortes con los ejes, gráfico)	29	26	27
Concepto de función (Función vs relación)	8	7	5
Composición de funciones	4	16	5
Monotonía y extremos	6	1	12
Clasificación de funciones según el codominio	3	9	5
Representación gráfica de una función	5	9	3
Análisis de funciones a partir de su representación gráfica.	10	7	6
Particularidades de la función lineal (valores de m y b, propiedades…)	8	1	4

Particularidades de la función cuadrática (eje simetría, vértice, concavidad, propiedades…)	8	3	9
Resolución de problemas	11	9	7
Rectas perpendiculares y paralelas	-	3	-
Dominio máximo	-	-	11
N= cantidad de ítems en cada libro			

Fuente: elaboración propia.

Se debe aclarar que el en libro B se encontraron más ítems relacionados con la monotonía de la función, pero estos siempre se incluyeron dentro del contenido de análisis de funciones a partir de su representación gráfica, mientras que los otros libros primero lo incluyeron como un contenido aparte.

Se puede observar que, en casi todos los casos, el porcentaje de ítems en cada contenido es similar, destacando que en el que más ítems se plantean es en la sección de nociones básicas de funciones, lo cual parece lógico al tratarse de la base del contenido. Una diferencia es el porcentaje de ítems propuestos por el libro B a la composición de funciones; o el libro C al dominio máximo, temas que, como se detalla más adelante no aparece en los planes de estudio para ese año escolar. Un aspecto que llama la atención es que solo un ítem del libro A solicitaba la representación tabular de una función, el sistema de representación más solicitado fue el gráfico.

Contexto y situación

Un aspecto de gran relevancia es el contexto y la situación en la que son planteadas las tareas, pues estas dan información sobre la aplicabilidad del contenido dentro y fuera de la matemática. En la tabla 4 se muestra una clasificación de *contextos* en los que se propusieron los ítems y su distribución porcentual. Tal como se aprecia, las funciones fueron abordadas fundamentalmente en un contexto algebraico y gráfico, lo cual es importante, pues permite al estudiante visualizar diferentes contextos matemáticos en los que involucra la función. Sin embargo, el contexto aplicado tuvo menor presencia en los tres libros.

Tabla 4. Contexto de los ítems propuestos.

Contexto	**Porcentaje (%) de ítems según el contexto**		
	Libro A N=359	**Libro B N=91**	**Libro C N=845**
Algebraico	42	31	56
Gráfico	43	56	29
Aplicado	15	13	15
N= cantidad de ítems en cada libro			

Fuente: elaboración propia.

Más interesante aún es analizar la situación dentro de la cual se plantearon los ítems, pues tal como se aprecia en la tabla 5, la mayoría se presentan dentro de una situación matemática; esto incluso en tareas con un contexto aplicado, como se aprecia en la figura 2.

Tabla 5. Situación en la que se plantea cada ítem.

Situación	Porcentaje (%) de ítems según la situación		
	Libro A N=359	**Libro B N=91**	**Libro C N=845**
Matemática	84	88	90
Otra ciencia	4	-	1
Laboral	4	4	5
Personal	2	7	2
Social	6	1	2
N= cantidad de ítems en cada libro			

Fuente: elaboración propia.

Este es un resultado al que hay que prestarle atención, pues este tipo de tareas refuerzan la idea mal concebida de que la matemática es una disciplina cuya utilidad está dentro de la misma matemática.

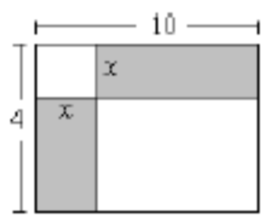
Figura 2. *Tarea propuesta en el libro C.*

35) Considere la figura adjunta y las proposiciones :

i) El área sombreada se puede calcular con la fórmula

$A(x) = (4-x)(10-x)$

ii) Para $x = 2$ el área es 20 .



De ellas son verdaderas

A) Solo i)

B) Solo ii)

C) Ambas

D) Ninguna

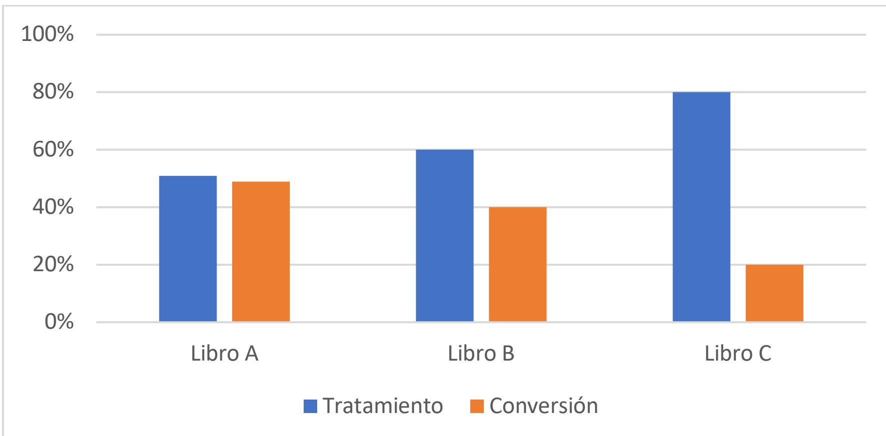
Fuente: tarea tomada de Gómez (2015).

Manejo del sistema de representación

Con esta variable iniciamos los aspectos cognitivos de la tarea, como se mencionó, el fomento de conexiones entre sistemas de representación es una cuestión deseable en el estudio de contenidos matemáticos. En el planteamiento de la tarea, se usan distintos sistemas de representación, destacando en este caso el simbólico y el verbal. Sin embargo, resulta de interés analizar el manejo que se solicita de dicho sistema.

Como se observa en la figura 3, el tratamiento o la conversión entre sistemas es algo que se aborda de manera distinta en los libros; por ejemplo, el libro A es bastante equilibrado al respecto, solicitando ambos procesos casi que de forma igualitaria; mientras que el libro C se basa en el tratamiento o procesamiento del sistema dado. Esto es algo relevante, pues si bien el dominio de los distintos sistemas de representación es importante, también lo es el poder establecer conexiones entre estos.

Figura 3. *Manejo de los sistemas de representación solicitado en los ítems.*



Fuente: elaboración propia.

Demanda cognitiva potencial

La demanda cognitiva potencial es uno de los aspectos más estudiados respecto a las tareas que se plantean al estudiar matemática. Como señalamos en el apartado del marco teórico, para el análisis empleamos la categorización dada por Stein et al. (1996), quienes consideran cuatro niveles de demanda cognitiva. Sin embargo, para una mejor clasificación de los ítems analizados, creamos un sistema de subcategorías basado en el tipo de tareas que se encontró durante el análisis, lo cual permite clarificar un poco el tipo de tarea propuesta. En la tabla 6 se aprecian los resultados obtenidos.

Tabla 6. *Demanda cognitiva de los ítems analizados.*

Categoría	Subcategoría	Porcentaje (%) de ítems según la demanda		
		Libro A N=359	Libro B N=91	Libro C N=845
Memorización		-	3	-
Procedimiento sin conexión	Cálculo directo	21	32	17
	Cálculo indirecto	11	10	19
	Resolución de problemas simples (dado el criterio)	7	7	6

	Aplicar propiedades (dado el criterio)	-	1	2
Procedimiento con conexión	Reconocer o identificar	6	17	12
	Representación (criterio)	4	10	3
	Representación (condiciones)	1	-	-
	Interpretación de gráficas	35	11	15
	Deducción-Razonamiento	6	7	7
	Transcripción al lenguaje simbólico		-	5
	Análisis de propiedades	4	-	9
Hacer matemática	Resolución de problemas (sin criterio)	5	2	3
	Justificación - Prueba	-	-	2
N= cantidad de ítems en cada libro				

Fuente: elaboración propia.

Destaca el bajo porcentaje de tareas en el nivel de demanda más alto; pues la mayoría de los ítems se centran en el segundo nivel: procedimiento sin conexión. Esto nos evidencia que las tareas planteadas para el tema de funciones buscan reforzar, principalmente, la aplicación correcta de algoritmos; sin necesidad de razonamientos complejos ni el establecer conexiones entre los diferentes elementos estudiados respecto al tema. Aunque es destacable que una cantidad considerable de ítems se encontraran en el tercer nivel de demanda cognitiva.

Procesos y habilidades matemáticas

Finalmente, también relacionados con aspectos cognitivos, se analizaron los procesos y las habilidades matemáticas fomentadas por cada uno de los ítems. Desde el currículo costarricense se proponen 5 procesos matemáticos que deben trabajarse a través de todos los contenidos matemáticos, y para cada nivel educativo se plantean una serie de habilidades que esperan desarrollarse.

En la tabla 7 se observa en qué porcentaje cada uno de los procesos se manifestó en los ítems analizados; es importante mencionar que en un mismo ítem puede involucrarse más de un proceso.

Tabla 7. *Procesos matemáticos fomentados en cada uno de los ítems.*

Proceso	Porcentaje (%) de ítems que fomentan cada proceso		
	Libro A N=359	Libro B N=91	Libro C N=845
Razonar y argumentar	23	14	25
Plantear y resolver problemas	15	10	7
Conectar, establecer relaciones	3	89	5
Representar de diversas formas	53	46	33
Manipulación simbólica	31	58	44
Comunicar	-	-	7
N= cantidad de ítems en cada libro			

Fuente: elaboración propia.

Es claro que el proceso que más se fomenta al estudiar funciones es el de representación, dada su relevancia y la frecuencia con la que se observó, se separaron aquellos ítems que lo que fomentan es la representación y manipulación simbólica, que como se puede observar abarca un alto porcentaje de los ítems. Esto resulta importante, pues esto reafirma la creencia de que la matemática consiste en una serie de símbolos que debemos aprender a manipular. Además, llama la atención el poco fomento de procesos tan importantes como el de establecer relaciones entre los distintos elementos e ideas involucradas en el estudio de las funciones. En ese sentido no se aprecia un equilibrio entre el desarrollo de los distintos procesos.

Un aspecto en el que sí se apreció mayor balance, fue en cuanto a las habilidades estipuladas en los planes de estudio. Tal como se aprecia en la tabla 8, todas las habilidades fueron abordadas en los libros, y aunque hay un porcentaje mucho mayor de tareas en la habilidad de analizar funciones a partir de sus representaciones, lo cierto es que es una habilidad mucho más general que otras de las establecidas.

Algo a destacar es que el libro C, incluyó varias tareas que abordaban temas y habilidades no propuestas en el currículo, como es el caso de las tareas que tienen que ver con dominio máximo, e incluso dedicó cerca de 40 ítems para el repaso de conocimientos previos.

Tabla 8. *Habilidad específica que promueve cada ítem.*

Habilidad	Porcentaje (%) de ítems según la habilidad		
	Libro A N=359	Libro B N=91	Libro C N=845
Identificar si una relación dada en forma tabular, simbólica o gráfica corresponde a una función.	8	7	5
Evaluar el valor de una función dada en forma gráfica o algebraica, en distintos puntos de su dominio.	10	3	12
Analizar una función a partir de sus representaciones.	29	21	35
Calcular la composición de dos funciones.	3	16	5
Representar gráficamente una función lineal.	3	3	2
Determinar la pendiente, la intersección con el eje de las ordenadas y de las abscisas de una recta dada, en forma gráfica o algebraica.	14	8	4
Determinar la ecuación de una recta utilizando datos relacionados con ella.	6	11	3
Analizar gráfica y algebraicamente la función cuadrática con criterio $f(x) = ax^2 + bx + c$	8	18	8
Plantear y resolver problemas en contextos reales utilizando las funciones estudiadas.	12	10	9
Relacionar la representación gráfica con la algebraica.	7	3	3
N= cantidad de ítems en cada libro			

Fuente: elaboración propia.

Conclusiones

En términos generales, pese a que la cantidad de ítems es muy diferente en cada libro, se aprecia una tendencia similar en algunos aspectos. Por ejemplo, la estructura y el planteamiento de las tareas analizadas es el mismo en los tres libros, tratándose de tareas cerradas y directas. Y aunque está bien presentar este tipo de tareas, resulta necesario enfrentar al estudiantado a tareas abiertas e inversas que fomenten más que la aplicación de procedimientos y algoritmos.

Respecto a los aspectos de significado, llama enormemente la atención la tendencia a no presentar la matemática como una herramienta útil en la resolución de problemas cotidianos; si bien es cierto se hallan algunos ejemplos de tareas en situaciones distintas a la matemática, también es verdad que el predominio lo tienen las tareas en esta situación y en contextos no aplicados, lo cual coincide con otros estudios previos en donde las tareas presentan la idea de que las aplicaciones de la matemática están dentro de la misma disciplina (Vargas et al., 2020).

En cuanto a la demanda cognitiva, se trata principalmente de tareas que solicitan un procedimiento sin conexión, lo cual es interesante, pues se ha demostrado que altos logros de aprendizaje se asocian con tareas que involucran altos niveles de pensamiento y razonamiento (Smith y Stein, 1998).

En esa línea, se analizó el manejo de los sistemas de representación solicitado, y aunque una buena cantidad de tareas piden realizar conexiones entre un sistema y otro, la mayoría lo que demanda es una manipulación sobre un único sistema. Lo cual es un aspecto que podría mejorarse, pues diversos estudios señalan que el manejo y conexiones entre los distintos sistemas promueven una mejor comprensión (p. ej. Chang et al., 2016).

Por otra parte, el análisis permitió observar que algunos procesos matemáticos, como el de resolver problemas, son poco abordados, lo cual llama mucho la atención pues es precisamente el enfoque que plantea el Ministerio de Educación en Costa Rica. Esto se reafirma al analizar el fomento de las habilidades específicas que deben desarrollarse; donde la habilidad de plantear y resolver problemas tiene poca presencia en los libros de texto analizados.

En resumen, aunque en los libros se encuentran ejemplos muy interesantes de tareas, es importante reflexionar sobre la tendencia que siguen, pues estas tareas en conjunto son las que influyen en los significados que construye el estudiantado respecto al tema de funciones. Por lo tanto, esperamos que el análisis pueda servir de guía para que los docentes caractericen y reflexionen sobre las tareas que plantean a sus estudiantes, con miras a enriquecer el aprendizaje de las Matemáticas.

Referencias bibliográficas

Amaya De Armas, T., Castellanos, A. G. y Pino-Fan, L. R. (2021). Competencias de profesores en formación en matemáticas al transformar las representaciones de una función. *Uniciencia, 35*(2), 1-15. https://dx.doi.org/10.15359/ru.35-2.12

Anthony, G. y Walshaw, M. (2009). *Effective pedagogy in mathematics*. international Academy of Education.

Cambronero, F, (2017). *Matemática 10. Un enfoque práctico*. Didáctica Multimedia.

Chang, B., Cromley, J. G. y Tran, N. (2016). Coordinating Multiple Representations in a Reform Calculus Textbook. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *14*, 1475-1497. https://doi.org/10.1007/s10763-015-9652-3

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Universidad del Valle.

Fan, L. (2013). Textbook research as scientific research: Towards a common ground on issues and methods of research on mathematics textbooks. *ZDM Mathematics Education*, *45*, 765-777.

Gómez, L. (2015). *Matemática 10º. Desarrollando habilidades.* Editorial PIMAS.

Groetsch, C. W. (2001). Teaching-Inverse problems: The other two-thirds of the story. *Quaestiones Mathematics*, *24*(1), 89-94.

Hadar, L. L. y Ruby, T. L. (2019). Cognitive opportunities in textbooks: The cases of grade four and eight textbooks in Israel. *Mathematical Thinking and Learning*, *online*. https://doi.org/10.1080/10986065.2019.1564968

Lee, K. H., Lee, E. J. y Park, M. S. (2016). Task Modification and Knowledge Utilization by Korean Prospective Mathematics Teachers. *Pedagogical Research*, *1*(2). http://dx.doi.org/10.20897/lectito.201654

Martínez De La Rosa, F. (2015). Esquemas conceptuales de los estudiantes en relación con algunas características de las funciones. *Suma, 79*, 41-52.

Ministerio de Educación Publica. (2012). *Programas de estudio de Matemáticas*. San José, Costa Rica.

Moreno, A. y Ramírez, R. (2016). Variables y funciones de las tareas matemáticas. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria* (pp. 243-257). Pirámide.

OECD (2016). *PISA 2015 assessment and analytical framework: Science, reading, mathematics and financial literacy.* París, Francia: OECD.

Park, J. (2016). Communicational approach to study textbook discourse on the derivative. *Educational Studies in Mathematics*, *91*, 395-421.

Pepin, B. y Haggarty, L. (2001). Mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms: A way to understand teaching and learning cultures. *ZDM Mathematics Education*, *33*(5), 158-175.

Pino-Fan, L., Parra-Urrea, Y. y Castro-Gordillo, W. (2019). Significados de la función pretendidos por el currículo de matemáticas chileno, *Revista Internacional de Investigación en Educación, 11*(23), 201-220. doi: 10.11144/Javeriana.m11-23.sfpc

Ponte, J. P. (2004). Problemas e investigaciones en la actividad matemática de los alumnos. En J. Giménez, L. Santos y J. P. Ponte (Eds.), *La actividad matemática en el aula* (pp. 25-34). Graó.

Publicaciones Porras y Gamboa. (2015). *Matemática 10.* Autores.

Randahl, M. (2012). First-year engineering students' use of their mathematics textbook—Opportunities and constraints. *Mathematics Education Research Journal*, *24*, 239-256. https://doi.org/10.1007/s13394-012-0040-9

Rico, L. (2016). Matemáticas y análisis didáctico. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria* (pp. 85-100). Pirámide.

Rico, L. y Moreno, A. (Eds.). (2016). *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria.* Pirámide.

Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification the case of function. In G. Harel y E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 59–84). Mathematical Association of America. MAA Notes 25.

Smith, M. y Stein, M. (1998). Selecting and Creating Mathematical Tasks: From Research to Practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *3*, 344-350.

Stein, M. K., Grover, B. W. y Henningsen, M. (1996). Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: An analysis of mathematical tasks used in reform classrooms. *American Educational Research Journal*, *33*(2), 255-288.

Sullivan, P., Clarke, D. y Clarke, B. (Eds.). (2013). *Teaching with Tasks for Effective Mathematics Learning*. Springer.

Vargas, M. F., Fernández-Plaza, J. A. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2020). La derivada en los libros de texto de 1º de bachillerato: un análisis a las tareas propuestas. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 18*, 87-102.

Wang, Y., Barmby, P. y Bolden, D. (2017). Understanding Linear Function: A Comparison of Selected Textbooks from England and Shanghai. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *15*, 131-153. https://doi.org/10.1007/s10763-015-9674-x

Yoon, H. y Thompson, P. (2020). Secondary teachers' meanings for function notation in the United States and South Korea. *Journal of Mathematical Behavior, 60,* 100804. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2020.100804

OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS Y DIDÁCTICOS EN LOS PROCESOS DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LOS NÚMEROS ENTEROS

EPISTEMOLOGICAL AND DIDACTIC OBSTACLES AT THE TEACHING AND LEARNING PROCESS OF INTEGER NUMBERS

Ivone Anahi Patagua, Carina Rosana Renfijes, Silvia Mabel Baspiñeiro
Universidad Nacional de Salta. (Argentina)
ivonepatagua@gmail.com, carisermat@gmail.com, smbaspi@gmail.com

Resumen:
La introducción escolar de los números enteros se hace habitualmente en un entorno aritmético apoyándose en la presentación de modelos concretos, existen variadas investigaciones que cuestionan la pertinencia didáctica de este tipo de entrada. A partir del análisis del tema en libros de textos escolares del nivel secundario, la historia y el análisis de los obstáculos producidos en ella, y evidenciados en la escolaridad a través de resultados de experiencias en talleres de formación continua, con docentes del nivel primario, secundario, y de estudiantes avanzados de ambos profesorados, se plantea la reflexión, discusión y acciones de formación sobre la enseñanza del tema motivo de este trabajo.

Palabras clave: *obstáculo epistemológico, obstáculo didáctico, números enteros*

Abstract:
The school introduction of the integer numbers usually takes place in an arithmetic environment supporting the presentation of concrete models; there are several researches that question the didactic relevance of this kind of introduction. Starting from the analysis of the subject, in secondary education textbooks, the history and the analysis of the obstacles produced there, and evidenced in schooling through the results of experiences in continuing training workshops, with primary and secondary school teachers, and advanced students of both teacher groups, arises the reflection, discussion and training actions on the teaching of the subject studied in this research.

Keywords: epistemological obstacle, didactic obstacle, integer numbers

Introducción

Un obstáculo epistemológico se evidencia en el estudio de la historia de la matemática. La comunidad de educadores matemáticos debe tomar conciencia de él para evitar su réplica en el saber enseñado a los alumnos. En este sentido, con la necesidad de producir buenas propuestas escolares desde la relación con los obstáculos epistemológicos, se analizan los obstáculos didácticos relativos a la enseñanza de un tema matemático.

Los libros de textos son un medio utilizado por los docentes, los cuales tienen implícita una epistemología proveniente del autor o autores del mismo, que con frecuencia dista del enfoque de construcción del conocimiento propuesto en documentos curriculares tanto provinciales como nacionales de nuestro país. Es por esto que constituyen un recurso valioso para la investigación de los obstáculos didácticos vinculados a las actividades que proponen, y que a posteriori tienen posibilidad de ser trabajadas por los alumnos.

La introducción de los números enteros, especialmente a través del uso de libros de textos en el aula, suele relacionarse con modelos concretos. Este enfoque disminuye la importancia del proceso de unificación de la recta numérica, al considerar los números negativos como una extensión de los números naturales, en lugar de reconocerlos como una entidad distinta.

La entrada a los números enteros desde el trabajo con libros de textos y áulico, muchas veces, está relacionada a modelos concretos, restando importancia al trabajo de unificación de la recta numérica, con la concepción de los números negativos como prolongación de los números naturales, y no como una distinción.

En este trabajo, se examina la influencia de los libros de texto en las tareas áulicas, destacando su impacto en ausencia del reconocimiento de los obstáculos epistemológicos. Esto nos lleva a reflexiones y discusiones críticas sobre la enseñanza actual de la entrada a los números enteros, basadas en el análisis de obstáculos históricos, la evaluación de libros de texto de educación secundaria, y la exploración de las concepciones emergentes de profesores en el entorno de un aula taller.

Marco teórico

Una concepción tiene un campo de problemas en el que funciona, y otro en el que no por ampliación del mismo, esto obliga a realizar una adaptación a nuevas situaciones. El sujeto puede rechazarla sin hacerla evolucionar, convirtiéndola en un obstáculo. Por esta razón, la noción de concepción engloba a la de obstáculo.

En este sentido, se asume la importancia del estudio de los números enteros, teniendo como punto de partida la definición de obstáculo epistemológico, siendo aquellos que están relacionados al propio conocimiento, evidenciados por medio de un análisis histórico, y considerados como parte del significado del concepto. Por lo tanto, encontrarlos y superarlos es una condición necesaria para la construcción de una concepción relevante (Godino, 1991).

Por lo tanto, resulta importante estudiar la historia del concepto con el fin de identificar aquellos avances y retrocesos que se produjeron en el camino hacia su formalización, así como las dificultades que surgieron, las cuales pueden significar una evidencia de posibles obstáculos epistemológicos (Cornu, 1991).

Como consecuencia, al estudiar el desarrollo histórico de las formas de negatividad (noción de los números negativos), se evidencian diversos aportes de los obstáculos epistemológicos.

A través de estudios y replanteamientos propuestos por Glaeser (1981), Duroux (1982) y Schuring (1986), se destacan los siguientes:

- O1: los números son interpretados como magnitudes.
- O2: falta de aptitud para manipular cantidades negativas aisladas.
- O3: dificultad para dar sentido a las cantidades negativas aisladas. Por ejemplo, las soluciones negativas a las ecuaciones eran cantidades ficticias que se concebían como un defecto en el enunciado del problema.

- O4: dificultad para unificar la recta real. Desde una concepción de los negativos y los positivos en términos antinómicos, de naturaleza distinta.
- O5: distinción entre cantidad y número.

Los obstáculos didácticos están ligados al sistema de enseñanza en que se encuentran inmersos nuestros alumnos, emergentes de las elecciones didácticas hechas para establecer la situación de enseñanza (Brousseau, 1983), lo que hace necesario reflexionar sobre ellos, para poder evitarlos. Los errores de los alumnos se relacionan con los mismos, a través de dificultades en las propuestas áulicas generando nociones falsas, impidiendo avanzar en el conocimiento, y en la construcción del significado matemático de un concepto.

De acuerdo con Cid (2015), posicionada desde la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau, la existencia de obstáculos epistemológicos tiene consecuencias inmediatas en la planificación de la enseñanza de un determinado contenido, asociado a un obstáculo didáctico. Conocer estos obstáculos es imprescindible para construir "buenas" génesis escolares de las nociones matemáticas, así como de las condiciones didácticas que los producen.

Por lo que, la entrada para la noción de números negativos a través de modelos concretos, con la intencionalidad de modelizar el contexto natural, cultural y social donde los estudiantes conviven, según Cid (2003), se contrapone a su génesis histórica al sostenerse en el modelo algebraico. Esto plantea una complejidad que habita en el aula en la transmisión cultural de los números enteros y los procesos de construcción de los estudiantes sobre esos números.

En la planificación de la enseñanza, los docentes tienen un apoyo fundamental, el libro de texto o texto escolar, entendido como:

> Un objeto cultural, un medio mediante el cual se construye el consenso educativo. Sirve por tanto para introducir una ideología y para legitimar contenidos y formas específicas del conocimiento escolar. En este sentido, el análisis del libro de texto o texto escolar es un recurso fundamental para la investigación educativa en la medida en que brinda visiones institucionalizadas del conocimiento que con frecuencia suelen ser distantes de los estudiantes. (Cantoral *et al*, 2015, pp. 9-10)

A su vez, en el trabajo sobre cuestiones de enseñanza, se requiere la colaboración entre investigadores y docentes para la construcción conjunta en la identificación de problemas comunes explorados con los aportes de unos y otros, y desde prácticas y posicionamientos diferentes según Sensevy (2011) citado por Sadovsky et al. (2016).

Metodología

Se emplea una metodología de tipo cualitativa. Según Arias (2006) y Tamayo y Tamayo (2000) el trabajo se clasifica como documental, pues se analizan libros de textos escolares de uso frecuente por la mayoría de los docentes de educación secundaria. Además, se considera interactiva y reflexiva debido a la participación de los investigadores en un aula taller, con el objetivo de estudiar las concepciones, producciones y reflexiones emergentes de los participantes sobre los posibles obstáculos didácticos, su relación con los epistemológicos en la enseñanza de los números enteros, y la incidencia de los libros de textos escolares en las actividades áulicas propuestas.

Para el análisis documental de los libros de textos escolares, se estudió la entrada a los números enteros que realizan cada uno, investigando las actividades que están propuestas y su relación con los modelos concretos. Se evaluó la presencia de actividades con recta numérica, con la finalidad de identificar la presencia de obstáculos epistemológicos, y de posibles obstáculos didácticos en la obra, lo que condujo a realizar una categorización de los mismos según los resultados emergentes.

Las concepciones, producciones y reflexiones de participantes de un aula taller, emergieron de una sesión en la que concurrieron docentes de Matemática de educación primaria y secundaria en actividad, así como estudiantes avanzados del profesorado en Matemática. Esta sesión duró cuatro horas, y se dividió en tres momentos. En el primer momento, se reflexionó sobre las actividades propuestas para la enseñanza de números enteros en sus aulas. Se analizaron también, las distancias y proximidades entre el trabajo de las docentes de educación primaria y secundaria, con el propósito de poner en discusión posibles rupturas emergentes en la continuidad educativa escolar. En el segundo momento, se examinaron los obstáculos epistemológicos y su relación con los errores presentes en las producciones de los estudiantes, relacionados con el orden, la infinitud, el opuesto de un número y el distanciamiento con la unificación de la recta numérica. La sesión finalizó con el tercer momento de producción y cierre, donde los participantes generaron propuestas de enseñanza para la introducción de números enteros, promoviendo la articulación entre la primaria y secundaria y teniendo en cuenta los obstáculos previamente analizados. A lo largo de toda la sesión, se fomentó un espacio de debate, diálogo y reflexión entre diversos actores del sistema educativo; docentes en formación continua de diversos ámbitos y estudiantes en formación inicial; propiciando el intercambio de problemáticas subyacentes al tema y estimulando el trabajo de articulación.

Desarrollo de algunos ejemplos

En el desarrollo del análisis documental, se estudió los obstáculos epistemológicos que se visibilizan, y los posibles obstáculos didácticos emergentes de ellos, por lo que, en primer lugar, se realizó el análisis de tres libros de textos, dos de ellos de uso frecuente por la mayoría de los docentes y otro cuya autoría es de un referente didáctico.

En segundo lugar, se recopilaron las concepciones de los docentes y alumnos avanzados del profesorado en educación secundaria en matemática.

Análisis de los libros de texto

En el libro 1, cuya edición corresponde al 2015, bajo el capítulo 4: Números enteros, se realiza una entrada a los números enteros a través de variadas actividades sobre débitos y créditos, temperaturas, tabla de posiciones de fútbol, intercalando con parte teórica donde expresa que un número natural con un signo menos adelante se llama opuesto de ese número natural, conceptualizando los números enteros como los naturales, el cero y los enteros. En actividades siguientes se inicia el trabajo con recta numérica para ubicar posterior y anterior, opuestos y algunos ejercicios de orden. En un principio los números son interpretados como magnitudes (O1) dado el trabajo con modelos concretos, perdiendo sentido el signo menos (D1) y presentando una dificultad para establecer el orden (D3), sin embargo, se vislumbra a posteriori, una intencionalidad del trabajo intramatemático desde la recta real, lo que permite abordar las propiedades y la extensión desde el campo de los números naturales. Por ejemplo, en la Figura 1, se solicita la ubicación de temperaturas según el criterio del alumno, perdiendo de vista el orden con el que lo debe realizar.

Figura 1. *Tarea del libro 1.*

Fuente: hacer matemática 1/2 – Editorial Estrada.

El libro 2, fue editado en el año 2017, donde el capítulo 2: Números Enteros, aborda el trabajo del campo numérico. Le antecede un capítulo: Números Naturales, iniciando con la presentación teórica del conjunto de los Números Naturales, luego citan que, para expresar deudas, subsuelos y temperaturas bajo cero, estos números no son suficientes, por lo tanto, es necesario agregar números negativos, dando lugar a interpretaciones de los números negativos como magnitudes (O1) y sin cobrar sentido (O3). Luego de esto, define al conjunto de los Números enteros (Z), como el formado por los naturales, el cero y los negativos.

A continuación, se proponen ocho actividades en las que prioriza una entrada a Z a través de situaciones concretas, pidiendo colocar el número entero que representa cada una de ellas. Aquí se espera que se asocien las mismas por debajo de un nivel de referencia con números negativos, tal como lo expresa en la teoría: las "pérdidas", "deudas", "temperaturas bajo cero", "metros bajo el nivel del mar", "siglos antes de Cristo", etc. En estos casos, es el criterio del alumno basado en su experiencia, el que interviene en su respuesta, lo que conduce a que los estudiantes coloquen el número que ellos creen debe responder; si bien por lo general arriban a respuestas correctas, lo hacen por asociación o intuición de lo positivo y lo negativo a diferentes situaciones, carentes de sentido por no ser construidas en un modelo matemático que las justifique (O3).

La definición de la recta numérica se presenta a posteriori, con el correspondiente criterio para ordenar números enteros y sus representaciones. Esto continúa con la representación de rectas numéricas para completar números enteros positivos y negativos, a partir de algunos ubicados, lo cual produce una dificultad para ampliar y extender el trabajo con los números naturales desde la unificación de la recta real (O4). Este enfoque implica trabajar con una idea ya acabada, lo que puede dificultar su ampliación y extensión.

Del Libro 2, emergen obstáculos didácticos dado que el signo menos sin sentido (D1), y a su vez se impide el trabajo con propiedades de números enteros desligadas del modelo concreto (D2), lo cual debe considerarse a la hora de producir buenas propuestas de enseñanza. Por ejemplo, en la Figura 2 se busca que los noventa y cinco años antes de Cristo se asocie al - 95.

Figura 2. *Tarea del libro 2.*

1. Escribí un número entero que represente cada situación.

a. Un alpinista está a doscientos cincuenta metros de altura. →

b. Se hace un retiro de quinientos pesos de una cuenta bancaria. →

c. Un hecho ocurrió noventa y cinco años antes de Cristo. →

d. Un ascensor está en el cuarto subsuelo. →

e. Un buzo se encuentra a cuarenta y tres metros de profundidad. →

Fuente: matemática 1. Serie llaves.

El libro 3, editado en el año 2017, inicia el trabajo con los números enteros a través de dos problemas cotidianos como distancias sobre y bajo el nivel del mar, otro de naipes donde los rojos son aquellos que suman puntos a favor y los negros en contra, este tipo de actividades obstaculizan el trabajo con negativos, dando lugar interpretaciones de los mismos como magnitudes (O1), sin cobrar sentido (O3), y produciendo una dificultad para ampliar y extender el trabajo con los números naturales desde la unificación de la recta real (O4).

A posteriori bajo el título de números positivos y números negativos, se presenta el concepto de números enteros explicitando la conformación de los mismos como el conjunto formado por los negativos (opuestos a los positivos), el cero y los positivos, y cuáles son mayores o menores a cero. Se aclara que el número entero positivo puede llevar o no el signo +.

En forma coloquial, bajo el subtítulo “Los enteros en la recta numérica. Comparación”, los autores definen textualmente que los enteros positivos se representan a la derecha del 0, y los negativos a la izquierda. A su vez, se destaca que un número y su opuesto están a la misma distancia del 0, y, además, si un número es menor que otro, está ubicado más a la izquierda en la recta numérica.

Las actividades que prosiguen a continuación son: de asociación con modelos concretos para representar con un número entero, situaciones escritas en forma coloquial como: La temperatura es de 3 grados bajo cero, o hay un arrecife de coral a 18 m bajo el nivel del mar, y otra de representación gráfica sobre un acantilado, el mar y elementos inmersos en el paisaje descrito, para decidir cuál del listado de números propuestos es adecuado para relacionar los elementos y su ubicación respecto al nivel del mar.

Las únicas actividades intramatemáticas en esta sección, son de comparación entre dos números enteros, y de identificación y escritura de consecutivos, sin recta real. Por lo que, se infiere que el signo menos carece de sentido (D1), provocando una dificultad para construir la propiedad de orden (D3). Por ejemplo, en la Figura 3, se reflejan los obstáculos mencionados, dado que se asocia desde el sentido común.

Figura 3. *Tarea del libro 3.*

Fuente: Entre números I. Editorial Santillana.

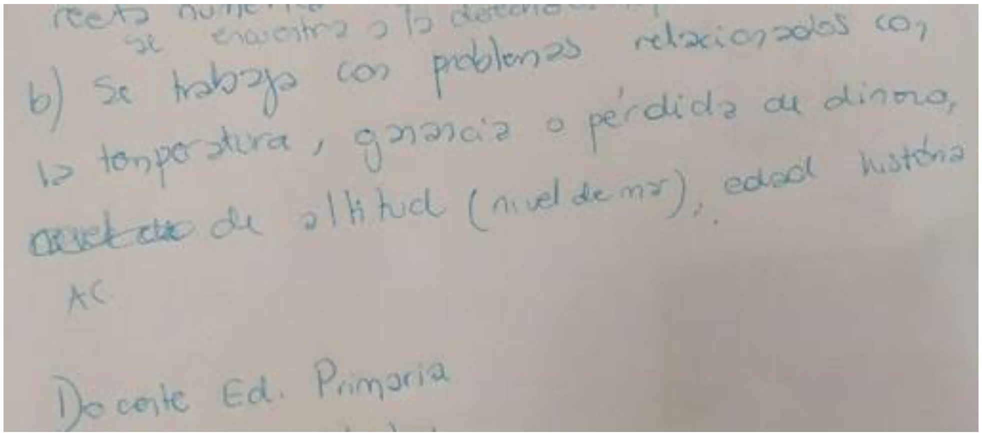
Trabajo en el aula taller con docentes

Del trabajo de diagnóstico en un aula taller con docentes y estudiantes avanzados de carreras de profesorados en Matemática en educación primaria y educación secundaria, emergen variadas respuestas, teniendo en cuenta su trayectoria personal escolar y su formación inicial. Se focalizará el análisis en detectar aquellas concepciones de los participantes en relación al trabajo con números enteros.

Una de las consignas dadas fue: Teniendo en cuenta su trayectoria personal escolar y su formación inicial: ¿Con qué tipo de problemas, recursos y representaciones (medios) se trabaja la enseñanza de los números enteros en el nivel secundario?

Algunas de las respuestas obtenidas fueron:

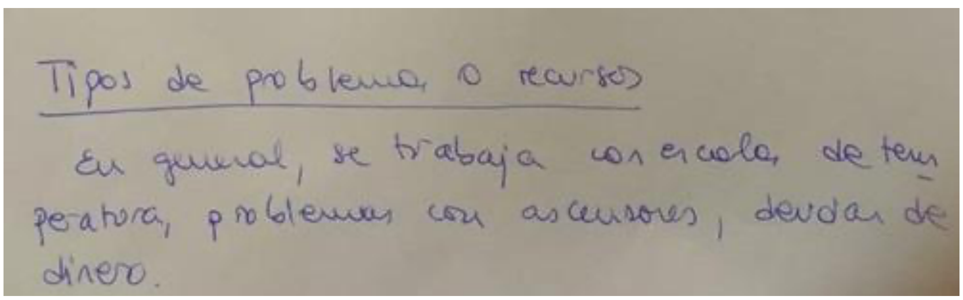
Figura 4. *Respuesta docente de educación primaria.*


b) Se trabaja con problemas relacionados con la temperatura, ganancia o pérdida de dinero, ~~asociado~~ de altitud (nivel de mar), edad histórica AC

Docente Ed. Primaria

Fuente: producción de los asistentes al aula taller.

Figura 5. *Respuesta docente del nivel secundario.*


Tipos de problema o recursos

En general, se trabaja con escala de temperatura, problemas con ascensores, deudas de dinero.

Fuente: producción de los asistentes al aula taller.

Estas respuestas evidencian que los docentes coinciden en la idea de introducir los números enteros a través de modelos concretos, que incluyen interpretaciones del signo negativo relacionadas con conceptos como "deudas", "temperaturas bajo cero", o "para indicar una posición en el tiempo a.C.", los cuales son extraídos directamente de los libros de texto. Esto genera a posteriori la presencia de obstáculos epistemológicos, como las asociaciones identificadas en los textos escolares analizados, generando dificultades para dar sentido a las cantidades negativas (O3), y a la unificación de la recta real (O4).

La implementación de actividades de este tipo al inicio conduce a la asociación de respuestas con creencias y subjetividades respecto a los números positivos y negativos, donde el signo menos carece de sentido (D1) y se aparta del estudio de propiedades. En ocasiones, algunas de estas propiedades se presentan de manera coloquial (D4), careciendo de una construcción y significación adecuadas (D2, D3), lo que genera posteriormente dificultades en el trabajo con las operaciones.

Resultados

Análisis de libros de textos, concepciones de los participantes, propuestas de enseñanza

Se presenta un resumen del análisis producido, teniendo como referencia los posibles obstáculos didácticos, D1: El signo menos carece de sentido, D2: No es posible trabajar con propiedades de números enteros desligadas del modelo concreto, D3: Dificultad para construir la propiedad de orden, D4: El opuesto de un número carece de sentido.

Tabla 1. *Resumen obstáculos epistemológicos - posibles didácticos*

	Libro1 Ed. 1	Libro 2 Ed.2	Libro 3 Ed. 3	Concepciones Participantes
Motivo de elección	El autor es un referente didáctico	De uso común por docentes	De uso común por docentes	Concepciones Coincidentes
Obstáculos epistemológicos	O1	O1, O3 y O4	O1, O3 y O4	O3 y O4
Posibles Obstáculos Didácticos	D1 y D3	D1 y D2	D1 y D3	D1, D2, D3, D4

Fuente: elaboración propia.

Los libros de texto analizados y las concepciones de los participantes evidenciados en la etapa diagnóstico, plantean una entrada a los números enteros a través de modelos concretos: de neutralización, problemas de temperatura, de haberes y débitos, donde se pretende que los estudiantes intuyan el comportamiento del nuevo campo numérico, algunas de sus propiedades, y las operaciones, a partir del manejo de los enteros contextualizados.

Las propuestas de enseñanza emergentes a posteriori del análisis de los libros de textos, los obstáculos epistemológicos y los posibles didácticos, intentaron franquear los mismos desde un trabajo intramatemático de ampliación de la recta numérica desde los números naturales a los enteros, propiciando una construcción del conocimiento y el estudio de las propiedades desde la articulación del nuevo saber con el anterior tomado como instrumento. A los fines de este trabajo, las propuestas emergentes del aula taller no serán presentadas.

Resultados Preliminares

Desde los aportes de la didáctica de la matemática, se evidencian obstáculos epistemológicos-didácticos presentes en la historia de la matemática, que persisten en los libros de texto y en las prácticas docentes, generando errores reproducibles y persistentes.

Los libros de texto, utilizados como herramienta por los docentes para enseñar, influyen en las decisiones didácticas que toman para sus propuestas en el aula. No obstante, es necesario realizar un análisis de las actividades y comprender la intencionalidad de cada una de ellas para incorporarlas de manera efectiva en el entorno educativo.

Después de analizar los libros de texto escolares, se observa una coincidencia con las concepciones de los participantes del aula taller. Se destaca que las actividades relacionadas con modelos concretos para trabajar con números enteros son las más utilizadas, debido a su relación con la vida cotidiana. Antes del trabajo con los obstáculos y posibles errores, los participantes no habían analizado la raíz de estos errores. Lo que nos hace reflexionar sobre las propuestas de formación y las elecciones que se realizan, dado que existen diversas investigaciones sobre los obstáculos asociados a los modelos concretos, como las realizadas por Cid (2004, 2015) o Iriarte Bustos et al. (1990).

Lo que evoca un interrogante planteado por Lebrun et al. (2004) citado por Lebrun *et al* (2012), "¿Acaso la misión de las casas editoriales es atenuar las carencias de formación inicial y continua, cuya responsabilidad es del Estado, universidades y comisiones escolares?" (pp. 528).

Esto nos lleva a reconsiderar el trabajo con los docentes, con los formadores de formadores, y por supuesto con los estudiantes en formación, desde una colaboración reflexiva y continua (Sensevy, 2011, citado por Sadovsky *et al,* 2016), repensando sus prácticas educativas.

Conclusiones

La colaboración entre investigadores y docentes para trabajar cuestiones de enseñanza, con la finalidad de generar espacios de reflexión y análisis de una actividad, de una propuesta, de una práctica, de libros de textos escolares de uso frecuente, constituye una ocasión de profundización de conceptos, penetrando en su desarrollo, obstáculos y evolución histórica.

En las propuestas de enseñanza presentadas, se observó una evolución, con respecto a las concepciones de las docentes evidenciadas en el diagnóstico, a través de un trabajo intramatemático, teniendo en cuenta los obstáculos epistemológicos estudiados. El trabajo colaborativo entre docentes e investigadores es una acción para profundizar desde la formación continua, dado que se considera un paso importante, y necesario para el estudio y análisis de propuestas de enseñanza, nutridas de fundamentos.

En este trabajo, se ha presentado parte de un recorrido de estudio sobre los obstáculos epistemológicos y su incidencia en los obstáculos didácticos, que continúan persistiendo en nuestro sistema escolar. Esto es especialmente evidente en los recursos esenciales para el profesor, como el libro de texto, que a menudo influyen en la manera en que circulan las concepciones matemáticas en el aula, debido a que las propuestas de enseñanza no distan en el orden o en las actividades que presentan los libros de texto.

Lo que nos enfrenta a un desafío, la colaboración situada y continua entre docentes e investigadores. Esto implica trabajar con todos los docentes de una institución escolar de educación primaria, secundaria e institutos de formación docente, estableciendo acuerdos y planes de trabajo sostenidos en el tiempo.

Referencias Bibliográficas

Arias, F. (2006). *El proyecto de investigación. Introducción a la metodología científica.* Caracas, Venezuela: Episteme.

Brosseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathèmatiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 4(2), 165-198.

Cantoral, R., Montiel, G. & Reyes - Gasperini, D. (2015). Análisis del discurso Matemático Escolar en los libros de texto, una mirada desde la Teoría Socioepistemológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática,* 8, 9-28.

Cid, E. (2004). La investigación didáctica sobre los números negativos: estado de la cuestión. En E. Palacián, E. Cid, J. Gascón, C. Batanero, C. Díaz y C. Azcárate (eds.), *Aspectos didácticos de Matemáticas. 9* (pp. 35-80). Zaragoza: I.C.E. de la Universidad de Zaragoza.

Cid, E. (2015). *Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números enteros.* Tesis doctoral no publicada. Universidad de Zaragoza. Zaragoza, España.

Cornu, B. (1991). Limits. In D. Tall. (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 153-165). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Glaeser, G. (1981), Épistémologie des nombres relatifs, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 2(3), 303-346.

Godino, J. (1991). Hacia una teoría de la Didáctica de Matemática. En A. Gutiérrez (Ed). *Área de conocimiento: didáctica de la Matemática* (pp. 105-141). Barcelona: Síntesis.

Iriarte Bustos, M. D. y Vargas-Machuca, I. (1990). Los números negativos y su larga y azarosa historia. En J.L. González, M.D. Iriarte, M. Jimeno, A. Ortiz, E. Sanz, A. Ortiz e I. Vargas-Machuca (Eds), *Números Enteros* (pp. 21-58), Madrid: Síntesis.

Lenoir, Y., Lebrun, Y. & Hasni, A. (2012). Análisis de textos escolares: Algunos fundamentos y desafíos a tener en cuenta, *Revista Iberoamericana de Evaluación Educativa*, 5(3), 11-30.

Tamayo y Tamayo, M. (2000). *El proceso de la investigación científica*. México: Limusa.

Sadovsky, P., Itzcovich, H., Quaranta, M., Becerril, M. y García, P. (2016). Tensiones y desafíos en la construcción de un trabajo colaborativo entre docentes e investigadores en didáctica de la matemática. *Educación Matemática,* 28 (3), 9-29.

SECCIÓN 2

PROPUESTAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

VOL 36, NÚMERO 2, AÑO 2024

MOVILIZACIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES A PARTIR DE CONTEXTOS DE MODELADO MATEMÁTICO

MOBILIZING SYSTEMS OF LINEAR EQUATIONS BY USING EDUCATIONAL CONTEXTS OF MATHEMATICAL MODELING

Guillermo Enrique Ramírez Montes
Universidad de Costa Rica. (Costa Rica)
guillermo.ramirez_m@ucr.ac.cr

Resumen:
Este estudio es parte de otro estudio investigativo más amplio, visa analizar la aplicación de tareas de modelado matemático en un curso de álgebra lineal de la Universidad de Costa Rica, para el fomento de la aplicabilidad de los conceptos matemáticos a partir de contextos extra matemáticos y el desarrollo de competencias asociadas al proceso de modelación. Dos grupos de estudiantes universitarios trabajaron las tareas en diferentes semestres. El estudio sigue un abordaje cualitativo-interpretativo. La recolección de los datos incluyó las resoluciones digitales del trabajo realizado por los estudiantes respecto a las tareas implementadas. En particular, este estudio se enfoca en el análisis de resoluciones de una de las tareas, asociada a flujos, a fin de identificar competencias de modelación y dificultades evidenciadas por las personas estudiantes. Los resultados revelan competencias para construir modelos matemáticos en ambos grupos y dificultades centradas en la interpretación y validación de resultados matemáticos.

Palabras clave: álgebra lineal, educación universitaria, modelación matemática

Abstract:
This study is part of a broader research study. It is aimed at analyzing the application of mathematical modeling tasks in a linear algebra course at the University of Costa Rica, for the promotion of the applicability of mathematical concepts from extra-mathematical contexts and the development of skills associated with the modeling process. Two groups of undergraduate students worked on the tasks in different semesters. The study follows a qualitative-interpretative approach. The data collection includes the digital resolutions of the work done by the students, concerning the implemented tasks. In particular, this study focuses on the analysis of resolutions of one of the tasks, associated with flows, in order to identify modeling competencies and difficulties evidenced by students. The results reveal competencies to build mathematical models in both groups and difficulties focused on interpreting and validating mathematical results.

Keywords: linear algebra, undergraduate education, mathematical modeling

Introducción

El álgebra lineal constituye una de las disciplinas fundamentales en la formación matemática de estudiantes que cursan carreras como las ingenierías, ciencias económicas y algunas ciencias exactas como Matemática y Física, aportando herramientas necesarias para cursos más avanzados de su plan de estudio (Cárcamo, Gómez, & Fortuny, 2016). Además, el conocimiento de los diferentes conceptos y herramientas que ofrece el álgebra lineal permite a la persona estudiante poder modelar matemáticamente situaciones del contexto real, tales como los flujos asociados a sistemas dinámicos, por ejemplo, mediante el uso de sistemas de ecuaciones lineales (Costa & Rossignoli, 2017).

Ahora bien, el aprendizaje del álgebra lineal representa un gran desafío para la persona estudiante, cuya causa está asociada al carácter abstracto y formal con que se abordan los diferentes conceptos con que ésta es confrontada a trabajar (Rach & Heinze, 2017); en particular, la no contextualización de los conceptos matemáticos en contextos extramatemáticos (Costa & Rossignoli, 2017).

Ante la necesidad de hacer frente a la abstracción de los conceptos matemáticos referida; la escasez de estudios en el contexto costarricense enfocados en la aplicabilidad de los conceptos y fomento de competencias de modelación para el aprendizaje de conceptos del álgebra lineal; y la necesidad de más estudios a nivel de educación universitaria enfocados en procesos de aprendizaje matemático (Rach & Heinze, 2017), en este estudio se recurre a los ambientes de modelación matemática. Los desafíos de la modelación matemática son de naturaleza distinta a los desafíos de otros tipos de tarea, requiriendo capacidades de mayor exigencia que permiten diagnosticar competencias matemáticas y dificultades con que se enfrenta la persona estudiante al trabajar los conceptos matemáticos con contextos extramatemáticos (Czocher, 2018).

Por tanto, este estudio se encamina en la perspectiva de modelación educacional (Kaiser & Sriraman, 2006) como línea de investigación, y visa caracterizar los procesos de modelación desarrollados por dos grupos de estudiantes universitarios, cuando trabajan una tarea de Modelación la cual requiere movilizar sistemas de ecuaciones lineales en contextos de flujos.

Específicamente, el estudio visa responder a las siguientes interrogantes: ¿qué competencias de modelación evidencian las personas estudiantes al movilizar sistemas de ecuaciones lineales (SEL) en un ambiente de modelación matemática? ¿qué dificultades son manifestadas o evidenciadas en las personas estudiantes al resolver la tarea de modelación?

En las siguientes dos secciones se abordan los constructos teóricos que fundamentan este estudio, incluyendo potencialidades y dificultades asociadas al uso de ambientes de modelación para el aprendizaje del álgebra lineal.

Enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal y el caso particular de los sistemas de ecuaciones lineales

En los últimos años las investigaciones en torno a la enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal han venido en aumento (Trigueros & Bianchini, 2016). Tal es así la importancia de esta área de conocimiento de la Matemática que algunos grupos de investigación se han formado para abordar temáticas ligadas a la enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal, algunos recientes como el Grupo de Investigación en Educación Algebraica en Brasil (Bianchini et al., 2019) y otros más antiguos como el Grupo de Estudio en el Currículo del Álgebra Lineal (Carlson et al., 1993). Este último establece algunas recomendaciones curriculares para el mejoramiento de la enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal que aun en la actualidad es importante considerar, entre estas, considerar ejemplos de aplicaciones que cubran la mayor parte de los campos de estudio relacionados con la carrera de formación del estudiantado y usar el recurso de la tecnología para apoyar los procesos de cálculo y de comprensión de los conceptos en estudio.

De estas recomendaciones se desprende la importancia del contexto real como componente para ayudar en el mejoramiento del aprendizaje del álgebra lineal y, consecuentemente, ayudar a que la persona estudiante supere algunas dificultades asociadas al enfoque formal, basado en axiomas y pruebas matemáticas, con que se enfrenta por primera vez en un curso elemental de álgebra lineal.

En lo que respecta a estudios previos sobre SEL, encontramos el estudio de Mallet (2007), quien trabaja sobre una propuesta de enseñanza fundamentada en el uso de representaciones visuales, algebraicas y tabulares, utilizando el software Maple. El estudio buscó ayudar al estudiantado a comprender lo que son los SEL y lo que se entiende por solución y conjunto solución de un SEL. Los resultados de Mallet (2007) revelaron que las representaciones visuales en conjunto con el uso del software y el uso de representaciones algebraicas ayudaron al estudiantado a darle significado al conjunto solución de un SEL. Sin embargo, los resultados de este estudio también revelan la necesidad de una mayor exploración de las representaciones tabulares, ante la dificultad que presenta el estudiantado para hacer conexiones con las representaciones algebraicas y visuales. Además, el autor enfatiza que, cuando la persona estudiante obtiene un conjunto solución con infinitas soluciones usando solo la representación algebraica, la comprensión sobre el conjunto obtenido es débil, debido a cierta dificultad que la persona estudiante tiene para comprender los vectores solución parametrizados que configuran este tipo de solución.

Por su parte, en la línea de estudios usando ambientes de modelación encontramos el estudio de Possani et al. (2010), en el contexto de flujo de tránsito vehicular. Los autores plantean una tarea de modelación donde el estudiantado debe encontrar posibles valores de flujo en trayectos donde se desconoce el flujo, a modo de predecir el comportamiento del tránsito en cierta región. Los resultados del estudio de Possani et al. (2010) revelan que el contexto propuesto en la tarea fue significativo para el estudiantado, permitiéndoles reflexionar sobre diferentes conceptos asociados al estudio de SEL, y al mismo tiempo la tarea fue catalogada de alta exigencia cognitiva, en comparación con tareas tradicionales basadas en la resolución de ejercicios en contextos intramatemáticos.

Competencias de modelación y dificultades asociadas al proceso de modelación

Diferentes definiciones se pueden encontrar en la literatura para el término de competencia de modelación (Maaß, 2006). En lo que respecta a este estudio, se considera la definición de Maaß (2006), la cual define a una competencia de modelación como “habilidades y capacidades para realizar procesos de modelación apropiadamente, y orientado a objetivos específicos, y la voluntad de ponerlos en práctica” (p. 117). Dichas competencias de modelación se pueden clasificar en subcompetencias, conforme a la siguiente tabla.

Tabla 1. *Competencias de modelación matemática y procesos de modelación asociados.*

Subcompetencias de modelación	Competencia para…	Subprocesos cognitivos
Comprender la situación real y plantear un modelo basado en la realidad.	Hacer suposiciones sobre la situación y simplificar la situación; reconocer cantidades que influyen en la situación; identificar variables clave; construir relaciones entre las variables; buscar información disponible y diferenciar entre información relevante e irrelevante.	(1) Comprender la tarea. (2) Simplificar/ estructurar la tarea.
Construir un modelo matemático a partir del modelo real.	Matematizar cantidades relevantes y sus relaciones; simplificar las cantidades relevantes y sus relaciones si es necesario y reducir su número y complejidad; elegir notaciones matemáticas apropiadas y representar situaciones gráficamente.	(3) Matematizar el modelo.
Resolver cuestiones matemáticas con el modelo matemático.	Utilizar estrategias heurísticas como la división de la actividad en actividades parciales; establecer relaciones con productos similares o análogos; ver el problema de otra forma, variar las cantidades o los datos disponibles; utilizar conocimientos matemáticos previos para resolver la situación a partir del modelo construido.	(4) Trabajar matemáticamente sobre el modelo.

Interpretar resultados matemáticos en la situación real.	Interpretar resultados matemáticos en contextos extra-matemáticos; generalizar soluciones que fueron desarrolladas para una situación especial; dar soluciones a la situación problema usando lenguaje matemático apropiado y/o para comunicar sobre las soluciones.	(5) Interpretar resultados matemáticos.
Validar la solución.	Revisar críticamente y reflexionar sobre las soluciones encontradas; revisar algunas partes del modelo o volver a pasar por el proceso de modelación si las soluciones no se ajustan a la situación real; reflexionar sobre otras formas de resolver la situación problema o si las soluciones se pueden desarrollar de manera diferente.	(6) Validar resultados dentro de la situación real.

Fuente: adaptado de Maaß (2006).

De la tabla 1 se observa que las subcompetencias de modelación están asociadas directamente a los subprocesos que conforman el modelo lineal de ciclo de modelación (Blum, 2015), entendido este como un proceso de modelación que sigue los pasos en el orden del (1) al (6), objetivando dar respuesta a la situación problema planteada inicialmente en la tarea de modelación. Como parte del proceso de modelación puede incluirse también el uso del recurso tecnológico para apoyar alguno de los subprocesos referidos, sin embargo, debe considerarse que las tareas de modelación propuestas al estudiantado deben hacer que estos realmente sientan la necesidad de recurrir a usar tecnología, tornándola un recurso de apoyo, más allá de un recurso posible (Greefrath et al. 2018).

En relación con la exigencia cognitiva de los ambientes de modelación, Blum (2015) enfatiza que es normal que muchos estudiantes tengan dificultades al trabajar las primeras tareas de modelación, evidenciándose comúnmente una resistencia a hacer suposiciones (simplificar y estructurar), y la mayor parte del estudiantado tiene dificultad para verificar si sus soluciones matemáticas hacen sentido en el contexto de la situación problema (validación de resultados).

En lo que respecta a estudios donde se trabaja con SEL, el estudio de Possani et al. (2010) revela dificultades en el estudiantado para estructurar/simplificar la situación problema y trabajar matemáticamente el modelo matemático, mientras que el estudio de Trigueros & Possani (2013), en un contexto de producción de plantas de manufactura, evidencia que aun cuando el estudiantado puede haber tenido experiencia trabajando SEL, el pasar a trabajar con tareas de modelación ocasiona que el estudiantado experimente dificultades para comprender y estructurar la situación problema, por lo que saber resolver SEL en contextos intramatemáticos no garantiza que la persona estudiante no presente dificultades en su proceso de modelación.

Otras dificultades asociadas al proceso de modelación, pero no necesariamente a los subprocesos referidos en la tabla 1, tienen que ver con que la persona estudiante encuentre errores donde no existen o que mude la situación problema para adaptarla a su conocimiento previo (Czocher, 2018).

Metodología

Contexto y participantes

Este estudio es parte de un estudio de investigación mayor, el cual consideró la implementación de 3 tareas de modelación en dos grupos diferentes de estudiantes de un curso de Álgebra Lineal de la Universidad de Costa Rica durante el I ciclo y II ciclo 2021, respectivamente para cada grupo. Las tareas que se trabajaron atendieron a fomentar la aplicabilidad de conceptos matemáticos correspondientes a las unidades temáticas de Matrices y Sistemas Lineales de Ecuaciones, Espacios Vectoriales y Transformaciones Lineales. Además, las tareas visaban fomentar competencias asociadas al proceso de modelación, competencias no trabajadas usualmente en la clase de un curso tradicional de Álgebra Lineal, como la interpretación y validación de resultados.

Ambos grupos de estudiantes (la mayoría de ingeniería), llevaron el curso en modalidad sincrónico virtual y bajo los mismos principios de evaluación. En el caso del primer grupo (I ciclo 2021) participaron en la resolución de las tareas 6 hombres y 6 mujeres, mientras que para el segundo grupo (II ciclo 2021) participaron 6 hombres y 4 mujeres. Todos los participantes participaron voluntariamente, accediendo a trabajar las tareas de modelación en horario fuera del tiempo de clase y sin porcentaje sumativo asociado a la nota final del curso. El trabajo de cada una de las tareas se realizó en parejas.

Cada tarea fue propuesta después de que la persona docente a cargo del grupo hubo trabajado la temática asociada a la tarea de modelación a implementar, de forma que los conocimientos matemáticos previos relativos al álgebra lineal fueran una posibilidad para que el estudiantado trabajase la tarea de modelación asociada a dicha temática. Además, la metodología propuesta en el curso estaba basada en una clase expositiva tradicional, envolviendo ejercicios de cálculo en contextos intramatemáticos y algunas demostraciones simples asociadas al álgebra lineal.

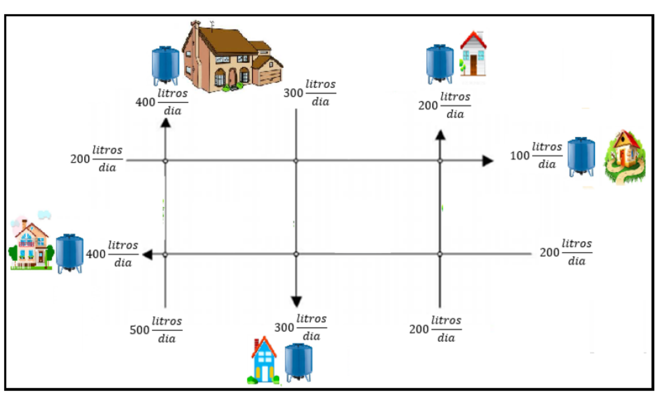
Aun cuando las tareas procuraban poner en práctica los mismos conocimientos matemáticos, los contextos usados en cada grupo eran diferentes, siendo que el objetivo de las tareas implementadas en el primer grupo visaba implementar un conjunto de tareas de modelación para mejorar aspectos a considerar en el diseño de las tareas a implementar en el segundo grupo de estudiantes.

Respecto a la tarea propuesta en este estudio, ambos grupos trabajaron una tarea asociada a la unidad temática de SEL. En el caso del primer grupo el contexto usado fue de flujos de agua por tuberías, mientras que en el caso del segundo grupo el contexto fue de flujos de tránsito vehicular.

Entre las mejoras propuestas al enunciado de la tarea del segundo grupo, producto de las resoluciones del estudiantado del primer grupo al trabajar la tarea correspondiente están: (1) sustitución del contexto de flujo de agua en tuberías por un contexto más familiar para el estudiantado, como es el contexto de fujo de tránsito vehicular en cierta zona de la capital de Costa Rica; (2) sustituir el dar datos de la situación problema dentro del texto de un enunciado por dar dicha información en forma tabular, a fin de facilitar la formulación de un modelo real; (3) reducir la cantidad de ecuaciones asociadas al SEL que se debía formular como propuesta posible de modelo matemático; y (4) señalar con flechas los sentidos de flujo en cada trayecto de la región en estudio.

En figura 1 y figura 2 se pueden observar imágenes dadas a cada grupo en el enunciado de la tarea, respectivamente, a modo de facilitar la comprensión de la misma. Al comparar ambas figuras se observan algunos de los cambios referidos en la tarea.

Figura 1. Sistema de tubería para abastecimiento de agua.



Fuente: diseño propio.

Figura 2. Tránsito vehicular en zona con cuatro intersecciones.

Fuente: diseño propio. Adaptado de captura de Google maps.

Recolección y análisis de datos

El estudio sigue un abordaje cualitativo de paradigma interpretativo (Cohen et al., 2007). La recolección de los datos incluyó las resoluciones digitales a la tarea de modelación, donde también se incluían algunas preguntas relacionadas a explicar la estrategia de resolución implementada y las dificultades percibidas al resolver la tarea.

El análisis de los resultados es descriptiva e interpretativo (Wolcott, 2009), donde el investigador hace descripción de extractos de resolución del estudiantado e interpreta datos o afirmaciones, escogiendo para ello subgrupos representativos con resoluciones que marcan diferencias. El análisis se centra en las competencias de modelación que se observa que logra movilizar el estudiantado, siguiendo el modelo lineal de ciclo de modelación, y en las dificultadas que detecta el investigador en dichas resoluciones y que manifiesta la misma persona estudiante haber experimentado al resolver la tarea.

Como parte de los aspectos éticos considerados en el estudio, se pasó un consentimiento informado, el cual garantizó el anonimato de las personas estudiantes participantes y la participación voluntaria en el estudio.

Resultados

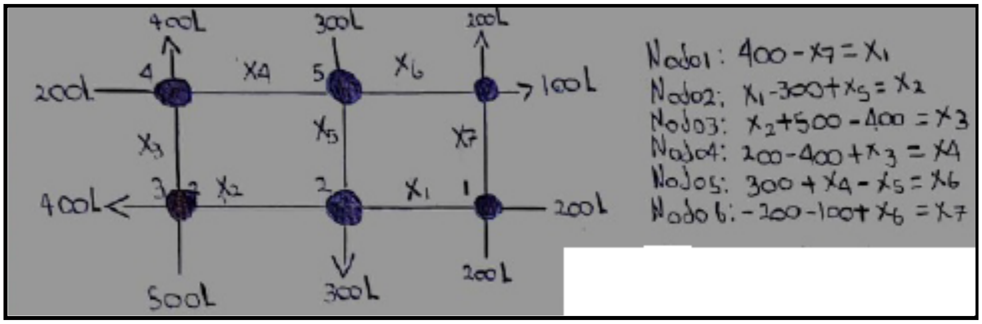
Competencias para desplazarse de la situación problema al modelo matemático fueron bien conseguidas por ambos grupos de estudiantes. Estas competencias incluyen (1) hacer suposiciones sobre la situación problema, como suponer que el total de flujo que entra por cierto punto o nodo es igual a la cantidad de flujo que sale por el mismo punto o nodo; (2) estructurar y simplificar la situación para construir un modelo real a parir de asignar variables a las cantidades desconocidas y entender la situación como un problema que se puede modelar mediante un SEL; (3) matematizar las cantidades conocidas y las variables a partir de igualdades para formar un SEL.

Figura 3. *Idealización de Alexa y Pedro.*

Se le nombró fk a cada tubo cuyo flujo se desconocía y A-F a cada nodo. De acuerdo con esto se realizaron ecuaciones que des-criben la entrada del flujo = desembocadura del flujo.

Fuente: extracto de resolución del grupo 1.

Figura 4. *Modelo real y modelo matemático de Esteban y María.*



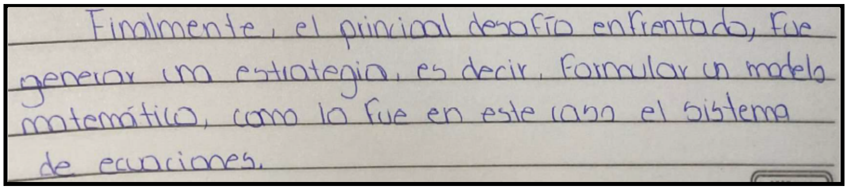
Fuente: extracto de resolución del grupo 1.

En el caso del grupo 1, el diálogo de la figura 3 evidencia que Alexa y Pedro refieren usar f_k para asignar variables a las cantidades desconocidas entre nodos, en particular, cuando refieren "se nombro f_k a cada tubo cuyo flujo se desconocía y A-F a cada nodo", se interpreta que ellos identifican seis nodos, los correspondientes a las seis intersecciones del sistema de tuberías, etiquetadas con letras de la A a la F, y el subíndice k lo usan como un contador, para referir que existe más de una cantidad desconocida; evitando así mencionar en forma explícita las variables utilizadas. Además, la última línea de su afirmación evidencia una simplificación a la situación problema, asumir que no hay fugas en todo el sistema de tuberías.

Semejantemente en la figura 4, se evidencia como Esteban y María interpretan la situación en términos de cantidades constantes (información dada en la tarea) y cantidades variables (información por encontrar) para posteriormente matematizar la situación a través de ecuaciones que conduzcan a un SEL. A su vez, se observa el modelo matemático de estos dos estudiantes, de donde se puede interpretar que, por ejemplo, para plantear la primera ecuación consideran el flujo saliente x_1 como la suma vectorial de los flujos entrantes 200, 200 y $-x_7$. Este último flujo entrante, pues x_7 es un flujo saliente, como lo indican las flechas en su modelo real.

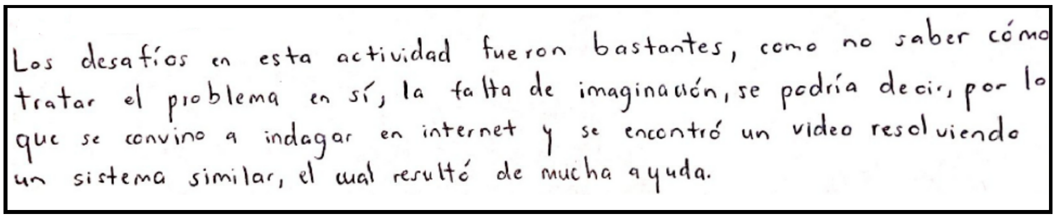
A pesar de las evidencias anteriores, al principio la mayoría de las personas estudiantes del grupo 1 manifestaron dificultades para comprender cómo trabajar la tarea, como lo deja ver la figura 5, la cual resulta de la respuesta por uno de los subgrupos a una de las preguntas solicitadas de la tarea en cuanto a dificultades percibidas.

Figura 5. *Dificultad de Cinthia y Marco.*


Finalmente, el principal desafío enfrentado, fue generar una estrategia, es decir, formular un modelo matemático, como lo fue en este caso el sistema de ecuaciones.

Fuente: extracto de resolución del grupo 1.

Figura 6. *Dificultades de Alexa y Pedro.*


Los desafíos en esta actividad fueron bastantes, como no saber cómo tratar el problema en sí, la falta de imaginación, se podría decir, por lo que se convino a indagar en internet y se encontró un video resolviendo un sistema similar, el cual resultó de mucha ayuda.

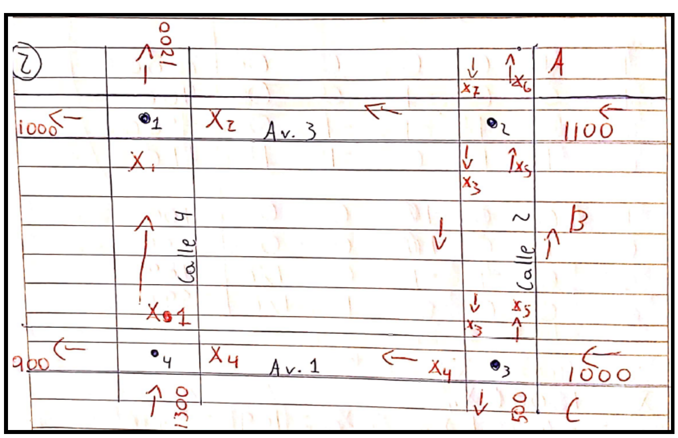
Fuente: extracto de resolución del grupo 1.

La respuesta de Cinthia y Marco, al igual que respuestas de otros subgrupos del grupo 1, apuntan hacia el haber tenido dificultad inicialmente para hacer conexiones entre la situación problema y el conocimiento matemático adquirido en el curso de álgebra lineal, no así consiguieron superar esta dificultad, a través de la discusión con la pareja o indagando en fuentes externas a los apuntes del curso, como evidencia el caso de Alexa y Pedro.

Ahora bien, en el caso del grupo 2, se realizó una adaptación a la tarea, la cual consistió en usar un contexto más cercano al estudiantado y reducir la complejidad matemática en términos de ecuaciones. Estas medidas fueron tomadas tras evidenciar las dificultades anteriores. La figura 7 muestra un extracto de resolución de estos subgrupos.

La resolución de Harry y Fernanda muestra un modelo real semejante a los usados por los subgrupos del grupo 1, en particular, uso de variables para denotar flujos desconocidos. Sin embargo, se observa que, además de tener solo cuatro intersecciones el modelo (debido a las adaptaciones de la tarea), el contexto usado sobre avenidas y calles en la capital de Costa Rica permitió que hubiese más diversidad de suposiciones/simplificaciones asociadas a la tarea, competencia que se quiso promover aún más con la tarea.

Figura 7. *Idealización de Harry y Fernanda.*

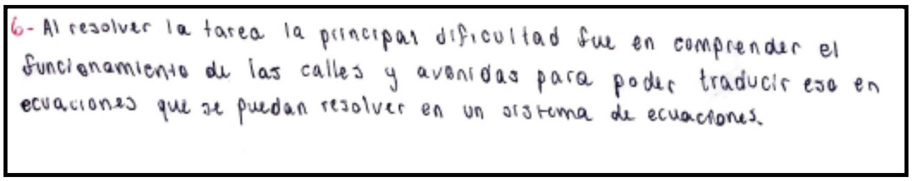


Fuente: extracto de resolución del grupo 2.

Estas suposiciones/simplificaciones implicaban considerar en los tramos de flujo desconocido sólo una dirección o doble dirección de flujo vehicular, siempre y cuando no se quitaran las direcciones de flujo dadas en la tarea para los trayectos con flujo conocido. En el caso de Harry y Fernanda se observa que hay trayectos desconocidos de flujo donde consideran solo una dirección (trayectos que respectan los sentidos reales, condición dada en la tarea) y otros donde consideran dos, haciendo que el modelo matemático sea más complejo, pues el número de sentidos de flujo tiene implicaciones directas sobre el número de variables del SEL

Respecto a las dificultades del grupo 2, en este transitar de la situación real al modelo matemático, se observan las mismas dificultades manifestadas y evidenciadas en los subgrupos del grupo 1, como se deja interpretar de la figura 8.

Figura 8. *Dificultades de Helena y Pablo.*

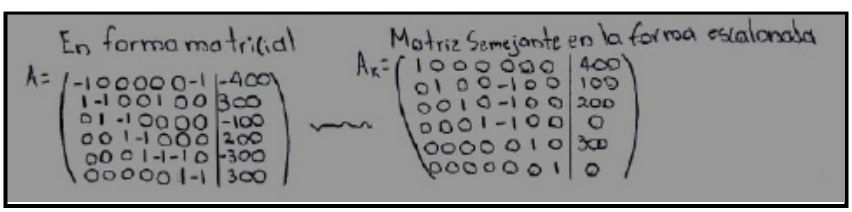


Fuente: extracto de resolución del grupo 2.

Helena y Pablo, al igual que otros subgrupos del grupo 2, evidencian haber tenido dificultades para comprender la situación problema y esquematizarla como un modelo real. En caso particular de estos dos estudiantes se interpreta que no es que no conocieran el contexto real de calles y avenidas de la capital, sino como asociarlo con SEL; lo cual es producto de no haber trabajado previamente con tareas en contextos reales que involucren contenidos de álgebra real.

Respecto a competencias para desplazarse del modelo matemático a la situación problema nuevamente, se evidencian competencias en ambos grupos para trabajar los SEL a partir de procedimientos del álgebra lineal como el método Gauss-Jordan y a partir del uso de tecnología.

Figura 9. *Uso de tecnología por parte de Carmen y Julio para trabajar el modelo matemático.*



Fuente: extracto de resolución del grupo 1.

En la figura 9 se observa la forma matricial del modelo de SEL obtenida por Carmen y Julio. Esta matriz es llevada a su forma escalonada usando software matemático, lo cual se pudo interpretar insertando la matriz asociada al SEL en Wolfram Matemática para ver el output obtenido, correspondiente a la matriz semejante que refieren. Este hecho evidencia el uso de competencias que este subgrupo, y solo en este se evidenció, para trabajar con software matemático SEL, conocimiento adquirido posiblemente por haber trabajado con la persona docente del curso con Wolfram en sus clases previas.

Por otra parte, muy pocos subgrupos de ambos grupos evidenciaron hacer interpretaciones adecuadas de los resultados matemáticos, y solo un subgrupo del grupo 2 consigue validar resultados matemáticos.

Figura 10. *Interpretación de resultados de Helena y Pablo.*

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 3100 \\ x_2 - x_4 = -900 \\ x_3 - x_4 = -500 \\ x_4 = t \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 3100 - t \\ x_2 = t - 900 \\ x_3 = t - 500 \\ x_4 = t \end{array} \quad t \in \mathbb{R}$$

Fuente: extracto de resolución del grupo 2.

Figura 11. *Validación de resultados de Helena y Pablo.*

$x_1 = 3100 - t = 3100 - 2000 = 1100$

$x_2 = t - 900 = 2000 - 900 = 1100$

$x_3 = t - 500 = 2000 - 500 = 1500$

$x_4 = t = 2000$

Sustituyendo en la ecuación original obtendríamos las "salidas" del flujo vehicular

$x_1 + x_4 = 1100 + 2000 = 3100 \wedge 3100 = 3100$

Como las "entradas" de la intersección y las "salidas" son iguales, entonces se comprueba que el flujo es constante.

Fuente: extracto de resolución del grupo 2.

De la figura 10, se observa que a pesar de que Helena y Pablo resuelven el SEL, ellos realizan una mala interpretación, asumiendo que el valor del flujo desconocido $x_4 = t$ debe ser un valor real, cuando lo adecuado debería ser $t \geq 0$. A pesar de ello Helena y Pablo validan resultados, aunque parcialmente, lo que se evidencia en la figura 11 cuando le asignan al parámetro t el valor de 2000 para obtener el valor de los demás flujos desconocidos. Las últimas dos líneas permiten interpretar que Helena y Pablo quedan satisfechas con haber obtenido flujos iguales en uno de los nodos, permitiéndoles concluir que su modelo es válido, a pesar de que lo adecuado sería haber verificado la igualdad en todos los nodos.

Conclusiones

Los resultados de este estudio han evidenciado competencias de modelación y dificultades manifestadas y evidenciadas en las personas estudiantes.

Respecto a las competencias se evidencian competencias en ambos grupos para desplazarse del mundo real al mundo matemático, pero con dificultades iniciales en la comprensión de la situación problema, conforme también presentado en el estudio de Possani et al. (2010) en el contexto de tránsito vehicular, con la diferencia de que para este estudio aquí desarrollado ambos grupos consiguen trabajar adecuadamente el modelo matemático, incluyendo competencias para trabajar con tecnología en una de las parejas de estudiantes.

En lo que se refiere a competencias para ir del mundo matemático al mundo real, escasos estudiantes consiguen hacer interpretaciones adecuadas sobre los resultados obtenidos en el conjunto solución de los SEL construidos como modelos matemáticos, y solo una pareja consigue hacer validación de resultados, a partir de evaluar casos particulares de resultados matemáticos en las ecuaciones que representan igualdades entre flujos de entrada y salida en nodos. Esto lleva al otro aspecto de interés de este estudio, identificar dificultades en el estudiantado. Estas dificultades resultan como consecuencia de que las personas estudiantes no estén acostumbradas a trabajar con contextos extramatemáticos en el curso de álgebra lineal que cursaban, pero también a no haber trabajado antes en su formación universitaria tareas con desafíos cognitivos mayores, como son las tareas de modelación matemática, respecto de tareas restringidas a ejercicios matemáticos como las trabajadas en el curso (Blum, 2015; Czocher, 2018).

Respecto a los contextos utilizados, este estudio se centró en la perspectiva educativa de modelación, mostrando una propuesta de tareas para trabajar consolidación de conceptos matemáticos mediante contextos extramatemáticos. Además, el estudio permite observar que las adaptaciones hechas a la tarea inicial implementada con el grupo 1 sirvieron para evidenciar modelos más sofisticados y variados en el grupo 2, lo que sugiere abordar más estudios que muestren las ventajas y desventajas de trabajar otros contenidos del álgebra lineal mediante adaptaciones en tareas iniciales de modelación.

Por último, es importante referir que futuras implementaciones pueden incluir una adaptación de las tareas donde se obligue más al estudiantado a usar de la tecnología en el proceso de modelación, a fin de no reducir la tecnología a simplificación de cálculos, como fue el caso de este estudio (Greefrath et al., 2018).

Referencias bibliográficas

Bianchini, B.L., de Lima, G.L., & Gomes, E. (2019). Linear algebra in engineering: an analysis of Latin American studies. *ZDM Mathematics Education*, *51*(7), 1097–1110. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01081-5

Blum, W. (2015). Quality Teaching of Mathematical Modelling: What Do We Know, What Can We Do? In: S. J. Cho (Ed.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education - Intellectual and Attitudinal Challenges* (pp. 73-96). New York: Springer.

Cárcamo, A., Gómez, J., & Fortuny, J. (2016). Mathematical Modelling in Engineering: A Proposal to Introduce Linear Algebra Concepts. *Journal of Technology and Science Education (JOTSE), 6*(1), 62-70.

Carlson, D., Johnson, C., Lay, D., & Porter, A. (1993). The Linear Algebra Curriculum Study Group Recommendations for the First Course in Linear Algebra. *The College Mathematics Journal, 24*(1), 41-46.

Cohen, L., Manion, L., & Mohinson, K. (2007). *Research methods in education* (*6th ed.*). New York, NY: Routledge.

Costa, V. A., & Rossignoli, R. (2017). Enseñanza del álgebra lineal en una facultad de ingeniería: Aspectos metodológicos y didácticos. *Revista Educación en Ingeniería*, *12*(23), 49-55.

Czocher, J. (2018). How does validating activity contribute to the modeling process?. *Educational Studies in Mathematics*, *99*, 137–159. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9833-4

Greefrath, G., Hertleif, C., & Siller, H. (2018). Mathematical modelling with digital tools—A quantitative study on mathematising with dynamic geometry software. *ZDM Mathematics Education*, *50*, 233–244. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0924-6

Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, *38* (3), 302–310. https://doi.org/10.1007/BF02652813

Maaβ, K. (2006). What are modelling competencies? *ZDM Mathematics Education*, *38*(2), 113–142. https://doi.org/10.1007/BF02655885

Mallet, D. G. (2007) Multiple representations for systems of linear equations via the computer algebra system Maple. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *2*(1), 16–32.

Possani, E., Trigueros, M., Preciado, J., & Lozano, M. D. (2010). Use of models in the teaching of linear algebra. *Linear Algebra and its Applications*, *432*, 2125–2140.

Rach, S., & Heinze, A. (2017). The Transition from School to University in Mathematics: Which influence do school-related variables have? *International Journal of Science and Mathematics Education*, *15*(7), 1343–1363.

Trigueros, M., & Bianchini, B. L. (2016). Learning linear transformations using models. In E. Nardi, C. Winsløw, & T. Hausberger (Eds.), *Proceedings of the first conference of the international network for didactic research in university mathematics* (pp. 326–336). Montpellier, FR: University of Montpellier and INDRUM.

Trigueros, M., & Possani, E. (2013). Using an economics model for teaching linear algebra. *Linear Algebra and its Applications*, *438*(4), 1779–1792.

Wolcott, H. (2009). *Writing up qualitative research* (3rd ed.). Oaks, CA: SAGE.

UN EXPERIMENTO DE ENSEÑANZA PARA PROMOVER EL USO DE LAS CONEXIONES MATEMÁTICAS EN EL APRENDIZAJE DE LAS ECUACIONES LINEALES EN BACHILLERATO

A TEACHING EXPERIMENT TO PROMOTE THE USE OF MATHEMATICAL CONNECTIONS IN THE LEARNING OF LINEAR EQUATIONS IN HIGH SCHOOL

Gabriel Barragán Mosso, Javier García-García
Universidad Autónoma de Guerrero. (México)
gmosso31@gmail.com, jagarcia@uagro.mx

Resumen:
Este trabajo expone los avances de una investigación más general que planteó como pregunta ¿qué efectos tiene un experimento de enseñanza basado en conexiones matemáticas en el aprendizaje de la ecuación lineal en estudiantes de bachillerato? Para responderla se diseñó un experimento de enseñanza que consideró tareas diseñadas en GeoGebra bajo el enfoque de conexiones matemáticas. Los datos fueron recolectados mediante videograbaciones de las clases y las producciones de los estudiantes en GeoGebra y, para analizarlos se emplea el análisis temático y la comparación de la trayectoria hipotética de aprendizaje con la trayectoria real de aprendizaje. Los resultados preliminares muestran que los estudiantes hicieron conexiones intra-matemáticas de tipo procedimental, característica, representaciones diferentes, significado y la conexión extra-matemática de modelado; siendo las conexiones matemáticas de representaciones diferentes y procedimental las más evidenciadas.

Palabras clave: conexiones matemáticas, ecuación lineal, experimento de enseñanza, bachillerato

Abstract:
This paper presents the progress of a research that posed the question: what effects does a teaching experiment based on mathematical connections have on the learning of linear equations in high school students? To answer this question, a teaching experiment was designed that considered tasks designed in GeoGebra under the mathematical connections approach. The data were collected through video recordings of the classes and the students' productions in GeoGebra; and, in order to analyze them, the thematic analysis, and the comparison of the hypothetical learning trajectory with the real learning trajectory were used. Preliminary results show students made intra-mathematical connections of procedure, characteristic, different representations, meaning, and the extra-mathematical connection of modeling; being the mathematical connections of different representations and procedures the most evident ones.

Keywords: mathematical connections, linear equation, teaching experiment, high school

Introducción

El álgebra es un componente principal de los planes de estudio de matemáticas en diferentes países (Bal, 2016) y, la ecuación lineal es uno de los temas del álgebra que juega un papel central en el desarrollo de otros conceptos matemáticos (Mengistie , 2020). El estudio de las ecuaciones lineales se vuelve fundamental porque el uso de estas permite resolver problemas matemáticos (cálculo de perímetro, área y volumen de figuras geométricas) y situaciones planteadas por otras ciencias como la ingeniería, la química, la economía (porcentaje, compras, punto de equilibrio de venta de un producto, balance de raciones), entre otros (Navia , 2017).

Sin embargo, los hallazgos que en la literatura se muestran, evidencia que los estudiantes presentan diversas dificultades en el aprendizaje de este concepto matemático. Por ejemplo, con el significado del signo igual (Kieran, 2003), enfrentarse a un lenguaje nuevo (Esquinas , 2009). También hay investigaciones que reportan las causas de ciertas dificultades por parte de los estudiantes al trabajar con este concepto y están relacionadas con la forma en que se enseña álgebra, el estilo de enseñanza de los profesores de matemáticas y que los estudiantes no experimenten un aprendizaje práctico en el aula (Eichhorn et al., 2018). Por esta razón, creemos que es necesario el diseño de propuestas de enseñanza-aprendizaje que involucren el concepto de ecuación lineal, pero además consideramos fundamental el trabajo bajo el enfoque de conexiones matemáticas para lograrlo. Esto porque las conexiones matemáticas son un tema vigente en matemática educativa que va acrecentándose dada la importancia que ha sido reportada por diferentes investigadores (por ejemplo, Businskas, 2008; Campo-Meneses y García-García, 2020, 2021; Dolores y García-García, 2017; Eli et al., 2013; Evitts, 2004; García, 2018; García-García y Dolores-Flores, 2018, 2021a, 2021b; Jaijan y Loipha, 2012; (Rodríguez-Nieto et al., 2021; entre otros). Además, son una demanda en los currículos de varios países, entre ellos México.

La importancia que se le atribuye a este enfoque, en principio, es que hacer conexiones matemáticas puede contribuir al desarrollo de las habilidades de razonamiento y comunicación, dos procesos considerados fundamentales en las matemáticas (Bingölbali y Coşkun, 2016). Además, se vuelve fundamental porque favorece que las matemáticas sean vistas como un campo coherente e integrado y no como una colección de partes separadas, que es como la ven mayormente los estudiantes (Evitts, 2004; Jaijan y Loipha, 2012). Garbín (2005) señaló que hacer conexiones matemáticas permite identificar y establecer relaciones entre los problemas y reconocer sus contextos, lo que a su vez permitirá dar respuestas coherentes a los problemas.

En ese mismo sentido, García-García (2019) argumentó que establecer conexiones matemáticas favorece la integración del conocimiento y la interdisciplinariedad y, contribuye a la resolución de problemas de aplicación y problemas no matemáticos. Asimismo, hacer conexiones matemáticas en el proceso de aprendizaje permitirá a los estudiantes estar en mejores condiciones para resolver tareas matemáticas de manera congruente y tener la capacidad de modelar fenómenos de la vida real a través del uso de conceptos matemáticos e incluso con los de otras disciplinas (García-García, 2019). Finalmente, pero no menos importante, a través de las conexiones matemáticas que realiza un estudiante se puede inferir en su nivel de comprensión matemática (García-García 2019; Mhlolo, 2012).

Por lo expuesto anteriormente y tomando en cuenta que hasta el momento son nulos los trabajos encontrados que aborden de manera conjunta el enfoque de conexiones matemáticas y el concepto de ecuación lineal dada su importancia, en la presente investigación se pretende responder la siguiente pregunta: ¿qué efectos tiene un experimento de enseñanza basado en conexiones matemáticas en el aprendizaje de la ecuación lineal en estudiantes de bachillerato? Y como objetivo general: diseñar y valorar un experimento de enseñanza que promueva el aprendizaje de la ecuación lineal a través del establecimiento de conexiones matemáticas en estudiantes mexicanos de primer grado de bachillerato. Objetivos particulares: (1) diseñar una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje que involucre el concepto de ecuación lineal basada en el establecimiento de conexiones matemáticas y (2) comparar la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje y la Trayectoria Real de Aprendizaje que será evidenciada por los estudiantes.

Marco conceptual

En la literatura se muestran diversas posturas en torno a cómo se asume el concepto de conexión matemática, por ejemplo, para el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM [por sus siglas en inglés], 2013) las conexiones matemáticas son entendidas como el establecimiento de relaciones entre distintos objetos matemáticos y como un proceso matemático que puede permitir a los estudiantes ampliar su comprensión de la matemática, tomando en cuenta los conocimientos previos. Para Businskas (2008), las conexiones matemáticas son relaciones verdaderas sobre la base de las cuales se estructura la matemática, que son independientes del estudiante y que, además, son relaciones mediante las cuales los procesos de pensamiento construyen la matemática. Al hablar de relaciones verdaderas, Singletary (2012) señaló también que una conexión matemática es una relación, pero entre entidades matemáticas o entre éstas y las entidades no matemáticas.

Por su parte, De Gamboa & Figueiras (2014) definieron a las conexiones matemáticas como una red de enlaces lógicos y coherentes que permiten una articulación de nuevos significados y a su vez pueden utilizarse para vincular temas matemáticos, o bien como relaciones causales, lógicas o de interdependencia entre dos entidades matemáticas. Lo anterior está relacionado con la definición propuesta por Eli et al. (2013) ya que definieron a una conexión matemática como un enlace en el que se utilizan tanto conocimientos previos o conocimientos nuevos para establecer o fortalecer la comprensión de la relación entre dos o más ideas matemáticas, conceptos y representaciones.

Sin embargo, dadas las diferentes posturas, en esta investigación se adopta la definición propuesta por García-García y Dolores-Flores (2018) ya que sus trabajos indagaron en el trabajo de estudiantes de bachillerato al igual que la presente investigación. Así se asume que las conexiones matemáticas son un proceso cognitivo mediante el cual una persona establece, asocia o relaciona de manera verdadera dos o más ideas, conceptos, definiciones, teoremas, procedimientos, representaciones y significados entre sí, con la vida real o con otras disciplinas y que a su vez emergen en el momento en el que la persona (estudiante) resuelve tareas específicas. Mismas que pueden ser identificadas en las producciones escritas e incluso en los argumentos orales o gestuales que se puedan desarrollar al momento de la resolución de las tareas.

De acuerdo con García-García y Dolores-Flores (2018) existen dos grandes grupos de conexiones matemáticas: las conexiones intra-matemáticas (*procedimental, significado, representaciones diferentes, característica, parte-todo*) que emergen cuando existe una vinculación entre los conceptos matemáticos entre sí y las conexiones extra-matemáticas (*modelado*) que emergen cuando hay una relación entre objetos de la matemática con situaciones de la vida real o con conceptos de otras disciplinas, es decir, la resolución de problemas de aplicación.

Por otro lado, las ecuaciones de primer grado son un concepto matemático fundamental en los procesos de enseñanza-aprendizaje de la matemática que permiten desarrollar la habilidad en los estudiantes de resolver problemas cotidianos con mayor rapidez. De acuerdo con Lehmann (2004) una ecuación lineal con una incógnita x es una expresión que se puede escribir de la forma $ax + b = 0$, donde a, bÎ $\mathbb{R}\ y\ a \neq 0$.

En la presente investigación entendemos que una ecuación lineal es una igualdad entre expresiones algebraicas de la forma $ax + b = c$, donde a, b y c son constantes y x representa la incógnita con exponente igual a 1. Cabe mencionar que para ser una ecuación lineal todas las incógnitas involucradas, de ser el caso, tendrán como exponente 1, de no ser así ya no se considera una ecuación lineal.

Metodología

La presente investigación es de tipo cualitativa que está inmersa dentro del paradigma de investigación basada en diseño, dicho paradigma intenta comprender y mejorar la realidad educativa a través de la consideración de contextos naturales y tiene por objetivo analizar el aprendizaje en contexto mediante el diseño y estudio sistemático de formas de aprendizaje, estrategias y herramientas de enseñanza (Molina et al., 2011). Molina et al. (2011) afirmaron que más allá de proponer diseños que sean efectivos en cuestión de aprendizaje, este tipo de investigación busca explicar por qué lo propuesto funciona y a su vez sugerir modos con los cuales el diseño puede ser adaptado a nuevas circunstancias tomando en cuenta lo evidenciado. Además, señalaron que entre los principales estudios de este paradigma tenemos a los experimentos de enseñanza. Cobb y Gravemeijer (2008) señalaron que el experimento de enseñanza es el tipo de estudio de diseño más frecuente.

Un experimento de enseñanza consiste en una en una serie de encuentros por un período de tiempo en los cuales los participantes son normalmente un investigador-docente, uno o más estudiantes y uno o más investigadores-observadores (Kelly y Lesh, 2000). En cada episodio se recoge información de todo lo que ocurre mediante videos o toma de notas a fin de poder analizar el desarrollo presentado en los ambientes de aprendizaje. Los experimentos de enseñanza son una metodología diseñada para explorar y explicar la actividad matemática de los estudiantes y así entender su progreso mediante un periodo de tiempo (Steffe y Thompson, 2000). De acuerdo con Molina et al. (2011) los experimentos de enseñanza constan de tres fases: (1) preparación del experimento, (2) experimentación y (3) análisis retrospectivo de los datos.

En la presente investigación se considera que esta metodología es pertinente ya que permitirá obtener argumentos basados en lo evidenciado por los estudiantes y experimentar de primera mano el aprendizaje de estos al resolver tareas que involucran el concepto de ecuación lineal. Así, los datos que se reportan en la presente investigación corresponden a las producciones de doce estudiantes de primer semestre de bachillerato que se encontraban cursando la asignatura de Álgebra en una preparatoria tecnológica de la ciudad de Chilpancingo de los Bravo, Guerrero, México. Para la colecta de los datos, se recopiló evidencia del trabajo realizado por los estudiantes en las lecciones de GeoGebra y se videograbaron momentos donde los estudiantes socializaban sus respuestas. En adelante nos referimos a ellos como E1, E2,……….E12.

Análisis de los datos

Para analizar los datos se utilizó el análisis temático propuesto por Braun y Clarke (2006, 2012). Este permite identificar y analizar patrones en datos cualitativos (Clarke y Braun, 2013) y se caracteriza por ser un método flexible porque puede ser empleado para diferentes marcos teóricos e incluso para diversas preguntas de investigación. En la presente investigación permitió identificar qué tipologías de conexiones matemáticas evidencian los estudiantes en su actividad matemática. Este tipo de análisis consta de las siguientes fases: (1) familiarización de los datos, (2) generación de códigos iniciales, (3) búsqueda de temas y subtemas, (4) revisión de temas y subtemas, (5) definición y denominación de temas y subtemas y finalmente la redacción del informe. Además, se usó el método de triangulación entre investigadores para dar confiabilidad, credibilidad validez y rigor a los resultados.

Resultados

Es importante señalar que se presentan los resultados de la primera parte de la investigación, es decir las conexiones matemáticas identificas, la segunda parte que está relacionada con la comparación entre las trayectorias de aprendizaje, no se presenta por cuestiones de espacio. Sin embargo, se podrá consultar en el reporte de investigación general.

Una vez terminado el análisis de las producciones escritas y verbales de los doce estudiantes al resolver las tareas propuestas, se identificaron diferentes conexiones matemáticas que se resumen en la tabla 1.

Tabla 1. *Conexiones matemáticas esperadas y evidenciadas en cada tarea.*

Tareas	Conexiones matemáticas esperadas	Conexiones matemáticas identificadas en los casos de estudio											
		Estudiantes											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Tarea 1	C.P				*	*	*		*	*	*		
	C.C			*					*				
	C.RD												
	C.S												
Tarea 2	C.P												
	C.C			*			*						
	C.RD			*	*		*	*					
	C.S				*								
	C.PT												
Tarea 3	C.P	*	*	*	*		*			*	*	*	
	C.C										*		
	C.RD	*	*	*	*	*	*	*		*	*	*	*
	C.S				*							*	
	C.M			*	*		*			*	*	*	
Tarea 4	C.P			*	*	*	*					*	
	C.RD			*	*	*	*		*	*	*	*	
	C.S				*								
	C.C												
	C.M			*	*		*					*	
Tarea 5	C.P												
	C.C			*									
	C.RD						*						
	C.M												
	C.S				*							*	

Fuente: elaboración propia.

Nota. C.P=conexión procedimental; C.S= conexión significado; C.RD= conexión representaciones diferentes; C.C=conexión característica; C.PT=conexión parte-todo; C.M=conexión modelado.

Mediante el análisis temático se identificaron un total de 65 conexiones matemáticas que los estudiantes hicieron de manera explícita e implícita. Además, se hace evidente que la conexión matemática con más frecuencia es la conexión de Representaciones Diferentes, específicamente el registro algebraico, que es el que se promueve por medio de las tareas propuestas. A continuación, se presentan los resultados en torno a cada una de las tareas propuestas, mostrando ejemplos específicos.

Tarea 1

En la tarea 1 fueron establecidas solamente la conexión procedimental y la conexión característica. En el caso de E3 y E8 ambos estudiantes establecieron ambas conexiones y se destaca que el cálculo mental fue el único procedimiento mediante el cual los estudiantes lograron resolver la tarea de manera correcta (tabla 2).

Tabla 2. *Conexiones matemáticas esperadas y obtenidas en la tarea 1.*

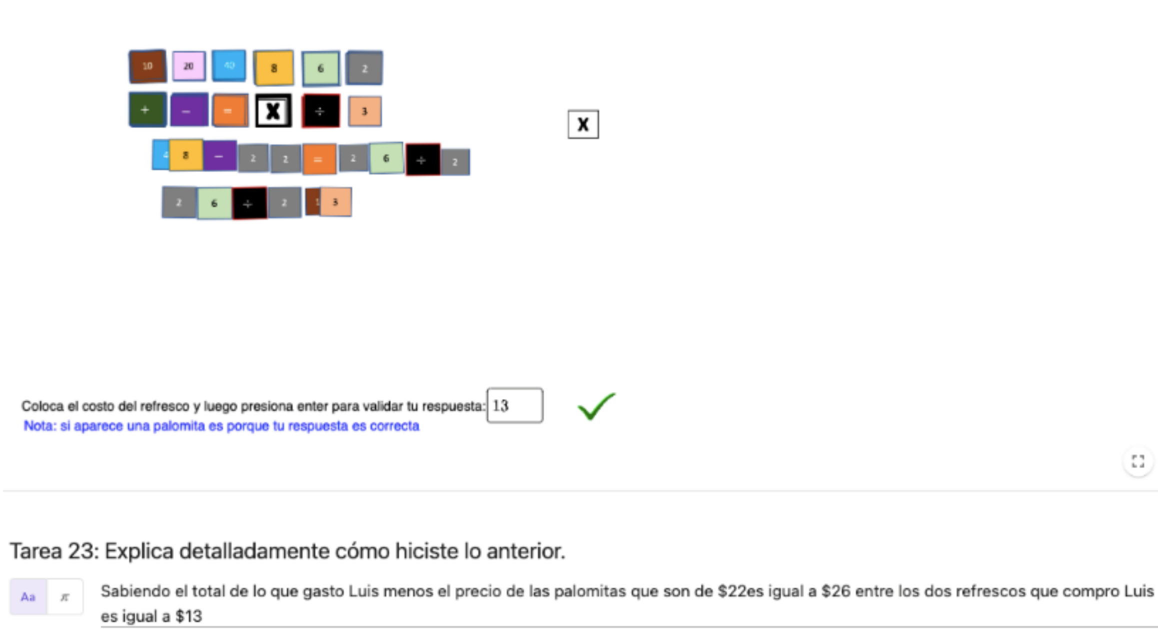
Conexión matemática esperada	Estudiantes que la evidenciaron
Procedimental	E4, E5, E6, E8, E9 y E10
Característica	E3 y E8
Significado	
Representaciones diferentes	

Fuente: elaboración propia.

Por ejemplo, E3 que evidenció ambas conexiones matemáticas en esta tarea. Para el caso de la conexión procedimental este describió por ejemplo cómo fue que planteó la expresión algebraica a partir de la situación que se le planteó.

> **Investigador**: explica detalladamente cómo hiciste lo anterior (encontrar la ecuación correcta).
>
> **E3**: al total de lo que gastó Luis le resté el precio de las palomitas que son de \$22, y el resultado fue \$26 y entre los dos refrescos que compró Luis esto es igual a \$13.

Figura 1. *Respuesta del estudiante a la tarea propuesta.*



Fuente: producción del estudiante tres.

Tarea 2

En la tabla 3 se muestra que fueron establecidas las conexiones de tipo característica, representaciones diferentes y significado. Esta última tipología solo fue evidenciada por E4. Cabe mencionar que en esta tarea se esperaba que se evidenciara la conexión de parte-todo, sin embargo, ninguno de los estudiantes logró establecerla.

Tabla 3. *Conexiones matemáticas esperadas y obtenidas en la tarea 2.*

Conexión matemática esperada	Estudiantes que la evidenciaron
Procedimental	
Característica	E3 y E6
Significado	E4
Representaciones diferentes	E3, E4, E6 y E7
Parte-todo	

Fuente: elaboración propia.

Un ejemplo relacionado con esta tarea es cómo fue evidenciada la conexión significada, ya que a partir de diferentes argumentos hechos por parte de E4 se creó el subtema *una ecuación lineal es una igualdad que tiene incógnitas elevadas a la primera potencia.* En este caso el estudiante indicó ciertas características del objeto matemático (ver extractos de E4).

> **Investigador**: la igualdad $2x - 3 = x - 2$ ¿Es una ecuación lineal? ¿Por qué?
>
> **E4**: sí, porque involucra incógnitas elevadas a la primera potencia.
>
> […]
>
> **Investigador**: explícame cómo realizaste la clasificación de las fichas (elementos de una ecuación).
>
> **E4**: en los términos clasifiqué los números, en las incógnitas la x porque no se sabe que valor representa y finalmente los signos matemáticos, eso fue más sencillo.
>
> […]
>
> **Investigador**: ¿La expresión representa una ecuación lineal?, ¿Por qué?
>
> **E4**: sí, porque tiene una incógnita.
>
> […]
>
> **Investigador**: ¿Qué entiendes por ecuación lineal y menciona cuáles son sus principales características?
>
> **E4**: una ecuación lineal es la que utiliza incógnitas.
>
> **Explicación oral de E4**: lo que entiendo es que es un problema que contiene incógnitas y se tiene que resolver cuál es el valor de esa incógnita.

Tarea 3

Para el caso de esta tarea la conexión que más predominó fue la de representaciones diferentes, sin embargo, E8 no logró establecer ninguna conexión en esta tarea. Además, es evidente que en esta tarea se evidenciaron más conexiones matemáticas con un total de 28 y entre estas se encuentra la conexión extra-matemática de modelado (tabla 4).

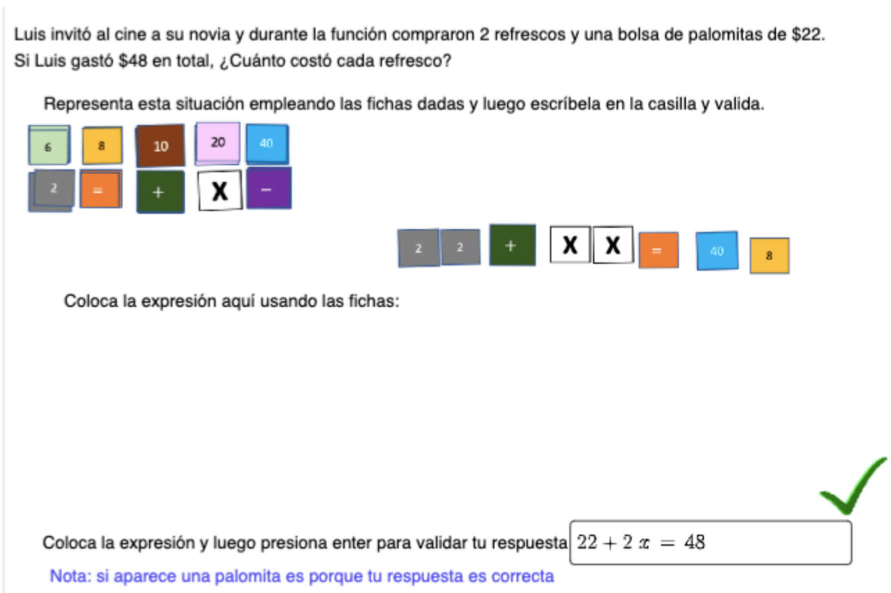
Tabla 4. *Conexiones matemáticas esperadas y obtenidas en la tarea 3.*

Conexión matemática esperada	Estudiantes que la evidenciaron
Procedimental	E1, E2, E3, E4, E6, E9, E10 y E11
Característica	E10
Significado	E4 y E11
Representaciones diferentes	E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E9, E10, E11 y E12
Modelado	E3, E4, E6, E9, E10 y E11

Fuente: elaboración propia.

E11, por ejemplo, al resolver esta tarea evidenció la conexión de modelado. En este caso E11 parte de un problema que ocurre o puede ocurrir en un contexto real y posteriormente plantea un modelo para darle solución. Una vez construido el modelo, hizo uso de sus conocimientos (matemáticos o no) para encontrar el valor de x (ver figura 2 y extractos de E11).

Figura 2. *Respuesta del estudiante a la tarea propuesta.*



Fuente: producción del estudiante tres

Investigador: explica cómo llegaste a la ecuación.

E11: en el caso de 2x, porque hay dos valores desconocidos que son el costo de los refrescos, el 22 es el valor de las palomitas y el 48 es el total que se gastó.

[…]

Investigador: encuentra el costo del refresco y explica de manera detallada cómo lo haces.

E11: primero hice 22 más la (x) ya que es un número desconocido y como resultado me dio 48 después me di cuenta de que el número desconocido era 26 entonces hice una división de 26 entre 2 y como resultado me dio 13.

Tarea 4

En la tabla 5 se muestran las conexiones que fueron evidenciadas por los estudiantes al resolver la tarea 4. Sin embargo, a pesar de que se promovía el uso de la conexión característica, ésta no fue establecida por ningún estudiante y para el caso de la conexión significado, solo E4 la evidenció.

Tabla 5. *Conexiones matemáticas esperadas y obtenidas en la tarea 4.*

Conexión matemática esperada	Estudiantes que la evidenciaron
Procedimental	E3, E4, E5, E6 y E11
Característica	
Significado	E4
Representaciones diferentes	E3, E4, E5, E6, E8, E9, E10 y E11
Modelado	E3, E4, E6 y E11

Fuente: elaboración propia.

Por ejemplo, E6 evidenció en esta tarea la conexión procedimental, lo que permitió ver que su principal estrategia fue el cálculo mental. El sustento de esta tipología fue la formación de diferentes códigos sustentados por los extractos de E6.

> **Investigador**: explica de manera detallada qué realizaste para encontrar los resultados.
>
> **E6**: busqué un número que menos 10 sea 5 (valor de la estrella), después reste 15 menos 8 lo cual me dio 7 (valor del círculo), ya después sume esos 7 más 2 lo cual me dio 9 (valor del triángulo).
>
> […]
>
> **Investigador**: explica cómo encontraste el costo del refresco.
>
> **E6**: primero busqué un número que multiplicado por dos me diera el número restante que en este caso fue el 26 y me terminó dando 13 que ese es el costo del refresco.
>
> […]
>
> **Investigador**: Explica cómo encontraste la ecuación $x + 2x + 3x = 60$.
>
> **E6**: Me puse a buscar números que multiplicados por dos y tres me pudieran dar el resultado de 60

Tarea 5

Finalmente, para el caso de esta tarea solo fueron evidenciadas las conexiones matemáticas característica, significado y representaciones diferentes. Además, fue una de las tareas en las que se evidenciaron menos conexiones matemáticas.

Tabla 6. *Conexiones matemáticas esperadas y obtenidas en la tarea 5.*

Conexión matemática esperada	Estudiantes que la evidenciaron
Procedimental	
Característica	E3
Significado	E4 y E11
Representaciones diferentes	E6
Modelado	

Fuente: elaboración propia.

E3, por ejemplo, en esta tarea evidenció la conexión característica que se construyó a partir de diferentes extractos de sus producciones para formar el subtema *una ecuación lineal es una igualdad entre expresiones algebraicas que tiene un valor desconocido.*

Investigador: ¿Qué entiendes por ecuación lineal?

E3: Entiendo que es una operación de igualdad entre expresiones.

[…]

Investigador: la igualdad $2x - 3 = x - 2$ ¿Es una ecuación lineal? ¿Por qué?

E3: sí, porque es una ecuación equilibrada.

[…]

Investigador: explica con tus propias palabras qué entiendes por ecuación lineal y menciona cuáles son sus principales características.

E3: Lo que entiendo es que son ecuaciones que se tienen que igualar o encontrar su respectivo valor.

Discusión y conclusión

En el presente escrito se reportó la primera parte de lo que contempla la investigación en su totalidad, es decir se presentaron las conexiones identificadas en las producciones verbales y textuales de los estudiantes. Actualmente, se está trabajando en el diseño y comparación de las trayectorias de aprendizaje, sin embargo, esto se podrá mirar en la investigación general.

De acuerdo con los resultados se evidenciaron un total de 65 conexiones matemáticas, entre estas se identificaron 4 conexiones intra-matemáticas (procedimental, característica, significado, representaciones diferentes) y la conexión extra-matemática (de modelado), resultados que han sido reportados por otros investigadores (por ejemplo, Campo-Meneses y García-García, 2020, 2021; García-García y Dolores-Flores, 2017, 2018, 2021a, 2021b) evidenciadas en la práctica de estudiantes de bachillerato al resolver tareas específicas, como fue el caso de esta investigación. Se obtuvo además que la conexión más común es la de representaciones diferentes que se evidenció 24 veces, seguida por la conexión matemática procedimental. Resultados consistentes con lo reportado por Dolores y García-García (2017).

Por otro lado, de acuerdo con los resultados, en las tareas 3 y 4 se evidenciaron la mayor parte de conexiones matemáticas. Cabe destacar que en las tareas propuestas fue promovido el uso de las diferentes conexiones, sin embargo, la conexión de parte-todo no fue evidenciada por ninguno de los casos investigados. En el caso de E1, E2, E7 solo evidenciaron 2 conexiones matemáticas cada uno y E12 solo una conexión. Estos resultados de cierta manera muestran que los estudiantes tienen ciertas dificultades al trabajar el concepto. Se considera que una de las causas de tal situación es que los estudiantes no seguían correctamente las instrucciones planteadas. Para el caso de las tareas 3, 4 y 5, consideramos que la principal dificultad es el traslado del lenguaje común al algebraico o viceversa que coincide con lo reportado por Esquinas (2009) que mencionó que en el momento en que el estudiante se enfrenta a un lenguaje nuevo esto le crea dificultades para trabajar de manera correcta el concepto de ecuación lineal.

Por otro lado, pero no menos importante, se destaca en el presente escrito el uso del software GeoGebra online porque permitió aplicar las tareas propuestas y a su vez permitió observar en tiempo real las producciones hechas por los estudiantes que se guardaron de manera automática. Por lo que concluimos que GeoGebra es una herramienta con gran potencial, ya que como afirmaron Hohenwarter y Fuchs (2004) es un medio apropiado para aprender matemáticas con una variedad de actividades que incluyen la demostración, visualización y como ayuda para la construcción. Por su parte, Mollakuqe et al. (2021) señalaron que el pensamiento crítico, la comprensión y el interés por parte de los estudiantes son mucho mayores cuando se trabaja con este software en comparación con no utilizar ningún software.

Finalmente, consideramos que los resultados obtenidos pueden servir en la práctica docente para plantear un rediseño de las tareas propuestas tomando en cuenta como parte fundamental el establecimiento de conexiones matemáticas y que a su vez mejoren la comprensión del concepto de ecuación lineal. También, se sugiere seguir investigando y trabajando en torno al enfoque de conexiones matemáticas dada la relevancia que en la literatura se reporta.

Agradecimientos: Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología.

Referencias bibliográficas

Bal, A. P. (2016). The effect of the differentiated teaching approach in the algebraic learning field on students' academic achievements. *Eurasian Journal of Educational Research, 63*, 185-204. 10.14689/ejer.2016.63.11

Bingölbali, E., & Coşkun, M. (2016). A proposed conceptual framework for enhancing the use of making connections skill in mathematics teaching. *Education and Science, 41*(183), 233-249. http://dx.doi.org/10.15390/EB.2016.4764

Braun, V., & Clarke, , V. (2012). Thematic analysis. En H. Cooper (Ed.). *Handbook of Research Methods in Psychology*, 57-71. https://doi.org/10.1037/13620-004

Braun, V., & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Using thematic analysis in psychology, 3*(2), 77-101. http://doi.org/10.1191/1478088706qp063oa

Businskas, A. (2008). *Conversations about connections: How secondary mathematics teachers conceptualize and contend with mathematical connections.* Tesis de doctorado no publicada. Simon Fraser University.

Campo-Meneses , K. G., & García-García, J. (2021). La comprensión de las funciones exponencial y logarítmica: una mirada desde las conexiones matemáticas y el Enfoque Ontosemiótico. *Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática (PNA), 16*(1), 25-56. https://doi.org/10.30827/pna.v16i1.15817

Campo-Meneses, K. G., & García-García, J. (2020). Explorando las conexiones matemáticas asociadas a la función exponencial y logarítmica en estudiantes universitarios colombianos. *Educación Matemática, 32*(3), 209-240. https://doi.org/10.24844/em3203.08

Clarke , V., & Braun, V. (2013). Teaching thematic analysis: Overcoming challenges and developing strategies for effective learning. *The Psychologist, 26*(2), 120-123.

Cobb, P., & Gravemeijer, K. (2008). *Experimenting to Support and Understand Learning Processes. En Anthony, Richard, John y Baek. (eds).* (pp. 68–95): Handbook of Design Research Methods in Education, Innovations in Science, Technology, Engineering, and Mathematics Learning and Teaching Routledge.

De Gamboa, G., & Figueiras, L. (2014). *Conexiones en el conocimiento matemático del profesor: propuesta de un modelo de análisis. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.).* Investigación en Educación Matemática XVIII.

Dolores , C., & García-García, J. (2017). Conexiones intramatemáticas y extramatemáticas que se producen al resolver problemas de cálculo en contexto: un estudio de casos en nivel superior. *Boletim de Educação Matemática (Bolema), 31*(57), 158-180. http:// doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a08

Eli, J., Mohr-Schroeder, M. J., & Lee, C. W. (2013). Mathematical connection and their relationship to mathematics knowledge for teaching geometry. *School Science and Mathematics, 113*(3), 120-134. https://doi.org/10.1111/ssm.12009

Eichhorn, M. S., Perry , L. E., & Brombacher, A. (2018). Students' early grade understanding of the equal sign and non-standard equations in Jordan and India. *International Journal of Research in Education and Science (IJRES), 4*(2), 655-669. DOI:10.21890/ijres.432520

Esquinas , A. (2009). *Dificultades de aprendizaje del lenguaje algebraico: del símbolo a la formalización algebraica: aplicación a la práctica docente.* Tesis doctoral no publicada, Universidad Complutense de Madrid.

Evitts, T. (2004). *Investigating the mathematical connections that preservice teachers use and develop while solving problems from reform curricula.* Tesis de doctorado no publicada. Pennsylvania State University College of Education.

García, J. (2018). *Conexiones matemáticas y concepciones alternativas a la derivada y a la integral en los estudiantes del preuniversitario.* Tesis de doctorado no publicada. Universidad Autónoma de Guerrero. .

García-García, J. (2019). Escenarios de exploración de conexiones matemáticas. *NÚMEROS, 100*, 129-133.

García-García, J., & Dolores-Flores, C. (2018). Intra-mathematical connections made by high school students in performing Calculus tasks. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 49*(2), 227-252. https://doi.org/10.1080/0020739X.2017.1355994 .

García-García, J., & Dolores-Flores, C. (2021a). Exploring pre-university students´ mathematical connections when solving Calculus application problems. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1-25. http://doi.org/10.1080/ 0020739X.2020.1729429 .

García-García, J., & Dolores-Flores, C. (2021b). Pre-university students' mathematical connections when sketching the graph of derivative and antiderivative functions. *Mathematics Education Research Journal, 33*(1), 1-22. https://doi.org/10.1007/s13394-019-00286-x.

Garbín, S. (2005). ¿Cómo piensan los alumnos entre 16 y 20 años el infinito? La influencia de los modelos, las representaciones y los lenguajes matemáticos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 8*(2), 169-193. https://www.redalyc.org/pdf/335/33580205.pdf.

Hohenwarter, M., & Fuchs , K. (2004). Combination of dynamic geometry, algebra and calculus in the software system GeoGebra. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* , 128-133.

Jaijan, W., & Loipha, S. (2012). Making mathematical connections with transformations using open approach. *HRD Journal, 3*(1), 91-100. https://so01.tci-thaijo.org/index.php/HRDJ/article/view/11305.

Kelly, A. E., & Lesh, R. A. (2000). *Handbook of research design in mathematics and science education.* Lawrence Erlbaum Associates.

Kieran, C. (2003). *The Twentieth-century Emergence of the Canadian Mathematics Education Research Community. In G. S. Kilpatrick (Eds.).* A History of School Mathematics (pp. 1701 - 1778). National Council of Teachers of Mathematics.

Lehmann, C. (2004). *Álgebra.* Limusa.

Mengistie , S. M. (2020). Enhancing Students' Understanding of Linear Equation With One Variable Through Teaching. *International Journal of Trends in Mathematics Education Research, 3*(2), 69-80. https://doi.org/10.33122/ijtmer.v3i2.148.

Mhlolo, M. (2012). Mathematical connections of a higher cognitive Level: A Tool we may use to identify these in practice. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education, 16*(2), 176-191.

Mollakuqe, V., Rexhepi, S., & Iseni, E. (2021). IncorporatingGeogebraintoTeachingCircleProperties atHighSchool Level and it's Comparison with the Classical Method of Teaching. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 16*(1), 1-11. https://doi.org/10.29333/iejme/9283.

Molina, M., Castro, E., Molina, J., & Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias, 29*(1), 75-88. https://doi.org/10.5565/rev/ec/v29n1.435.

NCTM. (2013). *Connecting the NCTM process standards and the CCSSM practices.* Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Navia , L. (2017). Representaciones semióticas del concepto de ecuación lineal con una variable a partir de la implementación de un juego didáctico. *Revista Amazonia Investiga, 6*(11), 38-52.

Rodríguez-Nieto, C., Rodríguez-Vásquez, F., Font Moll, V., & Morales-Carballo, A. (2021). Una visión desde la red de teorías TAC-EOS sobre el papel de las conexiones matemáticas en la comprensión de la derivada. *Revemop, 3*, 1-32. http://dx.doi.org/10.33532/revemop.e202115.

Singletary, L. M. (2012). *Mathematical connections made in practice: an examination of teachers' beliefs and practices.* Unpublished dissertation. The University of Georgia.

Steffe , L., & Thompson, P. (2000). *Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. En R. Lesh y A. Kelly (Eds.).* (267–307): Research design in mathematics and science education .

DISEÑO DE UNA SITUACIÓN AUTÉNTICA PARA EL ESTUDIO DE LA SEMEJANZA EN ALUMNOS DE BACHILLERATO

DESIGN OF AN AUTHENTIC SITUATION FOR THE STUDY OF SIMILARITY IN HIGH SCHOOL STUDENTS

Sebastián Castañeda Martínez, Juan Carlos Macías Romero, Lidia Aurora Hernández Rebollar
Benemérita Universidad autónoma de Puebla. (México)
sebastian.castanedam@alumno.buap.mx, jcmacias24@gmail.com, lidia.hernandez@correo.buap.mx

Resumen:
Se presenta el diseño de una propuesta que tiene como propósito favorecer un acercamiento al desarrollo del pensamiento geométrico con base en la situación auténtica "la construcción de la casa de mis sueños", mediante la resolución de tareas a través del concepto de semejanza, en estudiantes de Bachillerato del estado de Puebla. La propuesta está compuesta por tres hojas de trabajo, en las que se abordan los conceptos de semejanza, área y perímetro, a partir del reconocimiento de un terreno de la casa en la que viven y la realización de un plano y una maqueta.

Palabras clave: la casa de mis sueños, tareas auténticas, semejanza, área y perímetro, pensamiento geométrico

Abstract:
This paper presents the design of a proposal that is aimed at favoring an approach to the development of geometric thinking based on the authentic situation "constructing the house of my dreams", by solving tasks through the concept of similarity, in high school students in the state of Puebla. The proposal is composed of three worksheets, in which the concepts of similarity, area and perimeter are addressed, based on the recognition of a plot of land of the house in which they live and the design of a plane and a model.

Keywords: the house of my dreams, authentic tasks, similarity, area and perimeter, geometrical thinking

Introducción

Esta propuesta forma parte de una investigación que se está desarrollando y que tiene como propósito favorecer un acercamiento al desarrollo del pensamiento geométrico teniendo en cuenta la situación auténtica "la construcción de la casa de mis sueños", mediante la resolución de tareas relacionadas con el concepto de semejanza. La situación auténtica está dirigida a estudiantes del Bachillerato General Estatal (BGE, 2018), del estado de Puebla. En este documento, se presenta el procedimiento que se siguió para el diseño de una propuesta de aula que integra aspectos didácticos desde la perspectiva de Palm (2006), curriculares desde el BGE y matemáticos respecto a los conceptos geométricos, del marco de referencia conceptual.

Báez e Iglesias (2007) mencionan que, a nivel de educación básica, la enseñanza de las matemáticas es compleja, especialmente la enseñanza y el aprendizaje de la geometría. Estos autores sostienen, que se generan dificultades, porque en muchas ocasiones los docentes no poseen el contenido geométrico previsto en el plan de estudio o tienen una comprensión limitada de ellos, lo que genera la creencia de que el desarrollo de la geometría hace énfasis en usar fórmulas y calcular el área.

Por lo anterior, es que a pesar de las nuevas estrategias que apuntan al desarrollo significativo del pensamiento geométrico, en muchas ocasiones la enseñanza de la geometría se limita al reconocimiento de figuras y su representación en una hoja, lo que genera que los estudiantes no logren la comprensión de estos objetos abstractos y no le encuentren sentido en su contexto. Por esto, es necesario que se proporcionen ejemplos reales o en contexto que le permitan al estudiante el entendimiento de los conceptos. (Goncalves, 2007).

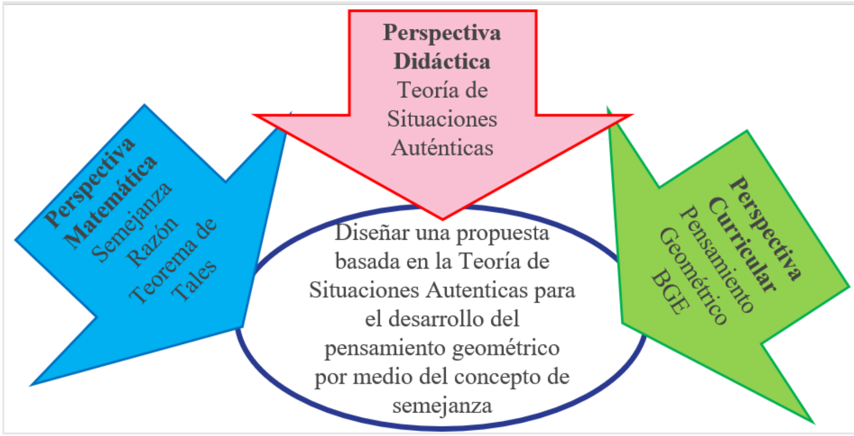
En consecuencia, se han desarrollado gran cantidad de investigaciones que buscan desarrollar diferentes métodos para que se produzca en los estudiantes un aprendizaje significativo en el desarrollo del pensamiento geométrico. Esta problemática ha sido de interés para los investigadores en los últimos años, y se sustenta por medio de los resultados obtenidos a través de diversas evaluaciones a nivel internacional, como lo son las pruebas PISA, que se enfocan en la capacidad que debe tener el individuo para resolver problemas en contexto con base en los procesos de formular, emplear e interpretar, tan importantes para el desarrollo de esta capacidad.

Por esto, se tuvo en cuenta la teoría de situaciones auténticas como una alternativa para la aproximación al concepto de semejanza, ya que podrían influenciar una iniciación a este concepto de una manera más flexible, puesto que, al analizar una situación desde el contexto real, se podrían identificar nuevas características en el desarrollo del pensamiento geométrico, y así permitirle al estudiante apropiarse de esos conocimientos. Esto promueve un cambio de visión, pues en la enseñanza de la geometría tradicional se puede perder significado debido a que sólo se estudian estructuras geométricas o simplemente se reemplazan formulas y se realizan ejercicios de forma mecánica, es decir, que en general el pensamiento geométrico se obtiene principalmente por la memorización de reglas y procedimientos, para cubrir la falta de comprensión.

Marco teórico

En esta sección se proponen las perspectivas didáctica, curricular y matemática para consolidar y fundamentar algunos referentes conceptuales que sustentan la problemática planteada y el diseño de la propuesta de aula. (Ver figura 1)

Figura 1. *Diagrama de la articulación del marco Teórico.*



Fuente: elaboración propia.

En la primera perspectiva se sitúa la teoría de las Situaciones Auténticas, la cual se constituye como un eje central desde un enfoque metodológico para el desarrollo de la propuesta de aula. La segunda se aborda desde el mapa curricular de Puebla, específicamente el Bachillerato General Estatal (BGE,2018). En la tercera perspectiva, se referencian algunos conceptos matemáticos que emergen en el diseño de la propuesta de aula, donde el foco principal es el concepto de semejanza.

A continuación, se presentan los aspectos que propone Palm (2006) para analizar la situación que se va a simular desde la realidad.

Tabla 1. *Los aspectos de situaciones de la vida real que se consideran importantes en la simulación.*

A. Evento B. Pregunta C. Información/datos C1. Existencia C2. Realismo C3. Especificidad	F. Circunstancias F1. Disponibilidad de externos herramientas F2. Dirección F3. Consulta y colaboración F4. Oportunidades de discusión F5. Tiempo F6. Consecuencias de la solución de éxito de la tarea (o fracaso).
D. Presentación D1. Modo D2. Uso del lenguaje	G. Requisitos de la solución
E. Estrategias de solución E1. Disponibilidad E2. Experiencia plausible	H. Propósito H1. Propósito en el contexto figurativo H2. Propósito en el contexto social

Fuente: elaboración propia. Tomada y traducida de Palm (2006).

La teoría de las Situaciones Auténticas propuesta por Palm (2006) proporciona parte de la caracterización del tipo de situaciones que se pretenden abordar en la propuesta de aula, es decir, permite observar la estructura de las situaciones y tareas solicitadas con el objetivo de realizar una simulación que se puede presentar en la vida diaria y analizar la autenticidad de las tareas diseñadas en la propuesta de aula.

Además, para este diseño, se utilizará el aprendizaje basado en solución de problemas auténticos, que de acuerdo con el Plan y Programas de Estudio (BGE, 2018) se define como la presentación de situaciones de aprendizaje que ocurren en contextos reales por medio de simulaciones auténticas, que se aproximan lo mejor posible a la realidad.

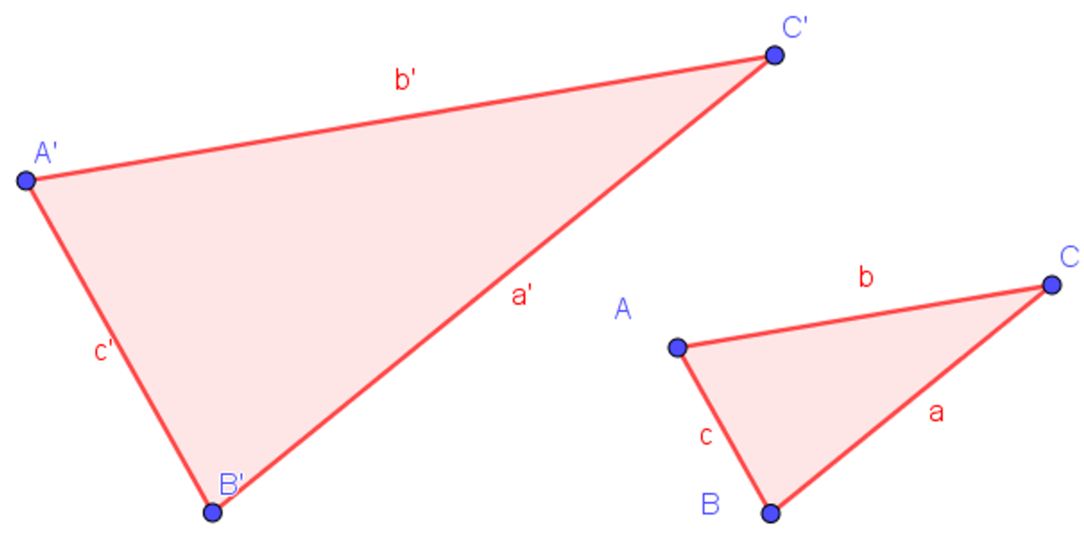
Por otro lado, se presentan a continuación conceptos netamente matemáticos relacionados con el concepto de semejanza y la utilización del Teorema de Tales, los cuales son de vital importancia en la construcción de la propuesta didáctica.

Semejanza

Se define la semejanza de dos polígonos así: Dos figuras A y B se dice que son semejantes, lo que se escribe A ~ B, si y sólo si existe una transformación de semejanza que transforma una figura en la otra, es decir, que sus lados homólogos son proporcionales mediante una constante k y sus ángulos homólogos son iguales. (ver figura 2)

- Lados homólogos: lados cuyos extremos están en vértices homólogos.
- Vértices homólogos: vértices de ángulos homólogos
- Ángulos homólogos: Ángulos respectivamente iguales e igualmente dispuestos. Los ángulos homólogos tienen la posibilidad de tener todo el mismo sentido siendo polígonos directamente semejantes o el sentido contrario siendo polígonos inversamente semejantes.
- Razón de semejanza: Es la constante que se mantienen en relación los lados Homólogos.

Figura 1. *Transformación de semejanza.*



Fuente: elaboración propia.

Razón

Sánchez et al (2003) definen que la *razón* de una cantidad a otra cantidad semejante es el cociente de la primera dividida por la segunda. Es importante aclarar que una razón es un cociente de medidas de cantidades semejantes, ya que no tiene sentido hallar la razón entre dos elementos que no sean del mismo tipo, es decir, hallar la razón entre un kilogramo y un segmento. Por lo anterior, se afirma que se puede hallar la razón entre dos segmentos o entre dos masas. Además, una razón se puede expresar en forma de fracción, de tal forma que se observe la relación entre las magnitudes. Por ejemplo, la razón 5 es a 6 se puede representar como 5 : 6 o $\frac{5}{6}$.

Proporción

Sánchez et al, (2003) definen una proporción como una expresión de la igualdad de dos razones. Por ejemplo, 3/4 y 12/16 tiene el mismo valor, las razones pueden igualarse como una proporción, 3/4 = 12/16 o bien 3 : 4 = 12 : 16. Por lo tanto, si las razones a:b y c:d son iguales, la expresión a:b = c:d es una proporción. Esto se lee "a es a b como c es a d" o también "a y b son proporcionales a c y d". En la proporción, se dice que a es el primer término, b es el segundo, c es el tercero y d es el cuarto.

Además, la escala es la relación matemática proporcional que existe entre el tamaño real y el tamaño del papel que representa la realidad en el plano o mapa. Esta relación se escribe en forma de razón matemática, donde el primero representa el valor del plano y el segundo representa el valor de la realidad. Por ejemplo, una escala de 1: 100 significa que 1 centímetro del plano es igual a 1 metro en la realidad. (Lozano, Marcos y Hart, s.f).

Relación proporcional en el Teorema de Thales

Esta la relación proporcional en el Teorema de Thales plantea que: toda recta paralela a uno de los lados de un triángulo corta sobre los otros dos lados, segmentos proporcionales.

Se tiene como hipótesis: El triángulo $\Delta\, ABC$ y la recta $\overleftrightarrow{DE}$ es paralela a un lado del triángulo $\Delta\, ABC$, en este caso $\overline{BC}$ // $\overleftrightarrow{DE}$, entonces $\frac{\overline{AB}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}}$.

Metodología

La investigación es de tipo mixto, en el cual se resalta el método cualitativo sobre el cuantitativo. Es una investigación exploratoria descriptiva, de corte cualitativa. En Fraenkel, Wallen, y Hyun, (2011) mencionan las características de los tipos de estudio cualitativo y cuantitativo presentando algunas diferencias considerables. Sin embargo, describen las potencialidades de utilizar diferentes métodos en una investigación, debido a que se pueden relacionar aspectos cualitativos y cuantitativos cuando se presentan diferentes instrumentos para recolectar datos.

Inicialmente se elaboró un cuestionario que tiene como objetivo diagnosticar cualitativa y cuantitativamente el pensamiento geométrico de los estudiantes específicamente en los temas de área, perímetro, y semejanza. Lo anterior, se realizó por medio de preguntas de selección múltiple, cada una con un espacio para justificar, que buscan identificar los conocimientos que ha desarrollado previamente cada estudiante y que se relacionan con la propuesta de aula.

En la tabla 2, se muestra la estructura de la propuesta de aula, es decir, el número de hojas de trabajo que componen la situación, y a partir de cada situación se definen la cantidad de problemas que se realizan y las respectivas tareas que tiene cada uno. La tabla se realizó con el fin de estructurar y organizar la propuesta de aula según la complejidad de los problemas de cada situación. Luego, se realiza un análisis de la situación respecto a su autenticidad teniendo en cuenta los aspectos mencionados por Palm (2006), que permiten sustentar el diseño de la propuesta de aula.

Tabla 2. *Situación. Hojas de trabajo. Problemas y Tareas de la Propuesta de aula.*

Situación	Problemas	Tareas
Hoja de trabajo 1: Trabajando en el patio áreas y escalas.	**Problema 1**: Trabajando en el patio áreas y escalas **Problema 2:** Encontrando áreas y perímetros	**Problema 1:** No. de tareas: 4 **Problema 2:** No. de tareas: 5
Hoja de trabajo 2: Plano de mi casa actual.	**Problema 1:** Plano de una casa **Problema 2:** Elaborando el plano de mi casa actual.	**Problema 1:** No. de tareas: 3 **Problema 2:** No. de tareas: 5
Hoja de trabajo 3: Diseñando el plano y la maqueta de la casa de mis sueños.	**Problema 1:** El diseño de las casas de Ana y Juan **Problema 2:** Elaborando el plano y la maqueta de la casa de mis sueños.	**Problema 1:** No. de tareas: 6 **Problema 1:** No. de tareas: 2

Fuente: elaboración propia.

Análisis del cuestionario y hojas de trabajo

En este capítulo se realiza el análisis preliminar del cuestionario inicial – final y las tres hojas de trabajo que presentan las actividades de la situación auténtica “la casa de mis sueños”.

Cuestionario Inicial

El cuestionario inicial está conformado por 19 preguntas, 14 de ellas de selección múltiple con su respectivo espacio para justificar y 5 preguntas abiertas. Estas preguntas permiten identificar el desempeño académico de los estudiantes respecto a conceptos de geometría como el perímetro, área, ángulos, semejanza, escala etc. Lo anterior, debido a que para el desarrollo de la secuencia didáctica es necesario trabajar estos conceptos para trabajar específicamente los conceptos de semejanza y escala.

Hoja de trabajo No. 1

En cuanto a la hoja de trabajo No. 1, está conformada por 8 preguntas, que se diseñaron teniendo en cuenta los resultados presentados en el cuestionario inicial. En la primera parte, se presentó un contexto relacionado con un terreno de $120m^2$, en el cual los estudiantes deben encontrar diferentes dimensiones que permitan encerrar esta superficie.

En la segunda parte de la hoja de trabajo los estudiantes deben realizar la construcción de diferentes figuras geométricas a escala, como triángulos, hexágonos, etc. Para luego realizar las respectivas comparaciones entre el perímetro y área de cada una de las figuras. A continuación, se presentan las preguntas de la hoja de trabajo No.1.

1. En la cancha de la escuela con la ayuda de tus compañeros y con una cuerda encierren una superficie de 120 m^2. A continuación describe como lo realizaron.
2. Supongan que tienen un terreno de 120 m^2. En parejas, respondan lo siguiente argumentando el procedimiento en cada una de ellas.

   a. ¿Qué forma geométrica tiene el terreno y cuáles serían sus dimensiones? Traza el terreno utilizando regla y compás a una escala de 1:100.
   b. ¿Podría ser de otra forma geométrica? Traza el terreno en otras formas geométricas posibles, utilizando regla y compás, a una escala de 1:100.
3. ¿Qué tipos de ángulos se identificaron en cada forma geométrica y cuál es su medida?
4. Si el terreno fuera de forma circular, ¿Qué dimensiones tendría? Traza el terreno utilizando regla y compás, a una escala de 1:100.
5. Si el terreno fuera de forma triangular ¿Qué dimensiones tendría? Traza el terreno utilizando regla y compás, a una escala de 1:100.
6. Si el terreno fuera de forma hexagonal ¿Qué dimensiones tendría? Traza el terreno utilizando regla y compás, a una escala de 1:100
7. ¿Cuál es el área y perímetro que tienen cada una de estas formas geométricas halladas en la anterior pregunta?
8. ¿Cuál de todas las formas geométricas que han trazado tiene mayor perímetro y cuál menor perímetro encerrando la misma área?

Hoja de trabajo número 2

La hoja de trabajo No. 2 está conformada por la definición de escala, con el fin de consolidar el concepto que se trabajó en la hoja de trabajo No. 1 y se pueda comprender las relaciones que se presentan en el dibujo a escala y el tamaño real.

Además, se presentan 4 preguntas que se diseñaron con el fin de que el estudiante reconozca su entorno y logre realizar una representación a escala de la casa en la que vive. Por esto, se presentó un contexto relacionado con un plano inicial de una casa para luego identificar las dimensiones reales que representan y después con la guía del docente puedan realizar la construcción del plano a escala de la casa en la que viven actualmente, realizando un reconocimiento espacial con medidas reales para luego realizar el plano.

Las preguntas de la hoja de trabajo No. 2, son presentadas a continuación:

1. El plano de la casa siguiente está dibujado a escala de 1:125. Halle las dimensiones reales en metros de:
   a) El frente de la casa
   b) La puerta de entrada
   c) El cubo de la escalera.

2. Elabore un plano a una escala de 1:100 de la casa donde habita actualmente, en el cual se observe lo siguiente:
   a) Todos los espacios que contiene: cocina, baño(s), comedor, recamara(s), lavadero, jardín o patio, etc.
   b) Las dimensiones de cada uno de los espacios anteriores.
   c) La línea del drenaje y agua potable.
   d) La línea de distribución de la luz para una recámara o cualquier otro espacio.
   e) Si es de dos plantas o más se deben mostrar por separado.

Hoja de trabajo número 3

La hoja de trabajo No. 3, está conformada por 2 contextos iniciales de dos estudiantes que pensaban construir la casa de sus sueños desde dos entornos diferentes, (contexto rural y urbano), en donde se presentan ciertas diferencias. Lo anterior, con el objetivo de que los estudiantes logren identificarse en alguno de los contextos. Además, se les presentaros 6 preguntas relacionadas con los contextos iniciales y el contexto en el que viven.

Luego, se presentan 2 preguntas que se diseñaron con el fin de que el estudiante a partir de lo realizado en la hoja de trabajo No. 1 y No. 2 logre construir, en un primer momento, un plano de la casa de sus sueños a una escala 1:100 a partir de un terreno de $120m^2$. Para este caso, sólo se les solicita realizar la construcción del encierro con las respectivas divisiones de la casa. En adición, se les pide que realicen la construcción de una maqueta a escala teniendo en cuenta los planos realizados previamente. El objetivo de presentar esta hoja de trabajo es que los estudiantes se aproximen a la idealización de la construcción de la casa de sus sueños por medio de la realización de la maqueta.

A continuación, se presentan las situaciones y las preguntas de la hoja de trabajo No. 3.

> *Juan conoció a Ana a través de las redes sociales. Ella vive en la ciudad de Puebla, él en una comunidad de la sierra norte del estado y, a pesar de la lejanía, se han convertido en el mejor amigo uno del otro. Tienen muchas coincidencias, los dos son estudiantes de bachillerato, les gusta leer, escuchar música, ver películas, ambos desean terminar su bachillerato, estudiar una carrera universitaria, no quieren tener hijos ni casarse hasta que trabajen en su profesión y, sobre todo, coinciden en tener su propia casa.*
>
> *Ana le comenta a Juan que le gustaría que su casa tuviera tres recámaras, dos baños, una cocina con comedor, una cochera, un jardín con muchas flores y una fuente circular; que también las ventanas fueran de metal forjado con un diseño original y que fuera una vivienda sustentable. Él comenta que le gustaría una vivienda con características de casas ecológicas, además quiere un cuarto de estudio que tenga forma de hexágono con un domo, también desea poner un pequeño gallinero y un huerto con hortalizas.*

1. ¿Crees que Ana y Juan puedan lograr esta meta? ¿cómo crees que lo puedan hacer realidad?
2. ¿Qué características tienen en común las casas de tu comunidad con las que sueñan tener Ana o Juan o ambos?
3. ¿Existe alguna casa que te guste por el diseño de su arquitectura? ¿qué es lo que más te llama la atención de esa casa? ¿por qué?
4. ¿En tu comunidad existen viviendas sustentables o ecológicas?
5. ¿Te identificas con alguno de los personajes? ¿En qué sentido? Explica
6. A ti, ¿te gustaría tener tu propia casa, preferirías vivir siempre en un cuarto de la casa de tus padres, esperarías a que te hereden o te irías a vivir a la casa de los padres de tu pareja? Explica

Considerando que solamente dispones de un lote de 120 metros cuadrados de superficie, lleva a cabo lo siguiente:

7. Realiza un plano de la casa que te gustaría construir a una escala de 1:100.
8. Elabora una maqueta de la casa de tus sueños, preferentemente con material reciclable o reutilizable.

Reflexiones

En general, los referentes conceptuales fueron importantes a la hora del diseño puesto que se logra articular lo planteado en los referentes didácticos, curriculares, cognitivos y matemáticos, específicamente el contexto. Por lo anterior, se reconocen los contextos de la construcción de la casa de sus sueños mediante la elaboración de un plano, y una maqueta de la casa que los estudiantes desean construir.

Específicamente, para la construcción y diseño de la propuesta de aula se tuvo en cuenta la investigación Palm (2006) y se retoman los aspectos mencionados en la teoría de situaciones auténticas. Además, desde lo planteado curricularmente por el Bachillerato General Estatal (2018) se relacionan este tipo de actividades en el aula.

Por otro lado, se realizó la articulación para el diseño de cada una de las hojas de trabajo, teniendo en cuenta los referentes y así analizarlos en la puesta en práctica de la secuencia. La propuesta de aula permitirá el aprendizaje significativo de conceptos geométricos como el área, perímetro y la semejanza, además permitirá que los estudiantes establezcan una relación entre lo que aprenden en la escuela y lo que pueden aplicar en su vida, y logren vislumbrar la construcción ideal de su casa con el fin de mejorar su proyecto de vida.

Finalmente, se espera aplicar la propuesta en dos contextos educativos (rural y urbano), con el fin de realizar comparaciones.

Referencias bibliográficas

Báez, R. e Iglesias, M. (2007). Principios didácticos para seguir en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría en la UPEL "El Mácaro". *Enseñanza de la Matemática*, Vols. 12 al 16, Número extraordinario, 67-87.

Fraenkel, J. R., Wallen, N. E., & Hyun, H. H. (2011). *How to design and evaluate research in education*. New York: McGraw-Hill Humanities/Social Sciences/Languages

Goncalves, R. (2006). ¿Por qué los estudiantes no logran un nivel de razonamiento en la geometría? *Revista ciencias de la educación. 1*(26), 83-98.

Sánchez, R. Zapata, Arteaga, G. y Zerón, J. *Congruencia y semejanza de figuras geométricas*. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua]. Archivo digital . 188041.pdf (unanleon.edu.ni)

Palm, T. (2006). Word problems as simulations of real-world situations: A proposed framework. *For the Learning of Mathematics*, 26(1), 42–47.

Plan y programas de estudio BGE. (2018). *Estrategias sugeridas para fomentar el Aprendizaje Situado*. Programas BGE 2018 (puebla.gob.mx)

DESARROLLO DEL SENTIDO NUMÉRICO AL EMPLEAR LA NOTACIÓN CIENTÍFICA

DEVELOPING NUMBER SENSE WHEN USING THE SCIENTIFIC NOTATION

María del Pilar Beltrán Soria, René Gerardo Rodríguez Avendaño
Instituto de Educación Media Superior. (México)
pilar.beltran@iems.edu.mx, rene.rodriguez@iems.edu.mx

Resumen:
En este trabajo, discutimos el desarrollo del Sentido Numérico en el tratamiento de problemas relacionados con la ciencia, en particular en la determinación de la carga eléctrica del electrón, mediante el análisis de las tareas que los estudiantes del nivel medio superior realizaron. El propósito es brindar una experiencia que permita a los estudiantes trabajar los conceptos de lo discreto en un problema espejo en la determinación de la carga eléctrica del electrón para a través de la relación situación-modelación puedan incorporar los usos y funcionamientos de la notación científica en el experimento de la gota de aceite y al mismo tiempo adquirir competencias numéricas útiles para la vida.

Palabras clave: argumentación, ciencia, electrón, medible, Millikan

Abstract:
In this work, we discuss the development of Number Sense in the treatment of problems related to science, in particular, when determining the electric charge of the electron, through the analysis of the tasks that high school students performed. It aims to provide an experience that allows students to work on the concepts of discreteness by working on a mirror problem in determining the electric charge of the electron, so that, through the situation-modeling relationship, they can incorporate the uses and functions of scientific notation in the oil drop experiment and at the same time, they can acquire useful numerical skills for life.

Keywords: line of argument, science, electron, measurable, Millikan

:

Introducción

El estudio de las ciencias experimentales (física, química, biología, entre otras) y las matemáticas ha jugado un papel muy importante para la interpretación de fenómenos naturales y sociales. En dicha interpretación, es necesario trabajar con números muy grandes o pequeños, lo que tiene una serie de inconvenientes. Es decir, se tiene la problemática de operar con un gran número de dígitos, manejar escalas, el orden y la magnitud. En 1913, Robert Andrews Millikan consiguió demostrar la cuantificación de la carga eléctrica perfeccionando un complejo montaje experimental, conocido actualmente como el método de la gota de aceite. El valor de la carga eléctrica del electrón es muy pequeño, y para su representación es necesario que los estudiantes del nivel medio superior hagan uso de la notación científica.

En este trabajo se presenta una situación de aprendizaje en la cual se analizó la experiencia que tuvieron los estudiantes de preparatoria con el experimento de la gota de aceite de Millikan para la determinación de la carga eléctrica del electrón, que puede proporcionar una manera completamente diferente de entender el concepto de lo discreto y lo numérico. La premisa es que los estudiantes logren adquirir habilidades genéricas con el uso del número, que muestren el desarrollo de competencias científicas, como es el caso de la fluidez y flexibilidad. Con lo cual, se puede establecer que las competencias científicas pueden evidenciarse a partir del desarrollo del Sentido Numérico (McIntosh, Reys, & Reys, 1992).

El "Sentido Numérico" puede describirse como una sensación "no algorítmica" para los números, una comprensión sólida de su naturaleza y el análisis de la naturaleza de las operaciones, así como la necesidad de examinar la razonabilidad de los resultados. Adicionalmente, se busca que los estudiantes adquieran un saber significativo al trabajar con la notación científica, utilizando como herramienta tecnológica la familia de calculadoras TI-83 Plus y TI-84-Plus Silver Edition y a la vez identificar los elementos del experimento de Millikan y sus características, para hacer exploraciones, manipular objetos y dar sentido al uso de la tecnología en el aprendizaje de la matemática.

Andrews & Sayers (2015), han identificado tres categorías para el Sentido Numérico: el Sentido Numérico Preverbal (SNP), el Sentido Numérico Aplicado (SNA) y el Sentido Numérico Fundamental (SNF). El SNP se refiere a esas ideas numéricas innatas para todos los seres humanos. El segundo, el SNA, se refiere a aquellas competencias relacionadas con el número que hacen que las matemáticas sean sensatas para todos los estudiantes y los prepara para un mundo adulto. Por último, el SNF comprende aquellos entendimientos que requieren instrucción y suelen surgir en primaria y secundaria. Según Back, Sayers & Andrews (2013), el SNA se basa en el SNF y se refiere a la comprensión relacionada con los números, y es el que se requiere que posean todos los adultos independientemente de su ocupación (McIntosh et al. 1992).

Marco teórico

El marco teórico de esta investigación es la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. En particular, la categoría de modelación escolar permite generar el diseño de situaciones de aprendizaje, tal categoría fue formulada por Méndez (2013). La categoría de modelación socioepistemológica como lo mencionan Cordero et al. (2022a) provoca reflexiones sobre qué y cómo se ha venido enseñando la matemática, además propone acercar la matemática a la realidad del que aprende, para lo cual se debe conocer el uso del conocimiento matemático de las comunidades en diferentes escenarios como la escuela o la vida en general. En otras palabras, rompe la centración del objeto matemático y revela su emergencia de la gente.

Las tesis con respecto a la categoría de modelación están basadas en la Socioepistemología que tiene como constructo medular la práctica social que según Cordero (2016) valora al sujeto olvidado, en otras palabras, revela los usos del conocimiento matemático y sus resignificaciones en las comunidades de conocimiento matemático de la gente. Para lograr estas resignificaciones como lo afirman Cordero et al (2022b) es importante considerar que la matemática es transversal a la ciencia y en cada especialidad adquiere sentido y significado propios del uso que tiene en los diferentes contextos.

Los estudios desde la postura teórico-epistemológica modelan la construcción social del conocimiento matemático en conjunto con su difusión institucional, es decir, modela las dinámicas del conocimiento en uso. En este sentido como lo mencionan Suárez (2014) y Arrieta (2003) la modelación es concebida como una construcción del conocimiento en sí que se realiza al enfrentar una situación en la que se pone en juego los conocimientos de quien modela. También como lo afirman Cordero y Flores (2007) el uso de la función orgánica se manifiesta por las tareas que compone la situación y la forma de uso será la clase de esas tareas que pueden incluir actividades, acciones, ejecuciones o alternancias de dominios. En la alternancia de tareas se genera una nueva función orgánica o funcionamiento que debate con las formas de los usos, a lo que se denomina resignificación. Por lo tanto, el entender el funcionamiento y forma de uso del número, así como el debate entre estos dos aspectos, proporciona una manera de caracterizar los usos del número. De acuerdo con Beltrán (2022) existe una correlación entre el desarrollo del Sentido Numérico y los usos del número que los estudiantes de matemáticas manifiestan. Por lo que el binomio desarrollo del Sentido Numérico-usos del número evoluciona y es posible conceptualizarlo, desarrollarlo y evidenciarlo.

Metodología

La actividad de aprendizaje se diseñó de acuerdo con lo que establecen Suárez y Cordero (2008), con respecto a los elementos que caracterizan los diseños de situación, con lo cual, la trayectoria de construcción es:

1. El planteamiento de una primera situación.
2. La descripción de esta primera situación a partir de diferentes representaciones del número (visual, tabular, simbólica y aritmética).
3. Su análisis a partir de una primera simulación llevada a cabo en el laboratorio de ciencias.
4. Su descripción a partir de diferentes representaciones del número (visual, tabular, simbólica y aritmética).
5. El planteamiento de una segunda situación.
6. La descripción de esta segunda situación a partir de diferentes representaciones del número.
7. Su análisis a partir de una segunda simulación con ayuda de la familia de calculadoras Texas Instruments TI-83 Plus y TI-84-Plus Silver Edition.
8. Regreso a la situación del punto de partida, constituyendo un ciclo.

En el ciclo situación-modelación-simulación-situación, los estudiantes trabajan la idea de mensurabilidad e inconmensurabilidad, que se introduce bajo el paradigma de la problemática de la determinación de magnitudes muy grandes o pequeñas, como la carga del electrón. Se elige realizar una simulación del experimento en una aplicación que se encuentra integrada en la familia de calculadoras TI-83 Plus y Ti-84 Plus Silver Edition, en donde se ponga de manifiesto la importancia y la utilidad del empleo de recursos tecnológicos para la enseñanza y el aprendizaje. La importancia de retomar el experimento histórico de Millikan radica en la oportunidad de trabajar magnitudes y cantidades en notación científica (base 10), en donde el estudiante tendrá que realizar la diferencia entre la notación de la calculadora y la notación científica y, sobre todo, dar la interpretación de la magnitud en cuestión. A continuación, se describe la actividad de aprendizaje.

S1. La situación

En el libro de texto de Garritz y Chamizo (2001) se presenta un problema que puede ayudar a comprender el experimento de Millikan para determinar la carga del electrón, en donde cada gota de aceite quedaba cargada con uno, dos o más electrones, de tal manera que las determinaciones de Millikan para cada gota siempre se referían a una carga equivalente a un número entero de veces la carga electrónica. ¿Cómo crees que haya obtenido la carga de un solo electrón? De lo anterior, se propone a los estudiantes una modificación al problema planteado por Garritz y Chamizo (2001), al considerar que se tienen seis bolsas o sacos, cada uno con un número indeterminado de canicas, cuyas masas o pesos son:

$b_1 \rightarrow m_{b_1} = 8.0\ x\ 10^0\ g; obtenida\ tres\ veces$
$b_2 \rightarrow m_{b_2} = 1.4x10^1\ g; obtenida\ tres\ veces$
$b_3 \rightarrow m_{b_3} = 1.8x10^1\ g; obtenida\ dos\ veces$
$b_4 \rightarrow m_{b_4} = 2.0x10^1\ g; obtenida\ dos\ veces$
$b_5 \rightarrow m_{b_5} = 2.6x10^1\ g; obtenida\ una\ vez$
$b_6 \rightarrow m_{b_6} = 4.0x10^1\ g; obtenida\ una\ vez$

Y se les pregunta a los estudiantes ¿Cuál es la masa o peso más probable de una canica?

S2. La simulación

Se les solicita a los estudiantes que realicen una simulación de manera tal que, partiendo de la situación S1, los estudiantes en el laboratorio de ciencias determinen el peso de seis sacos cada uno con un número indeterminado de canicas.

S3. La situación

Se les propone a los estudiantes determinar la carga eléctrica del electrón a partir de los datos expuestos en el manual de Blanchard. Los estudiantes manipulan el potencial eléctrico en la calculadora y siguen la propuesta hecha por Blanchard (1958) de encontrar maneras alternas de entender al experimento clásico de la gota de aceite de Millikan, para lo cual, emplean la familia de calculadoras TI-83 Plus y TI-84-Plus.

S4. La simulación

Extrapolar el procedimiento al problema de la determinación de la carga del electrón con los datos obtenidos por medio del experimento de Millikan. Los datos son obtenidos a partir del programa "Millikan" en la calculadora Texas Instruments TI-84.

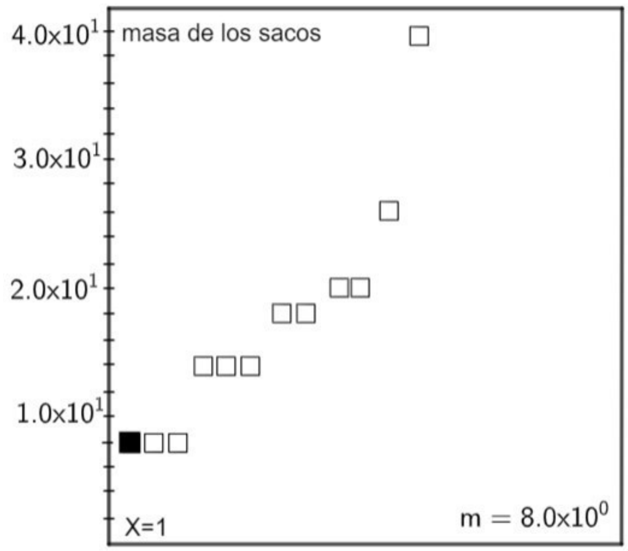
a) Obtén la carga del electrón.
b) Calcula la masa del electrón.
c) Compara en una misma escala las masas que se obtuvieron para las canicas y la masa del electrón.

Resultados

De la situación S1.

Como puede observarse en la Figura 1, los estudiantes utilizan una escala lineal para la representación visual de la masa de cada uno de los sacos, que contienen un número indeterminado de canicas, y del número de veces que se obtienen dichos valores. En este caso, es válido emplear dicha escala, pues los valores a representar tienen los mismos órdenes de magnitud o similares. En caso contrario, se debe recurrir a una escala de potencias de base 10.

Figura 1. *Representación visual de la masa de cada uno de los sacos de canicas y el número de veces que parecen.*



Fuente: elaboración propia.

En este primer momento, de realización individual, se espera que la percepción visual domine el trabajo realizado por los estudiantes, y sus producciones estén ligadas a representaciones del número en el SNF, del tipo icónico y figural. Por lo que las representaciones visuales que aparecen quedan supeditadas a las características físicas de los objetos a representar. Así mismo, se prevé la aparición de formas del uso del número relacionadas a lo concreto, específicamente la cantidad, con unos tipos específicos de funcionamientos como contar, medir, clasificar y ordenar. Las representaciones visuales referidas a dos dimensiones (el plano cartesiano) les son familiares a los estudiantes, ya que están supeditadas al desarrollo del SNF que desarrollaron en primaria y secundaria.

Los estudiantes utilizan una representación tabular para estudiar la variación a partir de la noción de incremento, el cual determina el cambio o variación de una magnitud (en este caso la masa) y se calcula a partir de la diferencia entre los valores de ésta. Este incremento se denota por Δm (ver Tabla 1).

Tabla 1. *Cambio o variación de la masa.*

Saco	Masa (g)	Δm (g)
1	$m_1 = 8.0x10^0$	
2	$m_2 = 1.4x10^1$	$m_2 - m_1 = 6.0x10^0$
3	$m_3 = 1.8x10^1$	$m_3 - m_2 = 4.0x10^0$
4	$m_4 = 2.0x10^1$	$m_4 - m_3 = 2.0x10^0$
5	$m_5 = 2.6x10^1$	$m_5 - m_4 = 6.0x10^0$
6	$m_6 = 4.0x10^1$	$m_6 - m_5 = 1.4x10^1$

Fuente: elaboración propia.

Los estudiantes utilizan una representación simbólica analítica al calcular el incremento: $\Delta m = m_2 - m_1$.

Los estudiantes utilizan una representación aritmética, al identificar que los números proporcionados en notación científica son enteros y, por lo tanto, se puede calcular el máximo común divisor, que en este caso corresponde a una masa de 2 gramos y con este dato se determina el número de canicas que hay en cada saco.

Figura 2. *Representación aritmética en el cálculo del máximo común divisor.*

	8	**14**	**18**	**20**	**26**	**40**
	1	1	1	1	1	1
	2	2	2	2	2	2
	4	7	3	4	13	4
	8	14	6	5	26	5
			9	10		8
			18	20		10
						20
						40
Número de canicas	4	7	9	10	13	20

Fuente: elaboración propia.

De acuerdo con los cálculos obtenidos a través del incremento y el máximo común divisor, el valor probable de la masa de una canica es de $2.0x10^0$g o bien, una masa que está entre 1.5g y 2.5g.

De la simulación S2.

Los pesos de las seis bolsas o sacos obtenidos por los estudiantes en el laboratorio son:

$b_I \rightarrow m_{b_I} = 2.82\ x\ 10^0\ g; obtenida\ tres\ veces$

$b_{II} \rightarrow m_{b_{II}} = 6.58x10^1\ g; obtenida\ tres\ veces$

$b_{III} \rightarrow m_{b_{III}} = 1.034x10^1\ g; obtenida\ dos\ veces$

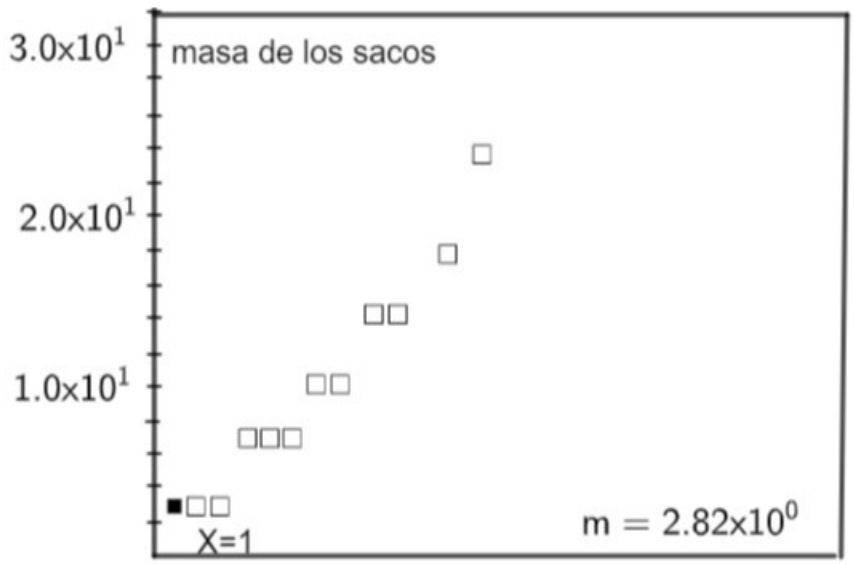
$b_{IV} \rightarrow m_{b_{IV}} = 1.41x10^1\ g; obtenida\ dos\ veces$

$b_V \rightarrow m_{b_V} = 1.78x10^1\ g; obtenida\ una\ vez$

$b_{VI} \rightarrow m_{b_{VI}} = 2.35x10^1\ g; obtenida\ una\ vez$

En la Figura 3 se muestra cómo los estudiantes utilizan una escala lineal para realizar la representación gráfica de la masa de cada uno de los sacos medidos de manera experimental en el laboratorio.

Figura 3. *Representación visual de la masa de cada uno de los sacos medidos de manera experimental.*



Fuente: elaboración propia.

Los estudiantes utilizan una representación tabular para simular la masa de una canica, al proponer el número de canicas en cada uno de los sacos como una extensión de la noción de máximo común divisor derivado de la situación S1 (ver Tabla 2). Se llevan a cabo convenios entre estudiantes y profesor, se establecen acuerdos y rutas a seguir en busca de la masa de cada uno de los sacos medidos de manera experimental. Los estudiantes se ven en la necesidad de convenir en el tipo de notación que van a emplear, si se deciden por una notación científica o bien continúan con la medición de las masas a través de una representación entera del número.

Para el desarrollo del Sentido Numérico es fundamental que se lleven a cabo procesos de discusión y validación. El uso de la notación científica y el desarrollo del Sentido Numérico se desarrollan a la par como un binomio, esto se puede notar en la descripción de cada una de las masas de las canicas medida en gramos, empleando al mismo tiempo números decimales y números en notación científica.

El trabajo realizado por los estudiantes, en la representación visual de la masa de cada uno de los sacos en la simulación S2, provoca la aparición de consensos de equivalencia entre notaciones de un mismo número, que les serán funcionales al momento de realizar sus cálculos. De acuerdo con Beltrán (2022) este debate entre forma y funcionamiento es muy importante, porque propicia en los estudiantes un planteamiento activo del cuestionamiento del concepto de representación de un número, en su representación decimal o en su representación en notación científica. Además, de una construcción crítica de sus conocimientos acerca de la noción de número. La idea principal es que, para la construcción del concepto de notación científica, o para la superación de una dificultad con su uso, los estudiantes hagan frente de manera cooperativa al aportar e intercambiar sus conocimientos individuales y generar otros nuevos.

Tabla 2. *Simulación en Excel de la masa de una canica al proponer el número de canicas en cada saco.*

# canicas	8	14	18	20	26	40
1	8	14	18	20	26	40
2	4	7	9	10	13	20
3	2.66666667	4.66666667	6	6.66666667	8.66666667	13.3333333
4	2	3.5	4.5	5	6.5	10
5	1.6	2.8	3.6	4	5.2	8
6	1.33333333	2.33333333	3	3.33333333	4.33333333	6.66666667
7	1.14285714	2	2.57142857	2.85714286	3.71428571	5.71428571
8	1	1.75	2.25	2.5	3.25	5
9	0.88888889	1.55555556	2	2.22222222	2.88888889	4.44444444
10	0.8	1.4	1.8	2	2.6	4
11	0.72727273	1.27272727	1.63636364	1.81818182	2.36363636	3.63636364
12	0.66666667	1.16666667	1.5	1.66666667	2.16666667	3.33333333
13	0.61538462	1.07692308	1.38461538	1.53846154	2	3.07692308
14	0.57142857	1	1.28571429	1.42857143	1.85714286	2.85714286
15	0.53333333	0.93333333	1.2	1.33333333	1.73333333	2.66666667
16	0.5	0.875	1.125	1.25	1.625	2.5
17	0.47058824	0.82352941	1.05882353	1.17647059	1.52941176	2.35294118
18	0.44444444	0.77777778	1	1.11111111	1.44444444	2.22222222
19	0.42105263	0.73684211	0.94736842	1.05263158	1.36842105	2.10526316
20	0.4	0.7	0.9	1	1.3	2
21	0.38095238	0.66666667	0.85714286	0.95238095	1.23809524	1.9047619
22	0.36363636	0.63636364	0.81818182	0.90909091	1.18181818	1.81818182
23	0.34782609	0.60869565	0.7826087	0.86956522	1.13043478	1.73913043
24	0.33333333	0.58333333	0.75	0.83333333	1.08333333	1.66666667
25	0.32	0.56	0.72	0.8	1.04	1.6
26	0.30769231	0.53846154	0.69230769	0.76923077	1	1.53846154
27	0.2962963	0.51851852	0.66666667	0.74074074	0.96296296	1.48148148
28	0.28571429	0.5	0.64285714	0.71428571	0.92857143	1.42857143
29	0.27586207	0.48275862	0.62068966	0.68965517	0.89655172	1.37931034
30	0.26666667	0.46666667	0.6	0.66666667	0.86666667	1.33333333

Fuente: elaboración propia.

Con lo cual, para una masa de cada canica igual a 0.94 g (valor que se presenta en cada una de las bolsas o sacos) se concluye que:

En la bolsa o saco b_I se tendrían 3 canicas.
En la bolsa o saco b_{II} se tendrían 7 canicas.
En la bolsa o saco b_{III} se tendrían 11 canicas.
En la bolsa o saco b_{IV} se tendrían 15 canicas.
En la bolsa o saco b_V se tendrían 19 canicas.
En la bolsa o saco b_{VI} se tendrían 25 canicas.

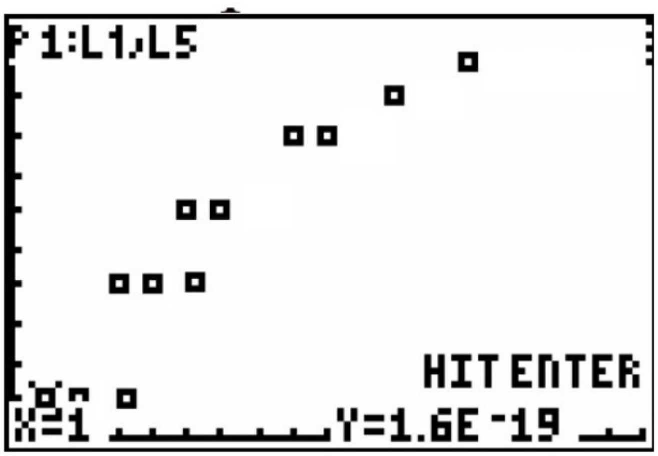
Total, de canicas que se necesitarían: 3+7+11+15+19+25= 80.

Los estudiantes utilizan una representación tabular para estudiar la variación a partir del incremento de la masa de una canica que se calcula a partir de la diferencia entre los valores de ésta. Se encuentra a través de la simulación que $\Delta m = 3.76$g, será la primera masa propuesta. Sin embargo, no es una masa válida, pues el primer saco tiene una masa menor. De acuerdo con los cálculos obtenidos a través de la simulación, el valor probable de la canica es de $9.4\ x\ 10^1$ g o bien, entre 0.935 g y 0.945 g.

De la situación S3.

En la Figura 4 se presenta la determinación de la carga eléctrica del electrón de la gota de aceite de Millikan a través de una representación gráfica. Los estudiantes asocian esta representación al valor de la medición de la carga del electrón y al número de veces que ocurre tal medición. Obtienen el incremento de la carga del electrón $\Delta e = q_{n+1} - q_n$ y verifican la cuantización de la carga: q=ne, con n entero, donde $e = 1.6x10^{-19} Columbios$.

Figura 4. *Representación visual de datos de carga eléctrica del electrón del experimento de la gota de aceite de Millikan.*



Fuente: elaboración propia.

De la simulación S3.

A partir del valor de la carga del electrón $e = 1.6x10^{-19}\ C$, los estudiantes pueden determinar la masa del electrón, a partir del cociente carga/masa propuesta por Thomson:

$$relación\ = \frac{carga\ del\ electrón}{masa\ del\ electrón} = 1.759x10^{11}\frac{C}{kg}$$

De la cual

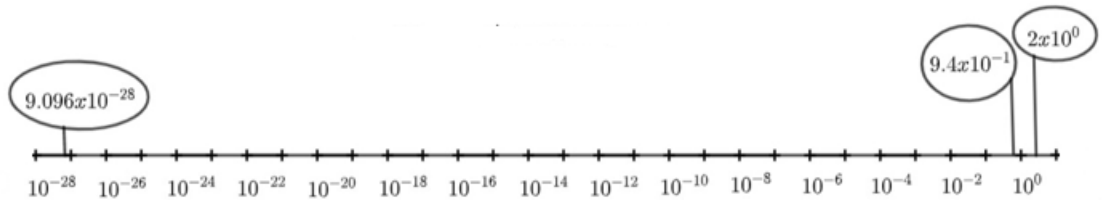
$$masa\ del\ electrón = \frac{carga\ del\ electrón}{1.759x10^{11}\frac{C}{kg}} = \frac{1.6x10^{-19}C}{1.759x10^{11}\frac{C}{kg}} = 9.096x10^{-31}kg$$

De donde se puede calcular la masa del electrón en gramos.

$$masa\ del\ electrón =\ 9.036x10^{-31}kg * \left(\frac{1x10^{3}g}{1kg}\right) = 9.096x10^{28}g$$

En la Figura 5 se muestra que, para poder comparar en una misma escala las masas de las canicas y la masa del electrón, los estudiantes realizan una representación gráfica en una escala no lineal (en particular, la de potencias de 10).

Figura 5. *Escala no lineal para la comparación de las masas de las canicas y la masa del electrón.*



Fuente: elaboración propia.

Al usar la notación científica, los estudiantes utilizan los órdenes de magnitud para representar las masas de las canicas ($10^0 y\ 10^{-1}$) y del electrón (10^{-28}). En este caso, se puede apreciar que los valores abarcan un amplio rango de órdenes de magnitud, lo cual justifica una escala de potencias de 10. Se espera que los estudiantes reconozcan las ventajas de interpretación de información que proporciona la escala no lineal, en comparación con la dificultad de una representación lineal en una misma imagen. Es decir, la escala no lineal se concibe como una forma de uso del número en su representación visual, cuyo funcionamiento es comparar en una misma imagen objetos de magnitudes de diferentes masas como las de las canicas o bien de los electrones.

La representación visual de datos que presentan magnitudes tan diferentes es, sin duda, uno de los mayores retos a los que se enfrentan los estudiantes en el nivel medio superior. La representación conjunta de números con órdenes de magnitud tan diferentes requiere, por parte de los estudiantes, ubicar tales magnitudes en una misma escala y a la vez requiere la comprensión del concepto de número en notación científica. Al emplear una escala no lineal, los estudiantes tendrán una percepción mucho más clara del orden de magnitud entre cantidades físicas y a su vez exploran otras maneras de representarlas mediante escalas logarítmicas. Por lo tanto, la funcionalidad de las escalas no lineales (logarítmicas) será comunicar tipos de relación y variación del número de una manera más eficiente.

Conclusiones

A partir del trabajo realizado por los estudiantes en los diferentes momentos de la situación de aprendizaje, se da evidencia del desarrollo del Sentido Numérico y del uso del número, al establecerse una relación entre las diferentes representaciones tabulares y visuales, tanto lineales como no lineales, y los usos del número a través de las formas y sus funcionamientos.

El uso de la notación científica en ámbitos académicos que involucran a las ciencias experimentales y las matemáticas permite a los estudiantes realizar diferentes representaciones del número a partir de la medición de masas de diferentes órdenes de magnitud.

Es importante también señalar la conveniencia de utilizar la historia de la ciencia como un instrumento en la enseñanza de asignaturas como matemáticas, física o química, quedando como una propuesta factible y concreta para desarrollar el pensamiento crítico, científico y humanista en el nivel medio superior. El experimento de la determinación de la gota de aceite de Millikan constituye uno de los experimentos más bellos en la historia de la física y puede brindar una oportunidad de trabajar de manera interdisciplinaria en el bachillerato.

Referencias bibliográficas

Andrews, P., & Sayers, J. (2015). Identifying opportunities for grade one children to acquire foundational number sense: Developing a framework for cross cultural classroom *Analyses. Early Childhood Education Journal, 43*(4), 257–267.

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula* [Disertación doctoral no publicada]. Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN. México.

Back, J., Sayers, J., & Andrews, P. (2013). The development of foundational number sense in England and Hungary: A case study comparison. In B. Ubuz, Ç. Haser, & M. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1835-1844). Charles University and ERME. http://cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/WG11/WG11_Andrews.pdf

Beltrán, M. P. (2022). *El desarrollo del sentido numérico en el uso de materiales reutilizables en el aula* [Tesis doctoral, CICATA-IPN]. https://www.cicata.ipn.mx/assets/files/cicata/ProME/docs/tesis/tesis_doctorado/2022/beltran_2022.pdf

Blanchard, D. (1958). Electrically charged drops from bubbles in sea water and their meteorological significance. *Journal of Meteorology, 15*(4), 383-396. https://journals.ametsoc.org/view/journals/atsc/15/4/1520-0469_1958_015_0383_ecdfbi_2_0_co_2.xml

Cordero, F. (2016). La función social del docente de matemáticas pluralidad, transversalidad y reciprocidad. En S. Estrella, M. Goizueta, C. Guerrero, A. Mena-Lorca, E. Montoya, A. Morales, A. Parraguez, E. Ramos, P. Vásquez y D. Zakaryan, (Eds.), *XX Actas de las Jornadas Nacionales de Educación Matemática* (pp. 23-30). SOCHIEM, Instituto de Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. http://funes.uniandes.edu.co/15005/1/Cordero2016La.pdf

Cordero, F., Carranza, P., Rosa, M., & Orey, D. (2022a). *La modelación en la vida de la gente: Un programa alternativo para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. gedisa.

Cordero, F. Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 10*(1), 7-38.

Cordero, F., Solís, M., & Opazo, C. (2022b). *La matemática en la ingeniería: Modelación y transversalidad de saberes Situaciones de aprendizaje*. gedisa.

Garritz, A. y Chamizo, J. A. (2001). *Tú y la Química*, Pearson Educación México.

McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics, 12*(3), 2–8.

Méndez, M. (2013). *Desarrollo de red de usos del conocimiento matemático: la modelación para la matemática escolar* [Disertación doctoral no publicada]. Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN. México.

Suárez, L. (2008). *Modelación-Graficación una categoría para la matemática escolar. Resultado de un estudio socioepistemológico* [Disertación doctoral no publicada]. Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN. México.

Suárez, L. y Cordero, F. (2008). Elementos teóricos para estudiar el uso de las gráficas en la modelación del cambio y de la variación en un ambiente tecnológico. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias, 3*(1), 51-58. http://www.scielo.org.ar/pdf/reiec/v3n1/v3n1a05.pdf

INCLUSIÓN EN CLASE DE MATEMÁTICAS. LA CARACTERIZACIÓN DEL GRUPO DIVERSO

INCLUSION IN MATHEMATICS CLASS; CHARACTERIZING THE DIVERSE GROUP

Haided Lised Arciniegas Rueda, Edith Johanna Mendoza Higuera
Universidad Industrial de Santander. (Colombia)
haided2218073@correo.uis.edu.co, edith.mendoza@correo.uis.edu.co

Resumen:
Este avance de investigación muestra cómo caracterizar un grupo diverso de noveno grado de una institución pública de Colombia. El objetivo es describir a la persona que aprende, inventa y usa el conocimiento matemático, para posteriormente orientar el diseño de una situación de aprendizaje e implementar una práctica de instrucción que propicie un aula inclusiva de matemáticas al enfrentar situaciones de variación y cambio. Los resultados de la caracterización revelan la heterogeneidad del grupo y la necesidad de definir adaptaciones al currículo e instrucción coherente, en concordancia con las demás características del aula inclusiva de matemáticas.

Palabras clave: inclusión, caracterización, situación de aprendizaje, variación, aula inclusiva

Abstract:
This research advance shows how to characterize a diverse ninth-grade group from a public institution in Colombia. It is aimed at describing the person who learns, invents and uses mathematical knowledge, to later guide the design of a learning situation and implement a teaching practice that promotes an inclusive mathematics classroom when facing situations of variation and change. The results of the characterization reveal the heterogeneity of the group and the need to define adaptations to the curriculum and coherent education, in accordance with the other characteristics of the inclusive mathematics classroom.

Keywords: inclusion, characterization, learning situation, variation, inclusive classroom

Introducción

La inclusión escolar de personas con Necesidad Educativa Especial (NEE) o condición específica ha pasado por distintas etapas históricas. De hecho, organizaciones nacionales e internacionales han realizado acuerdos para garantizar una educación común para todos, lo que implica adaptaciones del currículo y el estudio de prácticas de instrucción orientadas al aprendizaje. En particular, la convergencia entre educación matemática e inclusión es una problemática de preocupación actual a la que el sistema educativo debería responder con una educación igualitaria, equitativa y justa.

Los Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas de Colombia precisan como propósito que todos los estudiantes, sin excepción alguna, logren una formación para "ser ciudadanos matemáticamente competentes", capaces de usar la matemática como instrumento para la vida (MEN, 2006). Para ello, es necesario no sólo centrar la atención en los contenidos que se enseñan sino conocer la diversidad de la población, donde el estudiante es el protagonista en la construcción de conocimiento matemático (Méndez, 2015) y la gestión del aprendizaje debiera estar enfocada en situaciones cotidianas que ligan la matemática, desde la modelación, con situaciones de variación y cambio (Cordero et al, 2015).

Así, este avance de investigación busca describir la caracterización de un grupo diverso de noveno grado de una institución pública de Colombia, siendo parte de un estudio global que tiene como pregunta de investigación ¿cómo propiciar un aula inclusiva de matemáticas al enfrentar situaciones de variación y cambio en estudiantes de noveno grado?

Aspectos teóricos

Para atender a la pregunta de investigación, se articulan la inclusión escolar y los principios y fundamentos de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. En este sentido, precisamos puntos en común para caracterizar un aula inclusiva de matemáticas. Además, al afrontar el desarrollo del pensamiento variacional se reconoce la profundización dada por los referentes curriculares para el grado noveno y los aportes de Caballero (2018) al identificar *Prácticas Variacionales* que buscan reflejar la variación sucesiva y el carácter estable del cambio en el estudio de una situación de aprendizaje. En tanto, diversas investigaciones indican la importancia de conocer y caracterizar al estudiante para así, dar sentido a las estrategias de enseñanza y aprendizaje (Reyes, 2018; Schnepel et al., 2020; Arciniegas, 2021). Por ende, la caracterización y estudio de la persona, entorno y contexto de cada uno de los estudiantes, es clave para la intervención en el aula inclusiva de matemáticas.

Ainscow y Miles (2008) precisan una tipología de cinco concepciones de la inclusión; por ende, a priori se plantea que, en un aula regular de una institución pública de Colombia se encuentran subgrupos diversos en relación con 3 de ellas, la discapacidad y NEE, en respuesta a exclusiones disciplinarias y grupos vulnerables a la exclusión.

Así, la caracterización del grupo diverso se basa en responder a dimensiones como: contexto y vida familiar, habilidades intelectuales, conducta adaptativa y desarrollo personal, participación e inclusión social y, adaptaciones a las metas de aprendizaje; con el fin de describir al estudiante en el grupo diverso. En la tabla 1 se detalla cada una de las dimensiones y su objetivo.

Tabla 3. *Dimensiones de caracterización.*

Dimensión	Descripción	Propósito
Contexto y vida familiar	Datos generales del estudiante, núcleo familiar y lo relacionado con el entorno inmediato en que vive. Además, indagar sobre situaciones traumáticas a las que se haya enfrentado individualmente o en familia.	Identificar el origen del estudiante, cómo vive y en qué condiciones, para relacionarlo con factores o situaciones en riesgo de exclusión.

Habilidades intelectuales	Percepción con respecto al rendimiento académico del estudiante, factores como: atención, habilidades de los procesos matemáticos, competencias de lectura y escritura, memoria, lenguaje y comunicación y funciones ejecutivas.	Identificar habilidades que influyen en la construcción de conocimiento matemático; además, la presencia o no de trastornos de aprendizaje.
Conducta adaptativa y desarrollo personal	Información sobre habilidades conceptuales, sociales y prácticas que orientan una vida autónoma e independiente.	Conectar dichas habilidades hacia el desempeño matemático con relación a contextos cercanos y en su interacción personal y social.
Participación e inclusión social	Reconocer las redes de apoyo y grupos en los que el estudiante participa, cómo se desenvuelve en estos, con qué apoyos cuenta y cómo es su participación allí.	Identificar la participación que tiene el estudiante en la cultura inclusiva, para poder relacionar con estrategias metodológicas para la enseñanza de la matemática en el aula.
Adaptaciones a las metas de aprendizaje	Trayectorias y ritmos de aprendizaje, tipo de estrategias cognitivas y de orientación en la actividad del estudiante.	Identificar las modificaciones curriculares de objetivos, metas, contenidos y demás, que se plantean en atención al estudiante, al reconocer las diferencias como oportunidades para el aprendizaje.

Fuente: elaboración propia.

Método

Este estudio es de corte cualitativo y de tipo fenomenológico. Define como punto de partida el "conocer" la población de estudio desde su propia percepción y realidad, interpretar el fenómeno de inclusión escolar y, cómo es posible efectuar una atención real a la diversidad en el aula de matemáticas. Para esto, se seleccionó un grupo de noveno grado conformado por 38 estudiantes, donde 2 de ellos se encuentran diagnosticados con NEE y uno con trastorno de aprendizaje.

La etapa metodológica a la que alude este avance de investigación se denomina caracterización del grupo diverso, que busca conocer a la persona que aprende, inventa y usa el conocimiento matemático. Para ello, se recolecta información a través de la revisión de documentos, observación participativa, cuestionarios abiertos y entrevistas semiestructuradas a estudiantes, docentes y padres de familia para ampliar la información de casos específicos.

Sobre la recolección de datos y sistematización

La intervención se desarrolló durante 4 meses, al realizar acompañamiento en clases de matemáticas, en sesiones de 100 minutos.

Sobre la revisión de documentos para estudiantes diagnosticados, se logró el acceso al Plan Individual de Ajuste Razonable (PIAR) correspondiente al estudiante con trastorno de aprendizaje, los demás planes estaban en rediseño y validación por la comunidad educativa; por tanto, la docente de matemáticas y docente de apoyo a la inclusión indicaron el respaldo para la descripción de estrategias y adaptaciones.

Se realizaron 15 observaciones participativas. A partir de los diarios de campo se registraron descripciones, día por día, en un documento de Excel para identificar patrones al triangular de forma temporal.

La información recolectada con los cuestionarios correspondió al 79% de los padres de familia, el 55.5% de los estudiantes y la totalidad de alumnos desde la perspectiva de la docente titular e investigadora. La información se sistematizó en un documento de Excel que distinguía dimensiones e informante para luego, realizar triangulación por informante.

Se consolidaron un total de 8 entrevistas. Con la docente titular de matemáticas, se realizaron 7 encuentros; 6 para discutir sobre características de 7 estudiantes identificados con problemáticas particulares y el grupo en general, y la otra para indagar sobre su perspectiva a cerca de 10 estudiantes debido a la poca información recabada en los cuestionarios. La octava entrevista, fue realizada a la docente de apoyo a la inclusión con el propósito de conocer sobre la atención a la diversidad en la Institución Educativa (IE) y sobre las adaptaciones curriculares establecidas para los estudiantes con NEE. Así, con las transcripciones, la información se organizó desde las dimensiones, individualmente en un documento de Excel y, en general, en un documento de Word.

Finalmente, al tener la caracterización global e individual se realizó una triangulación de instrumentos para concretar la caracterización del grupo diverso.

Análisis de resultados

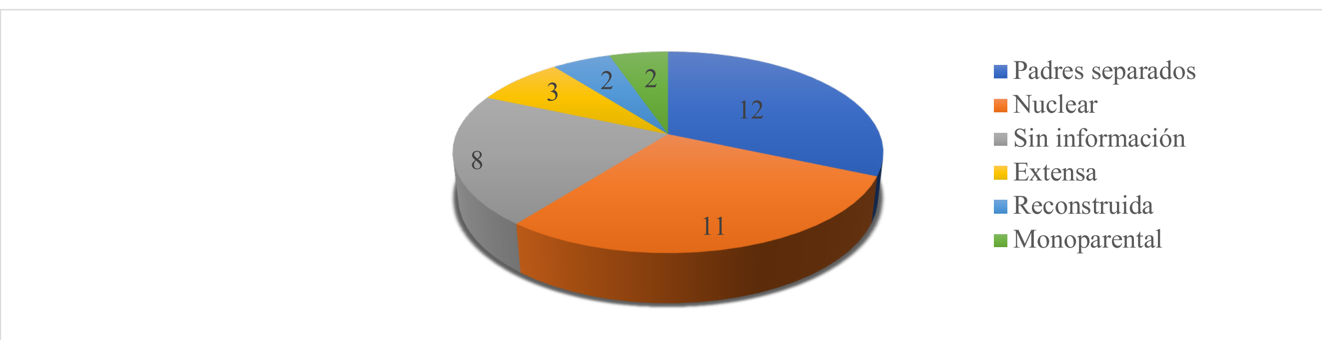
El análisis de los resultados se orienta a la identificación del grupo diverso en función de las dimensiones de caracterización de cada uno de los estudiantes de forma global y particular.

Contexto y vida familiar

Los factores de crianza, socioeconómicos, la calidad del medio ambiente y la cultura, influencia de pares y la confianza en sí mismos influyen en el rendimiento escolar en la adolescencia (Papalia et al, 2012). Por tanto, se hace importante indagar sobre: la dinámica familiar, estrato socioeconómico, situaciones difíciles y de vulnerabilidad en el entorno familiar, social y escolar y, condiciones diagnosticadas o en sospecha para NEE.

La edad de los estudiantes oscila entre 13 y 16 años, lo que caracteriza la etapa de la adolescencia, donde los menores enfrentan cambios hormonales, de personalidad y conducta frente a situaciones difíciles (Papalia et al, 2012). Luego, sobre la dinámica familiar se distinguen 5 tipos: monoparental, padres separados, extensa, nuclear y reconstruida (ver figura 2).

Figura 2. *Dinámica familiar.*



Fuente: elaboración propia.

La mayoría de los estudiantes se ubican en padres separados y familia nuclear y se resalta que los primeros mencionan tener buenas relaciones interpersonales. Por el contrario, en los estudiantes de familias monoparentales, por muerte de uno de los padres o abandono prematuro, se encuentran falencias afectivas a razón de la poca confianza, escaso tiempo de calidad o dificultades económicas por la sobrecarga laboral del progenitor.

Como situaciones difíciles en el contexto familiar se identifican las dificultades económicas, separación de los padres, muertes cercanas, relaciones conflictivas con miembros de la familia y enfermedades graves del estudiante. No obstante, 7 estudiantes no reportan ninguna condición. En particular, los estudiantes que han pasado recientemente duelos por muertes cercanas han sido consecuencia del COVID-19. Además, para distinguir los 4 estudiantes que aquejan la separación de los padres, como situación difícil, se comparó con datos temporales para identificar la afectación del estudiante, lo que llevó a relaciones conflictivas y escasa comunicación.

Los estratos socioeconómicos en Colombia se diferencian según la capacidad económica de las familias. Los estratos 1, 2 y 3 corresponden a las familias con menores recursos y beneficiarios de subsidios por vulnerabilidad económica; en el estrato 4 (nivel medio), se ubican familias que no recibe subsidios y no pagan sobrecostos; los estratos superiores refieren a mayor comodidad económica. Así, nuestros estudiantes se ubican en estratos 1, 2 y 3 (21 estudiantes), el mayor número en estrato 1 (nivel bajo-bajo). Esto refleja uno de los elementos sociales que más resalta en la IE, la diversidad social y que determina la obtención de útiles escolares, acceso a tecnología y aparatos electrónicos. De hecho, las dificultades económicas junto con los cambios hormonales influyen en la motivación para el desarrollo escolar, aunque, son más llevaderas para los estudiantes en dinámica de familia nuclear (Papalia et al, 2012).

Sobre situaciones de impacto social se identifican 5 estudiantes, 3 de ellos precisan desplazamiento forzado (Est12, Est18 y Est19), uno afectado por el conflicto armado (Est20) y una estudiante de migración, proveniente de Venezuela (Est1).

Ahora, considerando que los síntomas de depresión aumentan su aparición en la etapa de la adolescencia (Papalia et al, 2012), algunos padres y docentes indican preocupación de indicios de depresión, insatisfacción corporal, ansiedad y bipolaridad. Incluso, Papalia et al. (2012) señala que la depresión se manifiesta con la irritabilidad, aburrimiento e insatisfacción continua, lo que justifica el desinterés en el aula de clase. Otra cuestión preocupante es el consumo de drogas, se distinguen 3 estudiantes (Est10, Est15, Est21), y al comparar la información con su situación familiar, estaría relacionado con el escaso tiempo en familia, el abandono, y las relaciones conflictivas.

Finalmente, se identifican Est2 y Est4 diagnosticados con Trastorno del Espectro Autista (TEA) y Discapacidad Intelectual (DI) respectivamente. Además, 9 estudiantes con deficiencias visuales (Est1, Est6, Est8, Est14, Est11, Est5, Est15, Est16 y Est17) donde únicamente 4 de ellos usan lentes (Est16, Est17, Est5 y Est15); los demás, manifiestan no tenerlos debido a las dificultades económicas.

Habilidades intelectuales

En esta dimensión se precisan factores relacionados con el historial académico del estudiante, percepción de las matemáticas, procesos neurocognitivos y matemáticos.

Conocer la percepción del estudiante sobre su desempeño en matemáticas refleja el autoconocimiento sobre fortalezas y debilidades. Al respecto, se identifican 4 estudiantes que han reprobado años anteriormente: Est3, Est7, Est1 y Est8, por motivos como: las distracciones, falta de interés, pereza y "vagancia", a excepción del Est8, donde su madre menciona que esto sucedió debido a su "enfermedad" y falta de atención por parte de la IE.

El caso de Est8 es particular, es un estudiante diagnosticado con Dislexia y Alexia (DyA); sumado a problemas de columna y varicocele.

Acerca de la percepción de los estudiantes frente a las matemáticas, 19 de ellos la consideran una fortaleza mientras 17, una debilidad. No obstante, 3 de los últimos reciben el apoyo de tutorías en extra-clase, entre ellos: Est8 y Est4.

Con respecto a la memoria, se distingue la dificultad de los estudiantes para recordar propiedades básicas y encontrar relaciones con los objetos de estudio actuales; por ello, la mecanización continua es una de las estrategias más usadas para consolidar propiedades. Así, son pocos los estudiantes que recuerdan conocimientos previos, propiedades y algoritmos.

Sobre la atención, se identifica que casi la mitad de los estudiantes se distraen con facilidad con elementos del entorno, conversaciones o en especial, con el uso del teléfono; los demás se caracterizan por centrar la atención en el objetivo de la actividad, mantener el hilo conductor y evitar distractores. De ahí, el uso de la tecnología y el teléfono como el mayor atractor y distractor de la atención de los estudiantes.

Cabe recordar que, en esta etapa de desarrollo es común la apatía y el desinterés por lo que se observan estudiantes despreocupados por tomar apuntes o establecer estrategias de seguimiento. Debido a lo anterior, son pocos los que se interesan por identificar errores, replantear estrategias y reconocer distintos caminos de solución. En particular, el Est2 es flexible ante los cambios, en un principio le confunden y cuestionan, pero con la asesoría pertinente, logra adaptarse sin frustración ni alteración.

Acerca de la comprensión lectora y escritural y, el lenguaje, se resaltan estudiantes que toman apuntes de forma concisa, identifican ideas principales y siguen instrucciones escritas sin mayor orientación. Además, la mayoría lee con fluidez y logran mantener conversaciones sobre un tema sin evocar ideas irrelevantes. Algunos estudiantes se quedan atrasados en apuntes debido a las deficiencias visuales considerando que las condiciones del espacio físico complican la ubicación en el aula.

Por último, sobre los procesos matemáticos se identifica que el mayormente fortalecido es el de elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos que se refleja cuando los estudiantes repiten procedimientos con facilidad y algunas veces razonan sobre ellos; sin embargo, algunos los replican sin dar cuenta del cambio de condiciones. Así, la representación mayormente trabajada es la algebraica y aritmética, únicamente los estudiantes más destacados logran interpretar y construir diferentes representaciones del objeto matemático. Por la misma razón, el proceso de resolución y planteamiento de problemas es escaso pues, la mayoría de los estudiantes extraen datos del enunciado, no elaboran una estrategia, pero, si desarrollan el procedimiento más reciente con los datos numéricos y, unos pocos experimentan diferentes caminos de solución y verifican los resultados.

Sobre el proceso de razonamiento, son muy pocos los estudiantes que identifican información clave plantean hipótesis, construyen argumentos, justifican afirmaciones matemáticas a partir de eventos sucesivos y, argumentan y cuestionan sobre los resultados cuando las condiciones cambian. De hecho, estos mismos estudiantes reflejan habilidades para explicar, justificar y argumentar ideas, lo que refiere al proceso de comunicación.

Conducta adaptativa y desarrollo personal

Uno de los objetivos de esta dimensión es conocer los apoyos que usa el estudiante para su desarrollo personal; sin embargo, en el grupo se distinguen únicamente deficiencias visuales desde la perspectiva física y sensorial; en tanto, el mayor apoyo es el uso de lentes, en el mejor de los casos.

Con respecto a las habilidades sociales se identifica que, en el cumplimiento de las normas y reglas escolares, los estudiantes se ajustan según la figura de autoridad, la uniformidad no es de su agrado, algunas niñas no están conformes con su apariencia, es común el desacuerdo con la vestimenta reglamentaria, les divierte “llevar la contraria”, buscan experimentar cosas nuevas y son ansiosos por las relaciones amorosas.

Además, se evidencia que la mayoría de los estudiantes mantienen mejores relaciones interpersonales con sus amigos que con los padres, esto explica las recurrentes relaciones conflictivas en casa. Siendo así, la mayor red de apoyo son los amigos y se basa en la espontaneidad, confianza y la reciprocidad.

Al indagar sobre los gustos y actividades extraescolares, se encuentra que los estudiantes son atraídos por la tecnología, el uso de redes sociales, los videojuegos y el deporte; considerando que, sus expectativas se orientan a la independencia, crecimiento personal, “superarse a sí mismo”, ser profesional, “saber enfrentarse al mundo” y “ser una mejor persona”.

Sobre el Est8, durante la clase se muestra muy sereno, callado y pasivo de hecho, en algunas sesiones el estudiante duerme sobre su escritorio; pero, fuera del aula es alegre, entusiasta y activo con juegos y burlas a sus compañeros.

Participación e inclusión social

Entre los resultados que se precisan en esta dimensión se resalta: las modalidades de estudio, la participación, el comportamiento en espacios fuera de la clase, sobre la inclusión en el aula y las situaciones que afectan el entorno escolar.

Al distinguir formas de trabajo individual y grupal, la mayoría de los estudiantes prefieren el trabajo grupal considerando que los que prefieren trabajar de forma individual lo justifican desde las malas experiencias con compañeros y la falta de compromiso. Uno de los mayores motivos para preferir el trabajo grupal responde al contraste de habilidades individuales. Sin embargo, algunos estudiantes mencionan episodios de bullying durante la participación en trabajos grupales.

Sobre los tres estudiantes diagnosticados y la inclusión en el aula de clase, se resalta que, Est2 es un estudiante que, por su familiaridad con el grupo, refleja adaptación, confianza y desenvolvimiento, el estudiante participa en clase, se pronuncia cuando algo le molesta, es bondadoso y le agrada realizar las mismas actividades que sus pares. De forma similar, Est4 es un estudiante que no busca ser tratado de forma especial, se integra naturalmente y le agrada tener funciones logísticas a su cargo. Por el contrario, Est8 sí espera un trato particular, sus relaciones sociales son débiles, es poco empático y prefiere el trabajo individual; de hecho, a sus compañeros no les agrada formar grupo con él por su indisposición.

Adaptación a las metas de aprendizaje

En esta dimensión se distinguen habilidades de los estudiantes desde su ritmo de aprendizaje con el fin de definir modificaciones y estrategias para la inclusión en el aula de matemáticas.

Es importante identificar los diferentes ritmos de aprendizaje en el aula con el fin de asumir competencias que favorezcan una cultura inclusiva basada en el respeto, la tolerancia y la solidaridad (Heredia, 2019). Así, se distinguen 11 estudiantes de ritmo de aprendizaje rápido que se caracterizan por tener buena capacidad de observación, memoria, dominio de la información y autonomía en la ejecución de tareas; sin embargo, es posible que en ocasiones desconfíen del trabajo en equipo, se frustren o impacienten ante el ritmo de sus pares. El ritmo de aprendizaje moderado donde se ubica la mayoría de los estudiantes (18), se mantienen en la media del grupo. Por otro lado, 9 estudiantes son de ritmo de aprendizaje lento, comúnmente requieren de mayor tiempo para el desarrollo de las actividades, tienen pocos focos de atención y dificultad para procesar la información y seguir instrucciones. Entonces, los estudiantes con ritmo de aprendizaje lento y rápido son los que requieren de adaptaciones curriculares (Gallegos e Illescas, 2017).

Los estudiantes que requieren tiempo, ayuda extra y diferentes medios de representación y comunicación son aquellos diagnosticados con NEE, DyA y Est5, quien evidenció dificultades para la comprensión. Por otra parte, se suman los requieren de la repetición de instrucciones (6) y el uso de estrategias para captar el interés (15).

Cabe destacar que, a pesar de que la docente de matemáticas no cuenta con el PIAR actualizado de los estudiantes con NEE menciona que las adaptaciones comunes son: tiempo extra, asesorías complementarias, regulación en tareas y modificaciones en los objetivos de aprendizaje pues, precisa su alcance en nivel básico mínimo.

Con respecto al PIAR del Est8, se mencionan como barreras: la dificultad para la concentración, ansiedad, depresión, mayor tiempo para realizar actividades, combinación de letras y números, escritura como sobreesfuerzo, confusión con el manejo de símbolos matemáticos, problemas para la comprensión de textos e información y poca confianza en sí mismo. Por tanto, la comunidad educativa propone como adaptaciones: el uso permanente de gafas, flexibilidad en tiempo y actividades evaluativas, evitar la carga lectora y escritural, permitir el uso de hojas blancas, el uso de estrategias de representación para resaltar las ideas importantes, ser concretos en los enunciados e instrucciones y, permitir el apoyo de material complementario.

Se define el "Grupo diverso" con relación a las concepciones de inclusión propuestos por Ainscow y Miles (2008) aterrizadas en el contexto de una Institución de Educación Pública en Colombia. Además, para promover la inclusión educativa, se requiere considerar las diferencias sociales, culturales, de capacidad y de intereses de todos los estudiantes, teniendo en cuenta los afectados por enfermedades, en riesgo de drogadicción, desplazados, migrantes, en pobreza extrema y que viven en la calle (Ministros de Educación de América Latina y el Caribe, 2001). Así, en esta IE, se consolida un grupo diverso conformado por:

- *Estudiantes con NEE*: Est2 y Est4 diagnosticados con TEA y DI respectivamente. Además, Est1, Est6, Est8, Est14, Est11, Est5, Est15, Est16 y Est17 con deficiencias visuales de los cuales, solo 4 estudiantes usan lentes (Est16, Est17, Est5 y Est15).
- *Estudiantes con trastornos de aprendizaje*: Est8 diagnosticado con DyA. Además, Est5 con sospecha para dificultades de aprendizaje en matemáticas.
- *Estudiantes en riesgo de exclusión*: Est12, Est18 y Est19 estudiantes de desplazamiento forzado, Est20 afectado por el conflicto armado y una estudiante de migración (Est1). Adicionalmente, se identifican 3 estudiantes que consumen sustancias alucinógenas (Est10, Est15, Est21) y otros estudiantes en condiciones de pobreza (Est6, Est12, Est3, Est18, Est22, Est7, Est4, Est1, Est11, Est23, Est10, Est24, Est16, Est25, Est17 y Est26).
- *Estudiantes típicos sin ninguna de las características de los subgrupos anteriores* (Est9, Est13 y Est27 hasta E38)

Y, desde factores físicos, psicológicos, socioeconómicos, culturales y cognitivos se da un reflejo de la diversidad inherente en el aula de matemáticas.

En particular, sobre la construcción de conocimiento matemático se identifica la diversidad en ritmos de aprendizaje que se relaciona con el desarrollo de habilidades en los procesos matemáticos donde el mayormente abandonado es el proceso de razonamiento, por ende, se distingue la disociación con la capacidad de interpretar, plantear y resolver problemas que reflejen el uso de la matemática funcional.

Implicaciones

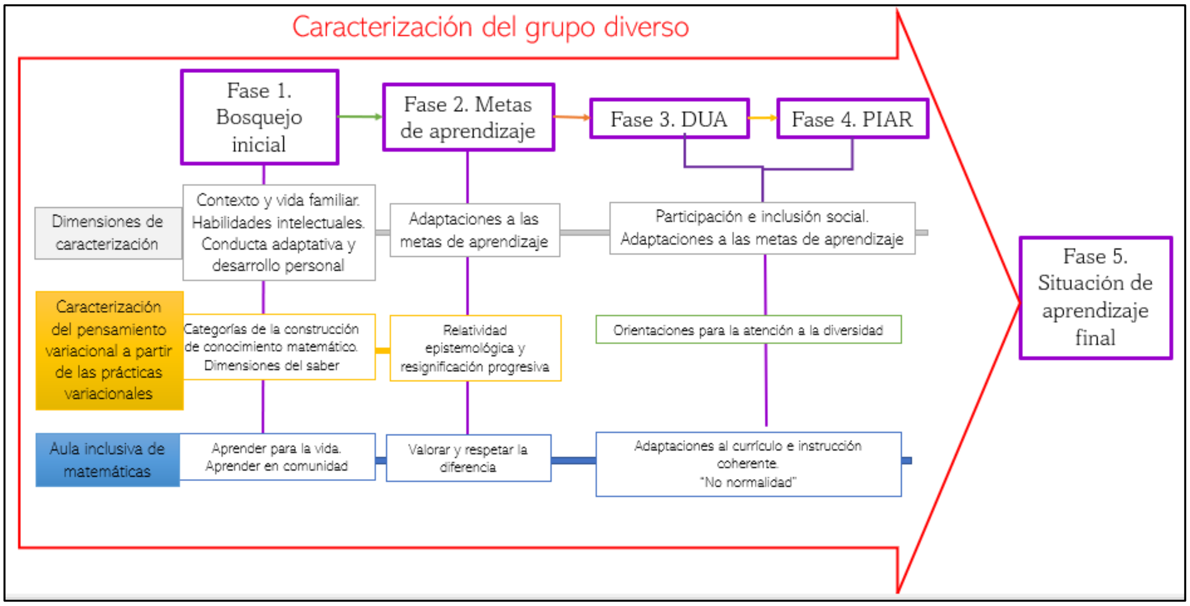
Con respecto al seguimiento de la pregunta de la investigación global, se precisa la siguiente etapa metodológica sobre el diseño de la situación de aprendizaje (ver figura 2), donde se busca articular la caracterización del grupo diverso con la problematización del saber matemático.

La *fase 1* tiene como objetivo centrar la atención en la problematización de la matemática, para ello se articulan las dimensiones del saber hacia el estudio de la variación constante en el desarrollo de las PV en los momentos que propone Caballero (2018) para movilizar la construcción de conocimiento matemático.

Teniendo en cuenta las características del grupo diverso relacionadas con la memoria y la participación individual y grupal en el aula de matemáticas, las tareas que conformarán la situación de aprendizaje buscarán incentivar el trabajo colaborativo, la construcción colectiva del conocimiento y la apreciación de las diferentes argumentaciones del estudiante, quien deberá explorar sus conocimientos previos, identificar relaciones, plantear inferencias y justificar la construcción y modificación de ideas que lleven a la solución de la situación.

Además, se precisa la necesidad de orientar y fortalecer los procesos matemáticos más allá del proceso de elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos. Por tanto, al favorecer la atracción de los estudiantes por el uso de la tecnología y dando crédito a las diferentes herramientas para el aprendizaje en matemáticas, el dinamismo, la exploración y la representación que ofrece el software de geometría dinámica, GeoGebra, se propone el trabajo conjunto con esta herramienta.

Figura 2. *Fases para el diseño de la situación de aprendizaje.*



Fuente: elaboración propia.

En el reflejo de la diversidad de ritmos de aprendizajes y dificultades en la comprensión, las preguntas o instrucciones en las tareas variacionales se caracterizarán por ser concretas, secuenciadas y complementarias con un objetivo hacia el desarrollo de PV y comprensión de la situación de aprendizaje.

A partir de las características de la dimensión de conducta adaptativa y desarrollo personal junto con los elementos que se resaltaron sobre la atención en el grupo diverso, se establece como contexto el consumo de datos de redes sociales (WhatsApp, Facebook, Instagram y Netflix) a razón de la cercanía, familiaridad y toma de decisiones en la vida cotidiana del estudiante.

La *fase 2* tiene como propósito plantear metas de aprendizaje dentro de los objetivos de la situación de variación y cambio tanto para la ejecución y habilidades de los procesos matemáticos como para el desarrollo de las PV. En este sentido, se tendrá en cuenta las orientaciones técnicas, didácticas y pedagógicas para la inclusión en el aula de matemáticas y las habilidades intelectuales de los estudiantes. Así, se pretende enfrentar la inclusión en el aprendizaje al plantear como punto de partida que todos los estudiantes pertenecen y pueden aprender en el aula ordinaria siendo flexibles con sus ritmos de aprendizaje y habilidades.

Las metas de aprendizaje serán percibidas a través de los argumentos variacionales que emergen de las actividades que realizarán los estudiantes y que evidenciarán la construcción de conocimiento matemático alrededor de la variación constante. En tanto, constituyen una herramienta para reconocer el aprendizaje y las diversas formas en la que se reflejan las PV con el objetivo de valorar el aprendizaje del estudiante desde sus habilidades.

Por último, la *fase 3 y 4* pretenden mostrar la aplicación de los principios y pautas del DUA teniendo en cuenta las diferencias y habilidades individuales de los estudiantes del grupo diverso. Asimismo, la individualización del aprendizaje a través PIAR y las adaptaciones curriculares necesarias para Est2, Est4 y Est8.

Agradecimientos

La publicación de este trabajo de investigación se logra gracias al apoyo del Ministerio de Ciencia, Tecnología e Innovación, Colombia – MINCIENCIAS quien está financiando el programa de investigación "Innovar en la Educación Básica para formar ciudadanos matemáticamente competentes frente a los retos del presente y del futuro". Código1115-852 70767, con el proyecto "Diseños didácticos para la inclusión en matemáticas con la mediación de tecnología: procesos de formación y reflexión con profesores". Financiado por el Ministerio de Ciencia y Tecnología". Código70783, con recursos del Patrimonio autónomo Fondo Nacional de financiamiento para la ciencia, la tecnología y la innovación Francisco José de Caldas, contrato CT 183-2021.

Referencias bibliográficas

Ainscow, M. y Miles, S. (2008). Por una educación para todos que sea inclusiva: ¿Hacia dónde vamos ahora? *Perspectivas Revista trimestral de educación comparada, 38* (1). 17-45.

Arciniegas, H. (2021). *Aula inclusiva de matemáticas. Un estudio de situaciones de variación y cambio.* Propuesta de investigación de Maestría no publicada, Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga, Colombia.

Caballero, M (2018). *Causalidad y temporización entre jóvenes de bachillerato. La construcción de la noción de variación y el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional*. Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudio Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.

Cordero, F. Gómez, K. Silva-Crocci, H y Soto, D. (2015). *El discurso matemático escolar: la adherencia, la exclusión y la opacidad*. Gedisa.

Gallegos, M. y Illescas, J. (2017). *Rol del docente frente a los diferentes ritmos de aprendizaje en educación general básica media* (Tesis de pregrado). Universidad de Cuenca, Ecuador.

Heredia, M. (2019). *El trabajo cooperativo, una estrategia para la atención a diferentes ritmos de aprendizaje* (Tesis de pregrado). Universidad de Cuenca, Ecuador.

MEN (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. MEN.

Méndez, C. (2015). *Comunidad de conocimiento matemático de sordos. Lo matemático y la escuela.* Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudio Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.

Ministros de Educación de América Latina y el Caribe. (2001). Recomendaciones sobre políticas educativas al inicio del siglo XXI. *Unipluriversidad, 1* (1)

Papalia, D., Feldman, D. y Martorell, G. (2012). *Desarrollo humano*. Mc Graw Hill.

Reyes, L.R. (2018). *Adaptación curricular significativa par aun alumno con Trastorno del Espectro Autista (TEA)* (Tesis de posgrado). Universidad de Granada, España.

Schnepel. S., Krahenmann, H., Sermier-Dessemontet, R. y Moser-Opitz, E. (2020). The mathematical progress of students with an intellectual disability in inclusive classrooms: results of a longitudinal study. *Mathematics Education Research Journal* 32, 103-119.

PROPUESTA DE UN TALLER BASADO EN LAS CONEXIONES MATEMÁTICAS PARA EL DISEÑO DE TAREAS

PROPOSAL OF A WORKSHOP BASED ON MATHEMATICAL CONNECTIONS FOR THE DESIGN OF TASKS

Karen Gisel Campo-Meneses, Magali Edaena Hernandez-Yañez, Javier García-García
Universidad Autónoma de Guerrero. (México)
karenkmpo@hotmail.com, mehernandez@uagro.mx, jagarcia@uagro.mx

Resumen:
En este escrito se aborda una propuesta de taller para el diseño de tareas sobre las funciones basadas en conexiones matemáticas, el cual tiene por objetivo instruir a los profesores participantes en el uso del marco teórico de conexiones matemáticas para el diseño de actividades acerca de las funciones. Las conexiones matemáticas se definen como un proceso mediante el cual una persona establece una relación entre dos o más conceptos, procedimientos, teoremas, etc., entre sí, con la vida real o con otras disciplinas. El taller cuenta con dos etapas: explicación del marco teórico por los expositores y diseño de actividades por parte de los participantes, a partir de la etapa 1 y la respectiva reflexión de lo realizado. Los resultados muestran que los profesores desarrollaron la habilidad de diseñar tareas que promueven conexiones matemáticas para contribuir a la comprensión de los estudiantes.

Palabras clave: conexiones matemáticas; funciones; diseño de tareas; práctica docente.

Abstract:
This paper addresses a workshop proposal for the design of tasks on functions based on mathematical connections, which aims to instruct participating teachers in the use of the theoretical framework of mathematical connections for the design of activities on functions. Mathematical connections are defined as a process by which a person establishes a relationship between two or more concepts, procedures, theorems, etc., with each other, with real life, or with other disciplines. The workshop has two stages: explanation of the theoretical framework by the speakers and design of activities by the participants, starting from stage 1 and the reflection of what was done. The results show that participating teachers developed the skill to design tasks that promote mathematical connections to contribute to students' understanding.

Keywords: mathematical connections; functions; task design; teaching practice.

Introducción

Las funciones se contemplan en el plan de estudio de álgebra (Ozaltun Celik y Bukova Guzel, 2017), así como en los estándares Estatales Comunes Básicos para Matemáticas (CCSSM; Iniciativa de Estándares Estatales Comunes [CCSSI], 2010). El CCSSM (2010), contiene estándares específicamente para los tipos de funciones (entre las que se encuentran las lineales, cuadráticas, polinómicas, racionales, exponenciales, trigonométricas y radicales) donde se establece que los estudiantes necesitan experiencias de modelado para cada tipo de función y trabajar con las representaciones que corresponden a cada una de estas.

En cuanto a los principios y estándares de National Research Council [NRC] (2001), consideran que la comprensión de las matemáticas permite utilizar correctamente un objeto matemático en un contexto específico; proporcionar argumentos y establecer conexiones entre conceptos y procedimientos. De esta manera, varios investigadores consideran las conexiones matemáticas como un proceso fundamental que permite comprender conceptos matemáticos (Rodríguez-Nieto et al., 2020).

La literatura en Matemática Educativa ha reportado la importancia de promover conexiones matemáticas en el aula, pues estas contribuyen al desarrollo de la comprensión de los estudiantes (Bingölbali y Coşkun, 2016; Campo-Meneses y García-García, 2021; Mhlolo, 2012).

Las investigaciones en torno a las conexiones matemáticas han sido diversas (Campo-Meneses y García-García, 2020, 2021; García-García y Dolores-Flores, 2018 y 2021; Dolores-Flores et al., 2019; Eli et al., 2013; Rodríguez-Nieto, Rodríguez-Vásquez y García-García, 2021; Rodríguez-Nieto, Rodríguez-Vásquez, Font et al., 2021). Algunas se han centrado en las conexiones que establece y/o promueve el profesor (Rodríguez-Nieto et al., 2020, Businskas, 2008) o futuros profesores (Rodríguez-Nieto et al., 2021; Hernández-Yañez et al., 2023), otras en las conexiones que establecen los estudiantes cuando resuelven tareas (Campo-Meneses y García-García, 2020, 2021; García-García y Dolores-Flores, 2020 y 2021) y, en las conexiones que se promueven en el currículo de matemáticas (García-García et al., 2022).

De manera general, se ha reportado que existen dificultades para establecer conexiones por parte de los profesores y estudiantes (Eli et al., 2011; Rodríguez-Nieto et al., 2020; Rodríguez-Nieto, Rodríguez-Vásquez, y García-García, 2021; Tasni et al., 2020). Estas dificultades son evidencia de la falta de comprensión de un sujeto respecto a algún concepto matemático, ya que como se muestra en las investigaciones, analizar las conexiones que establece un sujeto permite inferir su nivel de comprensión (Campo-Meneses y García-García, 2021; Mhololo, 2012), debido a que para que haya comprensión se deben conectar hechos, procedimientos e ideas, además es necesario que se empleen y conecten diferentes formas de representar un objeto matemático (Hiebert y Carpenter, 1992).

En este sentido es necesario que en el aula se promuevan conexiones matemáticas, ya que algunas de las dificultades para establecer conexiones matemáticas presentadas por los estudiantes se deben a la enseñanza del profesor y a las tareas que se promueven en el aula. Por ello, es necesario que los profesores sean instruidos en diferentes marcos teóricos dentro de la Matemática Educativa, con el objetivo de mejorar su práctica y por ende influir positivamente en el desarrollo de la comprensión matemática en los estudiantes, como es el de las conexiones matemáticas.

Lo anterior, porque es importante que los profesores conozcan y usen en su práctica las conexiones matemáticas. Por un lado, porque las conexiones matemáticas son reconocidas en planes y programas de estudios de diversos países como España, Estados Unidos de Norte América, México, entre otros (García-García, 2018, 2019; Karakoç y Alacacý, 2015) y, por otro lado, porque este marco promueve la integración de conocimientos matemáticos y la interdisciplinariedad que son útiles tanto en la resolución de problemas de aplicación como en los problemas no matemáticos (García-García, 2019).

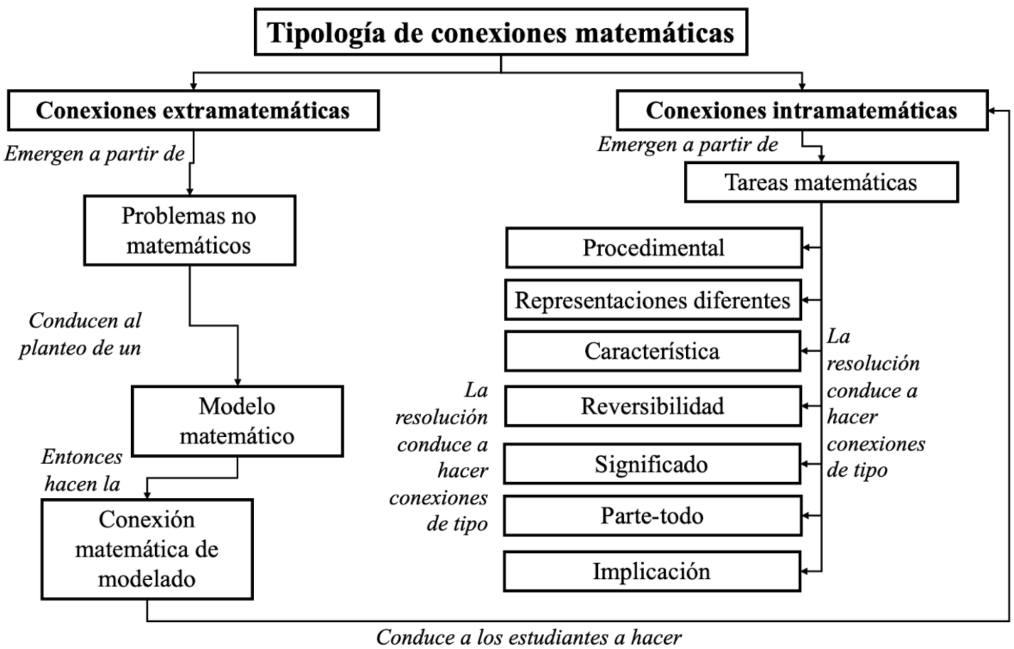
Por lo tanto, es necesario instruir a los profesores en lo que son las conexiones matemáticas y las tipologías existentes para que puedan incluirlas en las actividades que proponen en la práctica. De acuerdo con esto, se planteó el taller titulado “diseño de tareas sobre las funciones basadas en conexiones matemáticas” el cual tiene dos propósitos, por un lado, interesa la divulgación del marco de las conexiones matemáticas a la comunidad de Matemática Educativa y, por otro lado, está encaminado a instruir a los profesores participantes en el diseño de actividades acerca de las funciones basadas en el marco de las conexiones matemáticas. Con base en los propósitos mencionados, este taller está dirigido a profesores de nivel secundaria y bachillerato, que hayan impartido, que imparten o que impartirán el concepto matemático de función.

Marco teórico

Las conexiones matemáticas se asumen como un proceso en el que una persona establece una relación verdadera entre dos o más ideas, representaciones, conceptos o teoremas, entre sí, con otras disciplinas o con la vida real (García-García y Dolores-Flores, 2018). La literatura reconoce la existencia de dos grupos de conexiones matemáticas, las intramatemáticas y las extramatemáticas. Las primeras se refieren a las relaciones establecidas dentro de la matemática, por ejemplo, la vinculación de los conceptos, teoremas, procedimientos y representaciones matemáticas entre sí; las segundas se manifiestan cuando se relacionan los conceptos con modelos matemáticos en problemas con situaciones de la vida real (García-García, et al., 2022).

En esta línea de investigación se han definido diversas tipologías de las cuales ocho de ellas se consideraron en este taller y se especifican a continuación (ver Figura 1). Esto porque son las tipologías que pueden establecer los estudiantes, por ende, son las que pueden promoverse en las tareas que se diseñen.

Figura 2. *Tipologías de conexiones matemáticas.*



Fuente: figura adaptada de García-García (2018).

Por la orientación del taller, se hizo una adaptación de las tipologías de conexiones matemáticas que se reportan en García-García (2019) y Businskas (2008), las cuales se mostraron con ejemplos ilustrativos haciendo referencia a cada una de estas. En este sentido contemplando los objetivos planteados para este taller, el modelo que se presentó para instruir a los profesores en las conexiones matemáticas es el siguiente:

Procedimental: esta referida a las relaciones entre la tarea y las reglas, algoritmos o fórmulas establecidas dentro de un registro semiótico que son usados para resolver dicha tarea matemática. Además de los procedimientos que se pueden hacer de manera algebraica, también se tienen en cuenta los procedimientos como el cálculo mental o los realizados en una gráfica.

Significado: son aquellas conexiones matemáticas donde se relaciona el concepto con su definición o el concepto y sus contextos de uso. En esta se refleja el sentido que el sujeto le atribuye al concepto, y cómo él puede ponerlo en juego en diferentes contextos.

Reversibilidad: referida a las relaciones bidireccionales entre dos objetos matemáticos, es decir, se puede partir de un concepto A para llegar a un concepto B e invertir el proceso partiendo de B para regresar al A. Es de señalar que esta tipología de conexión matemática no se da entre todos los conceptos matemáticos, sino en aquellos que tienen algún concepto o proceso inverso. En el caso de las actividades sobre funciones, si es posible promoverla.

Representaciones diferentes: esta conexión matemática se refiere a la relación establecida entre los diferentes registros semióticos de un concepto matemático, por ejemplo: lenguaje natural-gráfico, algebraico-gráfico, numérico-tabular, etc. O bien, expresado en dos formas distintas dentro de un mismo registro. Al primer caso se le llaman representaciones alternas y al segundo caso, representaciones internas.

Parte-todo: se refiere a la relación entre casos particulares y generales o bien entre un concepto y otro que este contenido en él.

Característica: esta conexión matemática se refiere a la relación entre el concepto y sus atributos o rasgos invariantes. Esta conexión permite que el sujeto logre distinguir a un concepto de otros en diferentes registros.

Implicación: es la relación lógica entre dos proposiciones y es de la forma *si… entonces.*

Modelado: se refiere a la relación entre la tarea y un modelo matemático, donde el sujeto crea un modelo matemático que le permite resolver la tarea y al final interpreta ese resultado respecto al contexto de la tarea. La tarea puede ser de la vida real, de otra disciplina o una situación contextualizada.

Metodología

El taller fue diseñado a partir del marco de las conexiones matemáticas. Para ello se revisó la literatura al respecto identificando tareas reportadas que podrían servir como ejemplo para la explicación del marco. Este taller se estructuró en dos momentos: el primero, tiene que ver con la instrucción del marco teórico y su ejemplificación y un segundo momento, en el que los profesores empleen el marco para diseñar situaciones sobre algunos tipos de funciones. En ese sentido, específicamente el taller se ha adaptado tal como se muestra en la Tabla 1.

Tabla 1. *Descripción de las actividades del taller por sesiones.*

Sesión	Actividades
Primera	– Presentación del taller, sus expositores y la dinámica de trabajo. – Explicación del marco teórico. – Ejemplos de tareas y análisis de las tipologías de conexiones matemáticas existentes en cada una.
Segunda	– Diseño de tareas por parte de los participantes a partir de lo explicado. – Reflexión del diseño de tareas realizado en la etapa 2 por cada participante.

Fuente: creación propia.

En la sesión 1, como se presenta en la Tabla 1, se realiza la explicación por parte de los expositores mediante una presentación, sobre el marco teórico de las conexiones matemáticas y las tipologías que se retomaron para este taller. Esta sesión, aunque esta a cargo principalmente de los expositores, los profesores participan activamente. Las tareas que se presentan tienen la finalidad de instruir por medio de ejemplos de qué manera pueden estar estructuradas las tareas para que se promuevan las conexiones matemáticas en el aula de clases.

En la figura 2, se muestra una tarea que fue retomada de Campo-Meneses y García-García (2021), con la que se explican las conexiones matemáticas que se están promoviendo y de qué manera se caracteriza cada una. Se enfatiza que el promover las conexiones matemáticas en las tareas no significa que esta sea abstracta, más bien, se requiere que las tareas tengan un enfoque en el que se puedan desarrollar las tipologías explicadas previamente en el marco conceptual.

Figura 3. Ejemplo de una tarea sobre las funciones exponencial y logarítmica.

La relación de Ehrenberg $\ln w = ln\,2.4 + (1.84)h$ es una fórmula empírica que relaciona la estatura promedio h (en metros) con el peso promedio w (en kilogramos) para niños entre 5 y 13 años

a. Si una niña de 8 años pesa 28.8 kg ¿Cuál es su estatura promedio? Explica tu respuesta.

b. ¿Cuál es el peso promedio de un niño de 10 años cuya altura es de 1.5 metros? Explica tu respuesta.

c. ¿Cuál es la función que permite conocer el peso promedio para cualquier niño cuya edad varía entre 5 y 13 años? Grafique la función.

d. ¿Qué función es y por qué? Mencione sus características.

e. ¿Cuál es la función que permite conocer la estatura promedio para cualquier niño cuya edad varía entre 5 y 13 años? Grafique la función.

f. ¿Qué función es y por qué? Mencione sus características.

g. ¿Hay alguna relación entre las dos funciones? ¿Por qué?

Fuente: tarea adaptada de Campo-Meneses y García-García (2021).

En la Figura 2 se muestra una tarea sobre las funciones exponencial y logarítmica, la cual promueve las conexiones de tipo procedimental, representaciones diferentes, característica, parte-todo, reversibilidad y de significado. *Procedimental***,** al pedir que se realicen procedimientos algebraicos y gráficos para encontrar el valores específicos de la estatura y el peso de un niño; *representaciones diferentes* cuando se exige el uso del registro gráfico, lenguaje natural y simbólico para mostrar diferentes maneras de presentar la relación establecida entre las variables w y h; *característica,* principalmente cuando se pide que se explique la función encontrada y se detalle algunas características; *parte-todo,* cuando se solicita que se encuentre la expresión general que permite conocer el peso promedio, a partir de los casos particulares; *reversibilidad,* cuando se le pregunta por la relación existente entre las dos funciones y, *significado,* cuando se pide que se describa qué función es en cada caso y que explique su respuesta.

En esta sesión también se aclara que con algunos conceptos matemáticos no es posible establecer todas las tipologías presentadas en el taller, pero aquellas que si pueden promoverse deben considerarse en el diseño de las tareas que se abordan en el aula de clases.

En lo que respecta a la segunda sesión, los profesores están encargados de diseñar actividades sobre algún tipo de función que promuevan conexiones matemáticas a partir de la explicación dada en la sesión 1. Estas actividades se discuten entre los participantes desde la mirada de las conexiones matemáticas y su aplicación en el aula. Para el diseño se les proporciona a los profesores participantes el formato que se muestra en la Tabla 2.

Tabla 2. *Formato para realizar la actividad.*

Nombre del profesor	
País	
Concepto matemático	
Grado de escolaridad	
Número de estudiantes	
Conocimientos previos	
Tarea	
Tiempo requerido	
Conexiones matemáticas promovidas	

Fuente: creación propia.

Con el formato presentado en la Tabla 2, se pretende que el profesor especifique su nombre; de qué país viene; el concepto matemático que desea abordar; el grado escolar en el que aplicarían la actividad que van a diseñar; el número de estudiantes óptimo para llevar a acabo la actividad; los conocimientos previos, aquí deben hacer uso del conocimiento sobre el currículo de su país y analizar la complejidad de la tarea a diseñar dependiendo el grado de escolaridad; la tarea, aquí deben de colocar todo lo concerniente a la tarea diseñada; tiempo requerido, este es importante para saber cuánto tiempo ellos consideran necesario para implementar la tarea diseñada, y las conexiones promovidas, en ese no solo es suficiente con nombrar las tipologías, sino también explicar por qué consideran que se promueve dicha conexión.

Después del diseño, se procede a una discusión de la tarea propuesta por cada profesor, para lo cual es necesario que cada uno presente lo que realizó y explique cómo hizo el diseño, por qué escogió ese concepto matemático, ese grado escolar, es decir cada uno de los elementos de la Tabla 2. Una vez presentada la tarea de un profesor, los demás proceden a dar su punto de vista, esto con el objetivo de generar un espacio de discusión y reflexión entre los profesores participantes del taller.

Es importante mencionar que, en ambas sesiones se destaca la participación de los asistentes en cuanto a las preguntas sobre el marco teórico, la presentación de sus tareas y la discusión en la socialización de las respuestas de otros compañeros.

Conclusiones

Este escrito tenía por objetivo mostrar la propuesta de taller acerca del diseño de tareas sobre funciones basadas en conexiones matemáticas. Esto porque desde la investigación es reconocida la importancia de establecer conexiones matemáticas en el aula, pues estas contribuyen al desarrollo de la comprensión de los estudiantes. Por lo que es importante que el profesor pueda promoverlas en el aula, tanto en su discurso como en las tareas que implementa con los estudiantes.

Para que el profesor promueva conexiones en el aula, es importante que sea instruido en este campo y es ahí donde la investigación y los investigadores juegan un papel preponderante en el campo de la docencia, pues aunque en los diferentes artículos de investigación se proponen diseños o resultados que muestran la importancia de que los estudiantes y profesores establezcan conexiones matemáticas, es necesario incidir directamente en la formación de profesores, a través de cursos, talleres, seminarios, etc., que contribuyan a capacitarlos más y así esto les sirva para la práctica.

De acuerdo con esto, el taller que se presentó en el escrito impacta directamente al campo de la docencia. Por un lado, se divulga la amplia investigación que se está realizando en la línea de las conexiones matemáticas, particularmente las tipologías existentes que se pueden promover en las tareas que se propongan y por otro se lleva a los profesores a usar de manera práctica dicho marco y a su vez la interacción entre profesores, en el momento en que diseñan y discuten lo realizado.

Cabe señalar que los talleres son de gran utilidad para vincular la parte teórica de la Matemática Educativa con lo que se hace en el aula de clases, pues permite que los profesores tengan conocimiento sobre las diversas teorías que pueden implementar con la finalidad de mejorar su práctica y por ende contribuir al desarrollo de la comprensión en sus estudiantes.

En particular, los profesores que participaron en el taller diseñaron tareas que promueven conexiones matemáticas de tipo procedimental, modelado, representaciones diferentes, parte-todo, implicación y característica. De esta manera, se considera que además de los espacios generados en los congresos, para dictar talleres y cursos, es necesario poder incidir en las diferentes instituciones educativas con el fin de divulgar lo que se hace en el campo investigativo y en este caso llevar actividades sobre diseño y análisis de tareas a la luz de las conexiones matemáticas. Pero no solo para abordar funciones, como se plantea en este caso, sino también abordar diferentes objetos matemáticos que se trabajan en el aula, e incluso poder trabajar en conjunto con profesores de otras áreas y diseñar tareas que promuevan conexiones extramatemáticas y su vez se vea la interdisciplinariedad.

Finalmente, este taller puede replicarse para este u otros conceptos matemáticos, buscando una orientación a los profesores para que promuevan estas tipologías en el aula de clases y la divulgación de este marco teórico. Al mismo tiempo, si el profesor logra promover conexiones matemáticas, significaría que comprende los conceptos matemáticos, que puede vincularlos con la matemática misma y con situaciones de la vida real y se asegura de alguna manera que puede ser capaz de promover estas conexiones en su práctica docente.

Referencias bibliográficas

Bingölbali, E. y Coşkun, M. (2016). A Proposed Conceptual Framework for Enhancing the use of Making Connections Skill in Mathematics Teaching. *Education and Science, 41*(183), 233-249.

Businskas, A. M. (2008). *Conversations about connections: How secondary mathematics teachers conceptualize and contend with mathematical connections* [Tesis de Doctorado no publicada]. Simon Fraser University.

Campo-Meneses, K. G. y García-García, J. (2020). Explorando las conexiones matemáticas asociadas a la función exponencial y logarítmica en estudiantes universitarios colombianos. *Educación Matemática, 32*(3), 209–240. http://doi.org/10.24844/EM3203.08.

Campo-Meneses, K. G., y García-García, J. (2021). La comprensión de las funciones exponencial y logarítmica: una mirada desde las Conexiones Matemáticas y el Enfoque Ontosemiótico. *PNA, 16*(1), 25–56. http://doi.org/10.30827/pna.v16i1.15817.

Campo-Meneses, K. G., Font, V., García-García, J., y Sánchez, A. (2021). Mathematical connections activated in high school students' practice solving tasks on the exponential and logarithmic functions. *Eurasia Journal of Mathematics Science and Technology Education*, *17*(9), 2–14. https://doi.org/10.29333/ejmste/11126

CCSSI (2010). Common Core State Standars for Mathematics. http://www.corestandards.org/wpcontent/uploads/Math_Standards1.pdf

Dolores-Flores, C., Rivera-López, M. I., y García-García, J. (2019). Exploring mathematical connections of pre-university students through tasks involving rates of change. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *50*(3), 369–389. https://doi.org/10.1080/0020739X.2018.1507050

Eli, J. A., Mohr-Schroeder, M. J., y Lee, C. W. (2011). Exploring mathematical connections of prospective middle-grades teachers through card-sorting tasks. *Mathematics Education Research Journal*, *23*(3), 297–319. https://doi.org/10.1007/s13394-011-0017-0

García, J. (2018). *Conexiones matemáticas y concepciones alternativas asociadas a la derivada y a la integral en estudiantes del preuniversitario.* [Tesis de doctorado no publicada. Universidad Autónoma de Guerrero, México]. https://www.researchgate.net/profile/Javier_Garcia-Garcia4

García-García, J. (2019). Escenarios de exploración de conexiones matemáticas. *Números*, *100*, 129-133. http://www.sinewton.org/numeros/numeros/100/ Articulos_24.pdf

García-García, J., y Dolores-Flores, C. (2018). Intra-mathematical connections made by high school students in performing Calculus tasks. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *49*(2), 227–252. doi:10.1080/0020739X.2017.1355994

García-García, J., y Dolores-Flores, C. (2021). Pre-university students' mathematical connections when sketching the graph of derivative and antiderivative functions. *Mathematics Education Research Journal*, *33*(1), 1–22. https://doi.org/10.1007/s13394-019-00286-x

García-García, J., Hernández-Yañez, M. E., y Rivera López, M. I. (2022). Conexiones matemáticas promovidas en los planes y programas de estudio mexicanos de nivel secundaria y media superior sobre el concepto de ecuación cuadrática. *IE Revista de Investigación Educativa de la REDIECH*, *13*, e1485. https://doi.org/10.33010/ie_rie_rediech. v13i0.1485

Hernández-Yañez, M. E., García-García, J., & Campo-Meneses, K. G. (2023). Conexiones matemáticas asociadas al concepto de ecuación cuadrática que establecen futuros profesores mexicanos de matemáticas. *Uniciencia*, *37*(1), 1–26.

https://doi.org/http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.13

Hiebert, J., y Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. En *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 65–97). Macmillan Publishing Co, Inc.

Karakoç, G., y Alacaćý, C. (2015). Real world connections in high school mathematics curriculum and teaching. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, *6*(1), 31-46. https://doi.org/10.16949/turcomat.76099

Mhlolo, M. K. (2012). Mathematical connections of a higher cognitive level: A tool we may use to identify these in practice. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education, 16*(2), 176–191. http://doi.org/10.1080/10288457.2012.10740738.

National Research Council [NRC]. (2001). Adding it up: Helping children learn mathematics. In J. Kilpatrick, J. Swafford, & B. Findell (Eds.), *Mathematics learning study committee, center for education, division of behavioral and social sciences and education* (pp. 115–156). National Academy Press.

Ozaltun Celik, A. & Bukova Guzel, E. (2017). Revealing Ozgur's thoughts of a quadratic function with a clinical interview: Concepts and their underlying reasons. *International Journal of Research in Education and Science (IJRES), 3*(1), 122-134.

Rodríguez-Nieto, C., Rodríguez-Vásquez, F. M., y Font, V. (2020). A new view about connections: the mathematical connections established by a teacher when teaching the derivative. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1–26. https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1799254

Rodríguez-Nieto, C., Rodríguez-Vásquez, F. M., Font, V., y Morales-Carballo, A. (2021). Una visión desde la red de teorías TAC-EOS sobre el papel de las conexiones matemáticas en la comprensión de la derivada. *Revemop*, *3*, 1–32. https://doi.org/10.33532/revemop.e202115

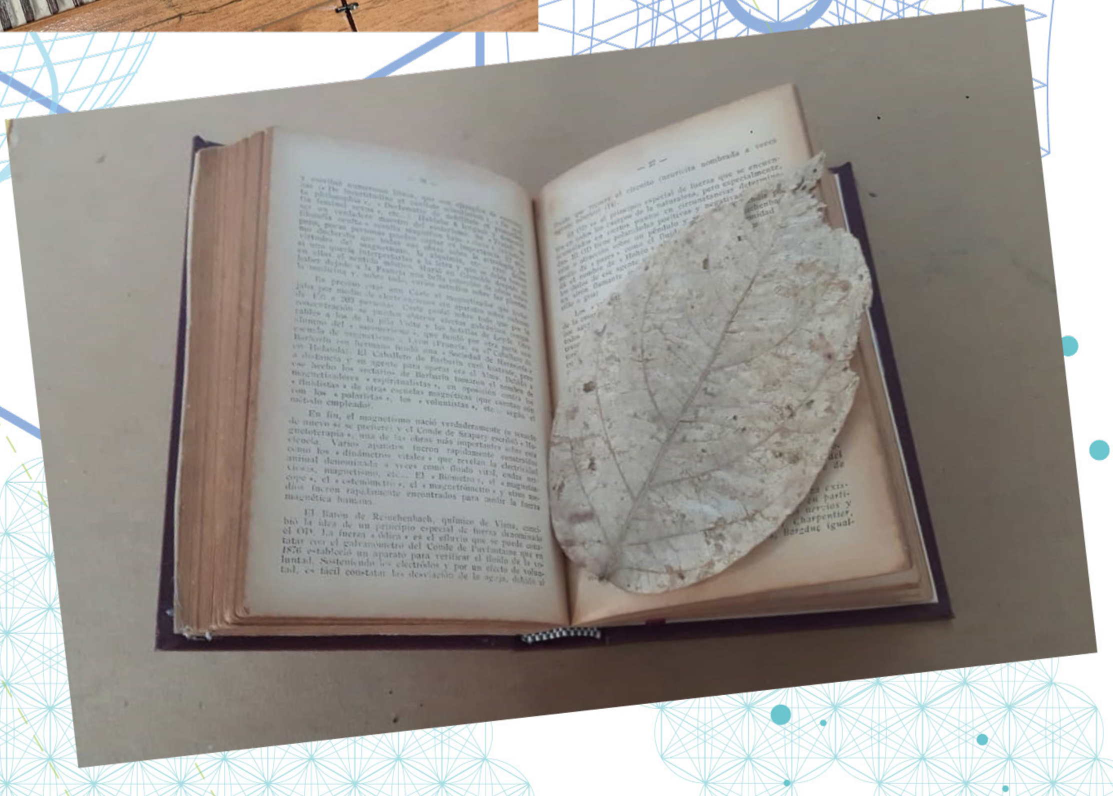
Rodríguez-Nieto, C., Rodríguez-Vásquez, F. M., y García-García, J. (2021). Pre-service math teachers' mathematical connections in the context of problem-solving about the derivative. *Turkish Journal of*

Computer and Mathematics Education (TURCOMAT), *12*(1), 202–220. https://doi.org/10.16949/turkbilmat.797182

Tasni, N., Saputra, A., y Adohar, O. (2020). Students' difficulties in productive connective thinking to solve mathematical problems. *Beta: Jurnal Tadris Matematika*, *13*(1), 33–48. https://doi.org/10.20414/betajtm.v13i1.371

SECCIÓN 3

ASPECTOS SOCIOEPISTEMOLÓGICOS EN EL ANÁLISIS Y EL REDISEÑO DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR



PRÁCTICAS CON INSTRUMENTOS CIENTÍFICOS EN LA OBSERVACIÓN Y MEDICIÓN DEL TRÁNSITO DE VENUS SOBRE EL DISCO SOLAR EN LA NUEVA ESPAÑA, 1769

PRACTICALS WITH SCIENTIFIC INSTRUMENTS IN THE OBSERVATION AND MEASUREMENT OF THE TRANSIT OF VENUS OVER THE SOLAR DISK IN NEW SPAIN, 1769

Maribel Moreno Ochoa
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. (México)
maribel.m.ochoa@hotmail.com

Resumen:
La construcción del conocimiento matemático se fue dando gracias a las teorías y las prácticas científicas inmersas en las necesidades de contextos sociales y situados, muchas veces muy distintos y con intereses diversos, y en relaciones imperiales-coloniales como en el siglo XVIII, donde no es posible desdibujar los límites entre las disciplinas como lo podemos hacer actualmente, pero que sí podemos tomar algunas consideraciones de la matemática educativa en qué y cómo se enseñaba y aprendía la matemática en dicha época y acercarnos desde cómo se generaba el conocimiento científico. Poner el acento en los instrumentos que se usaban para realizar observaciones y mediciones astronómicas ya trae una carga significativa en la que la matemática es base. La investigación en curso plantea cuestionarse el tipo de instrumental que se utilizó en la observación del tránsito de Venus de 1769 en Baja California donde un criollo novohispano, dos tenientes españoles de navío y un astrónomo francés realizan sus observaciones y así mostrar los saberes locales y globales que se ponen en juego.

Palabras clave: prácticas, instrumentos científicos, observación y medición

Abstract:
The construction of mathematical knowledge took place thanks to theories and scientific practices immersed in the needs of social contexts, often placed very different, and with diverse interests, and in imperial-colonial relations as in the eighteenth century, where it is not possible to blur the boundaries between disciplines as we can do today, but we can take some considerations of educational mathematics with respect to what and how mathematics was taught and learned at that time and we can approach it from how scientific knowledge was generated. To focus on the instruments that were used to make astronomical observations and measurements already carries a significant load in which mathematics is the basis. This ongoing research proposes to question the type of instruments used in the observation of the transit of Venus in 1769 in Baja California, where a Novo-Hispanic Creole, two Spanish lieutenants and a French astronomer made their observations and thus to show the local and global knowledge that was put at stake.

Keywords: practices, scientific instruments, observation and measurement

Introducción

El presente reporte de investigación es parte de una tesis doctoral en curso y tiene como finalidad reflexionar entorno de la materialidad, como el uso de instrumentos científicos y problematizar cómo se dan las prácticas científicas en las observaciones y mediciones astronómicas en las que la matemática o las matemáticas están inmiscuidas, pero que poner el ojo en otras consideraciones, por ejemplo, sobre cómo circula el conocimiento, qué hace que lo que se observa y se mide sea valido y cómo participa la precisión, la objetividad que se supone dan los instrumentos científicos, quedan entramados en lo que se considera la generación de conocimiento sin justo eso, problematizar otros factores como el prestigio, la autoridad y hasta la legalidad de quien mide, quien observa y qué se dicta como verdadero.

El concepto de medición es considerado como “una de las operaciones más básicas de la ciencia” (Canales, 2009, p. 12), pero complejo en los debates de cómo medir. La medición ha sido parte de una nueva forma de concebir el mundo, a partir de números, para justificar las decisiones de imperios donde los términos precisión, estandarización y objetividad fueron tomando cada vez más peso en las decisiones políticas y económicas que poco a poco dieron paso a una mentalidad numérica, como es el caso de la estadística en el siglo XIX (Cohen, 2001; Porter 1995 y Wise, (coord.), 1995).

Para el siglo XVIII y todavía en el S. XIX uno de los objetivos de la astronomía fue la medición de las distancias en el universo, como la distancia de la Tierra al Sol, por ejemplo, haciéndose uso del método de la paralaje, el cual es el ángulo desde donde un observador hipotético vería el radio terrestre de la Tierra desde el centro del Sol. La paralaje solar se determina con cálculos trigonométricos a partir de los datos proporcionados por las observaciones de los tránsitos de planetas, como Mercurio y Venus. En el año 1838 se considera se realizó la primera medición de una paralaje estelar a estrellas distantes por el matemático y astrónomo alemán Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846).

En la segunda mitad del siglo XVIII, antes de su independencia, Nueva España (NE), siendo una colonia con intereses propios y con ideas ilustradas, se llevaron a cabo mediciones y observaciones astronómicas. En 1769 se realizó una expedición franco-española a la península de Baja California en la que participaron enviados de la Academia de Ciencias de París, dos tenientes de navío españoles y un criollo novohispano para observar el tránsito de Venus.

El tránsito de Venus sobre el disco solar del siglo XVIII convocó a los astrónomos de distintas regiones del globo terráqueo a circular, dado que entre más alejados estuvieran (al menos) dos observadores, sería mejor para comparar las diferencias de tiempo de entrada y salida. El tránsito de Venus sobre el disco solar sólo ocurre dos veces en un siglo, y después de 105.5 años o 121.5 años. En 243 años se repiten cada 8, 121.5, 8, 105.5 años, respectivamente. Por ejemplo, algunos fenómenos de esta naturaleza han sido en los años: 1631, 1639, 1761, 1769, 1874, 1882, 2004, 2012 y los dos próximos serán en los años 2117 y 2125 (Gazol, (s. f.)). Se requería entonces la colaboración no sólo de un astrónomo y aquí la importancia de este método que convocó por primera vez a los astrónomos de distintas latitudes a movilizarse, realizándose 130 expediciones en 1761 y 151 observadores en 77 lugares distintos del mundo en 1769 (Bernabéu, 1998). Estas observaciones y la comparación de sus mediciones entre los astrónomos servían para fines más prácticos como: a) la cartografía y la navegación; b) la conquista de ultramar; c) el cuestionamiento de la forma de la Tierra, y sus reglas universales, propuestas por el matemático y físico inglés Isaac Newton (Lafuente y Delgado, 1984; Capel, 1989 y Sellés, 2000).

Fundamento teórico

Recientemente, el rol de los instrumentos en la generación de conocimiento ha sido tema de debate para los historiadores y filósofos (Canales, 2009; Daston y Galison, 2010; Galison, 1997). La idea de que los principios científicos residen en la teoría y quizá en el método experimental pero no en los instrumentos se ha problematizado, alejándose de la idea de que solo “ayudaron a cuantificar los conceptos, pero no los contenían ni los iniciaban” (Van Helden y Hankins, 1994, p. 3).

Cuestionándose la concepción de que

> los instrumentos científicos son ‘teoremas reificados’ [término de Gastón Bachelard de su libro *Epistemología* del año 1973]… [o] la extensión material de teorías probadas. Esta idea se gestó aparejada al hecho de que los instrumentos podía desplazarse y usarse en cualquier otro lugar, en tanto derivados de conocimientos universalmente válidos (Cházaro, 2009, p. 102).

Los instrumentos utilizados no estaban estandarizados y lejos de considerarse objetivas sus mediciones, importaba el prestigio del observador y la calidad de los mismos. Los instrumentos utilizados en esta época “ganan” autoridad sobre el observador, es decir, el prestigio del observador dependió de la calidad de los instrumentos que utilizaba. Dentro de los propósitos de los instrumentos está el de conferir autoridad (Van Helden y Hankins, 1994).

Bajo este enfoque, encuentro que la perspectiva de la historia global me permite analizar el rol de los instrumentos en los que confluyen otros actores, ideologías y prácticas científicas donde surgen intercambios, que necesariamente son de ida y vuelta, cuestionando así, la vieja noción de centros y periferias. Igualmente, este estudio se alimenta de reflexiones procedentes de la historia interconectada, cruzada, comparada o de contactos (Werner y Zimmermann, 2004; Souto, Salmerón y Mayer, 2017).

Metodología

Se ha indagado en fuentes históricas en distintos repositorios archivisticos, tanto presenciales como virtuales documentos de los observadores que participaron en la expedición franco-española a California para la observación del tránsito de Venus sobre el Sol, así como del novohispano que se encontraba en dicho lugar, los documentos se han estado analizando para encontrar los vinculos entre los observadores, su formación académica y los intereses que tenían sus instituciones, como la Academia de Ciencias de París para que se realizara este tipo de encomienda. Los archivos históricos que se han consultado son el Archivo General de la Nación en la CDMX, indagaciones virtuales de repositorios como Gallica.com de la Biblioteca Nacional de Francia y presencial, así como la Biblioteca Virtual Nacional de España, se ha encontrado material en línea y manuscritos publicados en libros, además de descripciones de instrumentos científicos de la época, tanto en línea, como en ediciones impresas.

Los observadores en Baja California

Los observadores fueron: Joaquín Velázquez de León (1732-1786); Jean-Baptiste Chappe d’Auteroche (1728-1769); Vicente de Doz y Funes (1734-1781) y Salvador de Medina (¿?-1769).

Joaquín Velázquez de León nació el 12 de junio de 1732 en el seno de una familia minera en la hacienda de Acebedocla, en el Real de Sultepec (actualmente el séptimo municipio en extensión del Estado de México). Murió en la Ciudad de México el 7 de marzo de 1786. Velázquez fue

> colegial… del insigne, mayor y mas antiguo colegio de Santa María de Todos Santos de esta ciudad de México, abogado de la real audiencia de ella, e individuo de su ilustre colegio, catedrático de matemáticas en la real y pontificia Universidad, del consejo de S. M., su alcalde de corte honorario, y director del importante cuerpo de minería de este reino (Cumplido, Carta de León y Gama, 1844, p. 511).

Velázquez de León fue comisionado como oficial real en California por el visitador José de Galvéz de 1768 a 1770. Velázquez debía de “examinar las minas, mejorar los métodos empleados, capacitar a los trabajadores locales y contribuir al aumento de la extracción de plata y oro” (Bernabéu, 2010, p. 218). Además, debía apoyar a la comisión franco-española en lo que necesitaran (Engstrand, 1976).

Chappe d’ Auteroche nació en Mauriac, departamento de Cantalen Auvergne, Francia el 23 de marzo de 1728 y murió en San José del Cabo, en el municipio de Los Cabos, Baja California Sur, México. Fue hijo del barón d’Auteroche y de Madeleine de la Farge. Sus primeros estudios fueron al cuidado de los jesuitas, después se matriculó en el colegio Louis-le-Grand de París, donde fue protegido por el cartesiano Germain Chartreux, recomendado por el principal del colegio, Père de la Tour al director del Observatorio de París, Jacques Cassini, donde fue contratado como dibujante de la *Carte de France,* tradujo al francés la obra de Edmund Halley: "*Astronomical Tables, with Precepts Both in English and Latin for Computing the Places of the Moon"* publicada en Londres en 1752. Fue nombrado astrónomo adjunto de la Academia de Ciencias en enero de 1759 y después miembro del Observatorio de París, gracias a sus trabajos registrados y observaciones a partir de 1753, desarrollando un programa de observaciones en Bitche (Lorraine), entre 1756 y 1758, estudiando además la electricidad de la atmosfera.

Auteroche es seleccionado por la Academia de Ciencias de Paris para la encomienda; para entonces, es miembro del Observatorio de Paris, cuyo director era César-François Cassini de Thury (Cassini III). Auteroche encabezó la expedición franco-española en la Península de Baja California en 1769 bajo la supervisión de los tenientes de navío, los españoles Salvador de Medina y Vicente de Doz, cuyas órdenes eran que Auteroche se dedicara exclusivamente a la observación al que era destinado más allá de otros intereses que estuvieran ocultos, como el espionaje entre imperios, por ejemplo.

En la expedición franco-española, acompañan a Auteroche desde Francia: Juan Pedro Michel Pauly, un ingeniero geógrafo del rey; Juan Noel Turelure, de la escuela de artes, dibujante, pintor y diseñador; Juan Santiago Dubois, un relojero quien fue el encargado de cronometrar el paso de Venus y un sirviente Pedro Barnon (Auteroche, trad. en 2010; Archivo General de Indias, Portal de Archivos Españoles).

Auteroche era el único que había realizado la observación del tránsito de Venus en 1761 en Tobolsk, Siberia. Los instrumentos que utilizó en ese entonces fueron un cuarto de circulo de tres pies y dos péndulos, uno de los cuales era de Julien Le Roy; un telescopio de tres pies al que se adaptó un micrómetro; una máquina paraláctica que hizo construir para un telescopio de diez pies con un micrómetro que tenía dos oculares uno encima del otro; otro telescopio que se ajustaba al mismo micrómetro con dos oculares del mismo enfoque que los dos primeros (Auteroche, 1768). Además, en 1753 había observado el tránsito de Mercurio con los astrónomos Cassini III, Jacques Phillipe Maraldi y Jean-Bautiste Le Gentil (Nunis, 1982).

Instrumentos y prácticas instrumentales

Los instrumentos que se presentan a continuación fueron los que se reportaron en las observaciones astronómicas realizadas en Baja California Sur para el fenómeno del tránsito de Venus sobre el disco solar y se dan a conocer algunos de ellos que se han encontrado en colecciones de instrumentos científicos o en libros, como es el caso, esto último, del texto de Lalande *Astronomie*, Tomo II, segunda edición de 1771 en su sección *Livre treizième des instruments d'astronomie* (pp. 722-830), donde describe instrumentos astronómicos. Es complicado dar a conocer los instrumentos en imágenes, es decir, no se conocen fisicamente los instrumentos y por sus referencias en las descripciones de los observadores, no dan mucha información al respecto. Los instrumentos no estaban estandarizados y el material entre ellos variaba, además podríamos considerar que los instrumentos se realizaban "especialmente" para quien lo requería con aditamentos distintos, aunque en su esencia dependía su funcionamiento si eran telescopios refractores o telescopios reflectores, a los cuales se referían por anteojos, lunetas o telescopios.

Las prácticas de mediciones y observaciones astronómicas implican los observatorios que se montaron y los instrumentos que se utilizaron. En California se montan tres observatorios, uno de Velázquez en Santa Anna; y dos en San José del Cabo, uno por Doz y Médina y el otro por Auteroche.

Velázquez en Santa Anna dispone de "sus instrumentos, y haciendo construir un corto, pero capaz observatorio de madera, donde, aunque con alguna incomodidad, se pudiera lograr la firmeza y resguardo del péndulo, del barómetro y termómetro, con los demás instrumentos necesarios al efecto" (León y Gama en Cumplido, 1844, p. 543) realiza la observación del paso de Venus sobre el disco solar "en la cima del cerro más alto del lado oeste de Santa Ana desde donde, sin perder de vista el Golfo de California y la Ensenada de Cerralvo al nor-noreste, también puedo ver la puesta de sol del gran Océano Pacífico" (Velázquez en Nunis, 1982, p. 134).

Los instrumentos de Velázquez son:

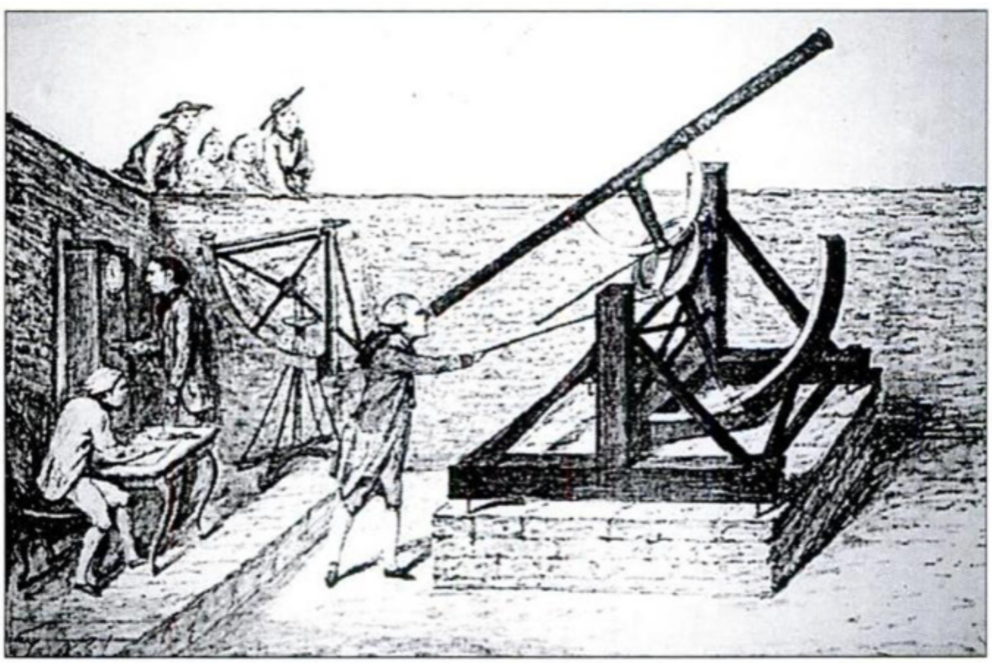
1. Un telescopio reflector gregoriano inglés de veintidós pulgadas de Short.
2. Un catalejo con un objetivo de 20 pulgadas de longitud focal y dos líneas de pelo extremadamente finas que se cruzan en ángulos rectos.
3. Un péndulo de segundo "cuyos errores no eran infinitos".
4. Tubo (anteojo) astronómico romano que no tiene más de 5 ½ pies de longitud, inventado por Kirk ("con dos lentes transparentes bien pulidas").
5. Un helioscopio compuesto por dos gafas ahumadas.
6. Un goniómetro inglés circular de poco más de un pie de diámetro, graduado con buena exactitud y con la división de Vernier en el diopter. Al no tener consigo un cuadrante astronómico, Velázquez utiliza este goniómetro.

En San José del Cabo y a quince días antes del paso de Venus se instala la expedición franco-española. Auteroche realiza observaciones preliminares para conocer la marcha del péndulo y ajustarla de ser necesario, "el balancín estaba demasiado largo, lo acorta y con un reloj logra obtener finalmente un tiempo medio con una precisión de pocos segundos" (Auteroche, trad. en 2010, p. 75).

El observatorio es un granero (Figura 1) que almacenaba maíz, con piso de tierra firme y bien compacta, del cual retira

> toda la parte del tejado que mira al Este, Sur y Oeste y volviendo a recubrirlo con telas que se replegaban o extendían a voluntad, a manera de que en un momento se pudiera ver u ocultar la parte del cielo que él juzgara necesaria (Auteroche, trad. en 2010, p. 76).

Figura 1. *Máquina paraláctica para un anteojo acromático.*



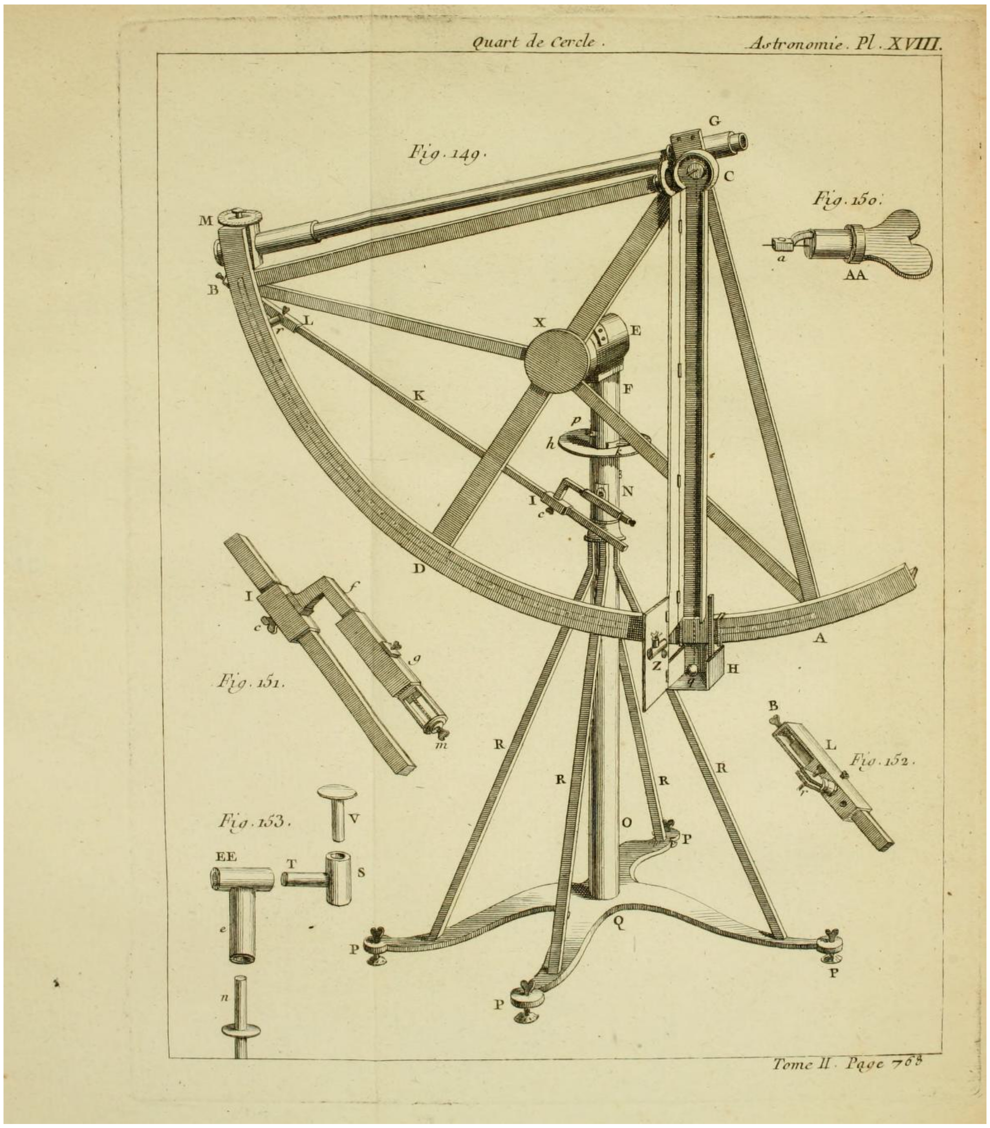
Fuente: máquina astronómica. Obra del pintor fránces Jean Noël Torelure (Fuster, 1998).

Los instrumentos de Auteroche son:

1. Un cuarto de círculo de 3 pies de radio, construido por Canivet (Figura 2).

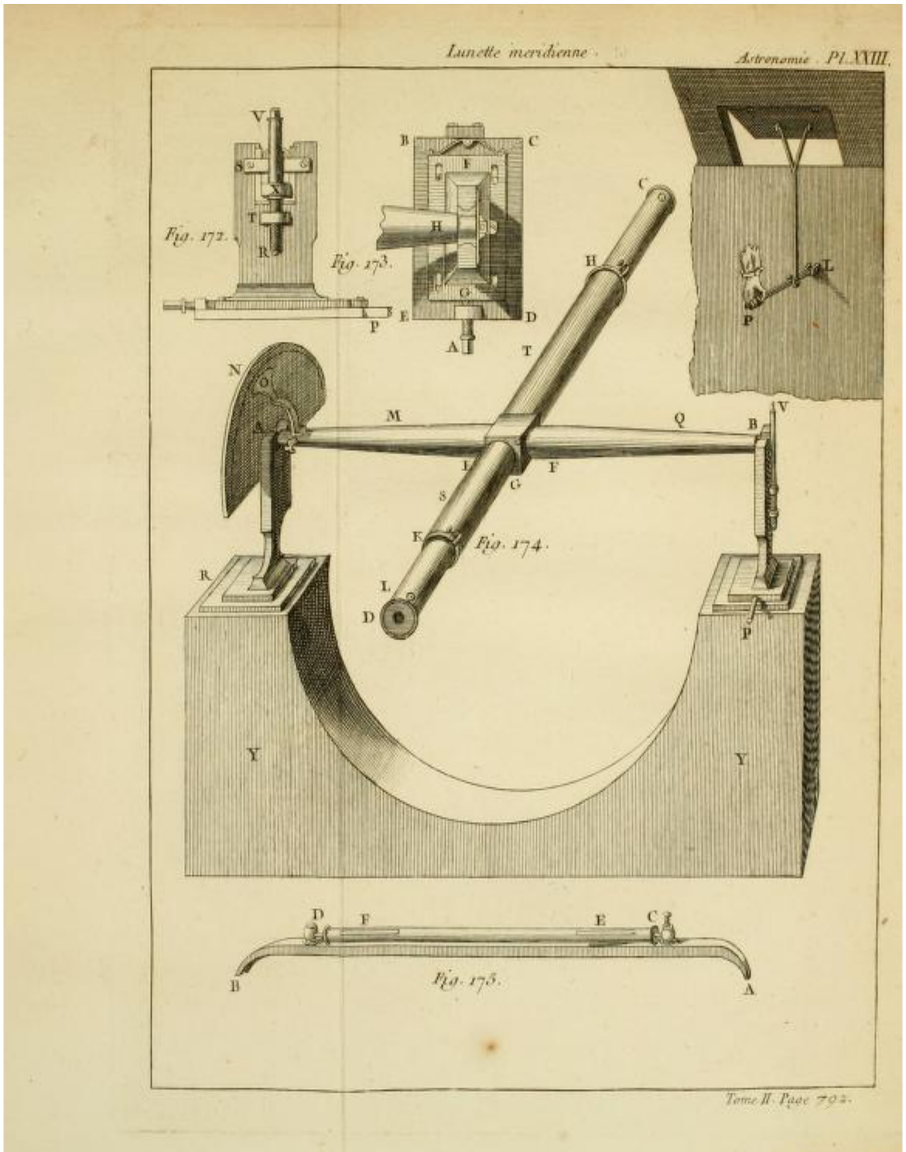
2. Un cuarto de círculo inglés de un pie y medio de radio.
3. Un instrumento de pasajes, construido por Canivet, también llamado lunette méridienne (Figura 3).
4. Una máquina paraláctica.
5. Una luneta acromática de diez pies de Dollond.
6. Una luneta acromática de tres pies de Dollond.
7. Un péndulo de Berthoud.

Figura 2. *Cuarto de circulo.*



Fuente: quart de cercle. Imagen tomada de Lalande (1771).

Figura 3. Instrumento de pasajes.



Fuente: lunette méridienne. Imagen tomada de Lalande (1771).

Sobre el montaje de los instrumentos

> …se construyeron tres bases de mampostería para asentar firmemente el cuarto de círculo de tres pies, el instrumento de los pasajes y la máquina paraláctica; enseguida se fijó el péndulo en un poste de cedro perfectamente seco que fue transportado desde San Blas para este propósito, media un pie de ancho y cerca de cuatro pulgadas de espesor, se enterró dos pies y medio y se fijó esta base con un casquillo de mampostería, lo aseguraron, además, con dos arbotantes que lo sostienen por los dos lados y un tercero que estaba apoyado contra un muro, atrás del que se hizo construir una pared de tabiques, de modo que era imposible fijar el péndulo de manera más segura y firme; estaba además encerrado dentro de una caja a cuyo alrededor se había pegado papel para evitar todo acceso del viento o polvo. Para sostener la luneta de diez pies, se fijó una viga de ocho a nueve pulgadas de diámetro, este soporte tenía en lo alto una base que giraba con mucha suavidad sobre un eje vertical y es aquí que se fijó la luneta, girando entre dos pivotes de modo que podía moverse con facilidad en sentido vertical u horizontal (Auteroche, trad. en 2010, p. 76).

Auteroche fue celoso de sus observaciones, aunque al principio había considerado la ayuda del ingeniero geógrafo Pauly "debido a la multiplicidad de observaciones para el tránsito de Venus", al final decidió realizarlas por él mismo, ya que las observaciones "delicadas por sí mismas […] serían aún mucho más difíciles de llevar a cabo por la posición del Sol, que se encontraría casi en el cenit". Cassini IV considera que fue la mejor decisión "pocas observaciones bien hechas y seguras, valen infinitamente más que un mayor número, pero de las que se podría tener cualquier sospecha y por lo tanto una incertidumbre" (Auteroche, trad. en 2010, p. 77). Jean-Dominique conde de Cassini, también encontrado como Jacques-Dominique de Cassini (1748-1845) se encarga de editar y publicar la bitácora de Auteroche quien muere el primero de agosto de 1769 en California por una epidemia que azotaba la región. Pauly se encarga de regresar con la bitácora del astrónomo a Francia.

El observatorio de Doz y de Medina lo construyen de madera "de 18 varas de largo y 6 de ancho, dejando dos aberturas en la dirección del paralelo que debe describir el sol el día de la observación, cubriéndolas de lienzo que, subiendo y bajando por medio de cordeles, dejen solamente descubierto lo que necesitan los anteojos, a fin de evitar la menos vibración que les pueda causar el viento" (Fuster, 1998, p. 160).

Los instrumentos de Doz y de Medina son:

1. Péndulo inglés hecho por Ellicott.
2. Un cuadrante inglés de dos pies de radio hecho por John Bird (Figura 4).
3. Dos monturas parallácticas.
4. Un telescopio ordinario de 14 pies.
5. Un telescopio acromático de 10 pies ingleses.
6. Un micrómetro inglés.

Figura 4. Cuadrante inglés.

Fuente: astronomical quadrant. Imagen tomada de la Collectiopn of Historical Scientific Instruments, Harvard University (http://waywiser.fas.harvard.edu/objects/11433/astronomical-quadrant?ctx=91209a48-4b94-4003-897d-030996b003cd&idx=4).

Los instrumentos de los observadores fueron utilizados para distintas observaciones, antes, durante y después del tránsito de Venus, las cuales se requerían para la determinar la latitud y la longitud de la ubicación del observatorio, por ejemplo.

Conclusiones

El alcance de las prácticas en la interacción global no solo se queda en el contacto de los observadores, cada uno trae consigo su propia formación y puede hablar desde el lugar donde se encuentra. El engranaje de posiciones que se solapan puede mostrar las comparaciones, las conexiones y la causalidad de este tipo de encomiendas, el alcance en distintos espacios, el local y el global. Aún hay más que reflexionar sobre el papel de las relaciones entre los sujetos, Velázquez llega a conocer a los miembros de la expedición franco-española que sobrevivieron a la epidemia que aconteció en San José en el momento de su arribo y que por la enfermedad. Velázquez sigue realizando observaciones astronómicas, pero ahora con los instrumentos de Auteroche que se quedan a su cargo y que posteriormente utiliza para determinar la longitud del Valle de México a su regreso de California.

El abordaje de este trabajo no considera estas mediciones como simples observaciones hechas al azar, sino como parte de una asociación "científica", inmersa en la conquista del poder político y económico de quién sabe más y trasciende su conocimiento por encima de otros (Blaut, 1993; Pyenson y Sheets-Pyenson, 1999; Raj, 2007). Tanto el caso de Chappe, los españoles y sus contemporáneos novohispanos pueden dar evidencia de lo contingente que llegó a ser esté tipo de encomiendas, de las implicaciones políticas y lo que representa lo local frente a lo que se considera el mundo externo o moderno.

Aún se está en revisión de archivos en el que se muestran las observaciones realizadas, descripciones de los observatorios montados y los instrumentos utilizados, falta complejizar sus prácticas en cuanto a cómo realizaban sus observaciones y las posibles conexiones entre ellos. Además, considero que esté tipo de trabajo inmerso en la historia de la ciencia puede aportar a la historia de las matemáticas analizando contenidos de libros de texto o el uso de las matemáticas en la époco novohispana donde aun no está clara la división entre disciplinas.

Agradecimientos: Agradezco a mi asesora de tesis por sus reiteradas retroalimentaciones y por su incondicional apoyo para que este proyecto salga adelante. También agradezco a CONACyT por su beca otorgada.

Referencias bibliográficas

Auterroche, C. (1768). *Voyage en Sibérie, fait par ordre du roi en 1761*. Chez Debure, pere.

Auteroche, J-B. C. (2010). *Viaje a Baja California para observar el tránsito de Venus sobre el disco del Sol, el 3 de junio de 1769.* Editado y publicado por Jean-Dominique conde de Cassini (M. A. Pérez y H. G. Albert, Trad.). Colección de Astronomía y su Historia.

Archivo General de Indias del Portal de Archivos Españoles. CHAPPE. CONTRATACION, 5511B, N.2, R. 69. http://pares.mcu.es/ParesBusquedas20/catalogo/description/163489.

Bernabéu, S. (1998). *Las huellas de Venus. El viaje del astrónomo Chappe d'Auteroche a Nueva España (1768-1769).* Breve Fondo Editorial.

Blaut, J.M. (1993). *The Colonizer's Model of the World. Geographical Diffusionism and Eurocentric History.* New York/ London: The Guilford Press.

Canales, J. (2009). *A the Tenth of a Second. A history.* The University of Chicaco Press.

Cházaro, L. (2009). Recorriendo el cuerpo y el territorio nacional: instrumentos, medidas y políticas a fines del siglo XIX en México. *Memoria y Sociedad, 13*(27), 101-120.

Capel, H. (1989). The History of Science and the History of Scientific Disciplines. Goals and Branching of a Research Program in the History of Geography, *Geo Crítica*, Universidad de Barcelona, 84. http://www.ub.es/geocrit/geo84.htm.

Cohen, P. C. (2001). The Emergence of Numeracy. En L. A. Steen (Ed.), Mathematics *and Democracy: The Case for Quantitative Literacy* (pp. 23-29). Woodrow Wilson National Fellowship Foundation.

Cumplido (1844). *El museo mexicano o Miscelaneapintoresca de amenidades curiosas e instructivas.* Tomo IV. Lo imprime y publica Ignacio.

Daston, L. y Galison, P. (2010). *Objectivity.* Zone Books.

Engstrand, I. (1976). *Royal Officer in Baja California, 1768-1770. Joaquin Velazquez de Leon.* Dawson's Book Shop.

Fuster, F. (1998). *El final del descubrimiento de América: California, Canadá y Alaska (1765-1822): aportación documental del Archivo General de la Marina.* Universidad de Murcia, Servicio de Publicaciones.

Galison, P. (1997). Imagen and Logic: A material culture of Microphysics. University of Chicago Press.

Gazol, A. (s. f.). Tránsito de Venus 2012. https://www.irya.unam.mx/web/index.php/news/451-transito-venus-2012.

Lalande, J-J L. de (1771). *Astronomie.* Seconde édition revue et augmentée. Tome second. Chez la Veuve DESAINT, rue du Foin Saint Jacques.

Lafuente, A. y Delgado. A. J. (1984). *La geometrización de la Tierra: Observaciones y resultados de la expedición geodésica hispano-francesa al virreinato del Perú (1735-1744)*. Consejo Superior de Investigaciones Científicas Instituto Arnau de Vilanova.

Nunis, D. B. (1982). *The 1769 Transit of Venus. The Baja California Observationes of Jean-Baptiste Chappe d'Auteroche, Vicente de Doz, and Joaquín Velázquez Cárdenas de León.* Natural History Museum of Los Angeles County.

Porter, T. (1995). *Trust in Numbers: The Pursuit of Objetivity in Science and Public Life.* Princenton University Press.

Pyenson L. y Sheets-Pyenson, S. (1999). *Servants of Naturals. A History of Scientific Institutions, Enterprises and Sensibilities*. London: HarperCollins.

Raj, K. (2007). *Relocating Modern Science. Circulation and the Construction of Knowledge in South Asia and Europe, 1650-1900*. Nueva York: Palgrave Macmillan.

Souto, M., Salmerón, A. y Mayer, L. (Comp.) (2017). *Hacia una historia global e interconectada. Fuentes y temas para la enseñanza (siglos XVI-XIX).* Instituto Mora, UNAM.

Sellés, M. A. (2000). *Navegación astronómica en la España del siglo XVIII.* Universidad Nacional de Educación a Distancia.

Van Helden, A., & Hankins, T. (1994). Introduction: Instruments in the History of Science. *Osiris, 9*, 1-6.

Wise, M. N. (coord.) (1995). *The Values of Precision*. Princeton University Press.

Werner, M. y Zimmermann, B. (2004). *De la comparaison à l'Histoire Croisée.* Le genre Humain.

DE LA GEOMETRÍA AL CÁLCULO: COVARIACIÓN LOGARÍTMICA-EXPONENCIAL

FROM GEOMETRY TO CALCULUS: LOGARITHMIC-EXPONENTIAL COVARIATION

Marcela Ferrari Escolá, José Antonio Bonilla Solano
Universidad Autónoma de Guerrero. (México)
mferrari@uagro.mx, jbonillasolano@gmail.com

Resumen:
Argumentos geométricos, muy presentes en la generación del Cálculo, están ausentes en el discurso matemático escolar actual. En esta investigación estamos estudiando como impacta, en el desarrollo del razonamiento covariacional logarítmico-exponencial, diseños de actividades que rescatan argumentos del siglo XVIII, en profesores en formación. La metodología utilizada es la investigación basada en diseño. Reportamos el análisis de las producciones de 3 informantes que participaron en un experimento de enseñanza en el marco de un curso de Didáctica de las matemáticas a nivel universitario logrando abstraer el nivel covariación continúa fragmentada y dándonos luz para reflexionar sobre el diseño utilizado.

Palabras clave: razonamiento covariacional – argumentos geométricos de Agnesi – función exponencial

Abstract:
Geometric arguments, often present in the generation of Calculus, are absent in the current school mathematical discourse. In this research, we are studying how the design of activities which rescue eighteenth-century arguments impact on the development of co-variation logarithmic-exponential reasoning in pre-service teachers. The methodology used is design-based research. We report the analysis of the productions of 3 informants who were involved in a teaching experiment in the framework of a Didactics of Mathematics university course, managing to abstract the fragmented continuous covariation level and giving us light to reflect on the design used.

Keywords: covariational reasoning - Agnesi's geometric arguments – exponential function

Introducción

Los recientes estudios sobre la enseñanza de las funciones logaritmo y exponencial han sido reportados desde diferentes perspectivas buscando relacionar ambas funciones. Algunos trabajos han documentado el paso de las relaciones exponenciales a las logarítmicas a través de la examinación del pH (Glassmeyer et al., 2020); o sobre cómo una clase sobre estas funciones, mediada por herramientas tecnológicas, impacta en estudiantes (Gruver, 2018); y también en la importancia de estas funciones para entender las noticias relacionadas con la pandemia de la COVID-19 que enfrentamos hace poco tiempo (Siller et al., 2022).

En efecto, la naturaleza de ambas funciones hace que no podamos pensar en una sin reconocer a la otra. En este sentido, Kuper y Carlson (2020) proponen un conjunto de ideas fundamentales para el entendimiento de estas funciones, poniendo énfasis en el crecimiento exponencial, el cual refiere que en la relación de dos cantidades A y B se entiende que por cambios iguales en la cantidad A, la cantidad B crece por un factor constante, entonces las dos cantidades se relacionan exponencialmente.

Por su parte, Ferrari et al. (2016) robustece la idea de ambas funciones al entenderlas como la coexistencia de una variación regida por razones constantes y otra por diferencias constantes a la que llama covariación logarítmico-exponencial. En su trabajo los autores reconocen que la graficación y las expresiones algebraicas son evidencia del desarrollo del razonamiento covariacional (Thompson y Carlson, 2017) logarítmico-exponencial.

En esta investigación nos interesa analizar sobre la génesis de diseños de aprendizaje, en libros de Geogebra, como disparadores de la covariación logarítmica-exponencial, sustentados en la recuperación de argumentos geométricos retomados de los trabajos del libro *Instituzioni Analitiche ad uso della gioventù* de Agnesi (1747), quien propone la construcción de la curva logarítmica a partir de una partición en el eje x con una progresión aritmética y la construcción de rectas perpendiculares en proporción geométrica que corresponda a esa partición.

Marco teórico

Esta investigación se sustenta en una visión socioepistemológica (Cantoral, 2013) recuperando argumentos primigenios que dan fortaleza a la discusión del discurso matemático escolar actual y que emergen de prácticas sociales propias de comunidades específicas, en nuestro caso, de los matemáticos del siglo XVII y XVIII. Incorporamos en esta discusión, para establecer la trayectoria de aprendizaje, elementos del razonamiento covariacional de Thompson y Carlson (2017), niveles que hemos adaptado para el desarrollo del razonamiento covariacional logarítmico-exponencial desde estudios socioepistemológicos (Ferrari y Farfán, 2010; Ferrari, 2008) que sustentan la construcción del saber (Tabla 1).

Tabla 1. *Síntesis de niveles de razonamiento covariacional logarítmico-exponencial.*

Nivel	Características
0.- Sin coordinación	La atención está en el crecimiento de una variable sin reparar en la variación de la otra.
1.- Pre-coordinación de valores	Se percibe que, si una variable aumenta una cantidad constante, el valor de la otra variable cambia (aumenta o disminuye) de manera proporcional a la anterior.
2.- Coordinación fragmentada de valores	Se percibe que una variable cambia sumándole una constante (crecimiento lineal) y la otra variable cambia multiplicándose por otra constante (crecimiento geométrico) sin abstraer un objeto multiplicativo.
3.- Coordinación de valores	Se coordinan los valores de una variable con los valores de otra variable creando una colección discreta de pares. Emerge un objeto multiplicativo al predecir, en conjunto, el siguiente par de datos, uno sumando, el otro multiplicando.

4.- Covariación contínua fragmentada	Se puede esbozar una gráfica continua que ajuste todos los puntos construidos en un plano cartesiano, pero no se abstrae la completitud de los conjuntos de valores que se involucran. Se abstrae una relación entre las variables.
5.- Covariación continua suave	Se explicita una relación entre las variables considerando que $f(x+\Delta x)/f(x)$ es constante y que los números reales constituyen dominio e imagen.

Fuente: adaptación de niveles de razonamiento covariacional de Thompson y Carlson (2017).

Metodología

La metodología utilizada es la investigación basada en diseño que implica procesos de iteración y bucles de retroalimentación, de manera que el desarrollo de la investigación tiene lugar a través de ciclos de diseño, análisis y rediseño donde se involucra experimentos de enseñanza para la recopilación de datos (Steffe & Thompson, 2000).

El diseño del experimento de enseñanza utilizado en esta investigación se basó en un estudio socioepistemológico reportado por Ferrari (2008) así como en otros experimentos de enseñanza (Ellis et al., 2016; Ferrari-Escolá et al., 2016; Trejo et al., 2021), donde se utilizó, como constructo teórico articulador de los diseños de aprendizaje, que las funciones logarítmicas y exponenciales emergen de la coordinación de un crecimiento aritmético y un crecimiento geométrico, isomorfismo que llamaremos *covariación logarítmica-exponencial*.

En esta investigación nos cuestionamos sobre: ¿qué argumentos evidencian el desarrollo del razonamiento covariacional logarítmico exponencial en profesores en formación trabajando en modalidad virtual?

Toma de datos y data análisis

El experimento de enseñanza se aplicó con 11 estudiantes de tercer semestre de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero, en la asignatura de Didáctica de las Matemáticas I. Durante tres semanas se realizaron actividades en modalidad síncrona, de 100 minutos (3 veces a la semana) a través de la plataforma zoom, y asíncronas con el uso de libros de Geogebra. En las sesiones síncronas los estudiantes eran divididos en dos equipos (trabajando en una nueva tarea en los libros o discutiendo lo trabajado en lo asíncrono) y después se hacía una discusión general que se esperaba nutriera los reportes finales de los estudiantes en los libros de GeoGebra

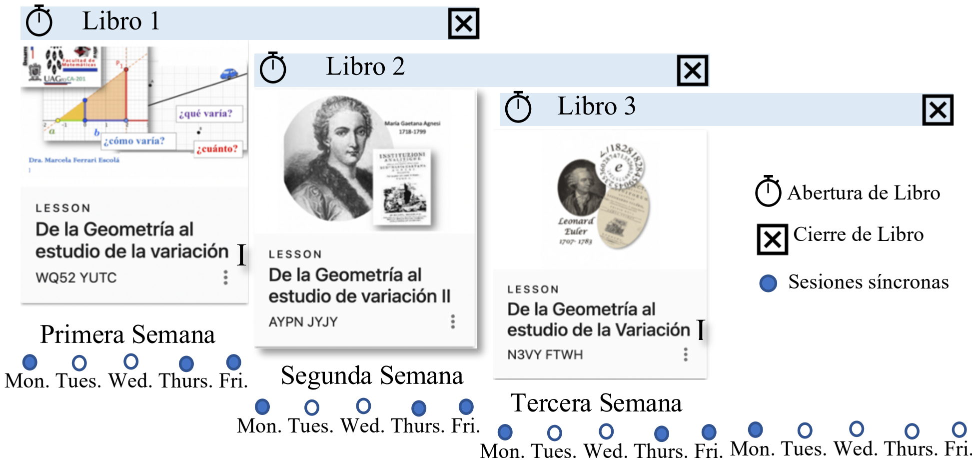
Las sesiones por la plataforma zoom fueron videograbadas y se transcribieron episodios importantes para el objetivo de la investigación. Además, se guardaron las producciones de los estudiantes (notas y construcciones geométricas) en los libros de Geogebra compartidos en el classroom de esta comunidad. En este trabajo se retoma información de tres estudiantes que discuten sobre argumentos geométricos para la construcción de la función exponencial con base 3. Los informantes se identifican como E1, E2 y E3 asignándole la letra P al profesor, autor principal de este reporte.

El análisis de los datos se realizó con la discusión de los argumentos geométricos que generaban los tres informantes, se comparó los trabajos realizados en las notas del classroom de Geogebra, con la explicación que ofrecían en las sesiones síncronas. Primero, los autores de este trabajo de forma autónoma analizaban a cada sujeto y su desempeño, y después se discutían dichos análisis en sesiones semanales para hacer un cruce de información.

Trayectoria hipotética de aprendizaje

En el experimento de enseñanza se trazó una trayectoria hipotética de aprendizaje en tres etapas. Para cada etapa se diseñó un libro de GeoGebra con reflexiones escritas, espacios para construir, applet de exploración, notas para reportar ideas, preguntas para reflexionar y vídeos de explicación (Figura 1).

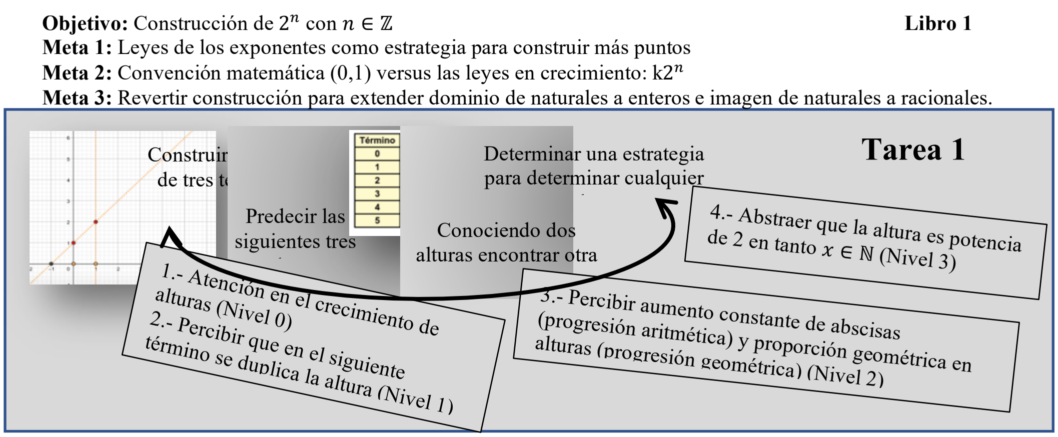
Figura 1. *Organización de las etapas.*



Fuente: elaboración propia.

En este reporte, sólo presentaremos un primer análisis de la producción de tres de los participantes, en tareas del primer libro (Figura 2) y, en particular, el desafío final donde se les solicitaba que construyeran geométricamente 3^n.

Figura 2. *Síntesis del libro 1.*

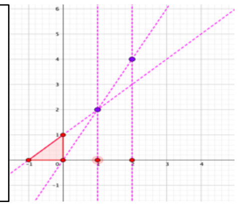


Fuente: elaboración propia.

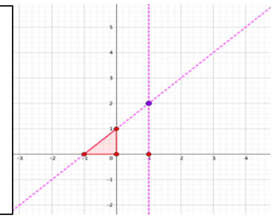
La construcción geométrica disparadora del experimento de enseñanza (Figura 3) se fundamenta en el libro de Agnesi: *Instituzioni Analitiche ad uso della gioventù italiana* publicado en 1747. Esta construcción invita a construir una serie de triángulos rectángulos semejantes que siempre tengan la misma proporción entre los lados horizontales, lo que redunda en el crecimiento proporcional de los lados verticales, es decir, generan una progresión geométrica comandada por el desplazamiento lineal de los triángulos.

Figura 3. *Síntesis de construcción de puntos.*

- Particionar el eje x con $\Delta x = 1$
- Trazar triángulo rectángulo (0,0), (-1,0) (0,1) Extender hipotenusa e intersectar con vertical por (1,0) generando un triángulo semejante



- Recorrer la construcción de triángulos rectángulos semejantes
- Mantener constante la subtangente, es decir, la medida de las dos bases de los triángulos (1:2)



Fuente: elaboración propia.

Resultados

En la primera sesión de trabajo, en la sala zoom general, el profesor inicia la discusión de la construcción de los puntos de la curva en el applet de GeoGebra y va indicando a los estudiantes cada trazo a realizar. Se les solicita predecir la siguiente altura, y es E1 el primero en percibir la sucesión 1, 2, 4, 8, 16 (Extracto 1).

Extracto 1: *se va multiplicando*

E1*: Va 1, 2, 4, 8 ya después el siguiente 16*

P: *¿por qué 16?*

E1: *Porque se va multiplicando por 2 la altura anterior, por eso tenemos 1 por 2 es 2, 2 por 2 es 4, por 2 es 8 y por 2 es 16*

Observamos que E1 se enfoca, al igual que sus compañeros, en predecir el valor de la siguiente altura ya que la posición de esta es inmediata al ser una instrucción directa de ir moviéndose uno a uno al construir nuevos triángulos. Argumento que es aceptado por el grupo por lo que consideramos que da evidencia de que se encuentran en un nivel 0 de razonamiento covariacional: *sin coordinación*.

Para propiciar la discusión de la propuesta de E1, se abren dos salas de zoom de 5 estudiantes. Unos minutos después, le comentan al profesor: “mágicamente llegamos a que es la ecuación 2^x”(E2) siendo cuestionados para argumentar su respuesta (Extracto 2)

Extracto 2: *es potencia de 2*

E3: *por la observación* 2^0 *es 2…*

E2: ***Si*** $\mathbf{2^0}$ ***es 1,*** $\mathbf{2^1}$ ***es 2, y así progresivamente,*** $\mathbf{2^4}$ ***es 16***

E3: *ajá,* 2^5 *es 32*

E2: *el sustento, tiene que haber realmente algo geométrico, […]*

P: *[…] la idea es ver si funciona, si les funciona ¿por qué?*

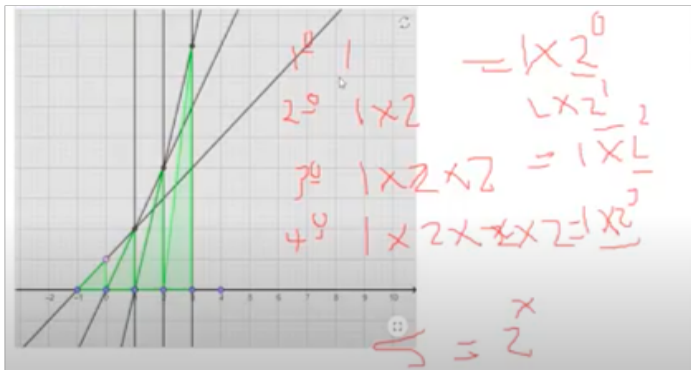
E1*:* ***porque es la sucesión del 2… de la potencia del 2***

E1, E2 y E3 consideran que el crecimiento de las alturas responde a potencias de dos, sin prestar atención en la posición, es decir, se enfocan en una sola variable. Otro estudiante (E4), utilizando la herramienta “anotar” de zoom, comparte su explicación (Extracto 3) incorporando la idea de “x” como lo que varía; asociándolo a la cantidad de veces que se multiplica por 2 pero no relacionándolo a la construcción geométrica o a la partición de la horizontal.

Extracto 3: *lo que no varía*

E4; *¿cuál es el primer lado? Es 1 ¿no?, en el caso de 1, pero en el segundo caso es 1 por 2, porque se hace 2, […] entonces si lo simplificamos es 1 vamos a decir que se multiplicó por 2 pero a la 0, entonces el otro es 1 por* 2^1*, igual este por* 2^2 *y este es igual a 1 por* 2^3*, pero como el 1 no afecta entonces nos quedamos con todo esto y en este caso* ***¿cuál es lo único que no varía? es el 2 pero lo que sí varía es lo de arriba, entonces llamémoslo X y así es como lo obtenemos****.*

Figura 4. *Explicación de E4 sobre lo que no varía.*



Fuente: producción del estudiante E4.

Esta explicación no conforma a nuestro informante E2 como demostración y propone utilizar para esta tarea “*las distancias de las bases de los triángulos*”, en tanto E4 propone demostrarlo “*por inducción matemática*”. Ideas que no prosperan al interesarse en estudiar las rectas inclinadas que generan los puntos dejando de visualizar la semejanza de triángulos que provoca este tipo de crecimiento. Comienzan a percibir que no basta con conocer el patrón de crecimiento de las alturas para demostrar que se trata de la potencia de base 2 (Extracto 4).

Extracto 4: *hallar un patrón*

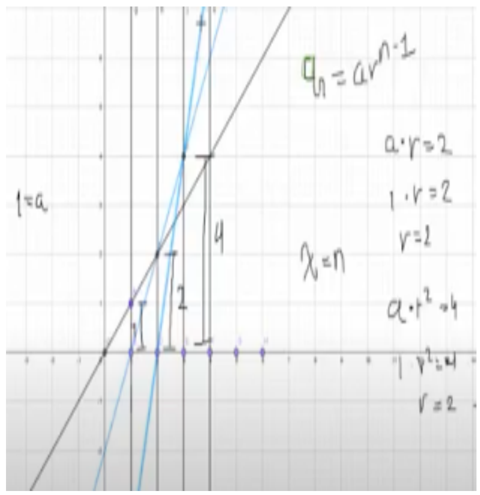
E2*: […]el problema que tenemos que* ***hallar es un patrón aquí*** [señala con una flecha la construcción geométrica]*,* ***no solo decir los patrones que encontramos con las distancias de aquí*** [señala cada una de las alturas construidas]*, es decir que aquí mide 2, aquí mide 4, aquí 8,* ***no sólo ese patrón es válido sino los patrones de esta recta*** [indica con el cursor la primera recta inclinada de la construcción]...

En la segunda sesión, en su búsqueda por describir analíticamente la construcción de puntos, comienzan a utilizar la fórmula de una sucesión geométrica $a_n = ar^{n-1}$ que propusiera E1 (Extracto 5). E2 considera necesario consensuar quien es “n” y propone $x = n$, variable que comienza a ser vinculada con la partición de la recta horizontal. Sin embargo, rehacen la construcción iniciando en (0,0) por lo que se pierde la convención matemática (0,1) como punto en la curva estudiada. Observamos que el grupo incursiona en el nivel 1 (*precordinación de valores*) pues cuantifica el cambio de los valores pudiendo determinar la siguiente abscisa por un lado y la siguiente ordenada por otro al incorporar el plano cartesiano en la construcción geométrica.

***Extracto 5**: n es x*

*E2: […] si podemos usar la ecuación que decía[…](E1), la de $a_n = ar^{n-1}$, donde **si hablamos quién es n entonces lo definimos como el intervalo, es decir, cuánto vale el valor de X** pues, X va a ser el valor de X, entonces… como tenemos que **la primer distancia del triángulo es 1, entonces sería nuestra variable**, este 1 sería igual a "a" y como el siguiente número sería 2, entonces usando la misma variable "a" sería "a" por algún número "b" igual a 2… entonces, bueno vamos a ponerle r, entonces … **entonces a sería 1 por algún número de r sería 2,** entonces 1*r=2, bueno en pocas palabras r sería igual a 2, **y entonces como la tercera distancia va a ser 4, y así sucesivamente** tenemos que "a" por la anterior, que sería, […] sería 4, tendríamos que se sigue cumpliendo, **esto vale uno y esto vale r^2, esto tiene que ser que r valga 2, y así sucesivamente se sigue cumpliendo**.*

Figura 5. *Explicación de E2.*



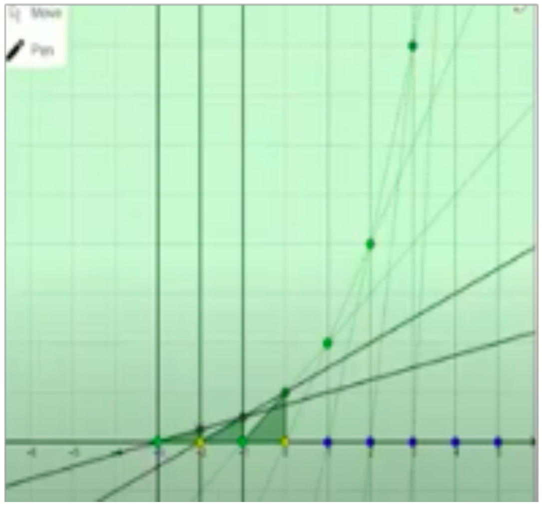
Fuente: producción del estudiante E2.

Consideramos que los informantes incursionan en el nivel 2*: coordinación burda de valores* ya que perciben que ambas cantidades aumentan a diferente ritmo. Una, sigue la partición del eje x donde emergen las alturas en tanto que éstas creces duplicando la anterior. Rápidamente descubren cómo construir puntos hacia la izquierda siguiendo el proceso propuesto por Agnesi (Extracto 6), lo cual podría dar evidencia de que han abstraído el objeto multiplicativo que implica el nivel 3: *Coordinación de valores*, es decir, son capaces de determinar cualquier punto de la construcción, en el mundo de los números racionales.

***Extracto 6:** sigue el mismo patrón*

E4*: [...] **porque sigue el mismo patrón de 2^n**, por ejemplo, ahorita el que fue el anterior sería 2^n a la -1 y 2^n a la -1 sería un medio y ahí está la altura es un ½*

Figura 6. *Construcción de puntos hacía la izquierda.*



Fuente: producción del estudiante E4.

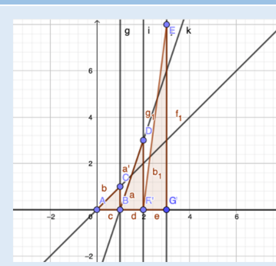
Argumentos sobre cómo construir 3^n

La meta de la trayectoria hipotética de aprendizaje del primer libro fue que los participantes desarrollaran razonamiento covariacional logarítmico exponencial, en el ámbito discreto, desde una construcción geométrica, considerando que profundizarían el nivel 3 al desafiarlos a construir geométricamente 3^n. Se les solicitó que, de manera asíncrona, resolvieran la actividad. E1, E2 y E3, los informantes de este reporte son los que presentan ideas interesantes para analizar por lo que se les invitó, en la sesión síncrona, a explicar a sus compañeros la solución que proponen.

Argumentos de E1

En el libro de GeoGebra encontramos una afirmación de E1 que no se ajusta a la gráfica que propone. La inspección del protocolo de construcción de GeoGebra confirma que se determinaron los puntos y luego se trazaron las rectas involucradas siendo "altura más la mitad de la altura" el argumento escrito.

Tabla 2. *Producción de E1.*

Producción asíncrona	
Escrito	**GeoGebra**
Se traza una perpendicular en cada punto de x, luego formamos el primer triángulo el cual tiene base=lado=1, trazamos una pendiente que esta al punto de su altura + la mitad de su altura, y seguimos este procedimiento	

Fuente: elaboración propia.

En la sesión síncrona, E1 proyecta su pantalla de GeoGebra y construye el triángulo inicial utilizando los puntos (0,0), (1,0) y C = (1,1). Luego, explica (Extracto 7) su idea de cómo construir puntos de la curva.

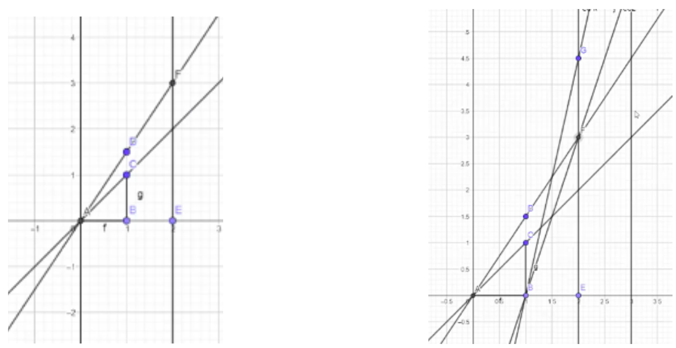
Extracto 7: *La altura más la mitad.*

P: *[...] y el D ¿cómo salió ese punto?*

E1: ***Yo encontré que es la altura más la altura de la mitad, o sea 1 más ½*** [...se le pregunta cómo construir el siguiente punto]

E1: […] ***tendríamos que sacar otra vez la recta del punto anterior que sería B con el nuevo punto****, ahora pues hacemos lo mismo ¿no? que la altura es 3 más 3/2 que sería 4.5 tendríamos un nuevo punto que sería (2, 4.5) trazamos otra vez la recta y como se ve en el siguiente punto es… déjeme pongo la… es x es igual a 3 lo subimos y aquí está el punto 9 y así me fui yendo.*

Figura 7. *Construcción de* 3^n *de E1.*



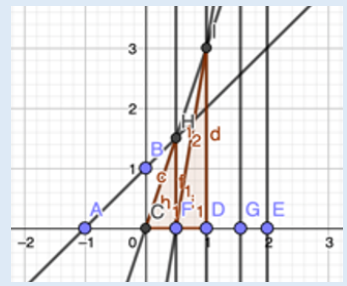
Fuente: producción del estudiante E1.

E1 propone la construcción de puntos mediante rectas de mayor pendiente que la que pasa por el punto conocido de la curva. Comenta que basta ir agregando la mitad de la altura del punto anterior y trazar la recta para hallar el siguiente punto a una distancia unitaria. No repara en que su idea tiene que ver con la construcción de triángulos semejantes de razón 1:2 lo cual convierte su construcción en la duplicación de un elemento auxiliar. Si bien logra construir puntos de la curva 3^n no logra triplicar la altura del punto anterior.

Argumentos de E2

En el libro de GeoGebra, E2 presenta (Tabla 3) una idea similar a la de E1 e intenta rescatar elementos de la construcción de Agnesi de tareas anteriores. En su explicación menciona la incorporación de elementos auxiliares (Extracto 8) que corresponden a la partición del eje horizontal y rectas que generan puntos particulares que coadyuvan en la búsqueda de puntos pertenecientes a la curva en cuestión.

Tabla 3. *Producción de E2.*

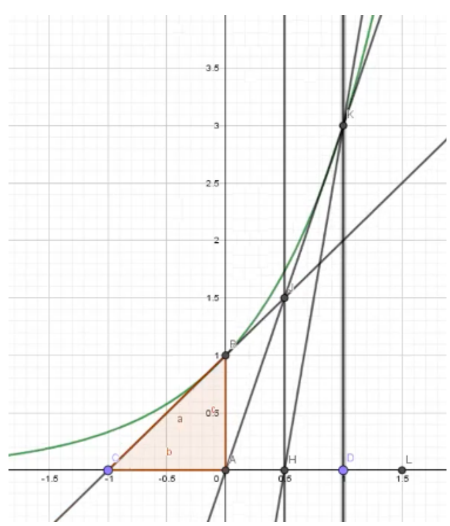
Producción asíncrona	
Escrito	**GeoGebra**
Lo que hice fue similar al recetario de Agnesi, pero ahora usaremos los puntos medios de los enteros para usarlo como punto de apoyo donde ese punto no pertenecerá a la curva, pero los enteros sí. Observamos por la misma idea del recetario Agnesi seguimos que continúa la semejanza de triángulo, ya que sigue con la recta son en 3 puntos colineales y que siempre en los enteros son una recta perpendicular.	

Fuente: elaboración propia.

Extracto 8:

E2: […]… aquí tengo la función sólo la grafiqué para que de ahí partiéramos, pero sabemos que vamos a iniciar en este primer triángulo… yo tengo la idea de que partamos con esta recta que se inscribe de -1 a 1 algo similar como 2^x*, y encontremos la intersección del punto… esta intersección* [punto J] *pero esta intersección es con el punto medio de x* [se refiere al punto H] *se puede decir, de 0 a 1 el punto medio es 0.5 … trazo su perpendicular y éste* [primer punto intersección J] *va a ser su punto… este punto lo vamos a utilizar como lo hacíamos en el pasado,* ***ponemos una recta y ahora sí con el 1*** [se refiere al punto D] ***vamos a encontrar la intersección que nos interesa*** *que va a ser éste punto* [segundo punto intersección K] ***que está sobre la curva****, entonces en pocas palabras es el mismo proceso, nada más que ahora* ***usamos el 0.5 como apoyo****, no representa nada en la gráfica… lo usamos como apoyo para crear el punto que sí está en la gráfica que es en los naturales o en los enteros…*

Figura 8. *Construcción geométrica de E2.*



Fuente: producción del estudiante E2.

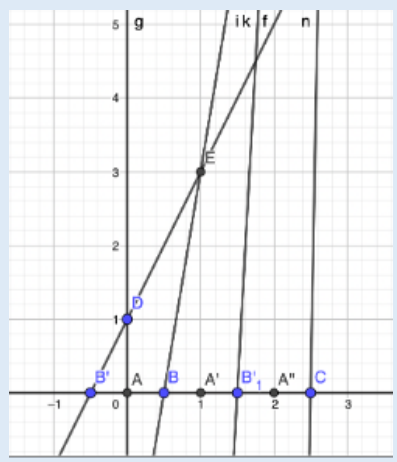
Para su explicación E2 primero gráfica la curva perteneciente a 3^x, después continua con la construcción de puntos auxiliares donde el primer punto (0,0.5) le permite construir una segunda recta que al intersectar con la recta $x = 1$ genera un punto que pertenece a la curva en cuestión.

Al igual que E1, en la construcción de E2 hay una construcción de la duplicación de elementos auxiliares. El no razonar sobre las implicaciones geométricas de la construcción anterior de 2^x, su argumento se basa en la búsqueda de puntos que satisfagan la gráfica de la función que conocen previamente.

Argumentos de E3

E3 demuestra en su producción (Tabla 4) haber abstraído la esencia de la covariación logarítmica exponencial ya que argumenta desde la construcción de los triángulos semejantes respetando la proporción constante. Es decir, afirma que la partición del eje horizontal, que determina la base de los triángulos, debe ser constante, en este caso particular de base 3 el primer triángulo debe tener base 0.5 y el triángulo semejante 1.5 (Extracto 9).

Tabla 4. *Producción de E3.*

Producción asíncrona	
Escrito	**GeoGebra**
Observé la estrategia de la primera progresión geométrica con la generalización que era 2^n, siendo n el término de la altura a conocer. Propuse que la **base de los triángulos semejantes es constante,** y era eso a descubrir, pues el procedimiento era similar. Dígase que la base sea de longitud 0.5, y que las rectas trazadas sean $x = i, \quad i = 1,..,m$. Las intersecciones de las perpendiculares con la recta, que es parte de la hipotenusa del triángulo es un punto que pertenece la función 3^x. **Se puede observar que, al obtener una progresión geométrica, donde la función c^n, donde c sea una constante y n el término, cumple la misma idea de la semejanza de triángulos, donde la base no varía, y la altura progresivamente va a aumentando**	

Fuente: elaboración propia.

Idea que refuerza en la sesión síncrona al explicar construyendo en GeoGebra los triángulos semejantes necesarios para determinar puntos de la función 3^x

Extracto 9: *Base constante de los triángulos*

E3: hice la misma idea de ***tener una base constante de los triángulos y la base constante sería 0.5,*** *lo que hice en lugar de empezar en 1, empezar en 0.5 y trazar líneas perpendiculares, por ejemplo x a la uno, o a la dos… después de trazar las perpendiculares,* ***las perpendiculares las trazo de uno en uno, estas perpendiculares las voy a intersecar con las hipotenusas de los triángulos,*** *no hice el punto auxiliar que hizo [E1] ahí sí me confundí, porque yo empecé desde el 0.5 y trace la hipotenusa con la intersección en el eje Y, y seguí el mismo ejemplo pero con una base distinta en los triángulos*

A diferencia de E1 y E2 quienes no se cuestionaron sobre el primer triángulo rectángulo unitario, E3 inicia cambiando las bases de este para que la proporción sea 3 (Extracto 10). Idea que generaliza para otros casos.

Extracto 10: *La base inicial disminuye la altura aumenta*

P: ***y … ¿por qué te diste cuenta de cambiar la base?***

E3: ***Más o menos me fui guiando de las actividades anteriore****s de la que había un* 3^n *bueno de la altura que estábamos checando, más o menos me fui viendo ahí lo de los exponentes de la base 3, más o menos de ahí me di una idea de ver lo diferente que podrían ser los exponentes y no sé, como que cambie la base,* ***si la base la disminuyo proporcionalmente la altura puede aumentar***

Conclusiones

La importancia de argumentos geométricos en la génesis del cálculo ha ido desapareciendo a la par de ir fortaleciendo los argumentos rigurosos del álgebra. Argumentar desde lo aritmético o algebraico, no provocó problema en los estudiantes, pero hacerlo desde lo geométrico, generó dudas y debates entre ellos.

Los tres estudiantes logran abstraer la covariación logarítmica exponencial sin embargo consideramos que sólo E3 alcanza el nivel 4: *covariación continúa fragmentada* al generar explicaciones sobre cómo generalizar la construcción geométrica para otras bases cuestionando la proporción de los triángulos semejantes. E1 y E2 no reflexionan sobre la importancia de la subtangente constante como disparador de la base de la función exponencial. Sin embargo, logran construir puntos de potencias de otras bases incorporando un elemento auxiliar que, al duplicar logran la altura necesaria pues mantienen la proporción 1:2 en la base de los triángulos; argumento que rompe el patrón de crecimiento único logrado por E3. Si bien los tres informantes reconocen la función exponencial desde la primera tarea, E1 y E2 no logran desprenderse de fórmulas conocidas y de la gráfica de la curva para generar argumentos lejos de una reflexión geométrica.

Referencias bibliográficas

Agnesi, M. (1748). *Instituzioni analitiche ad uso della gioventu italiana*. Milano, Italia: Nella Regia Ducal Corte.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa: estudios sobre la construcción social del conocimiento*. Gedisa.

Confrey, J., & Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(1), 66–86.

Ellis, A. B., Ozgur, Z., Kulow, T., Dogan, M. F., & Amidon, J. (2016). An exponential growth learning trajectory: Students' emerging understanding of exponential growth through covariation. *Mathematical Thinking and Learning*, *18*(3), 151–181.

Ferrari-Escolá, M., Martínez-Sierra, G., & Méndez-Guevara, M. E. M. (2016). "Multiply by adding": Development of logarithmic-exponential covariational reasoning in high school students. *The Journal of Mathematical Behavior*, *42*(June), 92–108.

Ferrari, M. (2008). *Un acercamiento socioepistemológico a lo logarítmico: de multiplicar sumando a una primitiva*. México: Research Centre of Advanced Studies of the National Polytechnic Institute (Ph.D. Dissertation).

Ferrari, M. & Farfán, R.M. (2010). Una socioepistemología de lo logarítmico *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 13(4-I), 53-68.

Fowler, S., Cutting, C., Fiedler, S.H.D & Leonard, S.N. (2022). Design-based research in mathematics education: trends, challenges and potential. *Mathematics Education Research Journal.* https://doi.org/10.1007/s13394-021-00407-5

Glassmeyer, D., Smith, A. & Gardner, K. (2020). Developed teacher content understanding by integrating pH and logarithmic concepts. School Science and Mathematics, 120, 165-174.

Gruver, J. (2018). A trajectory for developing conceptual understanding of logarithmic relationships. Journal of Mathematical Behavior, 50, 1-22.

Kuper, E. y Carlson, M. (2020). Foundational ways of thinking for understanding the idea of logarithmic. *Journal of Mathematical Behaviour*, 57, 1-18. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2019.100740

Siller, H.S., Elschenbroich, H.J., Greefrath, G. y Vorhölter. (2022). Mathematical modelling of exponential growth as a rich learning environment for mathematics classrooms. ZDM-Mathematics Education.

Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In R. Lesh & A. E. Kelly (Eds.), *Research design in mathematics and science education* (pp. 267–307). Hillsdale, NJ: Erlbaum

Thompson, P. W. (2008). Conceptual analysis of mathematical ideas: Some spadework at the foundations of mathematics education. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano, & A. Sépulveda (Eds.), *Plenary paper delivered at the 32nd Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 31–49). Morelia, México.

Thompson, P. W., & Carlson, M. (2017). Variation, covariation and functions: Foundational ways of mathematical thinking. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421–456). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Trejo Martínez, M., Ferrari Escolá, M. & Martínez Sierra, G. (2021). Covariación Logarítmico-Exponencial en futuros profesores de matemáticas. Un estudio de caso. *Educación Matemática*, 33(1), 41-70.

SECCIÓN 4

EL PENSAMIENTO DEL PROFESOR, SUS PRÁCTICAS Y ELEMENTOS PARA SU FORMACIÓN PROFESIONAL

LA INDAGACIÓN COMO ESTRATEGIA DE APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA EN LA FORMACIÓN INICIAL Y CONTINUA DE PROFESORES DE ENSEÑANZA BÁSICA

INQUIRY AS A MATHEMATICS LEARNING STRATEGY IN THE INITIAL AND CONTINUING TRAINING OF BASIC EDUCATION TEACHERS

María Constanza Ripamonti Zañartu, Ivette Marie León Lavanchy
Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación, Pontificia Universidad Católica de Chile. (Chile)
m_constanza.ripamonti@umce.cl, ileonl@uc.cl

Resumen:
La formación inicial y continua de los docentes durante 2020 y 2021 se ha visto tensionada por la búsqueda de modelos activos dentro de la virtualidad que permitan enfrentar la idea de aprendizaje matemático en la incertidumbre. El modelo AMBI (Aprendizaje de la Matemática basado en la Indagación) podría permitir a los profesores y estudiantes de Pedagogía en Educación Básica desarrollar ciclos de investigación y diseño para sus intervenciones en aulas virtuales o presenciales en matemáticas. El objetivo de este trabajo es presentar la implementación de este modelo en el diseño de cursos virtuales para docentes en formación (inicial y continua) y concluir preliminarmente sobre las implicaciones para los profesores y para sus estudiantes en la construcción de conocimiento matemático y didáctico de calidad.

Palabras clave: indagación, formación inicial docente, formación continua docente, aprendizaje

Abstract:
The initial and continuing training of teachers during 2020 and 2021 has been stressed due to the search for active models within virtuality which allow facing the idea of mathematical learning in uncertainty. The AMBI model (Inquiry-based Education in Mathematics) could allow teachers and Pedagogy students of Primary Education to develop research and design cycles for their interventions in virtual or face-to-face classrooms in mathematics. So, this work aims to present the implementation of this model in the design of virtual courses for teachers in initial and continuing training and to preliminarily conclude on the implications for teachers and their students in the construction of quality mathematical and didactic knowledge.

Keywords: inquiry, initial teacher's training, continuing teacher's training, learning

Introducción

Durante los años 2020 y 2021 la formación inicial y continua de profesores de Educación Básica se ha visto tensionada por la búsqueda de modelos activos dentro de la virtualidad, que permitan reconstruir una idea de aula escolar de matemática, en contextos de incertidumbre. Docentes e investigadores han analizado la efectividad de las estrategias de enseñanza aprendizaje virtual levantadas en este tiempo y se ha discutido sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas de niños y niñas en el contexto de la pandemia. Reyes, Felmer y Araya (UCH, 2020), señalan que los temas globales que enfrenta la humanidad, como el COVID-19, crean la necesidad de que los niños, niñas y jóvenes cuenten con una comprensión básica de las ideas científicas relevantes, por otra parte, destacan que la matemática ha sido de mucha ayuda al momento de resolver problemas y predecir alcances de la pandemia. Por otra parte, Francesc Pedró, director del IESALC de la UNESCO, manifiesta en 2020 que la pandemia ha ofrecido diversas oportunidades en el ámbito de la educación superior, principalmente en materia de aprovechamiento de las nuevas tecnologías, como por ejemplo el aprendizaje móvil, que permite a los jóvenes la continuidad educativa. En el caso de la formación docente se observa como imprescindible este doble objetivo: aprender a aprender usando tecnologías y aprender a enseñar usando la tecnología (Unesco, 2020).

Figura 1. *Tensiones del aprendizaje de la matemática post pandemia.*

Fuente: producción propia (2022).

El modelo de Aprendizaje de la Matemática Basado en la Indagación (desde ahora AMBI), se ha desarrollado desde 2010, a partir de los proyectos del Espacio Común Europeo, PRIMAS y Fibonacci (2010-2011), partiendo como base del modelo de indagación en ciencias (ECBI), se busca transferir y elaborar una versión para la enseñanza de la matemática que incluya sus particularidades, y se conecte con las estrategias interdisciplinarias como STEM (en español, Ciencia, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas), o, más actualmente STEAM (en español, Ciencia, Tecnología, Ingeniería, Artes y Matemáticas).

Artigue y Blomhøj (2013) describen las actividades de los procesos de aprendizaje AMBI:

> Las prácticas de [aprendizaje basado en la investigación] en matemáticas incluyen diferentes tipos de actividades combinadas en procesos de indagación: elaboración de preguntas; resolución de problemas; modelización y matematización: búsqueda de recursos e ideas; exploración; análisis de documentos y de datos; experimentación; formulación de conjeturas; ensayar, explicar, razonar, argumentar y probar; definir y estructurar; conectar, representar y comunicar (p. 808).

Este artículo presenta una experiencia que responde a la necesidad de analizar las oportunidades de aprendizaje que ofrece implementar un modelo AMBI como estrategia en contextos virtuales o híbridos de formación docente inicial, en dos cursos de Didáctica de la Matemática para estudiantes de la carrera de Educación Básica en dos instituciones de Educación Superior. Además, responde la necesidad de dar continuidad, durante el confinamiento, a dos cursos de formación continua para profesores que se dictaban presencialmente, llevándolos a un formato virtual. Se describen las fortalezas y obstáculos del diseño didáctico implementado con la estrategia AMBI en contextos virtuales de enseñanza y aprendizaje.

Marco referencial

Artigue (2017) destaca que uno de los principales objetivos de la investigación en la didáctica de la matemática ha sido promover el aprendizaje con comprensión, esto implica que los estudiantes experimenten una auténtica actividad matemática desde la infancia.

El AMBI proporciona las herramientas para el desarrollo y fortalecimiento de este tipo de educación, ya que se refiere a la búsqueda de conocimiento o información mediante el método de hacer preguntas.

El documento generado por el proyecto Fibonacci (citado en Artigue, 2017) señala que esta estrategia (AMBI) requiere el desarrollo de metodologías de enseñanza en la práctica, que tengan en cuenta tanto la experimentación, como las nuevas oportunidades que ofrecen las tecnologías digitales.

Figura 2. *Ventajas para la formación docente del modelo AMBI.*

Fuente: producción propia (2022).

Artigue (2017) hace hincapié que la indagación matemática está motivada por preguntas o problemas que surgen del entorno natural, cultural o social siendo uno de los principales propósitos de la matemática la comprensión del mundo que nos rodea, pero, no debe olvidarse que la matemática como ciencia también crea sus propios objetos, planteando sus propias preguntas en su desarrollo como ciencia.

Como se declara en *Aprendiendo a través de la Indagación* (Proyecto Fibonacci, 2011):

> A medida que se vuelven familiares, los objetos matemáticos también llegan a conformar un terreno para la experimentación matemática. Los números, por ejemplo, se han utilizado durante siglos y siguen siendo un contexto magnífico para los experimentos matemáticos, y lo mismo se puede decir de las formas geométricas. Los patrones desempeñan un gran papel en las matemáticas, tanto si provienen del mundo natural como si son imaginados por la mente del matemático. Las tecnologías digitales también ofrecen herramientas nuevas y poderosas para apoyar la investigación y la experimentación en el ámbito de las matemáticas. Por consiguiente, la educación matemática basada en la indagación no sólo debe basarse en situaciones y cuestiones derivadas de fenómenos del mundo real, aunque la consideración de éstos es, por supuesto, muy importante, sino que ha de utilizar la diversidad de contextos que nutren las prácticas de investigación en matemáticas (p. 8).

En la siguiente tabla se proponen ejemplos desde el entorno natural, social y cultural, como desde los objetos matemáticos:

Tabla 1. *Ejemplos de preguntas para indagar en AMBI.*

Fuentes de Indagación Matemática/ ejemplos de preguntas	Objetos de indagación en Matemática/ ejemplos de preguntas
Fenómenos naturales ¿Cómo comprender y caracterizar los cambios en la sombra de un objeto iluminado por el sol?	Números y sus operaciones ¿Cuál es el producto máximo que se puede obtener descomponiendo un número entero positivo en una suma de enteros positivos y multiplicando los términos de la suma?
Problemas técnicos ¿Cómo medir magnitudes y objetos inaccesibles?	Geometría ¿Qué significa que dos triángulos, dos rectángulos, dos polígonos tengan la misma forma?
Artefactos humanos ¿Cómo funciona un GPS?	Medida Dados dos triángulos con la misma área, ¿se puede transformar uno en el otro cortando y pegando? ¿Se puede extender esta propiedad a cualquier par de polígonos?
Arte ¿Cuáles son las simetrías de un objeto arquitectónico o una pieza artística?	Probabilidades Al lanzar dos dados: ¿la probabilidad de obtener un resultado mayor que 10 es igual o diferente a obtener un resultado menor que 10 si se suman los puntajes de ambos dados?
Problemas de la vida diaria ¿Cómo elegir entre diferentes ofertas de telefonía móvil e Internet?	Álgebra y Funciones ¿Qué funciones de la forma f (x) tienen una representación gráfica que es una línea paralela al eje x?

Fuente: Artigue (2017).

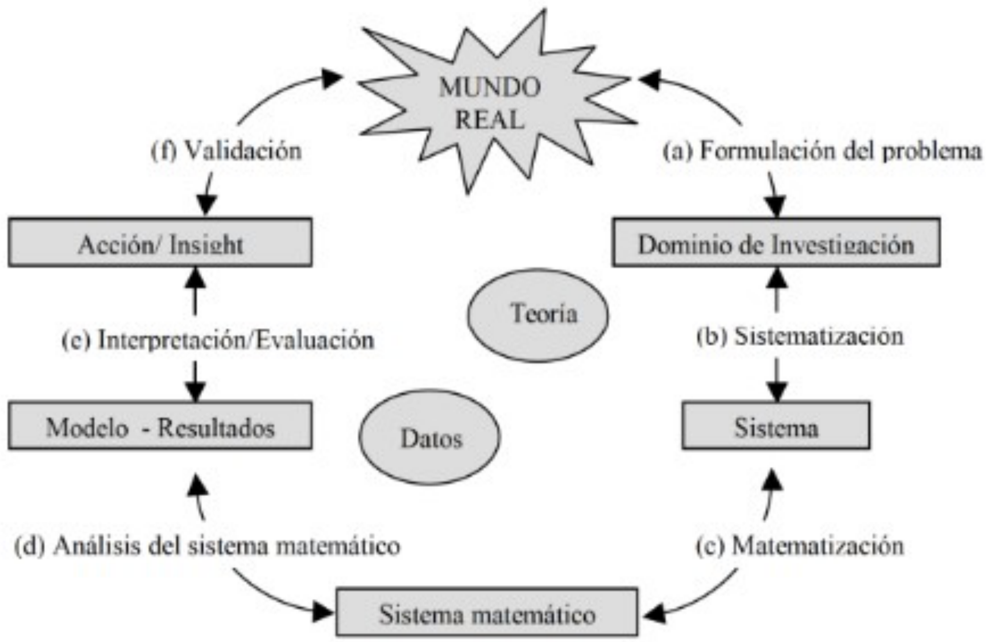
Según Artigue (2017) la naturaleza de la pregunta tiene consecuencias en el proceso de

indagación, esto especialmente relevante en el caso de las preguntas que provienen de una fuente externa, como en la primera columna (tabla 1) su proceso de conversión en preguntas de carácter matemático es una parte importante del proceso de indagación, que involucra la modelación.

El AMBI trabaja con la modelación como un proceso cíclico, lo que presenta similitudes con otros modelos de indagación.

La modelización presenta las siguientes fases que se muestran en la Fig.3 y que describe Artigue (2017) a continuación:

Figura 3. *Diagrama del proceso de modelización matemática.*



Fuente: Blomhøj (2004, p. 148).

a) **Formulación de una tarea** (más o menos explícita) que está relacionada con una realidad percibida y que está influenciada por los intereses del investigador. En esta etapa, se construye el objeto del proceso de modelización.

b) **Selección y construcción de los objetos relevantes del dominio de indagación,** y transformación de éstos para hacer posible una representación matemática.

c) **Transformación de los objetos y relaciones seleccionados desde su estado de apariencia inicial hacia la matemática,** mediante una mayor abstracción e idealización.

d) **Uso de métodos matemáticos para obtener resultados matemáticos** y conclusiones.

e) **Interpretación de los resultados y conclusiones** obtenidos con respecto al dominio de indagación.

f) **Evaluación de la validez del modelo** por comparación de los datos (observados o previstos) y/o con los conocimientos establecidos (basados en la teoría o en la experiencia compartida/personal).

En el contexto de la pandemia de COVID-19, las instituciones educativas en todos los niveles se vieron obligadas a adaptar sus métodos de trabajo a las nuevas condiciones, tal como indica Gómez (2020), los sistemas educativos de los países que adoptaron la cuarentena como forma de resguardo, solicitaron a las escuelas seguir trabajando de manera virtual o a distancia, de tal forma que los/as estudiantes continuaran con los aprendizajes planificados, tarea que recayó en su implementación en los/as docentes.

En cuanto a los conocimientos de los/as docentes sobre el uso de TIC, Arancibia (2020) indica que profesores/as y estudiantes no tienen la preparación formal para actuar en entornos virtuales de educación. Esto ocurre aun cuando en los espacios educativos de formación docente, las TIC están presentes desde finales del siglo pasado.

Según Rangel (2015), a fines de los años noventa, el Informe Mundial sobre la Educación de Unesco (Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura [Unesco], 1998) ya advertía el impacto que tendrían las TIC en los métodos convencionales de enseñanza-aprendizaje. Dentro del mismo informe se proponían parámetros y criterios para planear programas de formación del profesorado y seleccionar cursos que los/as prepararan para capacitar a los/as estudiantes en el uso de las TIC.

La pandemia de los años 2020 y 2021 ha forzado a la educación a reinventarse para llevar a cabo las clases en aulas virtuales, situación que ha afectado directamente a los/as profesores/as, y a los estudiantes quienes se han visto en la necesidad u obligación de utilizar las TIC para ejercer la docencia y para aprender a enseñar y aprender a aprender.

Palominos y Martínez, (2020) señalan que el confinamiento ha traído consigo también una serie de desafíos para los/as docentes, además de que se han visto en la obligación de trasladar las clases desde la presencialidad física a lo virtual, han debido adaptarse a condiciones donde el uso de las TIC ha sido crucial para no detener el aprendizaje de los/as estudiantes. Sin embargo, saber utilizar las tecnologías no es sinónimo de saber enseñar con ellas y tampoco implica un aumento de capacidades para aprender por parte de los/as estudiantes, pues no basta con saber usar las TIC si no se sabe enseñar con ellas en el contexto donde los/as estudiantes deben aprender.

Barron, Cobo, Muñoz-Najar & Sánchez (2021), muestran dos factores cruciales en la educación que han cambiado debido a la pandemia. En primer lugar, las adaptaciones pedagógicas han resultado fundamentales, ya que los modelos tradicionales de enseñanza presencial no se trasladan a un entorno de aprendizaje a distancia: los profesores tienen que adaptar sus prácticas y ser creativos para mantener a los estudiantes comprometidos y captar su atención, ya que cada hogar se ha convertido en un aula -la mayoría de las veces- sin un entorno que apoye el aprendizaje. En segundo lugar, la pandemia ha recalibrado la forma en que los profesores dividen su tiempo entre la enseñanza, el compromiso con los alumnos y las tareas administrativas. Casi el 90% de los países que respondieron a la encuesta de los Ministerios de Educación sobre las respuestas nacionales a la COVID-19, realizada por la UNESCO, UNICEF y el Banco Mundial (2020), apoyaron a los profesores compartiendo directrices que destacaban la importancia de: proporcionar retroalimentación a los estudiantes, mantener una comunicación constante con los apoderados e informar a las unidades educativas locales para hacer un seguimiento del aprendizaje.

Ferrada et al. (2021), en un estudio sobre Formación docente en TIC y su evidencia en tiempos de COVID-19 señalan que, en un estudio realizado en seis países, entre ellos Chile, el mayor problema de las clases en línea es el desconocimiento de los modelos pedagógicos por parte de los/as docentes. Según este mismo estudio, las herramientas más utilizadas en Iberoamérica para las clases a distancia son los blogs, portafolios, foros y trabajos colaborativos.

Estos resultados entran en contradicción con otro estudio realizado por CIPER (Cea et al., 2020) en el que se señala que el tipo de estrategias utilizadas en el contexto educacional a distancia no colabora con el proceso de enseñanza-aprendizaje, ya que escuchar de manera ininterrumpida, sin mayor interacción y sobre la base de contenidos disponibles en diversos

medios, puede ser percibido como una pérdida de tiempo por los/as estudiantes. Una encuesta aplicada en Chile por Elige Educar (2020) avala lo señalado anteriormente respecto a la situación de docentes y educadores/as en contexto de pandemia, en la que un 80% de los/as participantes afirmó no poder realizar de buena manera el trabajo pedagógico y, un 30%, señaló que el trabajo realizado es menos que antes en términos de cantidad

Hodges y colaboradores (Citados en Cea, García, Turra, Moya, Sanhueza, Moya y Vidal, 2020) hacen una distinción entre educación e-learning y la educación a distancia en emergencia, que actualmente se desarrolla producto de la pandemia. Señalan que si bien la educación a distancia en general carga con un estigma de menor calidad, esta se desarrolla en universidades prestigiosas y ha demostrado importantes avances en la última década. La educación a distancia descansa en un diseño y planificación cuidadoso con vasta evidencia y se rige por indicaciones instruccionales definidas (los autores indican un periodo de 6 a 9 meses para preparar un curso universitario en modalidad online).

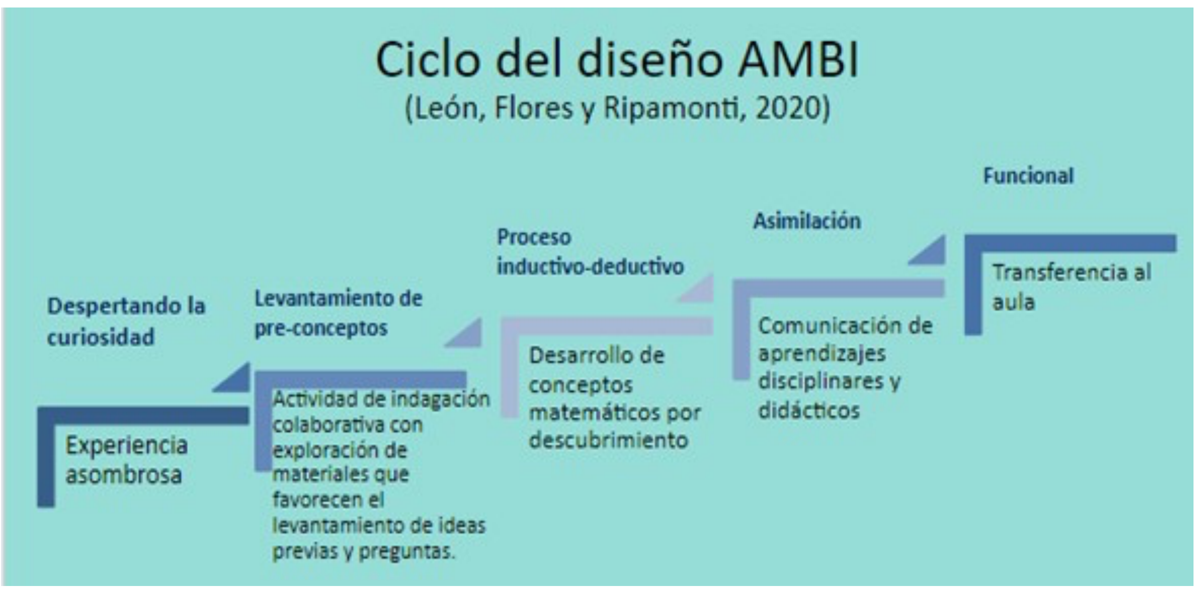
Metodología/Diseño

Para el traspaso de cursos presenciales de formación inicial y continua de formación de docentes de Primaria (Educación Básica en Chile), se revisan las etapas que propone el Modelo de Diseño de Ciclo de actividades AMBI (León, Ripamonti, Flores, 2020), donde el asombro y la curiosidad son el punto de partida para la indagación, ya que permite generar las preguntas y motivar a la acción a los estudiantes. Para L'Ecuyer (2021) defensora del asombro y la curiosidad en la infancia, el aprendizaje no es una cuestión tecnológica, sino humana, las tecnologías aplicadas a la educación no pueden convertirse en el eje del sistema educativo, las mentes deben estar preparadas para usarlas y es necesaria la guía de buenos maestros:" La mejor preparación para el mundo online es el mundo offline".

El mayor desafío que se enfrenta es mantener la fidelidad a las estrategias de formación docente y el AMBI, en contextos virtuales.

Se aplica el Modelo de Diseño de Ciclo de actividades AMBI (León, Ripamonti y Flores, 2020) y sus etapas para la virtualización de cuatro cursos: dos de Didáctica de la Matemática para estudiantes de la carrera de Educación Básica y dos cursos de formación continua para docentes en ejercicio.

Figura 4. *Ciclo del Diseño AMBI.*

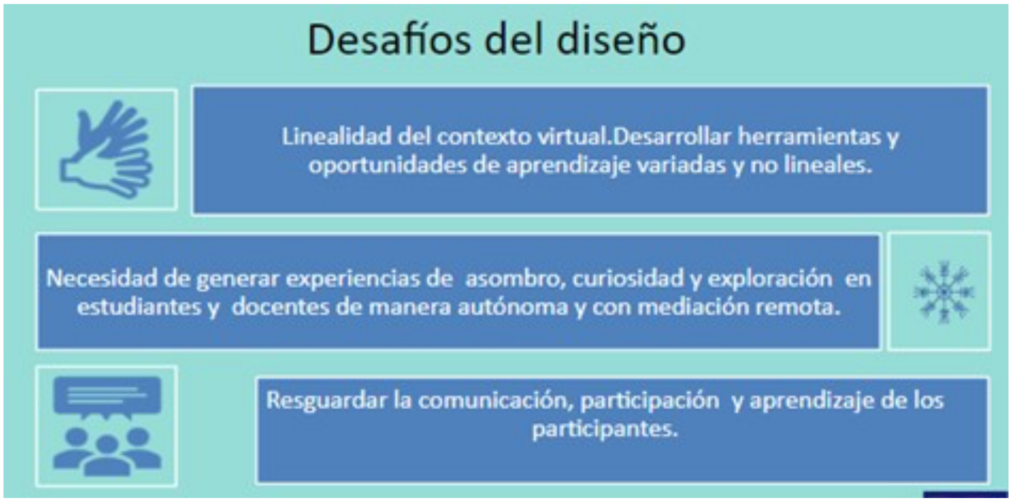


Fuente: León, Flores y Ripamonti (2020).

Implicaciones

En la transición a la modalidad virtual de los cursos se experimentan diversos obstáculos (Fig. 5) que dan cuenta de la naturaleza de estos contextos de aprendizaje:

Figura 5. *Desafíos levantados durante el diseño de las secuencias virtualizadas.*



Fuente: producción propia (2022).

-Lo primero que se observa es la **linealidad** del contexto virtual y la necesidad de desarrollar herramientas y oportunidades de aprendizaje variadas y no lineales.

La propuesta en plataforma Moodle (donde los estudiantes acceden al curso) proponía una ruta de aprendizaje con diferentes herramientas y tópicos que debían seguirse en un orden lineal.

Frente a este obstáculo, la propuesta de ruta de aprendizaje del curso fue flexibilizar las actividades autónomas y agregar colaboración asincrónica y comunicación sincrónica (aulas virtuales por ZOOM o TEAMS) relator-estudiantes.

-En segundo lugar, aparece la necesidad de **generar experiencias de asombro, curiosidad y exploración** en estudiantes y docentes de manera autónoma y con mediación remota.

Este obstáculo se enfrenta proporcionando material concreto a cada uno de los estudiantes y solicitando evidencia fotográfica del trabajo autónomo y la exploración realizada, a través de los FOROS asincrónicos. Del mismo modo en las actividades colaborativas en la herramienta WIKI, se les solicita compartir y analizar sus experiencias de exploración autónomas.

Desde la perspectiva del AMBI se plantean preguntas de exploración en los dos contextos planteados por Artigue (2017):

Tabla 2.*Ejemplos de preguntas de indagación en los cursos diseñados.*

Fuentes de indagación matemática	Objetos de indagación en Matemática
¿Qué simetrías se encuentran en las obras de M. C. Escher? ¿Qué figuras 2D y 3D encontramos en nuestro entorno local? ¿Cómo se equilibran las balanzas? ¿Qué estrategias ganadoras puedes encontrar en los juegos de mesa?	¿Cómo puedo formar distintos cuadriláteros usando triángulos? ¿Qué relaciones matemáticas se observan en las figuras que se forman utilizando un libro de espejos? ¿Cómo programar a un robot para que dibuje diferentes figuras 2D?

Fuente: Curso E-Learning MIM (2020-2021).

-En tercer lugar, la implementación del diseño implica ajustes en el camino, para **resguardar la comunicación, participación y aprendizaje** de los participantes.

Este aspecto es muy relevante, ya que la evaluación permanente de la implementación de los cursos y la retroalimentación de los estudiantes permitió ir generando mejoras en el proceso de comunicación estudiante-estudiante y relator- estudiante, e ir apoyando el aprendizaje de los estudiantes en las diferentes etapas.

Se desarrollan herramientas de monitoreo al avance en plataforma y en las Aulas virtuales sincrónicas, para que la tecnología no sea un obstáculo, sino una ventaja.

Conclusiones preliminares/ Discusión

La virtualización de cursos en un modelo de diseño AMBI implicó asegurar la exploración de los recursos concretos y virtuales por parte de los estudiantes.

La estrategia (AMBI) requiere el desarrollo de metodologías de enseñanza en la práctica, que tengan en cuenta tanto la experimentación, como las nuevas oportunidades que ofrecen las tecnologías digitales (Proyecto Fibonacci, 2011)

La entrega de materiales concretos tales como: tangramas, geoplanos, tablero de ajedrez alfanumérico, cubos conectores, balanzas, espejos, pentominós, cubo soma, juegos de tablero como el Komikan (ajedrez mapuche) y el Molino, entre otros, tuvo un efecto positivo en los grupos de estudiantes y profesores, motivando su participación y compromiso con su aprendizaje, además de revalorar la importancia de dichos materiales para la construcción de los conocimientos matemáticos.

Cabe destacar que, los y las docentes en formación enseñan en la Educación Básica (6 a 13 años) y según Área, (2010) el material manipulativo facilita los procesos de enseñanza y aprendizaje de los alumnos, pues ellos experimentan situaciones de aprendizaje de forma

manipulativa, que les permite conocer, comprender e interiorizar las nociones matemáticas estudiadas, por medio de la experiencia y los sentidos. Para Alsina, Burgués & Fortuny (1988), la noción de materiales se refiere a todos los objetos, aparatos o medios de comunicación que pueden ayudar a describir, entender y consolidar conceptos matemáticos

Así también Carretero, Coriat & Nieto (1995) describen al material didáctico como el que es diseñado con un fin educativo, aunque un buen material didáctico trasciende la intención original y se le puede dar otros usos.

En la implementación del curso seleccionamos muchos de estos materiales que tenían su modelo virtual, lo cual daba la posibilidad a los docentes en formación de transferir a sus aulas (durante la pandemia) muchas de las actividades propuestas.

Una de las fortalezas en el diseño AMBI fueron las preguntas implicadas en las actividades de exploración autónoma, indagación colaborativa y reflexión de transferencia al aula que fueron valoradas por los estudiantes y docentes ya que aportaban al proceso de comprensión y construcción del conocimiento matemático, propio y al de sus (futuros) estudiantes.

Figura 6. *Primeras evidencias con estudiantes y Docentes.*

Fuente: producción propia (2022).

En el caso de los docentes de aula, enfrentados al nuevo modelo, persisten en la estructura de aula tradicional, esperando que todos los conocimientos sean transferidos por la relatora durante las Aulas sincrónicas, y solo esperan realizar las tareas de aplicación después de la explicación.

La pandemia y los cierres prolongados de las escuelas han cambiado el papel de los profesores y la mayoría de ellos no estaban preparados para ese cambio (Barron, et al., 2021).

El problema del cambio de contexto para los docentes: el confinamiento, la plataforma online, la conexión asincrónica, la conexión sincrónica utilizando tecnologías nuevas; genera oportunidades de aprendizaje y a pesar de las complejidades que enfrentan, les ayuda en la descentralización y la apertura al trabajo autónomo, la exploración asincrónica y la colaboración en línea.

Uno de los principales objetivos de la investigación en la didáctica de la matemática ha sido promover el aprendizaje con comprensión, esto implica que los estudiantes experimenten una auténtica actividad matemática desde la infancia (Artigue, 2017).

En el caso de los estudiantes en formación, se evidencia la falta de experiencias personales, escolares en indagación en el aula de matemática, esto a partir de sus comentarios y respuestas a encuestas y tareas planteadas inicialmente. Luego, al generar experiencias reales de indagación en contextos virtualizados, se potencia la comprensión y la competencia de imaginar y diseñar sus propias experiencias e implementarlas en procesos de práctica o planificar secuencias didácticas, con el modelo AMBI.

El manejo de las herramientas digitales y la comunicación efectiva aparecen como esenciales en el desarrollo de oportunidades de aprendizaje en este modelo. La proyección de este trabajo implica el análisis de las tareas de diseño e implementación con AMBI producidas por estudiantes y docentes en estos cursos.

Barron et al. (2021) desde el sitio del Banco Mundial, señalan que, para volver a construir sistemas educativos más sólidos, los países tendrán que aplicar las iniciativas de enseñanza que han demostrado ser eficaces durante la fase de aprendizaje a distancia e integrarlas en el sistema educativo ordinario. Es fundamental empoderar a los profesores, invirtiendo en el desarrollo de las habilidades necesarias y en su capacitación para poder así explotar todo el potencial del aprendizaje a distancia e híbrido.

Referencias bibliográficas

Alsina, C., Burgués, C. & Fortuny, J. Mª. (1988). Materiales para construir la geometría. Editorial Síntesis S.A.

Arancibia, M., Cabero, J., & Marín, V. (2020). Creencias sobre la enseñanza y uso de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) en docentes de educación superior. Formación universitaria, 13(3), 89-100. https://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062020000300089

Área, M., Parcerisa, A. , Rodriguez, J. (Coords) (2010). Materiales y recursos didácticos en contextos comunitarios. Ed: Grao.

Artigue M., Blomhøj M. (2013) Conceptualizing inquiry-based education in mathematics, Springer en https://link.springer.com/article/10.1007/s11858-013-0506-6

Artigue, M. (2017) ¿Qué es la enseñanza de la matemática basada en la indagación? *La Gaceta de la RSME*, Vol. 20 (2017), Núm. 3, Págs. 593–609

Barron, M., Cobo, C., Muñoz-Najar, A., & Sánchez, I. (2021) https://blogs.worldbank.org/es/education/el-papel-cambiante-de-los-profesores-y-las-tecnologias-en-medio-de-la-pandemia-de-covid

Blomhøj, M. (2004). Mathematical modelling-a theory for practice. En B. Clarke et al. (Eds.), International perspectives on learning and teaching mathematics (pp.145-160). Gothenburg: NCM, Gothenburg University.

Carretero, R., Coriat, M. y Nieto, P. (1995). Secuenciación, Organización de Contenidos y Actividades de Aula. En Junta de Andalucía (ed.). Materiales Curriculares. Educación Secundaria. Vol 17. área de Matemáticas. 65-173.

Cea, F., García, R., Turra, H., Moya, B., Sanhueza, S., Moya, R. y Vidal, W. (08 de junio de 2020). Educación online de emergencia: hablando a pantallas en negro. CIPER. https://ciperchile.cl/2020/06/08/educacion-online-de-emergencia-hablando-a-pantallas-en-negro/

Elige Educar (2020). Situación de docentes y educadores en contexto de pandemia. Área de Investigación Elige Educar. Reporte de resultados Disponible en https://eligeeducar.cl/content/uploads/2020/08/Resultados_EncuestaEEcovid_web_rev-1.pdf

Ferrada-Bustamante, V., González-Oro, N., Ibarra-Caroca, M., Ried-Donaire, A., Vergara-Correa, D., & Castillo-Retamal, F. (2021). Formación docente en TIC y su evidencia en tiempos de COVID-19. Revista Saberes Educativos, (6), 144–168. https://doi.org/10.5354/2452-5014.2021.60715

Fibonacci Project Resources, 2011, http://fibonacci-project.eu.

Gómez, K. (2020). El desafío de la educación en tiempos de pandemia: ¿impartir o crear

conocimientos? Elige Educar. https://eligeeducar.cl/acerca-del-aprendizaje/el-desafio-de-la-educacion-en-tiempos-de-pandemia-impartir-o-crear-conocimientos/

IESALC, UNESCO (2020) Reimaginar la universidad en pandemia. http://www.iesalc.unesco.org/category/covid19-2/

León, I., Ripamonti, M., Flores B. (2020) Geometría Dinámica en la formación de profesores, despertando el asombro a través… ALME Vol. 33, Núm. 1, Págs 231-239

Palominos, M., & Martínez, V. (2020). Covid-19 y las debilidades de la educación a distancia en Chile. Universidad Católica Silva Henríquez. Obtenido de http://comunicaciones.ucsh.cl/opiniones/covid-19-y-lasdebilidades-de-la-educacion-a-distancia-en-chile/ [28.04.2021]

PRIMAS (http://www.primas-project.eu, 2011) M. Artigue, P. Baptist, J. Dillon, W. Harlen y P. Léna, Learning through inquiry, The

Rangel, A. (2015). Competencias docentes digitales: propuesta de un perfil. Pixel-Bit. Revista de Medios y Educación, (46),235-248.[fecha de Consulta 9 de Septiembre de 2022]. ISSN: 1133-8482. Disponible en: https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=36832959015

RTVE (2021) Entrevista C. L'Ecuyer: Las tecnologías no pueden convertirse …. https://www.rtve.es/noticias/20200907/entrevista-investigadora-divulgadora-canadiense-catherine-lecuyer/2041241.shtml

Universidad de Chile (2020) Noticias: La educación en ciencia y matemáticas para…

https://www.uchile.cl/noticias/162151/la-educacion-en-ciencia-y-matematicas-para-entender-la-pandemia

VOL 36, NÚMERO 2, AÑO 2024

CONCEPCIONES DOCENTES SOBRE EL PROYECTO DE APRENDIZAJE ESTADÍSTICO (PAE) MOVILIZADAS EN UN GRUPO FOCAL

TEACHING CONCEPTIONS ON THE STATISTICAL LEARNING PROJECT (PAE), MOBILIZED IN A FOCUS GROUP

Cassio Cristiano Giordano, Mauren Porciúncula
Universidade Federal do Rio Grande. (Brasil)
ccgiordano@gmail.com, mauren@furg.br

Resumen:
Presentamos resultados de una investigación posdoctoral sobre los cambios en las concepciones de seis profesores, sobre la gestión y desarrollo de un Proyecto de Aprendizaje Estadístico, en tres escuelas públicas de educación básica brasileña. Participaron en un grupo colaborativo para la formación continua de docentes, con el apoyo de investigadores de una universidad federal local. Los datos recopilados para esta investigación resultan del análisis – con la ayuda del *software* NVIVO – de un grupo focal, realizado con ellos, al final de 2021. Los avances presentados apuntan a una prometedora expansión de esta propuesta de alfabetización multimedia estadística en la educación básica.

Palabras clave: educación estadística, concepciones estadísticas docentes, proyectos de aprendizaje

Abstract:
We present postdoctoral research outcomes on the changes of six teachers' conceptions concerning the management and development of a Statistical Learning Project, in three Brazilian public schools of basic education. They participated in a collaborative group for the continuing education of teachers, with the support of a local federal university researcher. The data collected for this research results from the analysis – with the help of NVIVO *software* – of a focus group, carried out with them, at the end of 2021. The progress presented points to a promising wide spreading of this statistical multimedia literacy proposal in basic education.

Keywords: statistical education, statistical teacher conceptions, learning projects

Introducción

La promoción de la alfabetización estadística es un elemento esencial para la formación de ciudadanos críticos en el siglo XXI (Gal, 2021). El desarrollo de proyectos de aprendizaje ha demostrado ser una alternativa eficiente en ese sentido, desde la perspectiva del Análisis Exploratorio de Datos - AED (Batanero; Díaz, 2011). Su implementación en el aula ha encontrado muchos desafíos, como señala Giordano (2021). En nuestra investigación posdoctoral analizamos el cambio en las concepciones de los docentes de diferentes asignaturas ante tales desafíos, luego de participar en un grupo colaborativo de formación continua docente y desarrollar proyectos estadísticos con sus estudiantes de educación básica.

Marco teórico

Las expresiones “trabajo cooperativo” y “trabajo colaborativo”, en el contexto educativo, han sido utilizadas muchas veces por investigadores brasileños, a veces como sinónimos, a veces con diferentes significados, como lo observa Fiorentini (2013). Esta confusión afecta nuestra comprensión de su organización y funcionamiento, así como nuestra forma de emplearlos y/o investigarlos. Heargreaves (1998) afirma que la adopción de una propuesta de trabajo colaborativo configura un cambio de paradigma educativo, gracias a su carácter articulador e integrador en un mundo lleno de expectativas, incertidumbres e imprevistos. El trabajo individual ha sido devaluado en una sociedad donde las habilidades socioemocionales cobran cada vez más protagonismo, como se puede apreciar en la Base Nacional Común Curricular — BNCC (Brasil, 2018), documento guía para la Educación Básica Brasileña (infantil, primaria y secundaria, estudiantes de 6 a 17 años). La pandemia de COVID-19 y sus impactos en la educación brasileña son un buen ejemplo. Sin embargo, este autor advierte que la opción por el enfoque colaborativo debe resultar de una elección, no de una imposición.

Para Garfield (1993) el aprendizaje cooperativo implica generalmente la realización de actividades en pequeños grupos, con objetivos comunes como la resolución de problemas, realización de tareas. Para esta autora, dicho aprendizaje cae en una categoría más amplia de aprendizaje colaborativo, entendido como el trabajo en grupos de dos o más personas, mutuamente involucrados, en pie de igualdad, en la búsqueda de comprensión, soluciones o significados, o la creación de un producto.

Algunos investigadores, como Hall y Wallace (1993), consideran que el trabajo cooperativo sería una fase del trabajo colectivo, en una escala que va del conflicto a la colaboración, esta última vista como una etapa superior. En el trabajo cooperativo, aunque las personas realizan acciones conjuntas de forma consensuada, no todos gozan de autonomía y poder de decisión.

Fiorentini (2013) asume como principios fundamentales del trabajo colaborativo la voluntariedad, la identidad, la espontaneidad, la corresponsabilidad, el liderazgo compartido, el apoyo entre pares y el respeto mutuo. Estas breves consideraciones nos ayudarán a comparar el desarrollo del Proyecto de Aprendizaje Estadístico — PAE (Porciúncula, 2022) en los dos casos que se van a considerar, desde la perspectiva del Análisis Exploratorio de Datos — AED.

El término concepción es polisémico y ha sido utilizado de diferentes maneras en Educación. A menudo asociado con ideas y creencias. En este sentido, por ejemplo, fue utilizado por Azcárate (1996) en un estudio sobre formación docente y saberes profesionales. Esta autora concluyó que sus ideas, creencias y conocimientos inciden directamente en su comprensión del currículo propuesto, convirtiéndose en agentes fundamentales de sus prácticas docentes.

En muchos estudios, la idea de la presente concepción es la de un constructo local asociado al conocimiento y a los diferentes problemas a los que se aplica, como lo observa Artigue (1989), evidenciando la naturaleza intrínseca de las prácticas docentes y estudiantiles en las situaciones didácticas. El reconocimiento de una concepción destaca la pluralidad de posibles perspectivas sobre un determinado objeto matemático, las representaciones y modos de tratamiento asociados, la adecuación y adecuación de las herramientas y estrategias utilizadas en la resolución de los problemas que surgen de las actividades matemáticas. Tal reconocimiento también contribuye a desmitificar una supuesta transparencia de la comunicación didáctica, común en los modelos empiristas de enseñanza y aprendizaje, particularizando las relaciones en la tríada docente-alumno-saber.

Muchas concepciones se movilizan en los procesos cognitivos que conducen a la construcción de un determinado conocimiento. El conocimiento, a su vez, se articula en la elaboración de conceptos. La resolución de un problema matemático, a su vez, involucra una gran cantidad de concepciones, conocimientos y conceptos, según Balacheff (2001, 2002). Artigue (1989) afirma que una concepción asume un carácter local en la interacción del sujeto con la situación problema. La multiplicidad de concepciones posibles en un ámbito local y personal, sin embargo, cobra importancia para el investigador, en la medida en que es representativa de un contexto educativo, común a otros estudiantes y docentes.

Lo que más interesa a este investigador no es la comprensión teórica de una posible estructura hipotética genérica, sino la identificación de concepciones locales que se manifiestan en una situación de análisis de las condiciones de paso de una determinada concepción local a otra. Según la Teoría de las Concepciones (Balacheff, 1995, 2001, 2002; Balacheff y Gaudin, 2002; Balacheff y Margolinas, 2005) es el cambio de concepto lo que denota ganancia cognitiva, aprendizaje. Artigue (1991, 1993, 1994) vuelve a la discusión sobre la importancia de comprender mejor las concepciones tanto de los estudiantes como de los docentes, ya que son determinantes en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Las concepciones funcionan como lentes que hacen única cada experiencia docente, pero estudiando sus orígenes, su función y, sobre todo, sus transformaciones en los contextos didácticos, es posible repensar las prácticas docentes con mayor eficacia.

Balacheff y Gaudin (2002) enfatizan que el conocimiento no debe reducirse a comportamientos, pero tampoco puede enseñarse en su ausencia. En los procesos de enseñanza y aprendizaje, cada acción moviliza una gran cantidad de conocimientos y, para desarrollar nuevos conocimientos o profundizar en conocimientos previos, es necesario movilizar conceptos asociados a los problemas enfrentados.

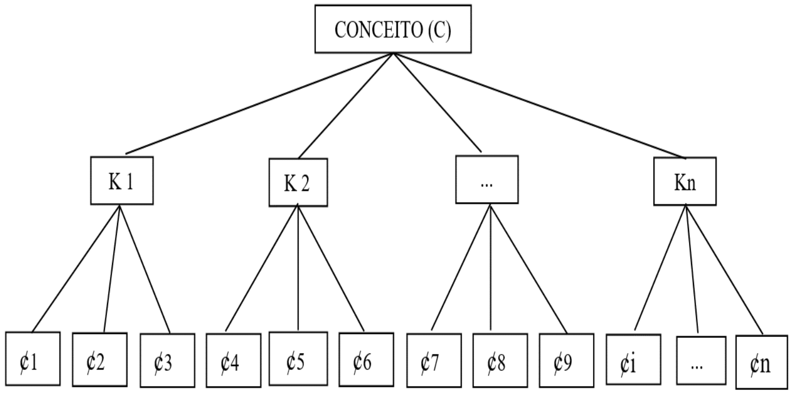
Para Balacheff (1995), rescatar la noción de concepción es movilizar acciones en el sujeto, mediante la realización de una actividad. Esto, en situaciones específicas, puede actuar de manera racional y coherente para resolver el problema. Una concepción, en el modelo ck¢, es un estado de equilibrio de un sistema, sujeto-medio, considerando sus limitaciones e imposiciones, es decir, todo aquello que influya o interfiera en su operación. La concepción pertenece al sujeto y, por tanto, puede ser o no correcta desde el punto de vista del conocimiento de referencia.

Otro aspecto importante de este modelo es que la concepción suele ser local en el sentido de trabajar para resolver un problema específico y no otro que apunte a un dominio de validez. Una concepción implica un cuádruple (P, R, L, Σ):

- P es un conjunto de problemas en que ¢ es operacional;
- R es un conjunto de operadores (herramientas cognitivas para acción);
- L es un sistema de representación, que permite expresar los elementos de P y R;
- Σ es una estructura de control, que garante la no contradicción de ¢.

En este cuádruple, un sujeto que se enfrenta a un problema por resolver puede tener varias concepciones sobre un mismo objeto matemático y movilizar una u otra, según el problema propuesto. Una concepción está compuesta por un conjunto de conocimientos y lo conocimientos, a su vez, está compuesto por un conjunto de concepciones, como vemos representado en la siguiente figura:

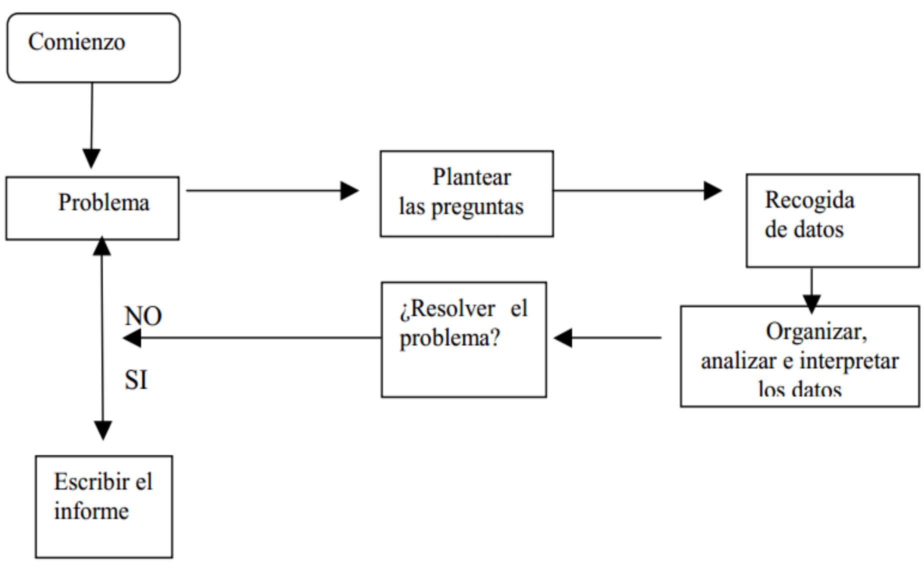
Figura 1. *Relación entre concepciones, conocimiento y conceptos.*



Fuente: Oliveira (2010, p. 43).

En la enseñanza y el aprendizaje de la Estadística, asumimos el marco teórico del AED y su abordaje a la metodología de enseñanza del aprendizaje basado en proyectos, para valorar la postura crítica investigativa. Batanero, Estepa y Godino (1991) destacan su potencial para crear situaciones de aprendizaje sobre temas de interés para los estudiantes, a partir de representaciones gráficas que favorezcan la percepción de la variabilidad, la evaluación de medidas de orden que minimicen los casos inusuales, el uso de diferentes escalas y la falta de necesidad de una teoría matemática compleja, con herramientas innecesarias para la etapa de aprendizaje en el campo. En esta investigación nos interesa especialmente el desarrollo de los proyectos estadísticos, y el papel que juegan sus docentes, desde la perspectiva del AED. Para Batanero y Díaz (2004), los proyectos estadísticos los motivan, a diferencia de la simple resolución de largas listas de ejercicios repetitivos y descontextualizados.

Figura 2. *Etapas del desarrollo de un proyecto.*



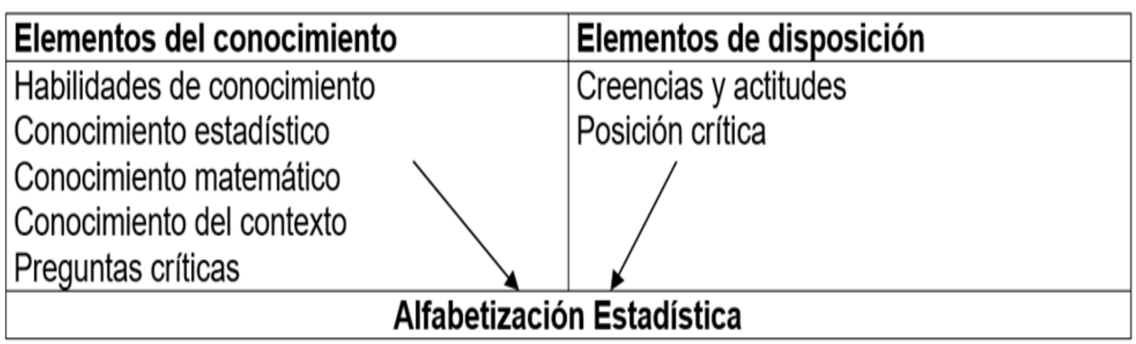
Fuente: Batanero y Díaz (2004, p. 134).

Para estas autoras, la Estadística es la ciencia de los datos, y estos no son solo números, sino números en contexto. Según ellos, en el trabajo por proyectos, el énfasis está en situaciones realistas. Batanero y Díaz (2011) destacan que el desarrollo de proyectos contribuye a la adquisición de las siguientes habilidades, que son fundamentales para los estudiantes, tales como: competencia lingüística comunicativa, competencia matemática, competencia para el reconocimiento y la interacción con el mundo físico, competencia para el procesamiento información, competencia digital, competencia social para ejercer la ciudadanía, competencia para "aprender a aprender", competencia para cuestionar críticamente y competencia para lograr la autonomía y la iniciativa personal. Tales competencias son necesarias para el desarrollo de los componentes cognitivos y actitudinales de la alfabetización estadística.

El desarrollo del Proyecto de Aprendizaje Estadístico (PAE) posibilita la exploración del conocimiento estadístico, en contextos significativos para los estudiantes, así como técnicas y estrategias de gran relevancia para la formación de ciudadanos críticos, en un enfoque más rico y complejo que el ofrecido por el libro de texto. Batanero y Díaz (2011) destacan las diferencias entre saber y poder aplicar el conocimiento. Aplicarlos suele ser mucho más difícil de lo que parece, porque requiere no solo de conocimientos técnico-procedimentales (cómo elaborar un gráfico o calcular una media), sino también de conocimientos estratégicos (saber elegir el mejor tipo de gráfico, según la naturaleza de las variables y con lo que se pretende resaltar a través de ella).

Cazorla y Giordano (2021) observan que la Estadística contribuye en gran medida a la exploración interdisciplinar, por ser una ciencia mediadora, cuyo papel es auxiliar a otras ciencias en la aprehensión y comprensión de los fenómenos, a través de la evidencia científica empírica, basada en datos. Wild et al. (2018) afirman que la Estadística es una metadisciplina, capaz de transformar datos en conocimientos del mundo real. Para comprenderlo mejor, es necesario desarrollar la alfabetización estadística (Gould, 2017; Gal, 2021). La aprehensión significativa de la realidad y la argumentación basada en datos se realiza a través de la alfabetización estadística (Gal, 2021).

Figura 3. *Modelo de alfabetización estadística.*



Fuente: Gal (2021, p. 42).

Para la promoción de la alfabetización estadística, Porciúncula (2022) sugiere la implementación del (PAE) cuyo desarrollo comprende las etapas: definición del tema (en vista del interés y preocupaciones de los sujetos de investigación), recolección y organización de datos (a través de una encuesta); análisis estadístico y discusión de resultados entre los miembros del grupo; presentación/difusión de resultados, con el intercambio de información. En este proceso, el estudiante experimenta el rol de investigador, de gran importancia para la apropiación de los procesos de construcción del conocimiento científico, para el perfeccionamiento de la criticidad y el pleno ejercicio de la ciudadanía, para la convivencia en una sociedad democrática e ilustrada, en un ambiente de justicia social. El apoyo del docente, como mediador de interacciones en el entorno didáctico, como gestor del desarrollo del PAE es fundamental.

En la siguiente sección, presentaremos nuestros procedimientos metodológicos.

Metodología

Realizamos una investigación cualitativa, del tipo de estudio de caso, desde la perspectiva de Creswell y Creswell (2021). Los sujetos fueron seis profesores de diferentes asignaturas (Matemáticas, Historia, Portugués), docentes de clases de 2° año (7-8 años de edad), 7° y 8° años (12-14 años de edad) de la escuela primaria brasileña, que participaron de un proyecto de alfabetización multimedia estadística a lo largo de 2021, en el contexto de la pandemia del COVID – 19.

Este proceso implicó encuentros quincenales remotos en grupo colaborativo, a través de Google Meet, con lectura y discusión de artículos científicos, presentación de seminarios, planificación y ejecución del Proyecto de Aprendizaje Estadístico – PAE, además de tutorías remotas a través de la aplicación WhatsApp, ofrecida por investigadores de una universidad federal local.

En la fase final, con la vuelta a las clases presenciales, estos investigadores ayudaron a los profesores de forma presencial, visitando sus centros, contactando con los estudiantes, colaborando con la organización de la presentación de los resultados finales de sus proyectos a la comunidad escolar, incluso ofreciendo material escolar y libros de estadística adecuados para estos niños. En diciembre, con el final del año escolar, estos docentes participaron en un grupo focal de dos horas para hablar sobre su experiencia con el PAE y discutir temas relacionados con ellos, como la interdisciplinariedad, la ludicidad, los conocimientos docentes y las habilidades estadísticas, contrastando sus expectativas y concepciones iniciales y finales. Se registró el grupo focal y sus transcripciones fueron objeto de nuestro análisis, con la ayuda del *software* NVIVO.

Resultados

Los profesores admitieron una gran inseguridad inicial. Temían no dominar los temas que pudieran surgir de las elecciones de los estudiantes, así como las herramientas y recursos matemáticos y estadísticos, especialmente en cuanto a la construcción, lectura e interpretación de tablas y gráficos, uso de software y aplicaciones. También temían la falta de interés y compromiso de los estudiantes.

En cuanto a los profesores involucrados en la segunda etapa de nuestras investigaciones, la implementación y desarrollo del PAE generó inicialmente inseguridad, miedo a lo nuevo y la aceptación de una nueva metodología, pero la confianza en el apoyo brindado por los investigadores los llevó a aceptar el reto. Los seis docentes involucrados afirmaron que esta era su primera experiencia con proyectos estadísticos.

El grupo colaborativo demostró ser acogedor y continente de sus inquietudes y angustias. En última instancia, estos maestros experimentaron una sensación de alivio y gratificación al ver el trabajo final de sus alumnos. En palabras de uno de los profesores implicados “Pero ese no es el objetivo, ¿verdad? Eso (el PAE) engloba todo desde la investigación y entonces yo creo que ya está, eso es lo que mola” y, hablando del trabajo ya hecho: “a veces lo hacemos y no nos damos cuenta de lo interdisciplinario que es, ¿no? lo es, pero lo es, investigas, lo persigues y al menos tienes que saber un poco sobre las otras áreas, ¿verdad? Este mismo profesor concluyó que “lo principal del proyecto es que tienen un espacio colectivo de diálogo, discusión e investigación”. Otro docente observó que en “la enseñanza muy tradicional, todo era en línea, era esto para después eso, poca interdisciplinariedad”. Fue un camino seguro, aunque poco motivador para los alumnos e incluso para el profesor de educación de jóvenes y adultos en actividades de alfabetización.

En el Grupo Focal, en una sesión de cerca de dos duraciones, los docentes destacaron más ventajas que dificultades en su inserción en las prácticas docentes regulares La nube de palabras, elaborada a partir del Grupo Focal realizado con los docentes, con las 40 palabras más mencionadas, con más de cinco letras, denota la importancia de aprender Estadística haciendo Estadística, desde la perspectiva de la AED (Batanero y Díaz, 2011), del hacer en el sentido de 'estadística', como argumenta Conti (2009, p. 173): “ sí es posible 'alfabetizar' y 'estadística' y eso puede suceder en una escuela pública, en la periferia, con alumnos que pueden superar sus propias dificultades; y esta posibilidad no se limita al conocimiento estadístico".

Considerando la perspectiva interdisciplinar, explorando temas transversales e itinerarios formativos en la educación post-BNCC, no se limita. Haciéndose eco del 'hacer', encontramos resaltado, en las palabras 'obra', 'obra', 'proyecto'. La palabra 'tiempo' se asoció a tres contextos diferentes: el tiempo disponible para realizar el proyecto, sin perjuicio del programa curricular, especialmente al inicio del trabajo, el tiempo restante, con la vuelta a las clases presenciales , para posibilitar la culminación del proyecto , con la difusión de los resultados de la investigación, y la optimización del tiempo, al incorporar objetos de conocimiento de diferentes componentes curriculares, itinerarios y temas transversales, como también es posible observar en los discursos obtenidos con la ayuda del software NVIVO.

El PAE resultó ser un desafío, exigiendo que el docente aceptara vivir con la incertidumbre, ya que las direcciones de la investigación estaban en manos de los estudiantes. Según ella, "el mayor aprendizaje fue permitirnos no tener el control". Un tercer profesor se mostró encantado con el resultado final, especialmente con la implicación de los alumnos: "¡qué importancia se sienten cuando nos dan las mil y una explicaciones de sus investigaciones!".

Al final quedaron sorprendidos con los resultados, con la gran motivación de los niños, con la movilización y apoyo de la comunidad escolar, así como con el apoyo de las alianzas, reconociendo la importancia de la interdisciplinariedad en la educación. Estos profesores participaron en la redacción de capítulos de un libro que registra esta experiencia. Reconocieron el importante papel de estos proyectos para la enseñanza y el aprendizaje de la Estadística y pretenden seguir utilizando esta metodología de enseñanza en los próximos años.

Conclusiones

El BNCC, (Brasil, 2018), a pesar de todas las críticas recibidas, la mayoría fundadas, a nuestro juicio, dio un gran impulso a las metodologías activas de enseñanza, haciendo objeto de conocimiento el desarrollo de la investigación estadística a través de proyectos. Tales cambios demandaron, requieren y seguirán demandando en los próximos años, una gran inversión de energías y recursos en educación inicial y continua. Esperamos que los grupos colaborativos formen parte de estas propuestas formativas.

La pandemia de la COVID-19, y la puesta en marcha del ERE, precisamente cuando los profesionales de la educación intentaban adaptarse a los cambios curriculares derivados de la publicación de la BNCC (Brasil, 2018), constituyó uno de los mayores retos a los que se enfrentó toda una generación de educadores en nuestro país.

Asegurar la participación de los estudiantes en las clases a distancia, acercar a la comunidad escolar, participar en capacitaciones colaborativas permanentes, tutorías, apoyo técnico estratégico, mantener un canal continuo de comunicación con todos los involucrados en los procesos educativos fue necesario para enfrentar la crisis educativa. Al ver la reapertura de las escuelas, culminando con el evento de difusión de los datos de la investigación de los estudiantes, con la presencia de toda la comunidad escolar, pudiendo registrar en audiovisual y a través de un libro, con las narrativas de los docentes, junto con el análisis de los investigadores, fue gratificante, en palabras de estos profesionales.

Para los docentes, desarrollar el PAE en medio de la pandemia fue una oportunidad para reinventarse, deconstruyendo y reconstruyendo saberes, estableciendo alianzas, colaborando, compartiendo saberes y sentimientos y, sobre todo, atreviéndose. Comenzaron a ver la Estadística de una manera diferente, dándose cuenta de que sabían mucho más de lo que imaginaban al ayudar a sus alumnos a construir gráficos estadísticos, con el apoyo tecnológico de múltiples recursos computacionales e incluso en el entorno de papel y lápiz, en lectura e interpretación de tablas de distribución de frecuencias, en la redacción y revisión de los argumentos de los estudiantes, basados en datos científicos, especialmente en los momentos que anteceden a la presentación de los resultados de sus investigaciones. La mayor diferencia del segundo grupo fue reconocer la necesidad de buscar alianzas, para mantener la oferta de educación continua.

Consideramos que el enfoque de la Estadística a través de proyectos puede contribuir al cambio de las concepciones docentes, al necesario proceso de formación continua docente colaborativa (Schreiber y Porciúncula, 2021), a mejorar la calidad de la enseñanza, ejerciendo la ciudadanía, empoderando a docentes y estudiantes y promoviendo la justicia social, a través de la alfabetización estadística (Porciúncula et al., 2019).

Esperamos haber contribuido, con nuestra investigación, a profundizar la reflexión sobre el cambio de concepciones docentes, a través de propuestas cooperativas y colaborativas, en el desarrollo de la enseñanza y el aprendizaje estadístico.

Referencias biliográficas

Artigue, M. (1989). Épistémologie et didactique. Paris: *Cahier de DIDIREM*, 3, 14-19.

Artigue, M. (1991). Épistémologie et didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 10(2), 241-285.

Artigue, M. (1993). Connaissance et métaconnaissance, une perspective didactique. In: Baron M., Robert A. (eds.) Métaconnaissances en IA, en EIAO et en *Didactique des Mathématiques*. RR Laforia. Paris: Institut Blaise Pascal, 93(18), 29-42.

Artigue, M. (1994). Didactical engineering as a framework for the conception of teaching products. *Didactics of mathematics as a scientific discipline*, 13, 27-39.

Azcárate, P. G. (1996) *Estudio de las concepciones disciplinares de futuros profesores de la primaria en torno a las nociones de la aleatoriedad y probabilidad*. Granada: Comares, Colección Matema.

Balacheff, N. (1995). Conception, connaissance et concept. In *Séminaire de l'équipe DidaTech*, IMAG (pp. 219-244). Grenoble.

Balacheff, N. (2001). Les connaissances, pluralité de conceptionsle cas des mathematiques. In: Conference Ingenierie de la Connaissance. Toulouse: *Actes de la conférence*, 83-90.

Balacheff, N. (2002). Cadre, registre et conception. Grenoble: *Les cahiers du laboratoire Leibniz*, 58, 1-19.

Balacheff, N. y Gaudin, N. (2002). Student's conceptions: an introduction to a formal characterization. Grenoble: *Les cahiers du laboratoire Leibniz*, 65, 1-21.

Balacheff, N. y Margolinas, C. (2005). CK¢: modèle de connaissances pour le calcul des situations didactiques. In: Mercier, A. y Margolinas, C. (Eds.). *Balises pour la didactique des mathématiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage Editions, 75-106.

Batanero, C. y Díaz, C. (2004). El papel de los proyectos en la enseñanza y aprendizaje de la estadística. En J. Patricio Royo (Ed.), *Aspectos didácticos de las matemáticas*. Zaragoza: ICE, pp.125- 164.

Batanero, C. y Díaz, C. (2011). *Estadística con proyectos*. Universidad de Granada.

Batanero, C.; Estepa, A. y Godino, J. D. (1991). Análisis exploratorio de datos: sus posibilidades en la enseñanza secundaria. *Suma*, *9,* 25-31.

Brasil. (2018). *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: Ministério da Educação.

Cazorla, I. M. y Giordano, C. C. (2021). O papel do letramento estatístico na implementação dos Temas Contemporâneos Transversais da BNCC. In Monteiro, C. E. F.; Carvalho, L. M. T. L. *Temas Emergentes em Letramento Estatístico* (pp. 88-111). Recife: Editora UFPE.

Conti, K. C. (2009). *O papel da estatística na inclusão de alunos da educação de jovens e adultos em atividades letradas*. Dissertação (Mestrado em Educação). Campinas: Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas.

Creswell, J. W. y Creswell, J. D. (2021) *Projeto de pesquisa - métodos qualitativo, quantitativo e misto*. Porto Alegre: Penso Editora.

Fiorentini, D. (2013). Pesquisar práticas colaborativas ou pesquisar colaborativamente? In: Borba, M. C.; Araújo, J. L. (Orgs.). *Pesquisa qualitativa em Educação Matemática*. 5ª Edição (pp. 53-85). Belo Horizonte: Autêntica.

Gal, I. (2021). Promoting statistical literacy: Challenges and reflections with a Brazilian perspective. In C. Monteiro y L. Carvalho (Eds). *Temas emergentes em letramento estatístico*. (Ch. 1, 37-59). UFPE.

Garfield, J. (1993). Teaching statistics using small-group cooperative learning. *Journal of Statistics education*, 1(1), 1-9.

Giordano, C. C. (2021). Conocimientos y concepciones estadísticas de los estudiantes de secundaria en Brasil. *Paradigma*, 42(1), 156-183.

Gould, R. (2017). Data literacy is statistical literacy. *Statistics Education Research Journal*, 16(1), 22-25.

Hall, V., y Wallace, M. (1993). Collaboration as a Subversive Activity: a professional response to externally imposed competition between schools? *School Organization*, 13(2), 101-117.

Hargreaves, A. (1998). *Os professores em tempos de mudanças: o trabalho e a cultura dos professores na Idade Moderna*. Lisboa: McGraw-Hill.

Oliveira, P. G. D. (2010). *Probabilidade: concepções construídas e mobilizadas por alunos do Ensino Médio à luz da teoria das concepções (CK¢)*. Dissertação de Mestrado. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

Porciúncula, M. (2022). *Letramento Multimídia Estatístico (LeME) - Projetos de aprendizagem estatísticos na educação básica e superior*. Curitiba: Appris.

Porciúncula, M.; Schreiber, K. P. y Almeida, R. L. (2019). Statistical Literacy: A strategy to promote social justice. *RIPEM*, 9(1), 25-44.

Schreiber, K. P. y Porciúncula, M. (2021). Conhecimentos docentes para ensinar Estatística: olhar do professor sobre os estudantes e as estratégias pedagógicas. *Zetetiké*, 29, 1-25.

Wild, C.; Utts, J.; Horton, N. (2018). What is Statistics. In: Ben-Zvi, D.; Makar, K.; Garfield, J. (ed.). *International Handbook of Research in Statistics Education*. Gewerbestrasse: Springer International Handbooks of Education. Chapter 1. p. 5-36.

VOL 36, NÚMERO 2, AÑO 2024

PROPUESTA DE EVALUACIÓN FORMATIVA PARA DERIVADAS: ESTUDIO DE TRES CASOS EN EDUCACIÓN PERSONALIZADA

FORMATIVE EVALUATION PROPOSAL FOR DERIVATIVES: STUDY OF THREE CASES IN PERSONALIZED EDUCATION

Evelyn Johana Cuevas Ortegón, Ivonne María Suarez Higuera, Herbert Dueñas Ruiz
Universidad Nacional de Colombia. (Colombia)
ejcuevaso@unal.edu.co, imsuarezh@unal.edu.co, haduenasr@unal.edu.co

Resumen:
Durante sus prácticas de aula en una institución con modelo de educación personalizada ubicada en Bogotá, Colombia, la docente autora identificó la necesidad de fortalecer el proceso de evaluación formativa, específicamente para el eje temático de derivadas en grado once. En respuesta a esta problemática, se diseñaron cinco instrumentos evaluativos a partir del análisis de los soportes teóricos establecidos en el marco conceptual y los soportes prácticos que permitieron realizar la aproximación al contexto. Los diseños fueron validados por docentes pares, y los resultados se agruparon en tres casos de estudio para su análisis, encontrándose que la validación aporta sugerencias para enriquecer los instrumentos y fomenta la reflexión de los docentes en torno a los procesos de evaluación, llevándolos a reconocer la importancia del aprendizaje del concepto más allá del desarrollo de la habilidad operacional, las diversas alternativas para evaluarlo y los parámetros para la realización de adaptaciones curriculares.

Palabras clave: educación personalizada, sistema de evaluación, evaluación formativa, educación media, derivadas

Abstract:
During her classroom practices in an institution with a personalized education model located in Bogotá, Colombia, the author teacher identified the need to strengthen the formative evaluation process, particularly for the thematic axis of derivatives in eleventh grade. In response to this problem, five evaluation instruments were designed, based on the analysis of the conceptual framework theoretical supports and the practical supports that allowed a context approach. The designs were validated by peer teachers, and the results were grouped in three case studies for analysis, in which it was found that the validation provides suggestions to enrich the instruments and encourages teachers to reflect on the evaluation processes, leading them to recognize the importance of learning the concept beyond the development of operational skills, the various alternatives to evaluate it and the parameters for carrying out curricular adaptations.

Keywords: personalized education, evaluation system, formative evaluation, high school, derivatives

Introducción

Durante más de 13 años la docente autora del presente trabajo ha estado vinculada a una institución educativa ubicada en Bogotá (Colombia), que ofrece diferentes programas educativos bajo el modelo de educación personalizada; a partir de la observación y reflexión crítica en el ejercicio de su labor como docente de matemáticas, logró identificar algunas problemáticas relacionadas con los procesos evaluativos en dicha área; en general, los docentes usan métodos tradicionales como talleres, test cortos y exámenes donde se prioriza lo procedimental; en particular, al abordar las primeras nociones del cálculo tales como derivadas, la comprensión de los conceptos presenta un reto para los estudiantes y los docentes optan por abordarlos desde la aplicación de un conjunto de reglas operativas.

Dado lo anterior y con el fin de fortalecer la evaluación formativa en la práctica de aula de derivadas dentro de la institución, se establece como objetivo general el de proponer y validar, con docentes pares, instrumentos de evaluación formativa en el eje temático de derivadas para la asignatura de matemáticas en grado once. De esta forma se consolida una propuesta de evaluación formativa compuesta por cinco instrumentos evaluativos, uno para cada semana del período académico correspondiente a derivadas en el plan curricular de la institución.

La propuesta con la que se espera fortalecer el sistema de evaluación formativa en la institución aporta desde la elaboración de instrumentos que dan cuenta del proceso de aprendizaje del estudiante y permiten establecer con mayor claridad sus desempeños, involucrándolos como actores activos y responsables del mismo; adicional los resultados contribuyen a la línea de investigación dentro de la cual se enmarca el trabajo: evaluación de los aprendizajes en matemáticas.

Marco teórico

1. La educación personalizada

Los contextos de educación personalizada (EP) se caracterizan por reconocer la singularidad de los educandos promoviendo su autonomía y propiciando espacios en los que se da una relación horizontal entre el docente y el estudiante, permitiendo así la apertura de ambos y el reconocimiento de su naturaleza humana como base para la construcción académica en conjunto (Pérez & Ahedo Ruiz, 2019). El modelo EP establece al estudiante como centro y protagonista del proceso académico, haciendo énfasis en el desarrollo de la autonomía y propiciando el auto aprendizaje mediante el análisis crítico; fomenta la participación y elección del estudiante en su proceso, implica mayor responsabilidad de su parte y exige que en cooperación con el docente se puedan conectar los intereses, talentos, pasiones y aspiraciones de los estudiantes con el currículo, los objetivos de aprendizaje y la evaluación de los mismos. En estos ambientes de educación el estudiante tiene la posibilidad de elegir sus metas de aprendizaje y así mismo las diferentes herramientas para dar evidencias de lo que ha aprendido, todo esto en función de sus habilidades (DeMink-Carthew, Olofson, LeGeros, Netcoh, & Hennessey, 2017).

2. Evaluación de los aprendizajes

Respecto a la evaluación, la Ley General de Educación en Colombia establece algunos parámetros que buscan garantizar la calidad educativa sin importar el modelo implementado dentro de la institución:

> La evaluación debe ser continua, integral y cualitativa, y tendrá como fin definir el avance del proceso educativo llevado a cabo por el estudiante, favoreciendo la identificación de características personales, intereses, ritmos de desarrollo, estilos de aprendizaje y dificultades; proporcionando al docente la información para reorientar o consolidar sus prácticas pedagógicas ((MEN), 1994).

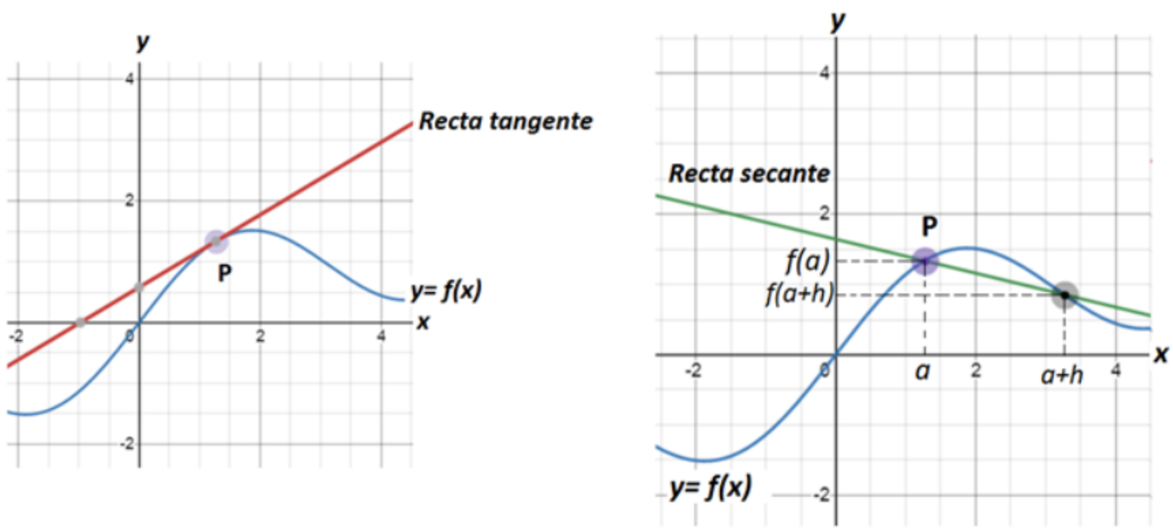
En este sentido, se concibe el proceso de evaluación como aquel que permite recoger información de forma planificada y horizontal, en donde adicional también se devuelve información útil para conocer, comprender y analizar los aspectos que están influyendo en el proceso de enseñanza - aprendizaje con el fin de mejorarlo (López, 2013).

La evaluación formativa puede verse como una forma de apoyo del proceso, permitiendo identificar áreas en las que el estudiante presenta dificultades y así formular planes de mejora (Jané, 2009); el proceso evaluativo debe garantizar confiabilidad y precisión y una de las formas en que esto puede darse es alineando el tipo de objetivo a evaluar con el instrumento de evaluación, de forma que correspondan de acuerdo a su complejidad. Con respecto a la complejidad de los objetivos de aprendizaje, en el presente trabajo, se usan como guía los Estándares Básicos de Competencias establecidos por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN) para el área de matemáticas y en específico para el eje temático de derivadas (MEN, 2006).

3. Eje temático de derivadas

La noción de derivada surge al tratar de responder al interrogante: ¿cómo hallar la pendiente de la recta tangente a una curva *f* en uno de sus puntos?; teniendo que una recta es tangente a una curva en un punto a, si la recta y la curva se intersecan en el punto a y son similares cerca de él, es decir, la recta tangente debe ir en dirección de la curva en $x = a$ (Dueñas & Rubio, 2015). Este problema fue estudiado desde la segunda mitad del siglo XVII por los matemáticos Isaac Newton y Gottfried Wilhelm Leibniz, y va ligado a la comprensión del lenguaje variacional, que de acuerdo a diferentes estudios, presenta dificultad para el estudiante; generalmente se logra que el estudiante desarrolle las operaciones de forma mecánica sin llegar a la utilización adecuada del concepto de derivada, ya sea, desde el límite del cociente incremental o desde su significado geométrico como pendiente de la recta tangente a una curva (Sánchez, García, & Llinares, 2008).

Figura 1. *Representación de una recta tangente y secante a una curva.*



Fuente: modificada de (Dueñas & Rubio, 2015).

Para determinar la pendiente de la recta tangente a la curva $f(x)$ en un punto P, se puede recurrir a la aproximación a partir de las secantes, esto es, la pendiente de las rectas secantes, al hacer que el valor sea infinitesimalmente pequeño o en otras palabras que tienda a cero, se aproximará al valor de la pendiente de la recta tangente que se está buscando. Es decir, cuando h tienda a cero ($h \to 0$) la pendiente de la recta secante será aproximadamente igual a la pendiente de la recta tangente, llegando así a la definición de la derivada en $x = a$, siendo $f(x)$ una función real. La derivada, notada como $f'(a)$, está definida por la Ecuación (1), siempre que el límite exista:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad (1)$$

Generalmente el proceso de enseñanza de la noción de derivada parte desde la medida de la inclinación de la recta tangente a una curva, lo que presupone que el estudiante tiene claras las nociones de pendiente y recta tangente. Sin embargo, en la literatura se mencionan las dificultades de los estudiantes para asumir problemas que requieren algún tipo de análisis variacional, lo que sumado a la idea de línea tangente proveniente de la matemática griega, en donde se asume que la recta es tangente a la curva si la toca pero no la corta, caracterización que funciona para las cónicas pero no para funciones como la cúbica entre otras, se erigen como obstáculos a la hora de abordar el concepto de derivada (Cantoral & Mirón, 2000).

Se han podido identificar varios obstáculos epistemológicos en el proceso de enseñanza de la derivada, en primer lugar es importante resaltar lo mencionado por Cantoral (2000) "*la enseñanza tiende a sobrevalorar los procedimientos analíticos y la algoritmización, dejando de lado a los argumentos visuales, por no considerarlos como matemáticos, entre otras causas*", esta problemática es muy habitual, se observa generalmente que la enseñanza logra que los estudiantes deriven sin que puedan asignar un sentido más amplio a las nociones involucradas en su comprensión.

Metodología

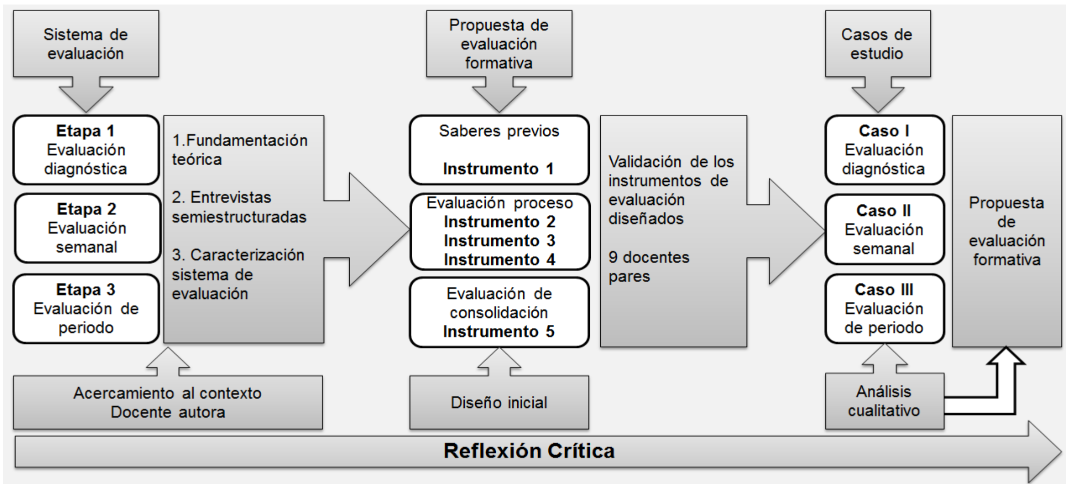
Se establece un enfoque cualitativo que permite una acción de indagación más dinámica entre los hechos y su interpretación (Hernández, Fernández, & Baptista, 2014). El trabajo se enfoca a partir de las observaciones realizadas por la docente autora en torno a su práctica, no se pretende por tanto llegar a generalizaciones, sino presentar una propuesta para el mejoramiento de la labor docente, motivando en los pares participantes el deseo de fortalecer su práctica y así mejorar su proceso de enseñanza (Stenhouse, 1991).

En la primera etapa, por medio de entrevistas semiestructuradas y luego mediante la caracterización de la práctica de aula de la docente autora en relación al eje temático de derivadas, se consolida el problema de investigación y se realiza un acercamiento al contexto definiendo así las particularidades del sistema de evaluación de la institución. En la segunda etapa, a partir del análisis de los soportes prácticos y teóricos, se diseña la propuesta evaluativa que consta de 5 instrumentos para el eje temático de derivadas.

En la tercera etapa, los diseños se someten a un proceso de validación por un grupo de nueve docentes pares, todos ellos con experiencia en ambientes de educación personalizada; para la recolección de sus impresiones se usó una matriz de validación diseñada para tal fin. En la fase final, se consolida la propuesta evaluativa mediante el análisis de las observaciones de cada matriz, definiendo para ello tres casos de estudio de acuerdo a cada etapa del sistema de evaluación de la institución: evaluación diagnóstica, evaluación semanal y evaluación de periodo; y se presentan conclusiones y recomendaciones a partir de las reflexiones realizadas a lo largo del proceso por la docente autora.

Los participantes del estudio, además de la docente autora, fueron doce docentes pares con experiencia en educación personalizada, cinco de ellos entrevistados en la fase inicial para realizar la inmersión en el contexto y obtener soportes prácticos para el problema, y nueve de ellos establecidos como pares validadores de la propuesta en la fase final.

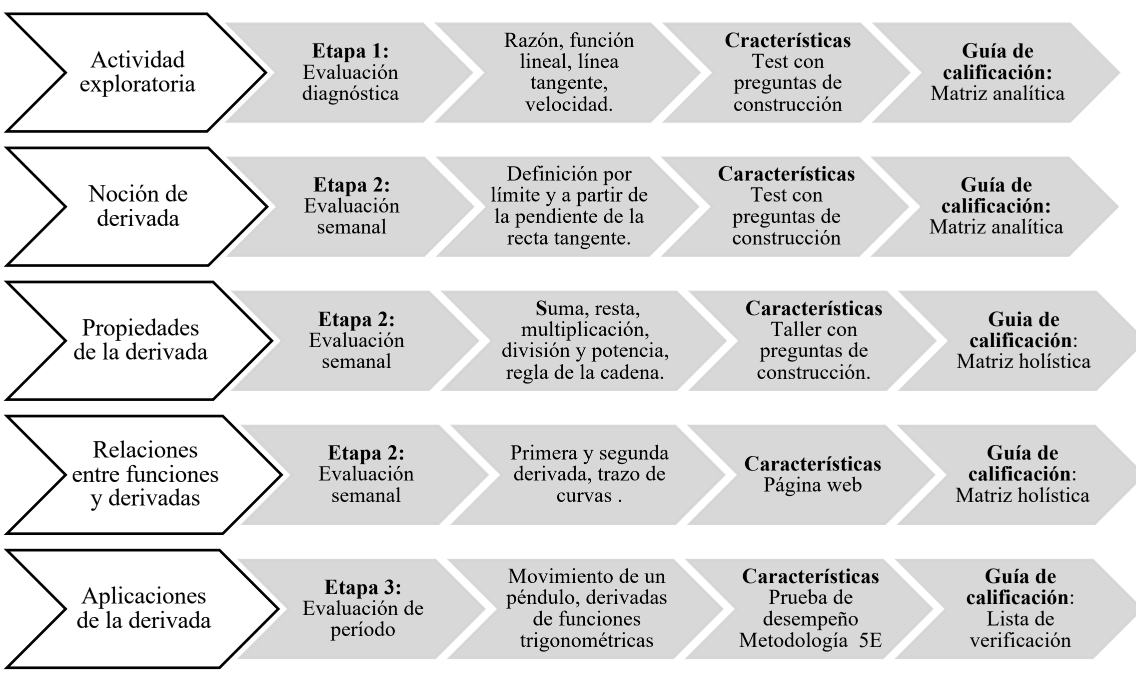
Figura 2. *Metodología del estudio.*



Fuente: elaboración propia.

Para la fase de diseño se tomaron como referentes, el currículo de la institución, los Estándares Básicos del Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN) relacionados con derivadas y la taxonomía Webb de clasificación de los aprendizajes, la cual permite diferenciar cuatro niveles de profundidad del conocimiento facilitando así el reconocimiento de las capacidades del estudiante; con base en estos se elaboraron cinco instrumentos evaluativos definiendo para cada uno el protocolo de aplicación, el constructo, la matriz de calificación, sugerencias para el proceso de retroalimentación y adaptación del programa para entornos de educación personalizada.

Figura 3. *Diseño propuesta de evaluación.*



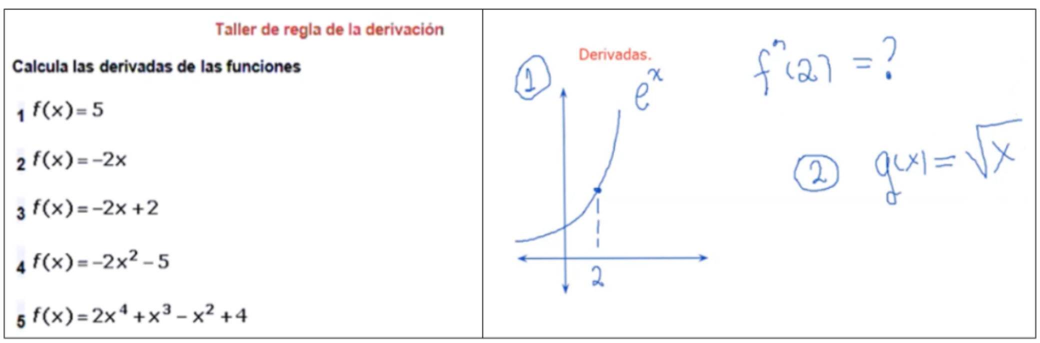
Fuente: elaboración propia.

Resultados

En la fase de inmersión en el contexto, los docentes participantes encontraron un espacio para reflexionar sobre sus prácticas de aula, fue posible identificar su percepción sobre la personalización, sus intereses, sus necesidades y su visión sobre aquello que debe enseñarse en torno a la noción de derivada (concepto, reglas, aplicación). Los docentes en su mayoría recién egresados o estudiantes de últimos semestres de licenciatura (física, matemáticas) o carreras afines (ingeniería), presentaban poca experiencia previa en procesos formales de enseñanza y en algunos casos asociaban la personalización con dificultades de aprendizaje en estudiantes. Su percepción sobre la evaluación difería dejando ver desconocimiento general en torno a procesos de evaluación formativa por lo que sus instrumentos evaluativos básicamente se constituían por preguntas o problemas sin un constructo de soporte.

Adicionalmente, al caracterizar la práctica de aula de la docente autora, se encontró que en general, tanto durante el desarrollo de las clases como en la realización de las evaluaciones, no aborda los conceptos desde su definición formal, sino que trata de obviar la notación compleja para que el estudiante pueda tener un acercamiento con lenguaje cotidiano al concepto. Específicamente, en relación al eje temático de las derivadas, espera que los estudiantes logren resolver derivadas aplicando reglas generales de derivación, apliquen el concepto de derivada para el análisis de curvas y establezcan relaciones matemáticas entre diferentes variables para solucionar problemas de optimización.

Figura 4. *Ejemplos instrumentos evaluativos de docentes entrevistados.*



Fuente: entrevistas semiestructuradas (2020).

En la fase de diseño, a partir de las percepciones de las entrevistas semiestructuradas, de la caracterización de la práctica de aula de la docente autora y de los referentes teóricos, se diseñaron cinco instrumentos compuestos principalmente de dos secciones: diseño para el docente y diseño para el estudiante.

En el diseño para el docente: se presenta el propósito del instrumento, el momento evaluativo para el que se propone (semana y sesión de clase), el tipo de evaluación, preguntas y método de calificación; así como el Estándar Básico de Competencias asociado al mismo y su clasificación de acuerdo con la taxonomía de Webb. Enseguida se presenta el constructo general en el que cada pregunta se clasifica por nivel de acuerdo con la taxonomía de Webb y es asociada a un desempeño. También se propone el protocolo de aplicación describiendo la dinámica que seguirá el docente para los momentos previos y posteriores al desarrollo del instrumento. Se muestran aspectos como el tiempo de aplicación y la descripción del proceso de evaluación formativa.

Figura 5. *Ejemplo constructo primera pregunta instrumento "actividad exploratoria".*

Pregunta	Nivel	Desempeño
1	**N1:** Recordar y reproducir	Expresa la relación entre dos magnitudes como una razón.

1. De acuerdo con el texto, exprese la razón entre el número de colombianos con acceso móvil a internet y el número total de colombianos para el tercer trimestre del año 2019.

"Según el Boletín Trimestral de las TIC, para el cierre del tercer trimestre del 2019, en Colombia había 28,9 millones de accesos móviles a internet, tres millones más que en el mismo periodo de 2018. Lo cual quiere decir que seis de cada 10 colombianos contaron con acceso móvil a internet en ese periodo."

Tomado de: https://www.portafolio.co/economia/seis-de-cada-10-colombianos-tienen-acceso-a-internet-movil-537543

Fuente: instrumento evaluativo "actividad exploratoria".

Las preguntas que componen el instrumento se presentan con su constructo y recomendaciones para tener en cuenta en el momento de la calificación y facilitar la realización de la retroalimentación. Se establece el método de calificación con su objetivo y al final se discuten las posibles adaptaciones curriculares que pueden realizarse de acuerdo con los resultados obtenidos por los estudiantes en el marco de la educación personalizada.

En la figura 6, se muestra un ejemplo del método de calificación elegido en los dos primeros instrumentos, matriz analítica, al ser un esquema descriptivo de calificación orienta el análisis de las evidencias con base en criterios preestablecidos y permite la consolidación de un sistema de evaluación más confiable facilitando el proceso de retroalimentación. Mediante estas matrices es posible recolectar información más específica del proceso teniendo en cuenta diferentes atributos, criterios o dimensiones; adicional se puede establecer el nivel de desempeño del estudiante para cada uno de ellos; dado lo anterior, esta guía de calificación es pertinente para conocer el desempeño del estudiante en relación a los saberes previos requeridos para dar inicio al estudio de la derivada y posteriormente identificar su nivel de comprensión sobre la noción de derivada.

Figura 6. *Ejemplo método de calificación primera pregunta instrumento "actividad exploratoria".*

Matriz de calificación analítica

Desempeño	1 (Bajo)	2 (Medio)	3 (Alto)	4 (Superior)
Pregunta 1 - N1 Reconocer la relación entre dos magnitudes como una razón.	No reconoce las magnitudes a relacionar ni el concepto de razón.	Reconoce el concepto de razón pero no logra expresar la relación entre las magnitudes presentadas.	Expresa la razón entre las magnitudes presentadas pero no lo hace en el correcto orden de acuerdo al enunciado.	Expresa en correcto orden la razón entre las magnitudes implicadas en el enunciado.
Respuestas esperadas	El estudiante no responde a la pregunta o responde con datos indicados en el enunciado que no corresponden a una razón.	El estudiante presenta una razón en su respuesta pero esta no relaciona correctamente las magnitudes solicitadas en el problema.	Aunque se solicita la razón entre el número de colombianos con acceso móvil a internet y número total de colombianos, el estudiante expresa en su respuesta: $\frac{10}{6}$ ó $\frac{5}{3}$	$\frac{6}{10}$ ó $\frac{3}{5}$ También se aceptan otras representaciones de la razón como por ejemplo en decimales.

Fuente: instrumento evaluativo "actividad exploratoria".

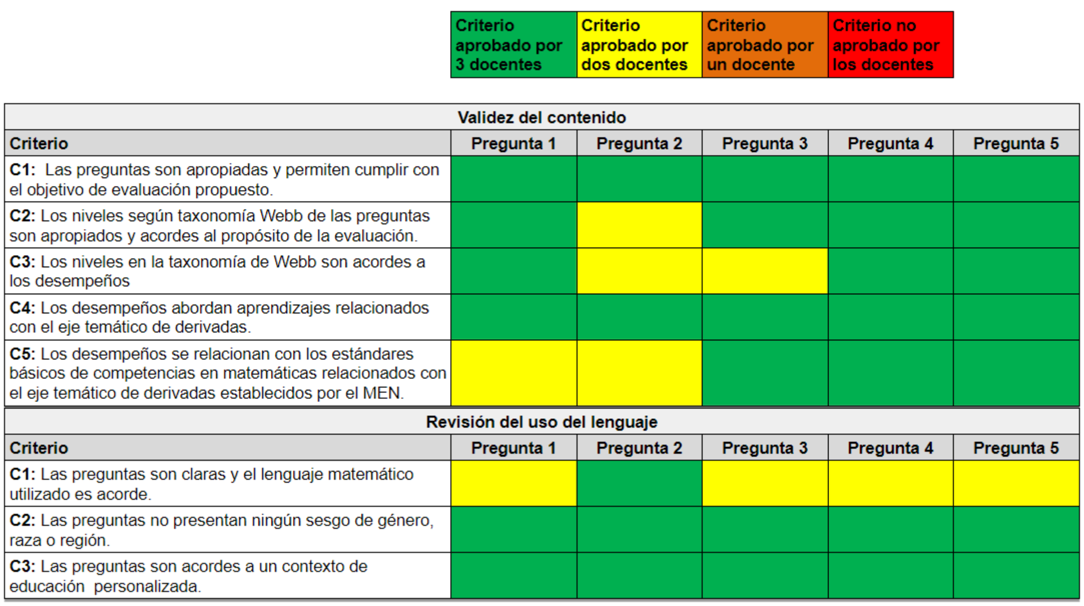
En el diseño para el estudiante: Se presenta un documento para aplicar el instrumento al estudiante con la formulación de las preguntas y el método de calificación en blanco. Adicionalmente, como actividad transversal, los estudiantes diligencian semanalmente sus reflexiones en torno al proceso evaluativo en un portafolio.

Casos de estudio

En la fase de validación, las observaciones y sugerencias de los nueve docentes participantes fueron insumo importante para enriquecer los instrumentos diseñados, además, el análisis de las matrices de validación dejó ver en la mayoría de los casos un interés por proponer alternativas para la retroalimentación e interpretación de los resultados de cada instrumento.

La matriz de validación indagó la percepción de los docentes sobre aspectos como propósito, protocolo de aplicación, carácter formativo de la evaluación (retroalimentación), validez del contenido y uso del lenguaje en los instrumentos diseñados, para cada uno de estos aspectos se establecieron diferentes criterios; cada instrumento fue validado por un grupo de tres docentes y los resultados fueron sistematizados en cuadros como se presenta en el ejemplo de la figura 7.

Figura 7. *Ejemplo resultados validación instrumento evaluativo "actividad exploratoria".*



Fuente: matriz de validación instrumento evaluativo "actividad exploratoria".

El ejercicio de validación motivo la reflexión en los docentes en torno a los procesos de evaluación, en específico para el eje temático de derivadas, llevándolos a proponer alternativas para el proceso formativo de retroalimentación de las preguntas y acciones para el fortalecimiento del instrumento, esto permite evidenciar el impacto de la propuesta al promover el mejoramiento de la práctica de aula tanto de la docente autora como de sus pares.

La tabla 1 permite resumir los resultados de cada uno de los tres casos de estudio establecidos. Es importante aclarar que, aunque se analiza la pertinencia de la propuesta para cada una de las etapas del sistema evaluativo por separado, esto no desconoce el carácter integral del sistema, se pretende con el análisis por estudios de caso identificar la contribución de los instrumentos específicamente en cada una de las etapas para llegar a una mejor consolidación de la propuesta evaluativa.

Tabla 1. *Resumen resultados casos de estudio.*

CASO 1 Evaluación diagnóstica	CASO 2 Evaluación semanal	CASO 3 Evaluación de período
Este caso se enfoca en la primera etapa del sistema de evaluación implementado por la institución, su análisis se centra principalmente en los resultados de la validación realizada al primer instrumento diseñado, cuyo propósito principal fue el de establecer preconceptos de los estudiantes. Los resultados de la validación indican que: El instrumento presenta utilidad para conocer el desempeño inicial del estudiante y adaptar el plan curricular, además, permite un proceso objetivo de clasificación basado en desempeños establecidos y que se dan a conocer al estudiante. Las observaciones de los docentes pares llevaron a la consolidación de la matriz de calificación y a la revisión de los conceptos de velocidad y razón de cambio por parte de la docente autora.	Este caso se enfoca en la segunda etapa del sistema de evaluación implementado por la institución, su análisis se basa principalmente en los resultados de la validación realizada al segundo, tercer y cuarto instrumento diseñado. El propósito principal de dichos instrumentos fue identificar el nivel de comprensión del estudiante sobre la noción de derivada, el reconocimiento y aplicación de sus propiedades y la facilidad para establecer relaciones entre las funciones y sus derivadas. Los resultados de la validación indican que: Los instrumentos brindan al docente una guía detallada tanto para el proceso de enseñanza como para el proceso de evaluación, además, al presentar el concepto en diversos contextos, variar los momentos de aplicación, las formas de retroalimentación e integrar TICs se re significa el proceso evaluativo. Se hace énfasis en aquellos aspectos que de acuerdo a los referentes teóricos revisados son relevantes en la comprensión del concepto de derivadas.	Este caso se enfoca en la etapa 3 del sistema de evaluación implementado por la institución, su análisis se basa principalmente en los resultados de la validación realizada al quinto instrumento diseñado, cuyo propósito principal fue evaluar la aplicación del concepto de derivada en diferentes contextos. Los resultados de la validación indican que: El instrumento se considera como alternativa apropiada para la tercera etapa del sistema de evaluación, sin embargo, se resalta la necesidad de presentarlo al docente con antelación y capacitarlo en la aplicación de la metodología 5E y el manejo de las herramientas TICs utilizadas. Es necesario ampliar el tiempo de aplicación o proponer la prueba de desempeño como proyecto de aula o actividad interdisciplinar dados los tiempos limitados dentro del programa curricular. El instrumento permite realizar un proceso de evaluación sumativo acorde al formativo, pero es importante que se presente en conjunto con los demás instrumentos para cumplir su objetivo.

Fuente: elaboración propia.

Para la docente autora, la realización del trabajo le permitió reestructurar su práctica de aula, partiendo del reconocimiento verdadero de la noción de derivada, al acercarse al concepto desde su origen histórico y posteriormente desde su interpretación geométrica; de esta manera le fue posible vislumbrar la importancia de comprender aquello que se enseña, como principio fundamental para llevar a cabo procesos de enseñanza y evaluación que promuevan el aprendizaje del estudiante.

La propuesta evaluativa se consolida en un cuadernillo posteriormente presentado a la institución en conjunto con las conclusiones y recomendaciones para así contribuir a la actualización de los docentes vinculados, en temas relacionados con contextos de educación personalizada, evaluación formativa y enseñanza de la noción de derivadas, propiciando así la reflexión crítica de la comunidad educativa, en cuanto al sistema de evaluación que actualmente se aplica.

Conclusiones

En relación con la personalización de la educación, existe un imaginario que difiere de la práctica real y que fue posible identificar en las entrevistas, por lo que se concluye que la implementación de un sistema de educación en una institución, cualquiera que este sea, requiere de un proceso organizado de capacitación docente que conlleve a la apropiación y correcta comprensión de las características del mismo.

En cuanto a los procesos evaluativos, se evidencia la importancia de la formación para docentes en este tema, en muchos casos, las respuestas en las diferentes fases mostraron desconocimiento de las características de un sistema evaluativo y en sí del concepto de evaluación formativa; en otros casos los docentes manifestaron su limitación en este aspecto al no contar con formación específica en pedagogía y por tanto carecer de herramientas adecuadas para el mejoramiento de los procesos.

En lo que respecta al componente disciplinar del trabajo, para la docente autora, realizar un acercamiento a la noción de derivadas desde diferentes ángulos como el histórico, epistemológico, fenomenológico y disciplinar, representó una nueva experiencia en la que pudo reconocer sus limitaciones conceptuales; la comprensión del concepto llevó a un cambio de visión que se ve reflejado en la propuesta evaluativa elaborada, puesto que se prioriza en ella la conceptualización abordando desde diferentes miradas y evaluando por medio de actividades diversas el concepto de derivada.

El diseño de los cinco instrumentos de evaluación formativa propuestos para el eje temático de derivadas, se enfocó tanto a nivel disciplinar en el concepto de la derivada como a nivel evaluativo en proporcionar un constructo sólido que permita al docente y al estudiante conocer su nivel de desempeño con base en los criterios que se le presentan en cada caso, así no solo se potencializa el proceso evaluativo sino también el de enseñanza – aprendizaje, entendiendo que más allá de una calificación numérica, la evaluación para el aprendizaje brinda las herramientas para el mejoramiento progresivo del proceso e involucra al estudiante activamente en el mismo.

En general se puede considerar pertinente la propuesta de evaluación formativa diseñada dados los resultados del proceso de validación realizado por docentes pares, en los cuales consideran que los instrumentos cumplen con la mayor parte de los criterios evaluados en cuanto al propósito, protocolo de aplicación y carácter formativo del mismo; también en lo que respecta a la validez del contenido y el uso del lenguaje, cada pregunta fue validada y considerada como apropiada de acuerdo a los diferentes criterios establecidos. Las observaciones de los docentes brindan una visión diferente tanto a nivel evaluativo como disciplinar, lo que enriquece el proceso de diseño y permite fortalecer los instrumentos presentados en la fase inicial consolidando así la propuesta evaluativa; tanto las entrevistas semiestructuradas realizadas en la fase inicial, como los procesos de validación realizados en la fase final, incentivaron en los docentes pares participantes, la reflexión en torno al modelo personalizado, el sistema de evaluación que se viene implementando en la institución, y la enseñanza del concepto de derivada. Adicional, los resultados enriquecen la línea de investigación enfocada en evaluación de los aprendizajes en matemáticas en la que se enmarca el trabajo realizado.

Referencias Bibliográficas

(MEN), M. d. (1994). *Ley 115 de Febrero 8 de 1994.* Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Cantoral, R., y Mirón, H. (2000). Sobre el estatus de la noción de derivada: De la epistemología de Joseph Louis Lagrange, al diseño de una situación didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 265-292.

DeMink-Carthew, J., Olofson, M., LeGeros, L., Netcoh, S., & Hennessey, S. (2017). An analysis of approaches to goal setting in middle grades personalized learning environments. *RMLE Online*, 1-11.

Dueñas, H., y Rubio, I. (2015). *Cálculo diferencial en una variable.* Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, M. (2014). *Metodología de la investigación.* México: Mc Graw Hill Education.

Jané, M. (2009). Procesos de evaluación, aprendizaje y enseñanza. En Varios, *Educación para el siglo XXI. Aportes del Centro de Investigación y Formación en Educación, CIFE, 2001 - 2008* (págs. 395-406). Bogotá: Universidad de los Andes.

López, A. (2013). *La evaluación como herramienta para el aprendizaje.* Bogotá: Magisterio.

MEN. (2006). Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Pérez, J., y Ahedo Ruiz, J. (2019). La educación personalizada según García Hoz. *Revista Complutense de Educación*, 153-161.

Sánchez, G., García, M., y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemáticas Educativa*, 267 - 296.

Stenhouse, L. (1991). El profesor como investigador. En L. Stenhouse, *Investigación y desarrollo del curriculum* (págs. 194-221). España: Morata, S.A.

ANÁLISIS DE UNA SECUENCIA DE ACTIVIDADES DE FRACCIONES COMO ESCENARIO PARA ESTUDIAR EL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

ANALYSIS OF A FRACTION ACTIVITY SEQUENCE AS A SCENARIO FOR STUDYING THE SPECIALIZED KNOWLEDGE OF THE MATH TEACHER

Julián Andrés Meléndez Cruz, Eric Flores Medrano
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. (México), Universidad Complutense de Madrid. (España)
julian.melendezc@alumno.buap.mx, erflores@ucm.es

Resumen:
En este trabajo se estudia el conocimiento especializado del profesor de matemáticas al momento de analizar una secuencia de actividades, en las que se pretende enseñar fracciones a estudiantes de grado quinto de primaria. Para el estudio se utilizó el modelo del conocimiento especializado de profesor de matemáticas, el cual permite analizar, reflexionar y estudiar que sucede con el conocimiento que está movilizando el profesor de matemáticas al momento de pensar en actividades de instrucción matemática. Se adoptó un método de corte cualitativo, particularmente un estudio de caso de tipo instrumental. Finalmente se lograron evidenciar hallazgos importantes relacionados con el conocimiento matemático y didáctico alrededor de las fracciones.

Palabras clave: conocimiento especializado del profesor de matemáticas; fracciones, regletas de cuisenaire

Abstract:
This paper studies the specialized knowledge of the mathematics teacher at the moment of analyzing a sequence of activities in which the intention is to teach fractions to fifth grade elementary school students. For the study, the mathematics teacher's specialized knowledge model was used, which allows analyzing, reflecting and studying what happens with the knowledge that the mathematics teacher is mobilizing at the moment of thinking about mathematics instruction activities. A qualitative method was adopted, particularly a case study of instrumental type. Finally, important findings related to mathematical and didactic knowledge about fractions were evidenced.

Keywords: specialized knowledge of the mathematics teacher; fractions, cuisenaire's rulers

Introducción

El centro de atención de este trabajo es el conocimiento del profesor de matemáticas, el cual ha sido objeto de interés para la comunidad educativa en el campo de la educación matemática durante las últimas décadas. Diversos autores en este campo han decidido estudiar qué sucede con el conocimiento que movilizan los docentes de matemáticas al momento de incursionar en escenarios dirigidos hacia la enseñanza y aprendizaje de esta área. Por mencionar algunos autores, encontramos las investigaciones desarrolladas por Shulman (1986), Ball et al, (2008), Godino (2009), entre otros, estas investigaciones han ido haciendo aportes teóricos y metodológicos para estudiar aquel conocimiento que hace especialista al docente de matemáticas.

Para el caso de este trabajo nos centramos en uno de los aportes más actuales en este campo, este es el propuesto por Carrillo et al, (2018). En dicha investigación proponen el modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK, por sus siglas en inglés) como herramienta para analizar, estudiar y caracterizar el conocimiento que moviliza el profesor de matemáticas. Se ha utilizado para estudiar diversos escenarios que vinculan al profesor en la enseñanza y aprendizaje de esta área, tales como las planeaciones de clases, el diseño de actividades, el abordaje de un tema durante determinado tiempo, entre otros.

En esta investigación utilizamos el modelo para estudiar un escenario diferente, nos centramos en analizar cuál es el conocimiento que emerge al momento en el que un grupo de profesores analizan una secuencia de actividades diseñada por los investigadores. Consideramos importante que los docentes a partir de su formación y experiencia pudieran analizar cada una de las tareas presentes en dicha secuencia. En esta, nos interesamos en abordar el concepto de fracción, pues de acuerdo con la literatura asociada, resulta ser uno de temas de mayor complejidad en los primeros grados de escolaridad en la educación básica (Rojas et al, 2015).

De acuerdo con lo anterior, la problemática de este trabajo se plantea desde dos perspectivas, por un lado, la necesidad de contribuir en investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje del concepto de fracción, pues autores como (e.g. Ruiz, 2013; Fandiño, 2015) plantean que es uno de los conceptos de mayor complejidad en los primeros grados de escolaridad, debido a los múltiples significados que posee tal concepto. Por otro lado, el problema está relacionado con el conocimiento que el profesor de matemáticas debe movilizar en relación con los conceptos abordados, en este caso, la necesidad de conocer las diferentes nociones, conceptos, significados, entre otros, relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones.

Para atender el problema mencionado se hace necesario buscar estrategias que permitan analizar qué está pasando con la enseñanza de los conceptos en matemáticas, particularmente resulta importante conocer cuál es ese conocimiento que está movilizando el docente alrededor de las fracciones, es aquí donde utilizamos el modelo MTSK para analizar e identificar ese conocimiento.

Marco teórico

Se presentan dos ejes teóricos, el primero es el modelo del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (ver figura 1) presentado en Carrillo et al, (2018), este modelo dentro de sus propósitos permite organizar la práctica del docente a través de los diversos elementos o categorías que lo componen y da la posibilidad de explicar las diversas actividades que proponen los docentes y saber con qué conocimientos se relacionan. Está conformado por tres grandes dominios: el dominio del Conocimiento Matemático (MK por sus siglas en inglés), el dominio del Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK por sus siglas en inglés) y el dominio de las creencias y a su vez, cada dominio está conformado por un conjunto de subdominios.

Dominio del conocimiento matemático (MK)

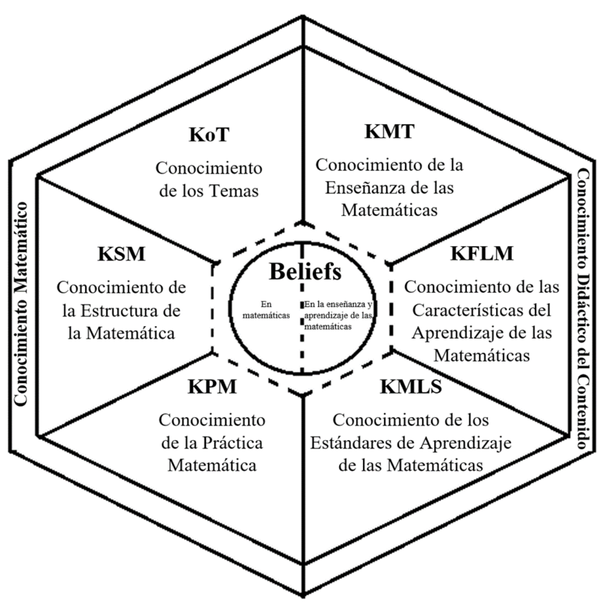
Este dominio está conformado por tres subdominios basados en las diferentes formas de conocer la matemática disciplinar, escolar y didáctica. El primero es el *conocimiento de los temas* (KoT), el cual hace referencia al conocimiento profundo de los temas en matemáticas. El segundo es *conocimiento de la estructura de las* *matemáticas* (KSM), relacionado con el conocimiento de la conectividad entre diferentes conceptos. El tercero es el *conocimiento de la práctica matemática* (KPM), el cual se preocupa por estudiar las formas de proceder, crear y producir matemáticas. En conjunto, procuran estudiar todo lo relacionado con la parte conceptual del objeto matemático, sus estructuras, definiciones, ejemplificaciones, representaciones, la parte axiomática del objeto, el campo de aplicación de los conceptos, entre otros (Escudero et al, 2015).

Dominio del conocimiento didáctico del contenido (PCK)

Este dominio enfatiza que para el profesor de matemáticas no le es suficiente movilizar un solo el conocimiento disciplinar, además de esto, le es importante conocer y apoyarse de otras disciplinas que inciden en la actividad de enseñar matemáticas, a parte de un conocimiento profundo, hace falta un conocimiento didáctico de ese contenido. El docente debe saber ¿Qué, cómo y cuándo enseñar un contenido matemático?, para esto es necesario apoyarse y tener conocimiento de teorías de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, conocimiento de recursos para la enseñanza de las mismas y conocimiento de las orientaciones curriculares.

Los subdominios que conforman este dominio son, el *conocimiento de la enseñanza de las matemáticas* (KMT), el cual abarca el conocimiento relacionado con las teorías personales e institucionales que moviliza el profesor de matemáticas, además de las tareas, ejemplos, recursos utilizados para la enseñanza de esta área. En segundo lugar, encontramos el *conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas* (KFLM), el cuál alude al conocimiento de diferentes teorías personales e institucionales relacionadas con el aprendizaje, aquí aparece conocimiento relacionado con las fortalezas y dificultades, obstáculos o errores típicos, asociados al aprendizaje de un determinado contenido. En tercer incluye al *Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas* (KMLS), en el cual se atienden aquellos conocimientos relacionados con las orientaciones curriculares. (Escudero et al, 2015).

Figura 1. *Esquema del modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK).*



Fuente: tomado de Escudero et al (2015).

Dominio de las creencias

Este dominio hace referencia al conjunto de conocimientos arraigados al docente de matemáticas, un conocimiento que es producto de su experiencia y formación, el cual incide de manera directa sobre cada uno de los demás subdominios que conforman el modelo, razón por la cual se ubica en el centro de esquema de la figura1. De esta manera, se entiende que las creencias del profesor condicionan las decisiones al abordar elementos de cada subdominio.

Diferentes interpretaciones del concepto de fracción

El segundo eje teórico lo relacionamos con el estudio de las fracciones. Fandiño (2015) menciona que el aprendizaje de las fracciones resulta ser un proceso complejo y a largo plazo, debido a los múltiples significados o interpretaciones que se le dan a este concepto. Llinares y Sánchez (2000) presentan algunas de las interpretaciones más relevantes, estas son: la fracción como parte de una unidad-todo, a veces continua, a veces discreta, como decimales, como cociente, como relación, como razón, como operador, en probabilidad, como punto de una recta orientada, como medida, como porcentaje y como número racional.

Ahora bien, tomando en consideración los diferentes significados que se aluden al concepto de fracción, cabe preguntarse ¿cuál de todas estas interpretaciones debe presentarse o enseñarse primero y cual resulta ser la más importante? Al respecto, Ruiz (2013) menciona que "la fracción como relación parte-todo es básica para la construcción de las diferentes interpretaciones (razón, proporción, porcentaje, decimales, probabilidad, cociente, medida)" (p.71).

En este sentido, consideramos importante abordar en la secuencia de actividades el significado de fracción como relación parte-todo y como razón. En lo que corresponde a la relación parte-todo, Obando (2003) señala que este significado permite acceder a los demás conceptos de los números racionales y se constituye como un puente de entrada a la conceptualización de la unidad como un todo divisible en partes más pequeñas, sin que por esto deje de ser unidad. En cuanto al significado la fracción como razón, de acuerdo con Hoyos-Franco (2018), se entiende como la relación que se puede establecer entre dos magnitudes, se trata de una relación entre dos conjuntos que se pueden comparar.

■ Metodología

En la investigación se adoptó un enfoque cualitativo, bajo un paradigma de tipo interpretativo (Bassey, 2003), permitiendo comprender e interpretar la naturaleza del conocimiento especializado de los profesores a intervenir. Se realizó un estudio de caso de tipo instrumental (Skate, 1995) en el cual, la información proporcionada por los profesores permitió evidenciar elementos característicos del conocimiento matemático y didáctico que movilizaron los profesores alrededor del estudio de las fracciones.

Se realizó la intervención a tres profesores del área de matemáticas con experiencia en grado quinto de primaria y se tuvo una duración de cinco sesiones al estilo taller. Como instrumentos para los docentes se utilizó una secuencia de actividades y las Regletas de Cuisenaire, ambas diseñadas por el investigador. Durante las sesiones se hicieron preguntas orientadas desde los subdominios del modelo MTSK para generar discusión frente a las actividades propuestas en la secuencia. Finalmente, para la recolección de información se utilizaron las transcripciones de las sesiones del taller con los docentes para ser analizadas mediante las categorías de los subdominios del modelo.

La secuencia estuvo conformada por seis actividades, las dos primeras se plantearon con el propósito de construir la noción de fracción a partir de la comparación entre regletas, para la tercera y cuarta actividad se proponen tareas en cuales se busca que el estudiante comprenda qué significa tener una unidad y tomar fracciones de esta, además se incluyen algunas situaciones cercanas al contexto del estudiante, con la intención de mostrar cómo un sector pequeño tomado de uno más grande puede ser representado mediante una fracción. Finalmente, para las últimas dos actividades también se plantearon situaciones cercanas al estudiante, con la intención de que el estudiante pueda tomar dos o más fracciones de un sector y hacer sus respectivas sumas.

Es importante señalar que la secuencia estuvo fundamentada desde las investigaciones planteadas por Llinares y Sánchez (2000); Fandiño (2015); Gonzáles (2015), donde mencionan algunos obstáculos, errores y dificultades más recurrentes en el estudio de las fracciones por parte de los estudiantes, entre estos, mencionan la misma complejidad del concepto, la cual la remontan a la diversidad de significados aludidos a la fracción, en ocasiones aparece como relación parte-todo, medida, operador, cociente, decimal, razón, entre otros. Los autores señalan que existe un desconocimiento de estos significados, tanto de los estudiantes como del profesor, por esta razón, se consideró importante incidir por lo menos en alguno de estos significados. En este caso, los significados abordados en la secuencia fueron los de relación parte-todo de acuerdo con lo planteado por Obando (2003) y el significado de fracción como razón desde lo propuesto por Kieren (1980) y Hoyos-Franco (2018).

Algunos resultados

En esta sección se presentan algunos de los hallazgos encontrados durante la intervención con los docentes. Se exponen pequeños extractos de entrevista relacionados con los dominios del modelo MTSK.

Evidencias del conocimiento didáctico del contenido (PCK)

Figura 2. *Superponer una regleta que no cabe un número de veces exacto sobre otra.*

Fuente: elaboración propia.

Uno de los primeros hallazgos lo encontramos en la situación presente en la figura 2, la cual es tomada de la actividad 1 de la secuencia. Desde el análisis realizado por los docentes, encontramos las posibles respuestas que daría un estudiante a esta pregunta, la docente con Seudónimo María menciona que un estudiante podría responder que ocupa tres de cinco recuadros, las tres quintas partes, más de la mitad, o quizá responda que no es posible dar solución a la pregunta por el hecho de que la regleta de color verde no cabe un número exacto de veces sobre la purpura. La docente justifica que este tipo de respuestas son posibles por el grado de es escolaridad en el que se encuentran los estudiantes (ver siguiente extracto).

> Investigador: ¿Qué parte de la regleta B se ocupa si encimamos una de la A?, o sea, si tomamos la de color verde y la ponemos encima de la de color purpura. ¿Qué parte se ocupa?
>
> María: podríamos decir que se ocupa más de la mitad, porque en quinto, ya se manejan conceptos de mitades. De hecho, desde tercero se trabaja con mitades y triples. Entonces, tal vez ellos ya puedan decir y asimilar que van a ocupar más de la mitad de la regleta B.

Este conocimiento evidenciado en la docente lo podemos relacionar con el KMLS, en el cual se menciona la importancia de conocer las nociones previas con las llega un estudiante a un grado determinado, lo que no es ajeno a las orientaciones curriculares, por ejemplo, desde los documentos propuestos por la secretaría de educación pública de México se plantea que los estudiantes al llegar a grado quinto ya deben manejar nociones de mitades, tercios, triples, lo cual concuerda con lo mencionado por la docente María.

El siguiente extracto también está relacionado con la situación de figura 2, en este se muestra la forma en la que el docente con seudónimo Antonio menciona cómo trabajaría las fracciones con sus estudiantes:

> Antonio: Yo parto de un conjunto que voy dividiendo en partes iguales, de los cuales voy a tomar la parte sombreada como el numerador y luego la parte que es total de las divisiones como el denominador. Entonces, a los niños les va a costar trabajo entender esas dos asociaciones (refiriéndose a superponer una regleta sobre la otra), se les dificultaría entender la relación que hay entre esas dos regletas, además, les puede causar conflicto el tipo de representaciones que ya han trabajado, de esta manera, al presentarlo mediante este tipo de representación, puede que no permita comprender la relación parte-todo.

Antonio muestra conocimiento sobre las fortalezas y dificultades de los estudiantes respecto al tema de fracciones. Tienen fortaleza en cuanto a la comprensión del significado parte-todo y su representación mediante áreas sombreadas, pero tienen dificultades en el cambio de representación. Este conocimiento forma parte del subdominio KFLM.

Teniendo en cuenta que las tareas de la secuencia de actividades estaban mediadas por las Regletas de Cuisenaire, en la primera sesión con el docente se interesó preguntar por la importancia de utilizar recursos en el aula de clase de matemáticas, a lo cual el docente Antonio responde lo siguiente:

> Antonio: Considero que los recursos materiales y virtuales son importantes, recuerdo la teoría de Bruner, esta presenta tres fases importantes; el estudiante primero puede visualizar concretamente ese objeto matemático, manipularlo para ver que sucede con él, luego hacer una representación gráfica por medio de un dibujo, y finalmente analizarlo y desarrollarlo en su mente.

En este sentido, el docente muestra evidencias de conocimiento relacionadas con teorías de la enseñanza de las matemáticas, lo cual es propio del KMT. El docente se apoya en Bruner para señalar la importancia de los recursos materiales y virtuales, mostrando la incidencia sobre las prácticas de aula y los resultados favorables que trae consigo el uso de estos medios.

Evidencias del conocimiento matemático (MK)

Como se mencionaba desde el marco teórico, resulta importante conocer cuáles son los significados de la fracción que movilizan los docentes, en este caso, cuál fue el identificado por ellos en la secuencia de actividades. Al respecto, en el siguiente extracto se muestra el significado señalado por el docente Antonio.

> Antonio: Pues yo creería que, en la primera, se ve la relación parte-todo, el todo sería la regleta que es más grande y habría que ver la relación que tiene con esa parte más pequeña o qué parte ocupa esa más pequeña en el todo que sería la regleta A, en este caso sería la regleta verde y la purpura.

La respuesta particular del docente Antonio refiere a la situación presente en la figura 2, desde la cual identifica a la fracción como relación parte-todo. Ahora bien, aunque en la secuencia de actividades también se propone abordar a la fracción como una razón, el significado encontrado por el docente durante toda la secuencia se ve limitado la relación parte-todo. Esto concuerda con planteado por Fandiño (2015), donde se señala que muchas veces el docente tiene desconocimiento de los diferentes significados de la fracción. También, podemos encontrar relación con lo expuesto por Obando (2003), el cual menciona que los docentes en muchas ocasiones y durante toda la etapa escolar se preocupan por abordar a la fracción sólo como relación parte-todo, lo cual provocaría obstáculos a futuro al intentar presentar a fracción en otros escenarios donde su interpretación va más allá de esta relación parte de un todo. Estos elementos identificados anteriormente en el docente Antonio dan cuanta del KoT.

Conclusiones

Al finalizar el estudio se encontró que la mayor evidencia de los subdominios identificada en la intervención con los docentes estuvo relacionada con las categorías pertenecientes al Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM), al Conocimiento de los temas (KoT) y al Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS).

Se puedo evidenciar que los docentes mostraron conocimientos relacionados con las dificultades que pueden enfrentar los estudiantes en el proceso de la construcción del concepto de fracción, conocimiento de estrategias alternas que se podrían añadir para dar fuerza a las actividades presentes en la secuencia, la importancia de los conocimientos previos para comprender temas nuevos, el proponer tareas que exijan al estudiante un mayor grado de abstracción, el uso de contextos que sean cercanos al estudiante, entre otros.

Este estudio permitió resaltar la pertinencia de usar el modelo MTSK para el análisis de actividades, así como es una herramienta importante para estudiar las planeaciones de clase o la misma práctica de aula, se convierte en una herramienta esencial para identificar el conocimiento que moviliza el docente de matemáticas al analizar material ya diseñado.

Agradecimientos

Este trabajo fue realizado gracias al financiamiento del Consejo Nacional Ciencia y Tecnología (CONACYT) en México, mediante la beca de maestría asignada con CVU 1099720.

Referencias bibliográficas

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389–407. https://doi.org/10.1177%2F0022487108324554

Bassey, M. (2003). Case study research in educational settings. Open University Press.

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, M. (2018). The mathematics teacher’s specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236-253. http://doilorg/10.1080/14794802.2018.1479981

Escudero, D. I., Carrillo, J., Flores-Medrano, E., Climent, N., Contreras, L. C. y Montes, M. (2015). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas detectado en la resolución del problema de las cuerdas. *PNA, 10*(1), 53-77 https://doi.org/10.30827/pna.v10i1.6095

Fandiño, M. (2015). Las fracciones: aspectos conceptuales y didácticos. En L.A. Hernández, J.A. Juárez, J. Slisko (Eds.). *Tendencias en la educación matemática basada en la investigación*, (1), 25-38. Publicaciones BUAP

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. UNIÓN, *Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20,* 13-31 https://www.ugr.es/~jgodino/eos/JDGodino%20Union_020%202009.pdf

González, D. (2015). *Errores comunes en el aprendizaje de las fracciones: Un estudio con alumnos de 12/13 años en Cantabria* [tesis de maestría, Universidad de Cantabria, Cantabria, España] Archivo digital. http://hdl.handle.net/10902/6903

Hoyos-Franco, L. (2018). *La fracción como razón: Una experiencia de aula en grado sexto.* [tesis de maestría, Universidad Distrital Francisco José de Caldas]. Archivo digital. http://hdl.handle.net/11349/14288

Kieren, T. E. (1980). The rational number construct-Its elements and mechanisms. In T. E. Kieren (Ed.), *Recent research on number learning*, 125-150. ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Llinares, S. y Sánchez, M. (2000). Las fracciones: diferentes interpretaciones. Editorial Síntesis. Madrid. 52-75

Meléndez-Cruz, J. A., Flores-Medrano, E., & Hernández-Rebollar, L. A. (2023). Conocimiento especializado del profesor de matemáticas al analizar una secuencia de suma de fracciones. *Uniciencia*, 37(1), 193-211.

Obando, G. (2003). La enseñanza de los números racionales a partir de la relación parte-todo. *Revista EMA. 8* (2), 157-182

Rojas, N., Flores, P., y Carrillo J. (2015). Conocimiento especializado de un profesor de matemáticas de educación primaria al enseñar los números racionales. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 29*(51), 143-166. https://doi.org/10.1590/1980-4415v29n51a08

Ruiz, C. (2013). *La fracción como relación parte-todo y como cociente: Propuesta Didáctica para el Colegio Los Alpes IED* [tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia] Archivo digital. https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/47142

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4–14. https://doi.org/10.3102%2F0013189X015002004

Stake, R. (1995). The Art of case study. SAGE

UNA EXPERIENCIA DE PRÁCTICA PROFESIONAL VIRTUAL BASADA EN EL TPACK DE FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICA

A VIRTUAL PROFESSIONAL PRACTICE EXPERIENCE BASED ON THE *TPACK* FOR MATHEMATICS PROSPECTIVE TEACHERS

Luis Fabián Gutiérrez-Fallas
Universidad de Costa Rica. (Costa rica)
luisfabian.gutierrez@ucr.ac.cr

Resumen:
En el contexto de la virtualidad de la educación tras la pandemia de la COVID-19, desde un curso de formación inicial de profesores de Matemática, en este artículo se presenta una experiencia de práctica profesional virtual sustentada en el modelo TPACK (*TPACK-based experience*). Esta propuesta tiene el propósito de orientar a los futuros profesores de Matemática en la integración de la tecnología para planificar, implementar y reflexionar sobre la enseñanza y el aprendizaje de las Funciones en un contexto virtual. Los resultados evidenciaron que estrategias como la microclase, producción de materiales didácticos y espacios de reflexión individual y colectiva permitieron potencializar el desempeño profesional docente.

Palabras clave: formación inicial de profesores de Matemática, TPACK, Enseñanza y aprendizaje virtual de la Matemática

Abstract:
In the context of education virtuality, after the COVID-19 pandemic, from an initial training course for Mathematics teachers, this article presents an experience of virtual professional practice based on the TPACK model (TPACK-based experience). This proposal is aimed at guiding prospective mathematics teachers in the integration of technology to plan, implement and reflect on the teaching and learning of Functions in a virtual context. The results showed that strategies such as the micro-class, production of teaching materials and spaces for individual and collective reflection allowed teachers to enhance their professional performance.

Keywords: initial training of Mathematics teachers, TPACK, Teaching and virtual learning of Mathematics

Introducción

Los años 2020 y 2021 marcaron nuestra historia como humanidad. La pandemia de la COVID-19 marcó un antes y un después en todas las aristas de la sociedad, entre ellas: la Educación y sus diversos contextos de acción como, por ejemplo: sistemas educativos, instituciones educativas, formación de profesores, práctica profesional, entre otros. En Costa Rica, al igual que en otros países latinoamericanos, tuvo lugar la "*virtualización de la educación*" como respuesta al nuevo orden social que dictó la pandemia. Desde la educación primaria hasta la educación superior, los procesos de enseñanza y de aprendizaje fueron trasladados de las aulas a un contexto 100% virtual. Si bien, por un lado, surgieron distintas cuestiones, dificultades y limitaciones asociadas con la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática, por otro lado, tuvieron también lugar propuestas eficientes e innovadoras para enfrentar esas problemáticas emergentes tras la pandemia.

A lo largo de las dos últimas décadas, la tecnología ha venido jugando un papel fundamental en la enseñanza de la Matemática en la creación de entornos de aprendizaje que "integran el uso de herramientas tecnológicas como recursos esenciales para ayudar a los estudiantes a aprender y dar sentido a las ideas matemáticas, razonar matemáticamente y comunicar su pensamiento matemático" (NCTM, 2014, p.78). Así, la existencia, versatilidad y potencia de la tecnología propician una reestructuración de qué y cómo las personas estudiantes deben aprender matemáticas, teniendo en cuenta sus preferencias y nuevas formas de aprendizaje; al respecto, Niess y Gillow-Wiles (2017) argumentan que el avance en las tecnologías a equipado a los estudiantes de nuevas formas de acceder a la información y compartir esa información entre sus pares:

> Los estudiantes de hoy se han acostumbrado a recopilar información rápidamente, utilizando tecnologías más avanzadas para lograr más de lo que podían en el siglo anterior […] Usan gráficos junto con texto en sus comunicaciones, funcionan mejor cuando están en red y, a menudo, realizan múltiples tareas (Niess & Gillow-Wiles, 2017, p.77).

En medio de este contexto, resulta pertinente preguntarnos: *¿cómo se integra y se desarrolla el conocimiento tecnológico en la formación inicial de profesores de Matemática?* Al respecto, Niess (2012a) afirma que los futuros profesores comúnmente aprenden sobre pedagogía y tecnología de una manera más genérica, ajena al desarrollo de sus conocimientos matemáticos específicos y didácticos de ese contenido, por lo que esto conlleva a que, cuando estos futuros profesionales estén en servicio, a menudo se consideren mal preparados para utilizar la tecnología en su práctica docente. Al respecto, Ponte (2014) afirma que

> Comprender el potencial de las tecnologías que se pueden movilizar a contextos formativos e identificar formas de utilizarlas productivamente en la formación inicial y continua, tanto con docentes que ya utilizan estas tecnologías con gran destreza, como con docentes que mantienen una incipiente relación con ellas, constituyen importantes aspectos de una agenda de investigación actual en este campo (p. 354).

De modo que, los programas de formación inicial de profesores de Matemática deben incrementar el nivel de integración de la tecnología en sus cursos (Mishra & Koehler, 2006; Niess, 2012a), asegurando que todos los profesores de Matemáticas que están en formación tengan oportunidades de adquirir los conocimientos suficientes y las experiencias necesarias para integrar la tecnología en el contexto de la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas. (AMTE, 2017).

Por lo tanto, este artículo tiene el propósito de presentar una experiencia de práctica profesional virtual de futuros profesores de Matemática de secundaria fundamentada en el modelo de conocimiento profesional TPACK – *Technological Pedagogical Content Knowledge* (Mishra & Koehler, 2006) como respuesta a la pregunta: *¿cómo promover la práctica profesional de futuros profesores de Matemática en un contexto de enseñanza virtual desde un proceso de formación también virtual?*

Práctica profesional docente en la formación inicial de profesores de Matemática

Según Flores (1998), la formación inicial de profesores de Matemática es un proceso que resulta de un sistema didáctico y dinámico conformado por tres elementos activos: el conocimiento profesional del profesor, el profesor en formación (como estudiante de este sistema) y el formador de profesores de Matemática. Dentro de este sistema, Liljedahl et al. (2009) argumentan que la formación inicial ofrece a los futuros profesores no solo el qué (conocimiento profesional), sino también el cómo (formas de presentar ese conocimiento por parte del formador), esto es, "lo que ellos [los futuros profesores] están aprendiendo es igualmente relevante con el cómo lo están aprendiendo" (Liljedahl et al., 2009, p. 29). Desde esta perspectiva, los profesores en formación como aprendices tienen un doble rol durante su formación inicial: como estudiantes y como docentes. Como estudiantes, tienen la oportunidad de adquirir los conocimientos que necesitarán para enseñar y, como docentes, a partir de sus experiencias formativas, tienen la oportunidad de reflexionar y reformular sus concepciones sobre lo que significa ser docente, lo que significa aprender y enseñar contenido específico. Así, "a través de este proceso dinámico de reformulación, ellos [los futuros profesores] comienzan a formar una identidad de quiénes son como docentes, qué es lo que enseñan y cómo lo enseñan" (Liljedahl et al., 2009, p. 29).

Sobre el formador de profesores, como tercer elemento de este sistema, Contreras (2021) argumenta que este profesional debe dominar simultáneamente el contenido matemático y el contenido didáctico-matemático con dos miradas, una más directa puesta en la persona estudiante que forma (futuro profesor) y otra indirecta puesta en la persona estudiante a quien enseñará ese futuro profesor.

> En este contexto, enseñar a enseñar matemáticas podría verse como un isomorfismo didáctico mediante el cual el formador aborda el reaprendizaje de sus futuros profesores ayudándoles a reflexionar no solo sobre el contenido que aprenden sino más bien sobre el proceso que utilizan para ello, de forma que puedan luego transferir ese proceso en el trabajo con sus estudiantes (Contreras, 2021, p. 19).

De acuerdo con la revisión de literatura (Gutiérrez-Fallas, 2019), existen cuatro aspectos principales a considerar que influyen en la formación inicial del profesorado: (i) el conocimiento profesional que los futuros profesores desarrollan en su programa de formación; (ii) los procesos de reflexión sobre su futura práctica profesional y las diferentes tareas que desempeñan; (iii) las concepciones y creencias que los futuros profesores tienen sobre la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática; y (iv) el contexto de su futura práctica profesional (Flores, 1998, Liljedahl et al., 2009; Ponte & Chapman, 2008).

En cuanto al desarrollo del conocimiento profesional durante el curso de formación, varios aspectos han sido objeto de investigación, como la naturaleza de este conocimiento, su estructura, dominios o contenidos que lo componen, así como los modelos para desarrollarlo. Una prioridad de los programas de formación inicial de profesores de Matemática es la necesaria articulación entre los diferentes dominios del conocimiento profesional docente a través de tareas encaminadas a integrar y transformar este conocimiento de manera coherente y sistemática (Llinares, 2007).

En cuanto a los procesos de reflexión, varios autores han definido la acción de reflexionar en y desde la educación. Por ejemplo, para Dewey (1933) esta acción es una mejor forma de pensar, pero para Oliveira y Serrazina (2002) es un proceso que va mucho más allá de pensar o comentar algo. Particularmente en la formación inicial del profesorado, la reflexión permite acercar la práctica profesional a los futuros profesores, respondiendo así al carácter teórico-práctico de sus conocimientos profesionales en desarrollo. En esta perspectiva, Jackson et al. (2018) definen cuatro aspectos a ser considerados en los programas de formación inicial docente para promover procesos de reflexión: (i) oportunidades planificadas que buscan incentivar la reflexión; (ii) una reflexión estructurada y extensa a lo largo de la experiencia formativa; (iii) reflexión crítica sobre las prácticas educativas actuales y su propia enseñanza; y (iv) discusiones reflexivas en las actividades de aprendizaje.

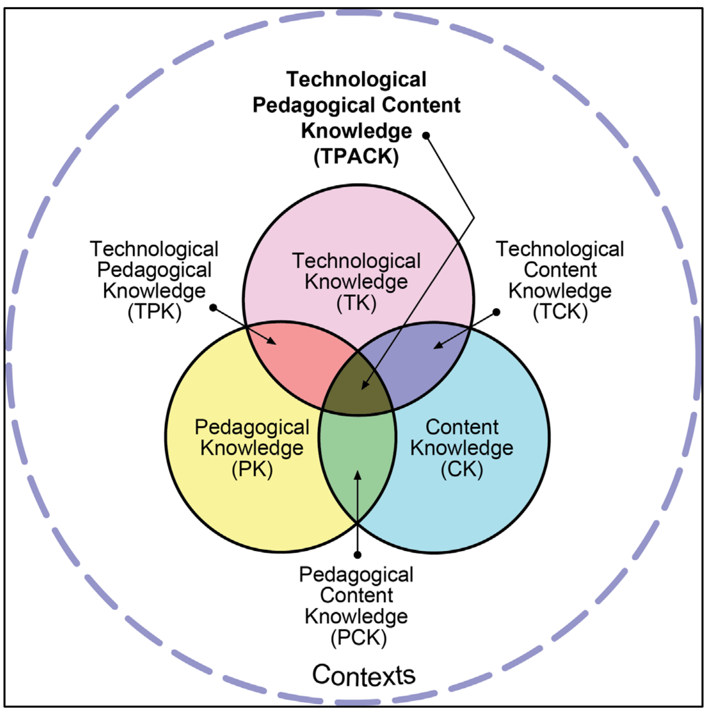
Las concepciones y creencias que tienen los futuros profesores son un factor, a menudo decisivo, que influye en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Algunos autores consideran que las concepciones de un profesor se refieren a los significados, conceptos, proposiciones, reglas e imágenes que componen su estructura mental (Thompson, 1992), por lo que son de naturaleza cognitiva y forman parte de su conocimiento. En concreto, "las concepciones son elementos esencialmente cognitivos, que se forman como resultado de procesos simultáneamente individuales y sociales, resultantes de la interacción de cada individuo con la realidad en la que se insertan" (Santos et al., 2008, p. 35).

Finalmente, el contexto de su futura práctica profesional es un factor que influye en la formación inicial del profesorado, ya que se posiciona como contexto de profesionalización, "en la formación del profesorado no basta pensar en lo que se debe enseñar, también es necesario considerar cómo enseñar" (Serrazina, 2012, pp. 267-268). Así, la formación inicial debe "brindar a las futuras personas docentes oportunidades que les permitan comprender, apreciar y abrazar la complejidad de su práctica como base para el estudio continuo" (Ponte & Chapman, 2008, p. 256).

Principios de integración de la tecnología en la formación inicial de profesionales en Educación Matemática

A la luz del modelo PCK – *Pedagogical Content Knowledge* de Shulman (1986), Mishra y Koehler (2006) discuten los conocimientos tecnológicos que un profesor debe desarrollar y utilizar en su práctica profesional. Así, con la intención de definir un modelo de conocimiento profesional docente, que responda a las demandas de este siglo, estos autores proponen un constructo teórico en el que se articulan tres dominios de conocimiento: conocimiento del contenido, conocimiento pedagógico y conocimiento tecnológico. Esta articulación consiste en la integración simultánea y relacional de estos tres conocimientos, lo que da lugar a siete tipos de conocimiento: conocimiento del contenido, conocimiento pedagógico, conocimiento tecnológico, conocimiento pedagógico del contenido, conocimiento tecno-pedagógico, conocimiento tecnológico del contenido y el conocimiento tecno-pedagógico del contenido (*Technological Pedagogical Content Knowledg*e - TPACK).

Figura 1. *Technological Pedagogical Content Knowledge Model.*



Fuente: tomado de *Mishra & Koehler (2006).*

Este modelo, según Niess (2012b), consiste en una estructura dinámica que describe los conocimientos que los futuros profesores de Matemática necesitan adquirir y desarrollar para planificar, desarrollar el currículo que tiene como objetivo orientar y promover, en las personas estudiantes, el aprendizaje con tecnología.

En este sentido, dentro de las concepciones teóricas del modelo TPACK, la solo presencia de recursos tecnológicos en el aula, ya sea ésta un aula física o un aula virtual, no garantiza la integración efectiva de la tecnología en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de la Matemática. Ante esto, Gutiérrez-Fallas y Henriques (2021) presentan siete principios de diseño que orientan las estrategias metodológicas para integrar la tecnología en la formación inicial de profesores de Matemática. Estos siete principios son definidos por los autores como:

P1. Organizar secuencialmente las tareas en una trayectoria de formación y aprendizaje de tres etapas: experiencias iniciales, experiencias de formación-aprendizaje y experiencias de producción.

P2. Utilizar tareas abiertas contextualizadas en situaciones reales o ficticias de práctica docente profesional que impliquen el uso de tecnología por parte del profesor y del estudiante.

P3. Problematizar situaciones de enseñanza y aprendizaje en Matemáticas cuando la tecnología se integra en el aula.

P4. Promover la articulación entre el conocimiento tecnológico y las concepciones de los futuros profesores sobre la integración de la tecnología en la Educación Matemática.

P5. Promover y fortalecer el vínculo entre el conocimiento tecnológico y el conocimiento didáctico de la Matemática.

P6. Promover el uso de diferentes herramientas y recursos tecnológicos durante la resolución de tareas que permitan consolidar el desarrollo del conocimiento tecnológico de los futuros profesores de Matemática.

P7. Promover la creación y difusión de espacios dedicados a la reflexión y al intercambio de conocimientos dentro y fuera del aula, utilizando recursos tecnológicos.

Metodología

El estudio del cual se deriva este artículo sigue una naturaleza cualitativa e interpretativa (Coutinho, 2011) y se desarrolló en el marco de un curso de tercer año de una carrera de formación de profesores de Matemática de una universidad de Costa Rica en el que participaron 11 futuros profesores. Dado que los participantes de este estudio a su vez eran estudiantes del curso, su participación fue voluntaria y para salvaguardar su identidad en este texto serán referidos como futuros profesores.

Bajo las demandas de la pandemia de la COVID-19 el curso se llevó a cabo en forma virtual a través de clases virtuales sincrónicas dos veces por semana y participación asincrónica en un entorno virtual. Parte de los objetivos del curso fue desarrollar una experiencia de práctica profesional en contexto virtual para la enseñanza y el aprendizaje de contenidos matemáticos asociados al tema de Funciones reales de variable real dirigido a estudiantes de educación secundaria.

Los datos analizados fueron recolectados a través de los planeamientos de clases, las videograbaciones de las microclase, las videograbaciones de las sesiones del curso dedicadas a la discusión colectiva sobre la experiencia de práctica profesional virtual, las reflexiones escritas de los futuros profesores sobre su experiencia y las observaciones de las clases por parte del formador y autor de este artículo.

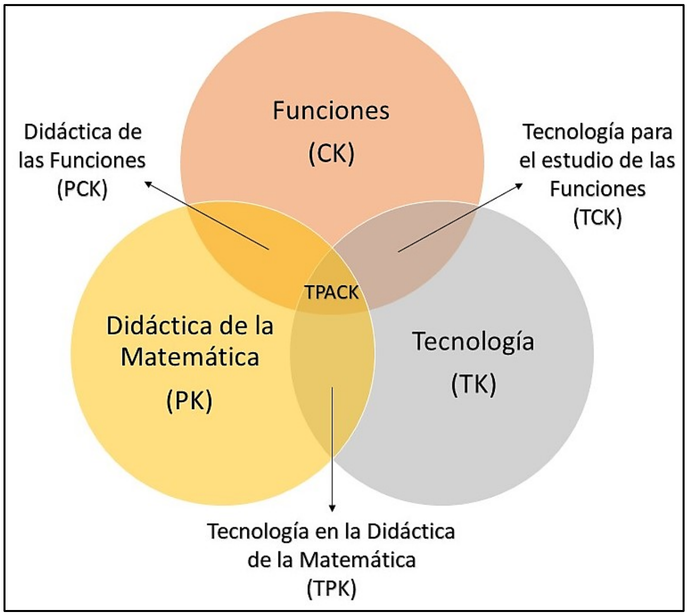
El análisis de los datos se desarrolló descriptiva e interpretativamente, tomando como referencia la movilización de los siete principios de diseño para la integración de la tecnología en la formación inicial de profesores de Matemática (Gutiérrez-Fallas & Henriques, 2021) a fin de valorar la experiencia de práctica profesional propuesta, sus contribuciones y sus limitaciones en la formación de los futuros profesores de Matemática.

La experiencia de práctica profesional virtual basada en el TPACK

La experiencia de práctica profesional virtual desarrollada en este estudio contempla dos dimensiones: (i) *la dimensión teórico-formativa*, que consiste en la movilización y articulación del conocimiento profesional desde el curso de formación adaptado del modelo TPACK (Mishra & Koehler, 2006); y (ii) *la dimensión práctica*, organizada en etapas que promueven la movilización de los principios orientadores de la integración de la tecnología en la formación de futuros profesores de Matemática (Gutiérrez-Fallas & Henriques, 2021).

Con respecto a la dimensión teórico-formativa, para este estudio se adapta una versión del modelo TPACK (Mishra & Koehler, 2006) con el propósito de definir el *Conocimiento Tecnológico y Didáctico de las Funciones* (Figura 2).

Figura 2. *Adaptación del modelo TPACK: Conocimiento Tecnológico y Didáctico de las Funciones.*



Fuente: elaboración propia.

Esta adaptación sustenta el conocimiento profesional de los futuros profesores que respalda su experiencia de práctica profesional virtual para la enseñanza y el aprendizaje de las Funciones, en particular, en el contexto del curso de formación se promovió:

- (PCK) *Conocimiento de Didáctica de las Funciones*: encuadramiento curricular del tema de Funciones en el programa de matemática escolar de educación secundaria, elementos didácticos para el abordaje del tema de funciones asociados con: resolución de problemas, modelación matemática, fenomenología, historia y epistemología, tareas matemáticas, errores y dificultades.
- (TCK) *Conocimiento de Tecnología para el estudio de las Funcione*s: exploración de herramientas tecnológicas para abordar conceptos y sus representaciones, en particular el uso de GeoGebra.
- (TPK) *Conocimiento de Tecnología en la Didáctica de la Matemática*: exploración de herramientas tecnológicas para el diseño de materiales didácticos y la mediación pedagógica en clases virtuales, como el uso de editores de presentaciones dinámicas (PowerPoint, Genially, Canva.com), así como herramientas de interacción virtual con los estudiantes (Padlet.com, Quizizz.com).

En cuanto a la dimensión práctica, el estudio propuso el desarrollo de cinco etapas para llevar a cabo la experiencia de práctica profesional virtual:

i. diseño y planificación de dos sesiones virtuales de 90 minutos cada una,
ii. implementación de una microclase (*microteaching*) con el propósito de poner en acción el escenario de aprendizaje planificado frente a sus colegas futuros profesores y el docente formador del curso,

iii. análisis reflexivo de la videograbación de la microclase por parte de los futuros profesores con el propósito de valorar su propio desempeño docente, el uso de las herramientas tecnológicas y, de ser necesario, reformular las actividades planeadas y desarrolladas en la microclase,
iv. implementación de las dos sesiones virtuales a un grupo de estudiantes de secundaria,
v. análisis reflexivo de las sesiones en cuanto a rol docente, dinámica e interacción con los estudiantes, promoción del aprendizaje y uso de la tecnología.

Principales resultados

Los resultados aquí presentados se organizan tomando como referencia los siete principios orientadores para la integración de la tecnología en la formación inicial de profesores de Matemática (Gutiérrez-Fallas & Henriques, 2021).

P1. Organizar secuencialmente las tareas en una trayectoria de formación y aprendizaje de tres etapas: experiencias iniciales, experiencias de formación-aprendizaje y experiencias de producción.

La experiencia de práctica profesional desarrollada formó parte de las actividades del curso de tercer año de la carrera de formación de profesores de Matemática, por tanto, se definió una trayectoria de formación y aprendizaje que contempló tres etapas:

i. *Experiencias iniciales:* en esta primera etapa se promovió el acercamiento a la Didáctica de las Funciones desde los resultados de otras investigaciones y estudios empíricos. Se condujo a los futuros profesores a la exploración de tareas matemáticas desde la fenomenología didáctica, la historia, así como la integración de herramientas tecnológicas para resolver las tareas.
ii. *Experiencias de formación y aprendizaje:* esta etapa consistió en actividades que tenían el propósito de institucionalizar teoría didáctico-matemática relacionada con la enseñanza y el aprendizaje de las funciones, abordando elementos como: la organización curricular del tema, la estructura conceptual y procedimental del tema, tareas matemáticas, errores y dificultades de aprendizaje, entre otros.
iii. *Experiencias de producción:* consistió en el planeamiento de clase que los futuros profesores elaboraron para desarrollar dos sesiones virtuales de 90 minutos cada una dirigida a estudiantes de secundaria, el diseño de materiales didácticos apoyados en recursos tecnológicos, la implementación de una microclase y la implementación de las dos sesiones a un grupo de estudiantes de secundaria.

P2. Utilizar tareas abiertas contextualizadas en situaciones reales o ficticias de práctica profesional docente que impliquen el uso de tecnología por parte del profesor y del estudiante.

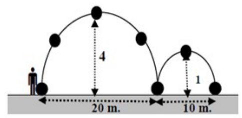
Las tareas abiertas se refieren a tareas que admiten distintas posibilidades de respuestas válidas, estas tareas fueron dirigidas a los futuros profesores y contextualizadas en situaciones posibles que se pueden enfrentar en la práctica docente y, que además, implicaran la integración de la tecnología. En la Figura 3 se presenta un ejemplo de este tipo de tarea, en la cual se presentó a los futuros profesores un enunciado sobre una tarea relacionada con la Función Cuadrática, y se les solicitó diseñar un recurso de GeoGebra que permitiera la exploración dinámica de la situación por parte de los estudiantes. La resolución de esta actividad evidenció que los futuros profesores utilizaron de forma técnica las herramientas de este software, además, integraron recursos visuales que llaman la atención del estudiante y lo invitan a comprender mejor la situación que se plantea en la tarea matemática. Este resultado también evidencia la movilización del *Conocimiento de Tecnología para el estudio de las Funciones.*

Figura 3. *Ejemplo de resolución de tarea abierta contextualizada por parte del futuro profesor.*

Asignación a los futuros profesores

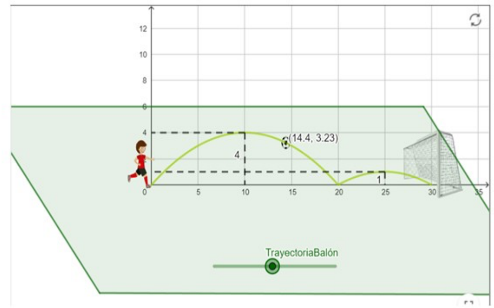
1. Lea el enunciado de la siguiente tarea

José, en una tarde de práctica, patea un tiro al arco. La pelota, antes de detenerse, describe dos parábolas de tiro, tal como se muestra en el gráfico adjunto. Respecto del tiro de José se pide dar una ***función que modelice el movimiento de la pelota*** desde que José la tira hasta que se detiene; es decir, una f tal que el gráfico de f sea una buena representación de la trayectoria de la pelota.



2. Elabore en GeoGebra un recurso que contribuya en la modelación y exploración de la situación problema planteada.

Resolución de los futuros profesores



Fuente: elaboración propia.

P3. Problematizar situaciones de enseñanza y aprendizaje en Matemáticas cuando la tecnología se integra en el aula.

En particular, este principio se movilizó durante el desarrollo de la microclase, pues se buscó problematizar lo que sucedería en un contexto de enseñanza y aprendizaje cuando se integran herramientas tecnológicas en una sesión virtual. Una de las parejas de futuros profesores desarrolló la microclase sobre el tema de Función Exponencial, en un momento de la sesión utilizaron GeoGebra para explorar el comportamiento de puntos sobre el plano cartesiano, sin embargo, al reflexionar sobre la implementación de la microclase decidieron alterar la actividad y no utilizar la herramienta tecnológica para este momento de la clase (Figura 4); lo que evidencia la toma de decisiones didácticas fundamentadas en los problemas que pueden enfrentar en posibles escenarios con estudiantes.

Figura 4. *Extracto de reflexión sobre las problemáticas de integrar tecnología.*

En la actividad de graficación de algunos puntos en la función que modelaba la situación del Suanfonzon, se adjuntó previamente la imagen de la tabla en el archivo de GeoGebra. Esto complicó la visualización de la imagen, pues, al acercar, se acercaba la imagen hasta tapar los puntos y, al alejar, la imagen quedaba demasiado pequeña. Además, los puntos que se debían ubicar en el plano iban desde el (0,5) hasta el (4,405) y la lejanía entre los puntos no permitía visualizar el comportamiento exponencial que se pretendía mostrar. Ante estas complicaciones, se optó, al final de la microteaching, por hacer esa representación gráfica (solamente esa) a mano alzada en un plano con la escala modificada, y en la misma presentación que se estaba utilizando en la clase; es decir, sin usar GeoGebra. Además, se consideraron solo los puntos (0,5), (1,15) y (2,35) para la graficación:

Fuente: elaboración propia.

P4. Promover la articulación entre el conocimiento tecnológico y las concepciones de los futuros profesores sobre la integración de la tecnología en la Educación Matemática.

Los espacios de reflexión escrita y discusión colectiva permitieron indagar sobre las concepciones de los futuros profesores en cuanto a la integración de la tecnología en la Educación Matemática. En estos espacios se evidenció que los futuros profesores tenían concepciones bien definidas y relevantes sobre el uso de herramientas tecnológicas en la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática, argumentando que permiten potencializar el pensamiento matemático, promover actitudes positivas y darle protagonismo al estudiante (Figura 5).

Figura 5. *Extracto de reflexión sobre la integración de la tecnología en la Educación Matemática.*

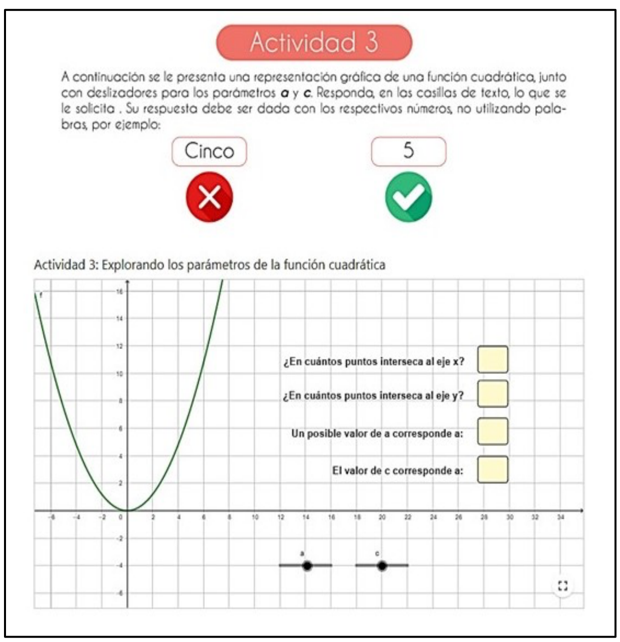
Las TICs han venido a catalizar los procesos de enseñanza-aprendizaje, por lo que se deben concebir como un aliado para desarrollar el pensamiento matemático y potenciar actitudes positivas en torno a la Matemática. En este sentido, es importante que no solo el docente conozca cómo manipularlas e incorporarlas, sino que el estudiante comprenda cómo utilizarlas en pro de su aprendizaje, siendo él el protagonista de dicho proceso.

Fuente: elaboración propia.

P5. Promover y fortalecer el vínculo entre el conocimiento tecnológico y el conocimiento didáctico de la Matemática.

La experiencia de práctica profesional docente se promovió en un contexto de enseñanza y aprendizaje virtual, por lo que se les solicitó a los futuros profesores diseñar tareas matemáticas apoyadas en recursos tecnológicos. Dada la naturaleza de los contenidos asociados al tema de Funciones, los futuros profesores optaron por utilizar GeoGebra. El conocimiento didáctico de la Matemática fue movilizado en el diseño de las tareas, la formulación de enunciados y preguntas apropiadas. Mientras que el conocimiento tecnológico fue movilizado en el uso técnico de la herramienta en coherencia con los propósitos didácticos deseados. En la Figura 6 se presenta un ejemplo de diseño de tarea matemática digital para la exploración de la Función Cuadrática diseñada en *geogebra.org*. Este resultado también evidencia la movilización del *Conocimiento de Tecnología para el estudio de las Funciones* en articulación con el *Conocimiento de Tecnología en la Didáctica de la Matemática.*

Figura 6. *Tarea Matemática digital para la exploración de la Función Cuadrática.*

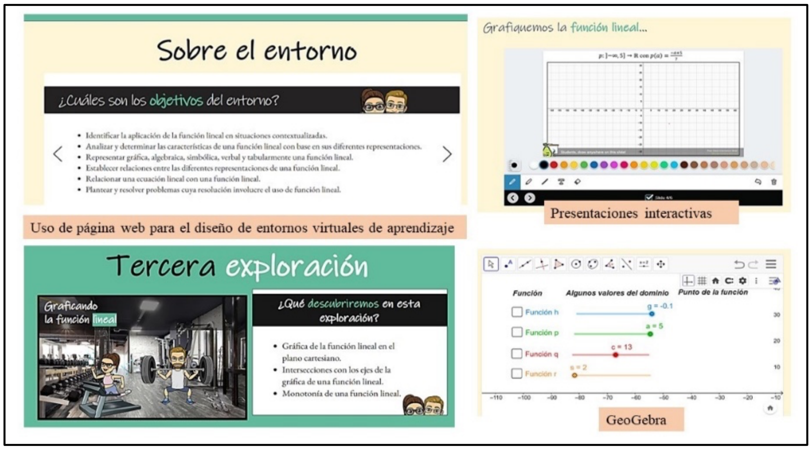


Fuente: elaboración propia.

P6. Promover el uso de diferentes herramientas y recursos tecnológicos durante la resolución de tareas que permitan consolidar el desarrollo del conocimiento tecnológico de los futuros profesores de Matemática.

La experiencia profesional docente también promovió el uso de diferentes herramientas tecnológicas con el propósito de consolidar el conocimiento tecnológico de los futuros profesores de Matemática. Por ejemplo, se promovió el uso de plataformas de diseño de páginas web para la creación de ambientes virtuales de aprendizaje (Wix.com), en articulación con herramientas para la creación de presentaciones interactivas con los usuarios y en articulación con el GeoGebra para la exploración de los contenidos matemáticos abordados. En la Figura 7 se muestra un ejemplo de la articulación de diferentes herramientas tecnológicas utilizadas en un ambiente virtual de aprendizaje diseñado por una pareja de futuros profesores de Matemática para el estudio de la Función Lineal.

Figura 7. *Ejemplo de ambiente virtual de aprendizaje para el estudio de la Función Lineal.*



Fuente: elaboración propia.

P7. Promover la creación y difusión de espacios dedicados a la reflexión y al intercambio de conocimientos dentro y fuera del aula, utilizando recursos tecnológicos.

Los espacios de reflexión fueron protagonistas en distintos momentos de la experiencia de práctica profesional. Por ejemplo, luego de la microclase, una pareja de futuros profesores reflexionó acerca de esa implementación y los aportes que recibieron de sus colegas y del formador, destacando el aprendizaje significativo de esta dinámica dentro de su práctica profesional. Otro momento de reflexión tuvo lugar al final de la experiencia de práctica profesional y la implementación de las sesiones virtuales con estudiantes de secundaria. Al respecto, una pareja de futuros profesores señala que la experiencia fue significativa en cuanto a elementos de gestión de clase, interacción con los estudiantes y promoción de su aprendizaje (Figura 8).

Figura 8. *Extracto de reflexión sobre la implementación de sesiones virtuales.*

> Por lo tanto, se considera que una de las principales contribuciones es la experiencia obtenida en la impartición de lecciones de manera virtual, en donde elementos como la forma de presentar al estudiante la información, la manera de constatar que se están comprendiendo los conceptos matemáticos, la comunicación docente - estudiante, entre otros factores son elementos en los cuales, en pequeña medida, se adquirió experiencia significativa por primera vez.

Fuente: elaboración propia.

Reflexiones

Ante la pregunta orientadora de este texto: *¿cómo promover la práctica profesional de futuros profesores de Matemática en un contexto de enseñanza virtual desde un proceso de formación también virtual?* Puedo concluir que los siete principios de diseño (Gutiérrez-Fallas & Henriques, 2021) orientaron las decisiones del formador de profesores en cuanto a la planificación y desarrollo de cada una de las tareas y actividades que tuvieron lugar en la propuesta de práctica profesional virtual para el tema de Funciones.

Esta experiencia también contribuyó a la reflexión profesional de los profesores practicantes, ofreciendo espacios de discusión y análisis de las situaciones de enseñanza y aprendizaje de la Matemática en un contexto virtual. Argumentado por Contreras (2021) resulta valioso e importante la “problematización de la práctica que posibilite la reflexión, mediante la selección, diseño y secuenciación de tareas matemáticamente relevantes para el aprendizaje de los futuros profesores, dotando de significado a todos los conceptos e ideas relacionadas con los procesos de enseñanza y aprendizaje involucrados” (p. 21)

También permitió que los futuros profesores tomaran decisiones sobre qué recurso tecnológico utilizar y cómo integrarlo en su práctica profesional, lo que potencializó la articulación entre los distintos dominios de conocimiento asociados con el TPACK para la enseñanza de las Funciones.

Sobre las actividades desarrolladas durante la experiencia, los resultados muestran que la dinámica de la microclase y su respectivo análisis luego de su implementación, les permitió a los futuros profesores tomar decisiones fundamentadas en su propia práctica que contribuyeron a superar problemáticas emergentes al integrar la tecnología en un contexto de enseñanza y aprendizaje virtual. También se evidencia la consolidación del uso de herramientas tecnológicas con diferentes propósitos: para la gestión de la clase, para el acompañamiento asincrónico de los estudiantes y para la exploración de los contenidos a abordar. Además, se evidenció que los futuros profesores apostaron por diseños creativos y atractivos para promover la motivación de los estudiantes y el uso efectivo de los recursos propuestos.

Sin lugar a duda, como toda experiencia, está sujeta a mejoras, adaptaciones y reformulaciones que busquen enriquecer y potencializar los alcances de esta. En particular, para futuras experiencias semejantes, considero que resultaría interesante orientar actividades que promuevan el uso de herramientas tecnológicas para la comunicación interactiva entre los futuros profesores y los estudiantes, tanto en tiempo real de las sesiones virtuales como en tiempo asincrónico; bajo la modalidad de estar siempre conectado en un proceso de aprendizaje continuo.

Referencias bibliográficas

Association of Mathematics Teacher Educators (AMTE) (2017). *AMTE Standards for Preparing Teachers of Mathematics.* http://www.amte.net/publications.

Contreras, L. C. (2021). Una aproximación a un modelo de conocimiento del formador de profesores de matemáticas. *Revista Venezolana De Investigación En Educación Matemática*, *1*(1), https://doi.org/10.54541/reviem.v1i1.12

Coutinho, C. P. (2011). *Metodologia de investigação em ciências sociais e humanas, teoria e prática*. Coimbra: Edições Almedina.

Dewey, J. (1933). *How We Think* (3.ª ed.). Boston, DC: Heath & Company.

Flores, P. (1998). Formación de profesores de matemáticas como práctica docente y como campo de investigación. *Revista de Educación de la Universidad de Granada*, 1-13, Retirado de https://www.ugr.es/~pflores/textos/aRTICULOS/Investigacion/RevEdUGR.pdf

Gutiérrez-Fallas, L. F. (2019). *O conhecimento tecnológico e pedagógico do conteúdo (TPACK) na formação inicial de professores de matemática do 3.º ciclo do ensino básico e do ensino secundário*. Tesis de Doctorado, Universidad de Lisboa, Portugal.

Gutiérrez-Fallas, L. F., & Henriques, A. (2021). Princípios de design de uma experiência baseada no TPACK na formação inicial de professores de matemática. *Zetetike, 29*(00), e021006. https://doi.org/10.20396/zet.v29i00.8661780

Jackson, C., Mohr-Schroeder, M., Cavalcanti, M., Albers, S., Poe, K., Delaney, A., Chadd, E., Williams, M., & Roberts, T. (2018). Prospective mathematics teacher preparation: Exploring the use of service learning as a field experience. *Fields Mathematics Education Journal, 3*(5), 1-21. URL?

Liljedahl, P., Durand-Guerrier, V., Winsløw, C., Bloch, I., Huckstep, P., Rowland, T., Thwaites, A., Grevholm, B., Bergsten, C., Adler, J., Davis, Z., Garcia, M., Sánchez, V., Proulx, J., Flowers, J. Rubenstein, R., Grant, T., Kline, K., Moreira, P., David, M., Opolot-Okurut, C., & Chapman, O. (2009). Components of mathematics teacher training. In R. Even, & D. L. Ball (Eds), *The professional education and development of teachers of mathematics* (pp. 25-34). New York, NY: Springer.

Llinares, S. (2007). *Formación de profesores de matemáticas. Desarrollando entornos de aprendizaje para relacionar la formación inicial y el desarrollo profesional*. Conferencia invitada en la XIII Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas – JAEM. Granada, España.

Mishra, P., & Koehler, M. J. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for integrating technology in teachers' knowledge. *Teachers College Record, 108*(6), 1017–1054. https://doi.org/10.1111/j.1467-9620.2006.00684.x

National Council of Teachers of Mathematics. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. Reston, VA: Author.

Niess, M. L. (2012a). Rethinking pre-service mathematics teachers' preparation: technological, pedagogical and content knowledge (TPACK). In D. Polly, C. Mims, & K. Persichitte (Eds.), *Developing technology-rich, teacher education programs: Key issues* (pp. 316–336). Hershey, PA: IGI Global.

Niess, M. L. (2012b). Teacher knowledge for teaching with technology: A TPACK lens. In R. N. Ronau, C. R. Rakes, & M. L. Niess (Eds), *Educational technology, teacher knowledge, and classroom impact: A research handbook on frameworks and approaches* (pp. 1-15). Hershey, PA: IGI Global.

Niess, M., & Gillow-Wiles, H. (2017). Expanding teachers' technological pedagogical reasoning with a systems pedagogical approach. *Australasian Journal of Educational Technology, 33*(3), 77-95.

Oliveira, H., & Serrazina, L. (2002). A reflexão e o professor como investigador. In GTI (Ed.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 30-42). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Ponte, J. P. (2014). Formação do professor de Matemática: Perspetivas atuais. In J. P. Ponte (Ed.), *Práticas profissionais dos professores de Matemática* (pp. 351-368). Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Ponte, J. P., & Chapman, O. (2008). Preservice mathematics teachers' knowledge and development. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (*2nd ed,* pp. 225–263). New York, NY: Routledge.

Santos, L., Moreira, D., Menezes, L., Oliveira, I., Ponte, J. P., Martins, C., Guerreiro, A., Cunha, H., Duarte, J., Martinho, H., Pinto, H., Menino, H., Manuel, J., Veia, L., Viseu, F., & Rodrigues, M. (2008). Conhecimento profissional do jovem professor de Matemática sobre os alunos. *Revista de Educação, 16*(2), 33-64.

Serrazina, L. (2012). Conhecimento matemático para ensinar: papel da planificação e da reflexão na formação de professores. *Revista Eletrônica de Educação, 6*(1), 266-283. Retirado de http://www.reveduc.ufscar.br/index.php/reveduc/article/viewFile/355/162

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4–14.

Thompson, A. G. (1992). Teacher's beliefs and conceptions: A synthesis of the research. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 127-146). New York, NY: Macmillan.

CREENCIAS DE PROFESORES EN FORMACIÓN SOBRE LA NATURALEZA, ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMATICAS: DISEÑO Y VALIDACIÓN DE UN CUESTIONARIO PARA SU EVALUACIÓN

BELIEFS OF TEACHERS IN TRAINING ABOUT MATHEMATICS NATURE, TEACHING, AND LEARNING; DESIGN AND VALIDATION OF A QUESTIONNAIRE FOR ITS EVALUATION

Karen Velasco Restrepo, José Gabriel Sánchez Ruíz.
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Universidad Nacional Autónoma de México. (México)
sebastian.castanedam@alumno.buap.mx, josegsr@unam.mx

Resumen:
En la presente investigación se presenta el procedimiento que se siguió para el diseño y validación de un cuestionario para evaluar las creencias de profesores en formación acerca de la naturaleza, enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. El instrumento diseñado, es un cuestionario constituido por 23 preguntas abiertas, las cuales abordan tres dimensiones: la naturaleza, la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. La validación se realizó mediante el juicio de expertos y se realizó una aplicación piloto. Lo anterior, implicó hacer algunas modificaciones a la primera versión del instrumento. Actualmente, se ha aplicado a profesores en formación del nivel de maestría de una universidad pública del estado de Puebla en México, como parte de una investigación.

Palabras clave: creencias, diseño, validación, formación de profesores

Abstract:
This research presents the procedure followed for the design and validation of a questionnaire to evaluate the beliefs of teachers in training about mathematics nature, teaching, and learning. The instrument designed is a questionnaire consisting of 23 open-ended questions, which address three dimensions: the nature, teaching and learning of mathematics. Validation was carried out by means of experts' judgment and a pilot application was made. This implied making some modifications to the first version of the instrument. Currently, it has been applied to teachers in training at the master's degree level at a public university in the state of Puebla, Mexico, as part of a research project.

Keywords: beliefs, design, validation, teacher training

Introducción

El ser humano continuamente se enfrenta a situaciones y momentos en los cuales debe tomar decisiones que definen su forma de proceder ante ellas. Estas decisiones se encuentran permeadas por las creencias propias de cada sujeto, que se han derivado de experiencias vividas, conocimientos previos o convicciones acerca de algo.

Por su parte, el ámbito de la educación no está exento de la influencia de las creencias. Específicamente en Educación Matemática, desde hace algunas décadas, existen numerosas investigaciones, como las de Benorrach y Marín (2011), Martínez (2013), Estévez-Nenninger et al., (2014), Garritz (2014), Danoso et al., (2016), García y Blanco (2017), Friz et al., (2018), Castillo et al., (2018) y Martínez-Sierra et al., (2019), que exploran las creencias que tienen los profesores en formación o en ejercicio en los distintos niveles educativos, con respecto a las matemáticas, a los procesos de enseñanza y aprendizaje, a la evaluación y al estudiante.

Una premisa importante que aparece en estas investigaciones es que las creencias sobre la misma ciencia, la evaluación, los procesos de enseñanza y aprendizaje, influyen significativamente en lo que se enseña y como se enseña en el aula (Castillo et al. 2018; Chaves, et al. 2008).

Sin embargo, a pesar de su importancia e influencia, en México estos estudios no son numerosos, y los realizados, se centran en profesores en ejercicio de educación básica. Por lo que la presente investigación tiene el objetivo de describir el diseño y la validación de un instrumento que permitirá conocer y caracterizar las creencias de profesores en formación de una entidad federativa de México. Así, se planteó el siguiente objetivo:

Diseñar y validar un cuestionario que permita obtener información para caracterizar las creencias sobre lo procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas de profesores en formación.

Marco teórico

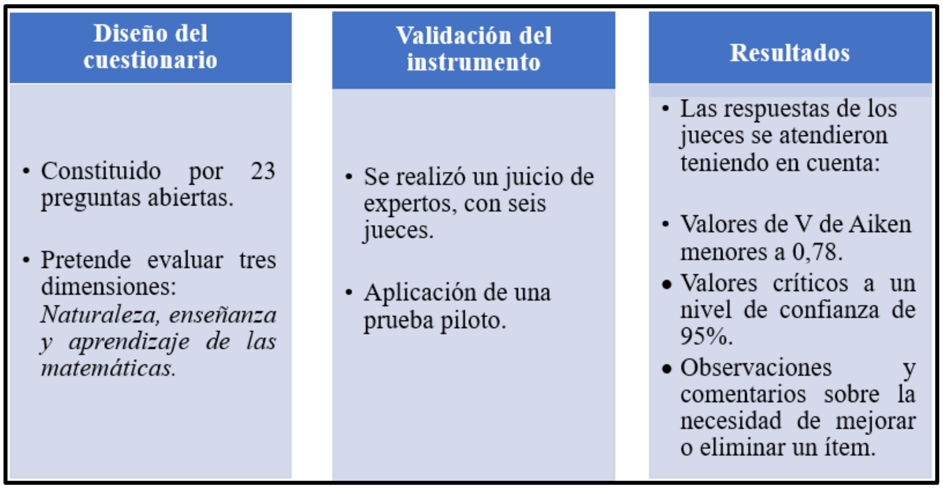
Actualmente, en la literatura no existe un acuerdo sobre la definición de creencia, sin embargo, autores como McLeod (1992, citado en Vila y Callejo, 2014); Pehkonen y Törner (1999), Chaves et al. (2008), Martínez (2013) y García y Blanco (2017) , han presentado su definición, considerándolas como experiencias, conocimientos subjetivos, verdades personales, actitudes y/o afirmaciones indiscutibles sustentadas por cada uno, derivadas de la experiencia o de la fantasía, que tienen un fuerte componente evaluativo y afectivo. Además, sostienen que son adquiridas por el individuo y se determina por una situación del pasado, generan determinadas respuestas y comportamientos estereotipados, sin tener conciencia de ellos, en algunos casos.

En este artículo, consideramos que las creencias son un conocimiento sobre un objeto de interés, de las cuales no siempre se tiene conciencia y predisponen al individuo a actuar de acuerdo con ello. Así mismo, reconocemos que una creencia no se sostiene independiente de otra, por lo que suele hablar de sistemas de creencias más que de creencias aisladas. Es importante mencionar, que no se trata entonces de una creencia sobre otra, sino de una red organizada. Pehkonen y Törner (1996, citado en Vila y Callejo, 2014) realizando una analogía del sistema de creencias hablan de un plato de espagueti: en el sentido de que al halar uno de ellos, es posible que se halen otros más. Con lo que ilustran la relación entre ellas.

Metodología

Se utilizó un diseño de investigación instrumental (Ato et al., 2013), ya que se pretende diseñar y validar un instrumento de medición. En la figura 1, se muestra el procedimiento que se siguió para el diseño y validación del instrumento:

Figura 1. *Procedimiento para el diseño y validación del instrumento.*



Fuente: elaboración propia.

Como se evidencia, inicialmente se diseñó una primera versión del cuestionario constituida por 23 preguntas abiertas, que pretende evaluar las creencias de profesores en formación a cerca de tres dimensiones. Las preguntas incluidas fueron adaptadas o modificadas de algunos ítems de los instrumentos propuestos por Lebrija et al. (2010), Benorrach et al. (2011), Danoso et al. (2016) y Castillo et al. (2018), en el sentido de que algunas se encontraban en un modelo de pregunta cerrada o en ítems de escala tipo Likert y se adaptaron a preguntas abiertas. También se incluyeron en el cuestionario cuatro ítems de elaboración propia.

Una vez diseñada la primera versión del cuestionario, se realizó el proceso de validación de contenido a través del juicio de expertos con la intención de obtener observaciones, comentarios y retroalimentación para realizar el ajuste, en caso de ser necesario, de algunas preguntas del cuestionario inicial. Esta fase, se considera una de las más importante dentro de la investigación, debido a que nos permite garantizar que la recolección de datos se realice correctamente y los datos recogidos sean acordes a lo que se pretende evaluar, es decir, que se obtengan datos que tengan validez.

Para el proceso de juicio de expertos y la elaboración del formato que permitiera registrar a los jueces sus puntuaciones con respecto a cada ítem, se tomó en cuenta la propuesta de Escobar-Pérez y Cuervo-Martínez (2008). Estos autores plantean, cuatro criterios para evaluar el instrumento (suficiencia, claridad, coherencia y relevancia), una escala de cuatro valores (1 a 4) y un indicador para cada valor. En nuestro caso, retomamos los cuatro criterios, pero modificamos la escala con los valores de (0 a 3), debido a que sería más congruente para el análisis de los datos.

Para realizar la validación, participaron seis jueces expertos: 3 maestros en Educación Matemática, 2 doctores con especialidad en Matemática Educativa y 1 doctor en Educación Matemática. Todos ellos, cuentan con experiencia en el campo del dominio afectivo y las creencias en educación matemática. Es importante mencionar, que el proceso de validación de contenido se realizó en línea y que a los jueces, además de las valoraciones, se les solicitó adjuntar sus comentarios y sus observaciones para cada item.

Resultados

Las respuestas de los jueces se atendieron teniendo en cuenta los tres criterios mencionados en la Figura 1, con el fin de realizar los ajustes necesarios a los ítems.

Cuando los v*alores de V de Aiken eran inferiores a 0,78 con valores críticos a un nivel de confianza de 95%,* se revisaron las puntuaciones dadas por los jueces para cada ítem, realizando la interpretación de los valores con base en el estadístico V de Aiken (1985), un técnica que permite calcular la validez de contenido, sus valores de expresión van de 0 a 1 y su interpretación es equivalente a un índice de correlación, en este caso entre más cercano sea el valor de V a 1 mayor será la fuerza de acuerdo.

Es importante mencionar que, aunque el coeficiente V de Aiken de cada ítem nos arrojó información útil, se realizó la interpretación teniendo en cuenta el método de score desarrollado por Penfield y Giacobbi (2004). Lo anterior, debido a que en muchas ocasiones el valor obtenido de V puede indicar que la muestra de jueces expertos tiende a proporcionar una valoración alta para el ítem. Sin embargo, ese valor puede diferir del valor de la población de jueces que evalúan el instrumento (Vp). Por lo tanto, es útil construir un intervalo de confianza para Vp, para de tener una mayor estimación del coeficiente. En este estudio, se analiza a un nivel de significancia de 95%, 6 jueces expertos, 4 categorías de evaluación (suficiencia, claridad, coherencia y relevancia), con un valor de Vp = 0,78 (Aiken, 1985).

Luego del análisis realizado, se estableció como índice de validez de contenido una V= 0,87 para el instrumento, siendo estadísticamente significativo. Además, se encontró que los ítems 6, 9, 13 y 22 del cuestionario obtuvieron un V de Aiken menor a 0,78, lo que nos indica que deben ser revisados o eliminados, teniendo en cuenta además de los valores numéricos, las observaciones y comentarios de los jueces.

Observaciones y comentarios sobre la necesidad de mejorar o eliminar un ítem

Como se mencionó, además de los valores de V de Aiken se tomaron en cuenta las observaciones y comentarios de los jueces lo cual contribuyó al mejoramiento de los ítems, no solo de los ítems 6,9,13 y 22 sino de todos los demás. En general, las observaciones obtenidas de los jueces hacían referencia a cuidar el tiempo gramatical (presente y pospretérito), ajustar el pronombre en los verbos, de algunos ítems, a una voz formal "usted", y quitar la palabra "creer", de algunos ítems, debido que aparecía repetidamente. En el caso del ítem 13, se dividió en dos ítems. Para ejemplificar lo antes mencionado, presentamos algunos de los ítems modificados (Ver tabla 1):

Tabla 1. *Algunos ítems modificados teniendo en cuenta el V de Aiken y las observaciones de los jueces.*

Ítem		V de Aiken	Nuevo ítems
4	¿Qué características cree que se relacionan con la naturaleza de las matemáticas, (no acerca de su enseñanza, sino acerca de la matemática misma)? Menciona al menos tres.	0,78*	¿Qué características cree que se relacionan con la naturaleza de las matemáticas? Mencione al menos tres.
6	¿Qué problemas cree que enfrenta o enfrentaría usted en la enseñanza de las matemáticas? ¿y cómo los resuelve?	0,76	¿Qué dificultades cree que enfrenta usted en la enseñanza de las matemáticas? ¿y cómo los resuelve? Mencione al menos dos situaciones y las estrategias empleadas.
8	¿Qué hechos lo llevan a considerar que ha realizado un buen trabajo enseñando matemáticas?	0,89*	¿Considera que ha realizado un buen trabajo enseñando matemáticas? ¿Por qué?
13	¿Crees que el hecho de enseñar bien conlleva a aprender bien?	0,75	Se generan dos ítems: ¿Para usted que es enseñar bien? ¿Considera que el hecho de enseñar bien conlleva a aprender bien? ¿Por qué?
22	Como profesor o futuro profesor de matemáticas, ¿Cuál considera su mayor preocupación?	0,54	Eliminado

Fuente: elaboración propia. *ítems con V ≥ 0,78.

En la tabla 1, se muestran a modo de ejemplo 5 de los ítems del cuestionario que fueron modificados atendiendo las observaciones de los jueces y los valores de V de Aiken. En el caso de los ítems 4 y 8, aunque se obtuvo una $V \geq 0{,}78$, se modificaron atendiendo las observaciones de los jueces, en cuanto a su claridad. En el ítem 4, se retiró la aclaración “no acerca de su enseñanza, sino acerca de la matemática misma”, debido a que se pregunta sobre la naturaleza de las matemáticas y en el ítem 8, se ajustó el pronombre en los verbos, a una voz formal.

En el ítem 6 ($V = 0{,}76$), se cambió la palabra “problemas” a “dificultades, se deja un solo tiempo gramatical y se agregó la expresión: “Mencione al menos dos situaciones y las estrategias empleadas” y para el ítem 13 ($V = 0{,}75$), con el fin de que el término ‘enseñar bien’ no se utilice como una noción transparente, se generó un nuevo ítem y se incluyó la pregunta “¿Por qué?, para profundizar aún más en las creencias de los docentes.

Finalmente, el ítem 22 con un $V = 0{,}54$, el menor valor obtenido de V en comparación con todos los ítems del cuestionario fue eliminado debido a que los comentarios de los jueces señalan que puede llegar a ser una pregunta muy abierta y puede llevar a confusiones. Lo anterior, debido a que las preocupaciones del docente pueden ser muy variadas y no necesariamente estar relacionadas con los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Prueba piloto

Una vez realizadas las correcciones a la primera versión del cuestionario, se procedió a realizar una aplicación piloto con quince profesores en formación de la Maestría en Educación Matemática de tres universidades de México. Esta aplicación arrojó información que sugería la necesidad de hacer modificaciones de contenido a las preguntas 4 y 10 del cuestionario.

La dificultad de estos ítems radicaba en que no eran claros para los participantes y 2 de los 15 profesores en formación no lograron responderlos. En el caso del ítem 4, manifestaron que relacionaban la frase “naturaleza de las matemáticas”, a la aplicación de las matemáticas en el entorno real y no a las características de las matemáticas mismas. Mientras que en el ítem 10, la frase “cuál es el proceso que sigue cuando prepara su clase”, se asociaba al proceso consecuente de preparar la clase, es decir, ponerla en práctica. Sin embargo, el ítem requiere que expliquen cómo preparan su clase o qué aspectos tienen en cuenta en el proceso de preparar una clase de matemáticas.

Conclusiones

Los resultados expuestos son apenas un avance de lo que se tiene hasta el momento, sin embargo, se pretende aplicar el cuestionario a profesores en formación de nivel de maestría de una entidad federativa del estado de Puebla, México.

Ahora bien, se puede apreciar que, si bien los valores de V de Aiken obtenidos arrojaron información cuantitativa valiosa para cada ítem, al revisar las observaciones y comentarios de los jueces, encontramos aportes sustanciales que contribuyeron al diseño del cuestionario. Lo anterior, nos lleva a sugerir que, en el proceso de validación de contenido por juicio de expertos, además de considerar los valores numéricos, es importante tener en cuenta las observaciones y comentarios de los jueces.

Por otro lado, consideramos que en el campo de la educación matemática el diseño de cuestionario o instrumentos de medición que sean confiables y válidos contribuye a desarrollar más investigación en este campo y disponer de información relevante, confiable y válida. Específicamente, el cuestionario presentado en este trabajo puede generar aportes valiosos sobre las creencias de los profesores sobre la naturaleza, enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Finalmente, en nuestra opinión el proceso seguido hasta aquí, puede ser una posible guía para futuros trabajos e investigaciones, que pretendan diseñar y validar un instrumento para evaluar las creencias. Así mismo, sugerimos que, si se pretende aplicar este cuestionario y obtener información más detallada, se puede complementar con entrevistas u observaciones de clase.

Referencias bibliográficas

Aiken, L. R. (1985). Three coefficients for analyzing the reliability and validity of ratings. *Educational and Psychological Measurement*, *45*(1), 131-142. https://doi.org/10.1177/0013164485451012З

Ato, M., López, J. y Benavente, A. (2013). Un sistema de clasificación de los diseños de investigación en psicología. *Anales de Psicología, 29*(3), 1038-1059. https://doi.org/10.6018

Benarroch, A., y Marín, N. (2011). Relaciones entre creencias sobre enseñanza, aprendizaje y conocimiento de ciencias. *Enseñanza De Las Ciencias. Revista De Investigación Y Experiencias Didácticas, 29*(2), 289-303. https://doi.org/10.5565/rev/ec/v29n2.84

Castillo, A., Sánchez, J. y Juárez, J. (2018). Creencias de docentes y estudiantes de bachillerato acerca de la enseñanza - aprendizaje en la clase de Matemáticas. En C. Dolores, G. Martínez, S. García, J. Juárez, y J. Ramírez. (Eds.). *Investigaciones en dominio afectivo en matemática educativa.* (pp. 335 - 333). Ediciones Eón y Universidad Autónoma de Guerrero, México.

Chaves, E., Castillo, M. y Gamboa, R. (2008). Creencias de los estudiantes en los procesos de aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática,* *3*(4), 29-44. https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/6906/6592

Danoso, P., Rico, N. y Castro, E. (2016). Creencias y concepciones de profesores chilenos sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. *Profesorado. Revista de Currículum y Formación de Profesorado. 20*(2),76-97. https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/6906/6592

Escobar-Pérez, J. y Cuervo-Martínez. A. (2008). Validez de contenido y juicio de expertos: una aproximación a su utilización. *Avances en medición*, *6*(1), 27-36. https://www.researchgate.net/publication/302438451

Estévez-Nenninger, E. H., Valdés-Cuervo, Ángel A., Arreola-Olavarría, C. G., y Zavala-Escalante, M. G. (2014). Creencias sobre enseñanza y aprendizaje en docentes universitarios. *Magis, Revista Internacional De Investigación En Educación*, *6*(13), 49-64. https://doi.org/10.11144/Javeriana.M6-13.CSEA

Friz, M., Panes, R., Salcedo, P. y Sanhueza, S. (2018). El proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. Concepciones de los futuros profesores del sur de Chile. *Revista Electrónica de Investigación Educativa, 20*(1), 59-68. https://doi.org/10.24320/redie.2018.20.1.1455

García, P. y Blanco, R. (2017). Creencias de los docentes de matemática de secundaria de la provincia de Cartago sobre la evaluación en matemática. *Matemática, Educación e internet. 17*(1), 1-23. https://www.redalyc.org/pdf/356/35630152008.pdf

Garritz, A. (2014). Creencias de los profesores, su importancia y cómo obtenerlas. *Elsevier*, *25*(2),88-92. 10.1016/S0187-893X(14)70529-4.

Lebrija, A., Flores, R. y Trejos, M. (2010). El papel del maestro, el papel del alumno: un estudio sobre las creencias e implicaciones en la docencia de los profesores de matemáticas en Panamá. *Educación Matemática*, *22*(1), pp. 31-55. http://www.scielo.org.mx/scielo.php.

Martínez, O. (2013). Las creencias en educación matemática. *Educere. 17*(57), 235-243. https://www.redalyc.org/pdf/356/35630152008.pdf

Martínez-Sierra, G., Valle-Zequeida, M., García-García, J. y Dolores-Flores, C. (2019). 'Las matemáticas son para ser aplicadas': Creencias matemáticas de profesores mexicanos de bachillerato. *Educación Matemática, 31(1),* pp. 92 - 120. 10.24844/EM3101.04.

Pehkonen, E., y Törner, G. (1999). Teachers' beliefs on mathematics teaching - comparing different self-estimation methods - a case study. En MAVI (pp. 1–12). http://duepublico.uni-duisburgessen.de

Penfield, R. D., y Giacobbi, P. R. (2004). Applying a score confidence interval to Aiken's item content-relevance index. *Measurement in Physical Education and Exercise Science,* *8*(4), 213-225. https://doi.org/10.1207/s15327841mpee0804_

Vila, A. y Callejo, M. (2014). *Matemáticas para aprender a pensar.* NARCEA.

SECCIÓN 5

USO DE LOS RECURSOS TECNOLÓGICOS EN EL PROCESO DE APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

IMPLEMENTAÇÃO E CONSTRUÇÃO DE JOGOS ONLINE COM ALUNOS DOS ANOS INICIAIS

IMPLEMENTATING AND CONSTRUCTING ONLINE GAMES WITH STUDENTS OF ELEMENTARY EDUCATION INITIAL YEARS

Míriam do Rocio Guadagnini, Marlene Alves Dias, Sirlene Neves de Andrade
Universidade Federal de Goiás, Instituto Federal do Ceará, Secretaria Estadual de Educação do Estado de São Paulo. (Brasil)
miriamguadagnini@gmail.com, maralvesdias@gmail.com, sirlene-neves@hotmail.com

Resumen:
Neste extrato, apresentamos resultados de uma experiência vivenciada com alunos de terceiro e quarto ano dos Anos Iniciais de uma escola da rede pública federal, nas aulas de Matemática durante a pandemia. O objetivo do experimento foi possibilitar a construção, pelos próprios alunos, de jogos online que envolviam as operações matemáticas elementares, utilizando o site Wordwall. O referencial teórico é centrado na Teoria das Situações Didáticas de Brousseau e a metodología segue etapas da Engenharia Didática difundida por Artigue. A atividade desenvolvida possibilitou discussões e interações, fortalecendo a apropriação das noções estudadas, e melhorando a relação com a Matemática e a interação entre colegas.

Palabras clave: matemática. ensino fundamental. wordwall

Abstract:
In this paper, we present the results of an experience with third and fourth year-students from the initial years of a federal public school, in math classes during the pandemic. The objective of the experiment was to enable students to construct online games that involved elementary mathematical operations, using the Wordwall website. The theoretical framework is centered on Brousseau's Theory of Didactic Situations and the methodology follows stages of Didactic Engineering spread by Artigue. The developed activity made possible discussions and interactions; strengthening the appropriation of the studied notions, and improving the relationship with mathematics and the interaction between colleagues.

Keywords: math, elementary school, wordwall webside

Introducão

Neste extrato de pesquisa, apresentamos uma atividade desenvolvida em aula remota, via google meet, com duas turmas de terceiro ano (60 alunos, 8 a 9 anos) e uma turma de quarto ano (30 alunos, 9 a 10 anos) do Ensino Fundamental – Anos Iniciais, do Centro de Ensino e Pesquisa Aplicada à Educação (CEPAE) da Universidade Federal de Goiás durante a pandemia da Covid-19. O desenvolvimento da atividade teve a duração de cinco aulas de quarenta e cinco minutos cada.

A justificativa de propor essa nova forma de trabalho com os aluno se deve à necessidade de motivar esse grupo de alunos dos terceiros e quartos anos do Ensino Fundamental - Anos Iniciais a participarem das aulas online, uma vez que a escola adotou um Modelo de Ensino Remoto Emergencial (ERE) devido ao isolamento social imposto pela pandemia de Covid-19. Considerando a nova proposta de ensino e a importância de organizar atividades que chamassem a atenção dos alunos e os motivassem a participar ativamente das aulas, discutindo e refletindo sobre as noções matemáticas em jogo nas atividades propostas, nos colocamos a seguinte questão: "Que metodologia utilizar de forma a motivar os alunos a participarem ativamente das aulas de Matemática?"

Tendo em vista nossa questão de pesquisa, o objetivo de nosso trabalho foi a implementação e construção de jogos on-line envolvendo as noções de adição, subtração e multiplicação, consideradas como conhecimentos prévios possíveis de serem mobilizados pelos alunos que participaram da pesquisa.

A ideia surgiu em decorrência do ensino remoto se impor como forma de continuação dos estudos escolares durante a referida pandemia, o que conduziu a mudanças nas metodologias utilizadas diariamente no ensino presencial em sala de aula.

Devido à proposta da instituição, enquanto professores, passamos a construir roteiros de ensino e a ministrar aulas no ambiente *google meet*. Os roteiros de ensino tinham como foco trabalhar os conceitos exigidos pela BNCC (Brasil, 2018) para o terceiro e quarto ano, por meio de atividades que envolviam conhecimentos prévios, situações de investigação e situações diversas, o que nos conduziu a considerar a possibilidade de desenvolvimento de conhecimentos técnicos, mobilizáveis e disponíveis, segundo definição de Robert (1998).

Além dos roteiros organizados pelo professor, os alunos dispunham do livro didático (Dante, 2017) e podiam utilizá-lo para consulta e desenvolvimento de situações e atividades complementares que permitiam a apropriação dos conhecimentos desenvolvidos e o trânsito pelos diferentes níveis de conhecimento definidos por Robert (1998). Certamente, esse trabalho era acompanhado pelo professor.

No período da pandemia, demos ênfase ao lúdico em sala de aula remota, por ser um recurso didático de aprendizagem que nos pareceu adequado para manter a atenção dos alunos nesse novo formato de aula.

Para tanto, a professora regente e estagiários envolveram-se com a apresentação, implementação e/ou construção de jogos a fim de proporcionar momentos de descontração, mas primando pelo foco na aprendizagem dos alunos.

Sendo assim, a opção pelos jogos foi considerada interessante em função dos estudos de Vygotsky (1989) sobre o tema, pois o autor resalta que os jogos educacionais são uma alternativa de ensino e aprendizagem, servindo como incentivador e estimulando as relações cognitivas e afetivas.

A partir da opção pelos jogos, observamos que esse método foi utilizado, tanto para a introdução do tema de estudo, como para a ampliação da compreensão dos conceitos e noções, uma vez que o proceso de ensino e aprendizagem de forma remota necessitava de um trabalho que motivasse a participação dos alunos, os mantivesse concentrados e possibilitasse a interação entre professor, alunos e estagiários.

Após reflexões sobre o papel dos jogos em nossas aulas, decidimos propor aos alunos que construíssem um jogo no site Wordwall e apresentasse/jogasse com os colegas da sala de aula. Desse modo, professora e estagiários poderiam avaliar a aprendizagem sobre os temas estudados, além da criatividade, participação e envolvimento com a atividade proposta.

Para a avaliação da aprendizagem por meio dessa nova proposta metodológica, professora e estagiários dispunham dos seguintes dados: diário de campo do professor e dos estagiários, gravação das aulas no ambiente *google meet* e registro das produções dos alunos por meio do arquivamento do link do jogo por eles elaborado.

Após discussão e organização das atividades com jogos pela professora e estágiários, foram implementados e utilizados diversos sites de jogos disponíveis on-line e também jogos construídos por meio do site Wordwall e Flippity. A dinâmica considerada nas aulas foi centrada na apresentação dos jogos pelos estagiários que jogavam com a turma, de forma a mostrar as funcionalidades do "software" e familiarizar as crianças com o ambiente. Na sequência, o jogo ficava disponível no chat da sala de aula do *google meet* para que os alunos pudessem jogar individualmente.

Depois desse trabalho e da fase de apropriação dessa nova metodologia de ensino e aprendizagem, centrada em jogos online para nossas aulas, a professora e os estágiarios decidiram propor aos alunos que construíssem um jogo no site Wordwall, apresentassem e jogassem com os colegas da sala de aula. Desse modo, professora e estagiários poderiam avaliar a aprendizagem sobre os temas estudados, além da criatividade, participação e do envolvimento com a atividade proposta.

Na sequência, apresentamos brevemente o referencial teórico da pesquisa.

Referencial teórico

Para atingir nosso objetivo, escolhemos como referenciais teóricos a Teoria das Situações Didáticas (TSD) desenvolvida por Brousseau (1986). Da TSD, consideramos as noções de situação adidática de ação, formulação, validação e a situação de institucionalização definidas em Brousseau (2010), a saber:

**Situação adidática de ação* em relação a um conhecimento é uma situação em que o conhecimento do sujeito se manifesta somente por decisões, por ações regulares e eficazes sobre o meio e onde não tem importância para a evolução das interações com o meio em que o ator possa ou não identificar, explicitar ou explicar o conhecimento necessário.

**Situação adidática de formulação* de um conhecimento é uma situação que relaciona ao menos dois atores com um meio. O sucesso comum desses atores exige que um deles formule o conhecimento em questão (sob qualquer forma) com a intenção do outro que tem essa necessidade para converter em decisão eficaz sobre o meio. A formulação consiste, para esse par de atores, em utilizar um repertório conhecido para formular uma mensagem original, mas a situação pode conduzir a modificar esse repertório. Podemos deduzir teóricamente e verificar experimentalmente que uma formulação "expontânea" de um conhecimento exige que esse conhecimento exista previamente como modelo implícito de ação para os dois atores.

**Modelo implícito de ação* é primeiramente uma descrição tão simples quanto possível dos comportamentos de um dos atores em situação. Denominamos estratégia (válida para todos os casos) ou tática (válida para alguns casos somente). Esse modelo pode ser utilizado para tentar prever os comportamentos efetivos de um sujeito, mas ele é construído pelo observador de acordo com critérios objetivos: que o sujeito observado tenha consciência, ou não; o que ele faz, sendo ele capaz de explicitar, ou não, sua ação.

**Situação adidática de validação* (social e cultural) é uma situação cuja solução exige que os atores estabeleçam, em conjunto, a validade do conhecimento característico dessa situação. Sua realização efetiva depende da capacidade dos protagonistas estabelecerem, em conjunto, explícitamente, essa validade. A validade apoia-se sobre o reconhecimento por todos de uma conformidade com a norma, de uma construtibilidade formal no interior de determinado repertório de regras ou de teoremas conhecidos, de uma pertinência para descrever elementos de uma situação, e/ou da adequação verificada para resolvê-la. A validação implica que os protagonistas confrontem suas opiniões sobre a evolução do meio e entrem em acordo, segundo as regras do debate científico.

**Situação de institucionalização de um conhecimento* é uma situação que se desvenda pela passagem do papel de um conhecimento enquanto meio de resolução de uma situação de ação, de formulação ou de prova a um novo papel, ou seja, aquele de referência para utilizações futuras, pessoais ou coletivas. Como exemplo, o autor indica a resolução de um problema e quando ela é declarada típica, pode tornar-se método ou teorema. Antes da institucionalização, o aluno não pode se referir a esse problema que ele sabe resolver, ou seja, frente a um problema parecido, ele precisa produzir uma nova demonstração. Ao contrário, após a institucionalização, ele pode utilizar o teorema sem refazer a demonstração ou o método sem justificá-la. A institucionalização inclui uma mudança de convenção entre os atores, um reconhecimento (justificado ou não) da validade e da utilidade de um conhecimento, é uma modificação desse conhecimento – que está "encapsulada" e designada – é uma modificação de seu funcionamento. Ela corresponde a uma institucionalização, uma certa transformação do repertório comum aceito e utilizado por seus protagonistas. A institucionalização pode consistir em um acréscimo ao repertório, mas também em um cancelamento de uma crença comum reconhecida repentinamente como falsa. Os conhecimentos do repertório funcionam como um jogo de status mais complexo, segundo seu uso. Uma institucionalização pode consistir em modificações mais sutis, por exemplo, a adoção de um abuso de linguagem como sinal de pertencimento a uma instituição. A institucionalização pode já ter sido produzida em situações não didáticas de autoaprendizagem espontâneas e também em processos autodidáticos, sendo uma convenção interna ao grupo de atores (institucionalização não didática). Mas ela é fundamentalmente associada ao processo didático e resulta de uma intervenção específica. É ela que permite ao professor e ao aluno reconhecerem e legitimarem "o objeto de ensino", mesmo se eles o visualizem de maneiras diferentes. Ela pode consistir no reconhecimento pelo professor do valor da produção de um aluno. Portanto, ela afirma: 1) que a proposição do aluno é válida e reconhecida como tal fora do contexto particular da situação apresentada. 2) que ela servirá em otras ocasiões, ainda não conhecidas. 3) que será mais vantajoso conhecê-la e utilizá-la sob sua forma reduzida ao invés de estabelecê-la novamente. 4) que ela será aceita diretamente por todos ou pelo menos pelos iniciados.

Após a descrição das diferentes situações apresentadas por Brousseau (2010), observamos que a atividade de construção de jogos por nós elaborada corresponde a uma situação de ação, uma vez que, no momento em que o aluno construiu e entregou um jogo como resultado do seu trabalho, ele manifestou seus conhecimentos apenas por decisões e ações eficazes sobre o meio, não tendo a necessidade de identificar, explicitar ou explicar o conhecimento necessário.

Da mesma forma, caracterizamos como situação de formulação o caso em que os alunos apresentam o jogo relacionado às operações matemáticas por eles construído e discutem por meio da proposta de perguntas e respostas, identificando os possíveis erros, tanto nas perguntas, quanto nas respostas formuladas pelo grupo. Desse modo, ao concluir o jogo, o aluno compartilhou seu link na sala de aula, possibilitando que todos pudessem jogar. Nesse momento, os envolvidos: alunos, estagiários e professora, puderam fazer considerações com relação à produção da criança, apontando acertos e erros cometidos, além de discutir como poderia ser apresentada a questão para que fosse correta. Os próprios alunos observaram erros cometidos e disseram se gostaram ou não de jogar o jogo e o porquê. Vale observar que alguns alunos perceberam e aceitaram seus erros e imediatamente entraram no seu jogo e editaram novamente, deixando-o de acordo com o saber constituído. Outros não conseguiram, pois necessitavam de ajuda para editar o jogo ou mesmo para alterar sua questão ou alternativas de respostas.

Após a discussão em grupo, caracterizamos a situação de validação como aquela em que os alunos, a partir da discussão e reflexão, identificam a validade dos conhecimentos em jogo nas questões e respostas apresentadas pelos colegas, estabelecendo em conjunto essa validade, segundo as regras do debate científico.

Observamos finalmente que Brousseau (2008, p. 31) relata que "no passado acreditava que ao considerar as situações de ação, formulação e validação dispunha de todos os tipos de situação", porém percebeu a necessidade de os profesores, ao término de um conteúdo, revisarem os pontos mais importantes deste, reforçando as ideias a serem fixadas pelos alunos, sinalizando a necessidade de institucionalizar o saber.

Sendo assim, após a situação de validação e o acerto das jogos pelos alunos, a professora revisita o estudo das operações matemáticas com os alunos e propõe a resolução de situações matemáticas propostas no livro didático e no roteiro de ensino, indicado anteriormente, no qual encontramos situações, cujo conhecimento em jogo para resolvê-las é o mesmo validado por meio do jogo e que foi institucionalizado pela professora, o que permite que os alunos utilizem esses conhecimentos em situações matemáticas parecidas com as propostas pelos aluno durante o jogo.

Metodología

A metodologia empregada foi a engenharia didática (Artigue, 1990), utilizada para elaborar, aplicar e interpretar uma sequência de atividades em torno das operações básicas de Matemática, de forma a contribuir para a apreensão deste objeto matemático que expomos a seguir com a descrição de sua referida sistematização em nosso trabalho.

Segundo a autora, a *análise preliminar* é realizada observando os objetivos da pesquisa e deve conter uma análise epistemológica do conteúdo, uma análise do ensino atual desse conteúdo e seus efeitos, bem como das concepções e dificuldades dos alunos e dos entraves na dimensão didática e cognitiva. Destacamos aqui que essa etapa foi realizada por meio do estudo da BNCC (Brasil, 2018), de livros didáticos, pesquisas realizadas e outros documentos oficiais acerca do ensino desse conteúdo matemático, que serviram como norteadores nesta etapa.

Na etapa de *concepção* e *análise "a priori",* é feita uma descrição e previsão em que o pesquisador escolhe as variáveis que considera pertinentes para o problema estudado, analisa o desafio dado aos alunos, descreve o comportamento esperado dos alunos, seus significados e suas expectativas. Isto é feito para cada atividade da sequência. É a fase da construção da sequência didática.

O objetivo da análise *a priori* é determinar como as escolhas realizadas permitem controlar o comportamento do aluno e o sentido desse comportamento. A análise *a priori* abarca descrição e previsão dos fenômenos.

Priorizamos, nessa etapa, um trabalho descritivo e previsivo do papel do aluno diante das operações elementares, com base nas situações adidáticas de ação, formulação e validação, segundo definição de Brousseau.

Para sua concretização, previmos possíveis propostas de jogos e suas respectivas estratégias de resolução, bem como algumas dificuldades que os alunos poderiam apresentar.

A fase da experimentação foi materializada pela construção de jogos referentes às operações matemáticas elementares, tendo sido explicitados, previamente, aos alunos os objetivos e as condições da realização da mesma. Cada aluno elaborou individualmente seu jogo.

Na etapa de Análise a *posteriori* e validação, dá-se a conclusão do trabalho. O pesquisador deve analisar os dados coletados e confrontar com a análise *a priori* para validar ou refutar as hipóteses levantadas. A engenharia didática faz estudo de caso e possui uma validação interna que se apoia na confrontação entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori.* Esta etapa concretizou-se no momento em que o jogo foi compartilhado e jogado por todos os envolvidos, momento em que foi possível identificar erros e comparar os resultados com a análise *a priori*.

A Atividade

Conforme destacado, era comum a professora e os estagiários construirem jogos para as aulas remotas das turmas. Diante disso, decidimos, em virtude do interesse, participação e gosto dos alunos pelos jogos online, além da facilidade em manusear as ferramentas tecnológicas, propor a construção de um jogo pelo aluno.

Para que fosse possível, a atividade foi dividida em cinco etapas, a saber: na primeira, a professora regente apresentou o site Wordwall, via *google meet*, mostrando suas funcionalidades. Na segunda etapa, a professora elaborou, com o coletivo de alunos da sala, alguns jogos a fim de que eles pudessem compreender as funcionalidades do site e a dinâmica da construção; assim, os alunos escolheram o formato do jogo e enunciaram perguntas com suas respostas, assinalando a resposta correta, além disso, experienciaram a inserção de figuras no jogo.

Na terceira etapa, a turma foi dividida em equipes com cinco a seis alunos cada, os nomes dos alunos e os respectivos links de cada equipe foram postados no chat da sala de aula. O aluno entrava em um link onde encontrava um estagiário que, junto à equipe, elaborou um jogo coletivo. Cada criança da equipe era responsável por uma questão e pelas respectivas alternativas de respostas e, no coletivo, escolheram o modelo do jogo. A seguir, apresentamos os modelos de jogos disponíveis no site utilizado.

Figura 1. *Modelo de jogos no wordwall.*

Fonte: https://wordwall.net/pt.

Os modelos preferidos pelos alunos foram: questionário, questionário de programa de televisão, roda aleatória e perseguição no labirinto.

Na quarta etapa, o aluno foi orientado a se cadastrar no site; nesse ponto, solicitamos que se houvesse um adulto na casa, fosse chamado para que pudessémos explicar-lhe e ele auxiliasse o aluno com o email e a senha para o cadastro. As crianças que não tinham acompanhamento de um adulto, e que não conseguiram acessar o site, receberam email às famílias para que estas pudessem ajudá-los, porém ressaltamos que apenas três alunos não conseguiram acesso ao site wordwall. Em razão do ensino remoto, eles possuíam um email de acesso às aulas, o qual utilizaram e criaram uma senha. Na sequência, solicitamos que elaborassem um jogo que envolvesse a Matemática, o qual deveria conter questões que abrangessem as três operações básicas: adição, subtração e multiplicação. Poderiam optar por utilizar apenas uma das operações ou todas, se assim preferissem.

Na última etapa, o professor e estagiários ensinaram os alunos a compartilharem o link do jogo na sala de aula para que os colegas da turma pudessem jogar. Obtivemos um total de 67 jogos dos 90 alunos. Fatores como a falta de internet, perda de alguma das aulas, dificuldade em compartilhar o link, influenciaram o proceso, de modo a não obtermos 100% dos jogos esperados. Após a entrega do link do jogo, em todas as aulas subsequentes, a professora colocava cinco links para que os alunos pudessem jogar e, nesse momento, era feita uma reflexão junto ao grupo sobre como o aluno pensou para construir, qual foi a sua ideia, como selecionou as alternativas para as respostas, além de acertos, erros, como melhorar para ficar mais interesante, caso os alunos não considerassem o jogo muito atrativo.

A seguir, apresentamos as questões com suas respectivas respostas de um jogo elaborado por um aluno do quarto ano.

Figura 2. *Aluno A: Questão 1- Coelhos e cenoura.*

Fonte: https://wordwall.net/pt/resource/24899673.

Figura 3. *Aluno A: Questão 2 – Dúzias.*

Fonte. https://wordwall.net/pt/resource/24899673.

Figura 4. *Aluno A: Questão 3 – Subtração..*

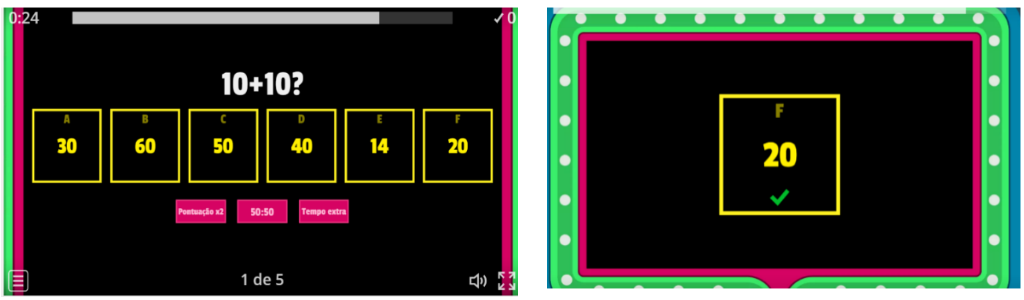
Fonte: https://wordwall.net/pt/resource/24899673.

Observamos que, em acordo com Brosseau, o aluno passou pelas etapas de ação, formulação e validação, ou seja, construiu e entregou um jogo com questões relativas à multiplicação e subtração, conforme solicitado. Observamos que o aluno formulou situações-problema com clareza e objetividade para que fosse jogado pelos seus colegas de turma e validou, apresentando diversas respostas, sendo apenas uma delas a correta.

Destacamos que, na questão 1, o aluno relatou que resolveu utilizando o conceito de multiplicação, “a tabuada”; na questão 2, utilizou a multiplicação por 10, já que não sabia multiplicar 12 x 5, fez 10 x 5 = 50, de acordo com a tabuada do 5 e somou 2+2+ 2+2 +2 = 10, concluindo que a resposta correta era 60. Na questão 3, contou de 31 até 40, obtendo 9 e de 40 a 50, obtendo 10, resultando em R$ 19,00 a mais para Luiza em relação a Dhiego. O aluno apresentou uma escrita clara e condizente com a linguagem matemática de um aluno de quarto ano, além da inserção de figuras adequadas, interpretação da situação que se propôs elaborar e uma boa apreensão das noções matemáticas elementares constatada pelas avaliações e atividades propostas em sala de aula. Atualmente, no modelo presencial de aulas, o aluno segue com uma boa aprendizagem na disciplina, interesse e participação.

Na sequência, apresentamos apenas uma questão com sua respectiva resposta, entre as cinco elaboradas por um aluno do terceiro ano.

Figura 5. *Aluno B. Questão 1.*



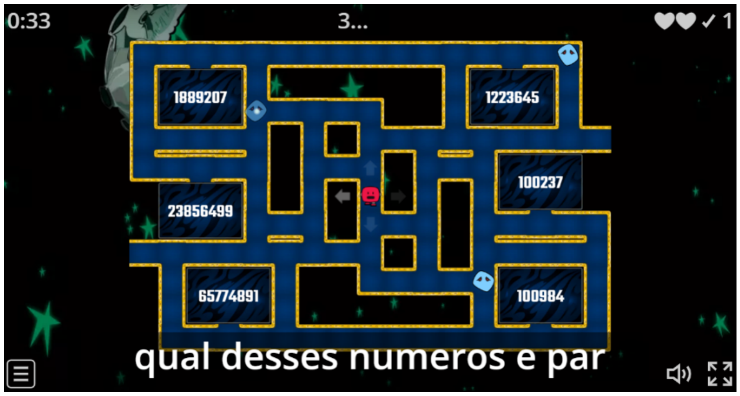
Fonte: https://wordwall.net/pt/resource/28516747.

Observamos que o aluno B apresenta dificuldade na formação de conceitos matemáticos e está em processo de alfabetização, no entanto, apesar dessas limitações, foi capaz de apresentar um jogo de acordo com o solicitado, no tempo de sala de aula, com um total de cinco questões, similares à acima retratada, ou seja, questões que se referem a um algoritmo a ser resolvido.

O aluno utilizou de diferentes operações, sinalizando que está compreendendo e avançando matematicamente. Inferimos que devido às suas dificuldades na leitura e escrita, não foi capaz de apresentar situações-problema, porém corroboramos o pensamento de Grando (2000), quando destaca que o jogo é um facilitador no processo de aprendizagem, à medida que proporciona à criança uma reflexão e análise de seu raciocínio, necessitando ser valorizado no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, especialmente no momento vivenciado pelo ensino.

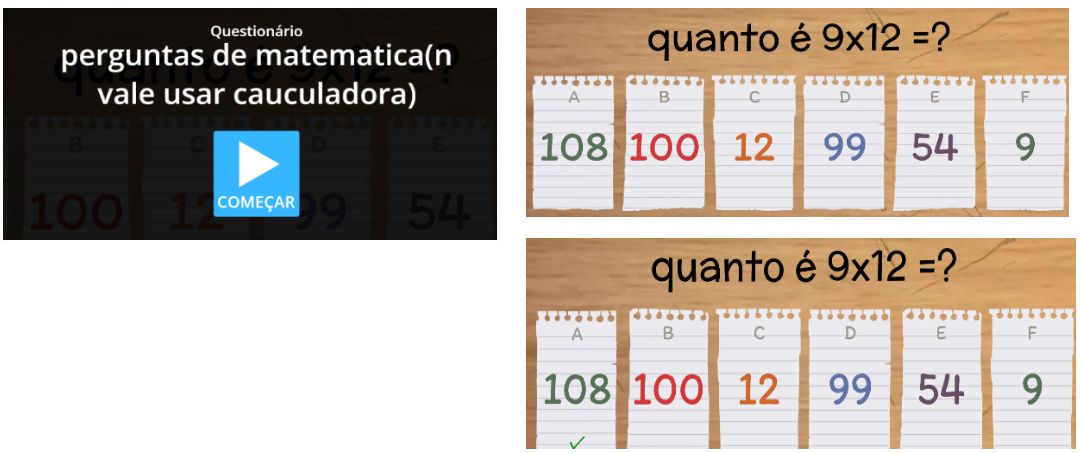
Destacamos, a seguir, algumas questões elaboradas por alguns alunos do terceiro ano, assinalando que se trata de alunos que apresentam uma boa fluência na escrita, leitura e compreensão matemática.

Figura 6. *Aluno C. Par e ímpar.*



Fonte: https://wordwall.net/pt/resource/24836843/matematica-labirinto.

Figura 7. *Aluno D. Multiplicação – questão e resposta.*



Fonte: https://wordwall.net/play/24696/501/212.

Enfatizamos que os alunos C e D conseguiram transitar entre cálculos e questionamentos, brincar com o jogador e apresentar questões mais elaborados, além de trazer à tona outros conteúdos já estudados. No entanto, ao analisarmos as participações dos alunos, pudemos perceber que o jogo ofereceu muitos ganhos para o ensino e a aprendizagem, visto que favoreceu a aprendizagem de todos os alunos, independente de seus pré-requisitos.

Resultados

Levamos para as aulas durante todo o ensino remoto diferentes jogos, utilizando uma mesma linguagem: a matemática, como por exemplo, trabalhamos conteúdos como números: maiores, menores, par, ímpar, leitura; geometria e as quatro operações fundamentais: multiplicação, divisão, soma, subtração.

A ideia era aproximar o aluno da aula, chamá-lo a participar e ao mesmo tempo aprender, além de mostrar aos nossos estudantes que podemos aprender Matemática brincando e nos divertindo. Com isso, obtivemos, durante todo o tempo de aulas remotas, uma média de 90% de alunos participantes em nossas aulas, o que foi muito gratificante e alentador. Os alunos ansiavam pelo momento do jogo que ocorria em todas as aulas.

O uso da estratégia de construção do jogo pelo próprio aluno estimulou a sua participação, a reflexão, e a obtenção de novos conhecimentos, a autonomia de pensamento, o raciocínio e a criatividade.

Ao término, foi possível observar que essa atividade contribuiu de modo significativo para a autonomia de pensamento dos estudantes, pois, ao construir questões e respostas, eles se tornaram protagonistas do seu próprio conhecimento. Outro fator importante foi os alunos perceberem que a Matemática pode ser usada para se divertir e interagir com os colegas, possibilitando a reflexão e o debate, o que também auxilia no respeito durante esse processo. Para os estagiários, foi um momento rico, já que puderam experienciar uma metodologia que pode motivar e melhorar a concentração dos alunos ao tornar a Matemática mais próxima de seus respectivos cotidianos.

Referências bibliográficas

Artigue, M. (1990). Ingénierie Didactique. *Recherches em Didactique des Mathématiques*, vol.9, nº3, p. 281-307. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Brasil. (2018). Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília.

Brousseau, G. (2010). *Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques.* Recuperado em 13 de outubro de 2022 de http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2010/09/Glossaire_V5.pdf

__________. (2008). *Introdução ao Estudo da Teoria das Situações Didáticas*: conteúdos e métodos de ensino. Trad. Camila Bogéa. São Paulo: Ática.

__________. (1986). Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* v. 7, n. 2, p. 33-115.

Dante, L. R. (2017). *Ápis*: matemática, 3º ANO: ensino fundamental, anos iniciais. 3ª ed. São Paulo: Ática.

Grando, R. C. (2000). O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula. 224p. *Tese Doutorado em Educação, Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação*. Campinas, SP. http://www.repositorio.unicamp.br/handle/REPOSIP/251334.

Recursos de Ensino Wordwall. (sf). Recuperado em 14 de outubro de 2022 de https://wordwall.net/pt

Robert, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. *La Pensée Sauvage*, v. 18, n. 2, p. 139-190,

Vygotsky, L.S. (1989). *A formação social da mente*. Martins Fontes: São Paulo, 1989.

ECUACIÓN CUADRÁTICA EN UNA VARIABLE: FUNDAMENTOS Y NOTACIÓN SIMBÓLICA EN EL BACHILLERATO TECNOLÓGICO

THE QUADRATIC EQUATION IN ONE VARIABLE: FUNDAMENTALS AND SYMBOLIC NOTATION IN THE TECHNOLOGICAL HIGH SCHOOL

Ana María Ojeda Salazar, Héctor Santiago Chávez Rivera, Mario Armando Giordano Moreno

Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos No. 4 del Instituto Politécnico Nacional. (México)

amojeda@cinvestav.mx, hchavez@cinvestav.mx, mgiordano@ipn.mx

Resumen:

Por deficiencias identificadas de estudiantes del bachillerato tecnológico que concluyeron su curso de álgebra, se diseñó un hipertexto digital referente a propiedades de los reales, álgebra, la ecuación cuadrática en una variable y equivalencia proposicional. Al final de un curso posterior, previo a dos sesiones de enseñanza de su contenido, 41 estudiantes exploraron el sitio según una hoja de control que planteó 10 preguntas y que fungieron también como guion de actividad en el aula ordinaria, presencial. Investigamos la posible contribución del hipertexto a remontar dificultades de comprensión de los estudiantes de la notación simbólica, de las propiedades algebraicas y de la equivalencia lógica, para propiciar su acercamiento formal al pensamiento algebraico. De las sesiones de aula, con la colaboración del docente y videograbadas, conducidas por el diseñador del hipertexto e investigador, el buen potencial semiótico del instrumento promovió la lectura del lenguaje simbólico, identificar propiedades algebraicas y activar procesos cognitivos que exige del usuario.

Palabras clave: pensamiento algebraico; ecuación cuadrática; medio superior

Abstract:

Due to identified deficiencies of technological high school students who completed their algebra course, a website structured as a hypertext was designed, referring to properties of real numbers, algebra, the quadratic equation in one variable and propositional equivalence. At the end of a subsequent course, prior to two teaching sessions of its content, 41 students explored the site according to a control sheet that posed 10 questions and that also served as an activity script in the ordinary face-to-face classroom. We investigate the possible contribution of the hypertext to overcoming students' understanding difficulties of symbolic notation, algebraic properties and logical equivalence, to promote their formal approach to algebraic thinking. From the classroom sessions, with the collaboration of the teacher, and being videotaped and conducted by the hypertext designer and researcher, the good semiotic potential of the instrument promoted reading of symbolic language, identifying algebraic properties and activating cognitive processes required of the user.

Keywords: algebraic thinking; quadratic equation; high school

Introducción

En el marco de un convenio interinstitucional entre un bachillerato tecnológico y un centro de investigación, para conjugar docencia e investigación en matemática educativa, al finalizar el curso "Álgebra" del primer semestre, un grupo de estudiantes con buen desempeño en general contestó un cuestionario con seis preguntas abiertas. Se les pidió reconocer la notación simbólica común y la equivalencia lógica, las propiedades de los números reales y sus operaciones: idénticos e inversos aditivo y multiplicativo, orden, valor absoluto, inecuación de primer grado, ecuación de segundo grado y su solución. En coincidencia con lo que señalan otros autores (como Esty y Teppo, 1994), las respuestas de los estudiantes mostraron su reconocimiento operativo, pero no de las propiedades algebraicas; un acercamiento vago a la equivalencia, pero no a la equivalencia lógica; confusión entre exponente y coeficiente e imprecisiones en la lectura de la notación simbólica.

Debido a estas deficiencias y a la necesidad de iniciar a los jóvenes de bachillerato en los fundamentos de las matemáticas, al final de la unidad de aprendizaje "Álgebra" (DEMS, 2008) para la siguiente generación, se propuso a un grupo un hipertexto digital acerca de la notación y los fundamentos del pensamiento algebraico, referido a la ecuación cuadrática en una variable (https://matedu.cinvestav.mx/~cognicion/ecuadratica/index.html). El investigador (**I**) diseñó el hipertexto, con el fin de investigar su posible contribución a que los estudiantes (**$E_{\#}$**'s) utilizaran la notación matemática, que aplicaran las propiedades básicas de los números reales y de sus operaciones para establecer proposiciones equivalentes como base del método lógico deductivo de las matemáticas, y que advirtieran este último para determinar la solución general de la ecuación cuadrática en una variable.

Planteamos la pregunta: ¿la exploración del hipertexto por los estudiantes y la revisión de su contenido en el aula, guiada por I, contribuyen a que ellos reconozcan la equivalencia lógica y las propiedades de los números reales en el caso de la ecuación cuadrática en una variable?

Elementos teóricos

Un acercamiento formal a las matemáticas las considera como un sistema formal, o sea: un conjunto finito de símbolos primitivos (el alfabeto o vocabulario); un conjunto de reglas para combinarlos; un conjunto de axiomas; un sistema de reglas de inferencia; y una interpretación formal. La forma de una expresión matemática es una notación que representa sus entidades (los elementos, las operaciones) y sus relaciones, según la estructura a la que corresponden las representadas. Tal estructura se fundamenta en los axiomas respectivos y en los aspectos básicos sobre los que se erige.

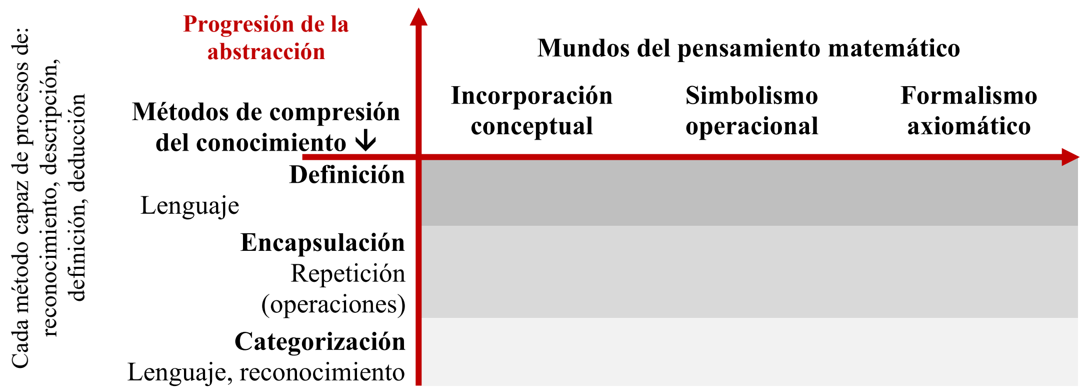
Diversos autores han señalado que el simbolismo funciona sólo cuando se interpreta su estructura (por ejemplo, Ricœur, 1995). En su estudio con estudiantes de 16 a 17 años, Hoch y Dreyfus (2004) definen el sentido de la estructura en álgebra como la capacidad de:

> ver una expresión u oración algebraica como una entidad, reconocer una expresión u oración algebraica como una estructura previamente encontrada, dividir una entidad en subestructuras, reconocer conexiones mutuas entre estructuras, reconocer qué manipulaciones es posible realizar y reconocer qué manipulaciones es útil realizar. (p. 51)

Evolución del pensamiento matemático

Tall (2013) formula cómo se aprende a pensar matemáticamente; propone tres mundos del pensamiento matemático por la abstracción lograda en la fundamentación, estructura y generalización del conocimiento matemático: la *incorporación conceptual*, el *simbolismo operacional* y el *formalismo axiomático*. Considera que esa evolución se logra por el empleo en cada mundo de métodos de *compresión* progresiva del conocimiento: la *categorización*, la *encapsulación* de procesos y la *definición*. A su vez, por nuestras capacidades naturales, en cada uno de estos métodos se ponen en juego los procesos de *reconocimiento*, *descripción*, *definición* y *deducción*. El *lenguaje*, otra capacidad nuestra natural, tiene un papel importante en los métodos de categorización y de definición. El método de encapsulación es principalmente operacional; por nuestra capacidad de *repetición*, también natural, los procesos efectuados se encapsulan, es decir, se reconstruyen, reorganizan y dan lugar a la ambigüedad entre concepto y proceso, o *procepto*, como lo denomina el autor, con lo que resulta un nivel de abstracción superior. La Figura 1 esquematiza esta descripción.

Figura 1. *Evolución del pensamiento matemático interpretada de la descripción de Tall (2013).*



Fuente: Tall (2013).

Lenguaje

Österholm (2006) ha señalado la dificultad adicional que reviste para los estudiantes de bachillerato y de universidad comprender contenidos matemáticos presentados con simbología matemática, en comparación con los presentados en lengua natural. Por ello ha puesto de relieve el descuido ordinario de la lectura de textos matemáticos en la enseñanza, en lugar de considerarla como una actividad para aprender matemáticas. Aunque la lectura y la escritura son importantes, sobre todo en bachillerato y universidad, son prácticas que se dan por sentadas en la enseñanza de matemáticas, en la que es común enfocar la atención en actividades como la operatividad y la resolución de problemas.

La mediación instrumental

Como muestran Mariotti y Maffia (2018) con un artefacto físico, no digital, la mediación instrumental en la enseñanza con tareas fundadas en el uso de artefactos culturales promueve la construcción de significados matemáticos. Según Mariotti (2013), para los expertos, “el uso de un artefacto puede evocar un conocimiento específico” (p. 442). La autora denomina *potencial semiótico* de un artefacto a “la relación doble al usarlo, por un lado, un individuo para realizar una tarea y los significados que él asigna y, por otro lado, el conocimiento que el experto evoca por ese uso y que reconoce como matemáticas” (p. 442). Añade que, en el caso de nuevas tecnologías, el diseñador del artefacto puede proporcionar un primer acercamiento a su uso en la enseñanza y explorar su potencial semiótico para la adquisición de conceptos. Según Drijvers, Doorman, Boon y van Gisbergen (2010), para que ese uso en el aula derive en *génesis instrumental*, o construcción de significados matemáticos por los estudiantes, es necesaria la guía del docente.

Método

Por el objetivo de esta investigación, **I** (investigador) diseñó el hipertexto (digital) “Ecuación Cuadrática” (Chávez, Garnica y Ojeda, 2018) como texto de estudio y de consulta, accesible en computadoras y celulares, así como soporte de la enseñanza para introducir los fundamentos del álgebra y su notación. Se le alojó en el servidor de la institución de investigación participante en el convenio. Durante dos sesiones, S_1 y tres días después S_2, de aula ordinaria presencial, **I** y **D**, este último docente titular y también investigador, desarrollaron una experienciación (Maturana y Varela, 1994) de la enseñanza del contenido del hipertexto a un grupo 41 estudiantes al finalizar su curso "Álgebra". El fin de las sesiones, S_1 de 50 min y S_2 de 100 min de duración, fue valorar el potencial semiótico del hipertexto para la enseñanza. S_1 y S_2 fueron videograbadas por **D** y se les transcribió para su análisis.

Configuración didáctica e instrumentos

El hipertexto se estructuró en cuatro páginas (**P$_i$**), cada una con sus ***vínculos***. La Tabla 1 presenta la estructura y el contenido del hipertexto.

Tabla 1. *Estructura y contenido del hipertexto "Ecuación Cuadrática".*

P$_1$: Inicio Definición y dos ejemplos	**P$_2$: Ecuación y solución** Definición, ejemplo e identidad	**P$_3$: Aspectos básicos** Especificación y cuatro ejemplos	**P$_4$: Ecuación cuadrática** Definición y forma. Parámetros y variables
Términos propios de una ecuación (página wiki)	***Ecuaciones relevantes***	***Notación-Propiedades*** Notación y seis propiedades de exponenciación, valor absoluto e idéntico aditivo de los números reales	***Ecuaciones Cuadráticas Equivalentes*** Aplicación de propiedades de los reales a enunciados para identificar su equivalencia
Importancia de las ecuaciones (vínculo y extracto de la obra Stewart, 2013)	***Ejercicios*** (cinco); solución e identidad: multiplicación por 0.	***Enunciados Equivalentes*** Definición de equivalencia lógica de dos enunciados aplicada a la ecuación cuadrática	***Método General*** Equivalencia de enunciados para identificar al discriminante como resultado de las propiedades básicas de los reales.
	Problemas (cuatro): solución posible y solución no posible; identidad y no identidad; variación	***Tarea*** (cinco ejercicios): enunciados equivalentes	***Ejercicios*** (cuatro): solución de una ecuación, ecuaciones equivalentes, método general, variación
	1 ⇒ Identidad (video): notación; inverso multipli.		

Fuente: Chávez, H. S. *et al*. (2018).

El día anterior a S_1, **D** asignó la tarea de explorar el hipertexto y contestar por escrito las preguntas planteadas en la hoja de control (HC). La Tabla 2 resume la relación entre las preguntas en HC y las páginas del hipertexto.

Condiciones de aula y modo de explotación: instrumentos adicionales

Las limitaciones de conectividad a internet de la sede del bachillerato no posibilitaron el uso del hipertexto en el aula. Por ello, para cada sesión de enseñanza se preparó una *hoja de control* (HC_1, HC_2) adicional, en la que se reprodujo de manera secuencial el contenido del hipertexto; es decir, según la Tabla 1, de izquierda a derecha, el contenido completo de cada columna seguido por el de la columna siguiente, así hasta agotar el contenido de la cuarta columna.

Tabla 2. *Correspondencia de reactivos en HC para la exploración del hipertexto.*

	Reactivos Páginas	**P_1**	**P_2**	**P_3**	**P_4**
1.	Brevemente, describe el concepto de ecuación y la importancia de las ecuaciones.	ü	ü		
2.	Investiga el significado de: a) simplificar; b) término; c) número primo; y d) solución de una ecuación.	ü	ü		
3.	Describe lo relevante de la actividad mostrada en el video “*1 ⟹ Identidad*”.		ü		
4.	¿Qué forma tiene una ecuación cuadrática?				ü
5.	¿Qué método se usa para obtener la expresión general que determina las soluciones de la ecuación cuadrática?				ü
6.	¿Qué tan necesarios son los resultados mostrados en *Aspectos Básicos*?		ü	ü	ü
7.	De toda la notación, ¿de cuál no se especificó su significado? Describe ejemplos de notación.			ü	ü
8.	¿Cuál es la pregunta dada al final de *Método General*? ¿Por qué se plantea?				ü
9.	¿Alguna de las 17 ecuaciones descritas en el video “Ecuaciones relevantes” es una ecuación cuadrática? ¿Por qué?		ü		ü
10.	¿Qué cambios se harían al *ensayo** del libro “17 ecuaciones que cambiaron al mundo”?		ü		

Fuente: elaboración propia.

Para cada sesión se consideró el contenido suficiente para el tiempo disponible, pero se le revisaría completamente al cabo de las dos sesiones. **I** y **D** previeron usar el *pizarrón* para, con ejemplos adicionales a los presentados en el hipertexto, clarificar dudas y corregir errores que se fueran identificando en las respuestas de los estudiantes. Mediante preguntas, **I** promovería la participación de los estudiantes, primero con preguntas generales acerca del tema del hipertexto y luego con las planteadas en (HC), para identificar lo que ellos hubieran reconocido en su exploración. **I** condujo las dos sesiones a lo largo del contenido del hipertexto, reproducido en HC_1 y en HC_2.

Criterios de análisis

Identificamos trayectorias de enseñanza, que Garnica, Chávez y Ojeda (2017) definen como unidades de contenido matemático diseñadas en secuencias, con el propósito de comunicarlo a los estudiantes. Esas unidades son: notación, definición, identidad, equivalencia lógica y propiedades, si bien están interrelacionadas. A partir de sus intervenciones, identificamos la correspondencia respectiva con los procesos, métodos de compresión del conocimiento y mundo de pensamiento matemático en el que se ubicaría el desempeño general de los estudiantes. Aclaramos que distinguimos entre dos sentidos de “definición”: uno, como parte de la semántica en el sistema formal de las matemáticas; otro, como proceso del pensamiento.

Desempeño didáctico y resultados

A lo largo de las dos sesiones, **I** fue recuperando las preguntas en HC y los estudiantes recurrieron a sus respuestas a la tarea anotadas en sus cuadernos para contestarle a **I**. Los 4 min iniciales de la sesión S_1 se dedicaron a reconocer la estructura general del hipertexto (véase la Tabla 1). Luego de ese tiempo, se proporcionó a los estudiantes la hoja de control HC_1 para que dispusieran de una guía puntual del hipertexto. Al inicio de la sesión S_2 se distribuyó la hoja de control HC_2, correspondiente a la reproducción en secuencia del contenido de los vínculos del hipertexto que no se alcanzaron a revisar en S_1.

En la enseñanza, aunque al referirse al contenido de cada página del hipertexto **I** planteó preguntas que los estudiantes respondieron con sus contestaciones a HC, en el curso de las dos sesiones sus dificultades emergieron y se fueron remontando, porque **I** propició que se expresaran y los guio por los contenidos de interés. Para cada página y cada vínculo promovió la lectura del lenguaje simbólico presentado en el hipertexto y la expresión de dudas.

Según la propuesta de Tall (2013), en general se identificaron indicios de *categorización* para el mundo de incorporación conceptual con procesos de reconocimiento y de lenguaje. Algunos estudiantes (**$E_{\#}$**) dieron indicios de esos procesos en el mundo del *simbolismo operacional*, como *proceptos* (véase la Figura 1), aunque no de forma consistente.

En los episodios de las sesiones, transcritos y seleccionados como ejemplos de nuestras observaciones, **I** denota al conductor de la enseñanza, **D** al docente titular del grupo, **$E_{\#}$** al estudiante particular, **E’s** a varios estudiantes y **$E_?$** al que intervino fuera de cuadro. Con **P_i** nos referimos a las distintas páginas del hipertexto. Los datos adicionales a lo verbalizado en las interacciones, como las ostensiones y los referentes, los indicamos entre paréntesis rectangular. Registramos de corrido el tiempo (h:min:s) de enseñanza en las dos sesiones.

Notación

En distintos episodios **I** hizo énfasis en la escritura y lectura de la notación simbólica. Por ejemplo, para la página P_3, resaltó al cuantificador universal ("), al símbolo conjuntista de pertenencia (∈) y a los números reales (ℝ):

00:14:36	I	[Anota en el pizarrón] Esto **se lee** de la siguiente manera: [lee] “**para todo** x, y que pertenecen a los números reales… **para todo** x, y en R.”

I también destacó en distintas ocasiones la *forma* de la notación de entidades y de sus relaciones, de acuerdo con su estructura, lo que Bruner (1986) ha señalado como el primer paso en la formación de conceptos. Por ejemplo, en S_1, para la página P_4 (véase en la Tabla 1) del hipertexto, uno de los episodios fue el siguiente:

00:43:24	E_1	[Lee en HC] “¿Qué **forma** tiene una ecuación cuadrática?”
00:43:27	I	¿Qué **forma** tiene? [Repite la pregunta a E_1] ¿Qué forma tiene?
00:43:33	E_1,E_7	[Le van dictando a I, que anota en el pizarrón] a x cuadrada más b x más c es igual a 0.

00:43:49	I	¿Cuántos términos **al menos** debe tener una ecuación cuadrática?
00:43:55	E’s	[Al tiempo] ¡Tres!
00:43:56	I	[Expresa (gesto) de extrañeza].
00:43:57	E_7	¡Cuatro!, cuatro al contar el 0.
00:44:02	I	[Se vuelve al pizarrón y anota $ax^2 = 0$] ¿Ésta no sería una ecuación cuadrática?
00:44:08	E_6	Sí sería una ecuación **cuadrática** porque **tiene el término al cuadrado**…
00:45:08	I	[…] Este… ¿qué valor **no se permite** para a?
00:45:14	E_{13}	Cero.

En S_2, un episodio mostró la dificultad de distinguir entre parámetro y variable:

00:48:40	I	La pregunta es: ¿qué diferencia hay entre, por ejemplo, la a y la x? [señala las literales respectivas en la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ anotada en el pizarrón].
00:48:55	E_2	Que a puede ser un **valor cualquiera** y x es un **valor específico**.
00:49:04	I	A ver [se voltea hacia el pizarrón], repítelo.
00:49:08	E_2	Que a es el término de la ecuación, **qué número determina la ecuación** y x es el… ¿la incógnita?
00:49:50	I	¿Qué valor puede recibir aquí…?, voy a cambiar [anota el polinomio ax^3 en el pizarrón]. ¿Qué valor puede recibir la x?
00:49:55	$E_?$	Bueno, cualquier valor que… cualquier.
00:50:00	I	¿Cualquier?
00:50:01	$E_?$	Cualquier.
00:50:02	E_8	¡¡No, no, no!, pues **un valor que satisfaga la ecuación**.
00:50:04	I	¡Aquí, aquí! [Insiste y señala al polinomio que acaba de anotar, no a la ecuación].
00:50:08	E_8	Sí, ahí. Igual.
00:50:09	I	¿Y éste? [Señala la a].
00:50:10	$E_?$	**Igual**.
00:50:11	I	Pero ¿cuál es la diferencia?
00:51:24	I	[…] La diferencia es que ésta [señala a la x] **se conoce** como **variable**, y ésta como **parámetro** [señala a la a]. Un

		parámetro es una variable, pero una vez que se le da un valor a esta literal, queda **fijo**, ¿sí? ¿Sí están de acuerdo?

El reconocimiento del inverso aditivo se dificultó en S_2 al cambiar el nombre de una categoría aún en formación, como sustituir el término "solución" por el de "raíz" de una ecuación:

1:39:26	I	A ver, ¿quién me dice las **raíces** de esa ecuación? [Se refiere a la expresión anotada en el pizarrón $z^3 - z^2 - 34 \cdot z - 56 = (z+2)(z+4)(z-7) = 0$].
1:40:03	I	¿Qué número tendría que poner aquí para que esto dé cero?
1:40:06	E_1	¿Dos?
1:40:10	E_{17}	¡Menos 2!
1:40:12	I	¡Menos 2!, ¿no?
1:40:14	I	¿Otra raíz?
1:40:15	E's	¡Menos 4!
1:40:17	I	¿Otra raíz?
1:40:18	E's	¡El 7!
1:40:20	I	¡Entonces son raíces!, ¿no?
1:40:32	E_{16}	¡No entiendo!
1:40:34	I	¿Mande?
1:40:36	E_{22}	No entiende.
1:40:38	E_{16}	O sea, ¿por qué ocuparon… jajaja, ya me dio pena, jiiji… **raíces**?

Estos episodios de enseñanza atañen al rol del proceso de *lenguaje* en los métodos de compresión del conocimiento de *categorización* y *definición* (véase la Figura 1).

Definición

I recuperó conocimientos ya adquiridos (*set before*) por los estudiantes para tratar aspectos básicos de los números reales. Por ejemplo, respecto al reactivo 2c) en HC (véase en la Tabla 2):

00:42:15	I	Bueno, número primo [consulta en HC], pues ya saben… ¿Qué es un número primo?
00:42:18	E_7	Son aquellos números que no se pueden dividir entre otros. Se dividen entre ellos y con uno, pero no se dividen entre otros.

I también recurrió al axioma de orden para definir intervalo abierto, incluido en P_3 $(x \in (a, b))$:

00:15:18	I	¿Esto **qué significa**? [escribe en el pizarrón (a, b)] ¿Quién es a, b? ¿Esto [señala a lo escrito en el pizarrón] qué representará?
00:17:05	I	[…] Pero en este caso me están diciendo [en P_3] que es un **conjunto**, y este conjunto se llama “**intervalo abierto**”, ¿sí? Y esto **significa** que la x **es mayor que** a **y menor que** b. [Escribe en el pizarrón a < x < b].
00:17:57	I	En el caso del intervalo abierto, los extre… éstos [los señala] son los **extremos del intervalo**, no se tocan, ¿sí?

En S_1, la convencionalidad de denotar los conjuntos de números, citados en P_3, con la inicial de su nombre, se remontó al atender a la *forma* de la expresión simbólica de su definición:

00:9:32	I	¿Qué me representan esa $\mathbb{N}$, esa $\mathbb{I}$ y esa $\mathbb{R}$, …?
00:9:38	E_2	[Inentendible] reales.
00:9:41	I	La erre de los números reales; ¿la $\mathbb{I}$?
00:9:44	$E_?$	¡Imaginarios!
00:9:54	E_1	¡Irracionales!
00:9:56	I	Los números irracionales. ¿Y la $\mathbb{N}$?
00:9:58	E’s	Naturales.
00:11:13	I	[…] Pero éste [señala en el pizarrón a $\mathbb{Q}$], ¿quién es este **conjunto**?
00:11:23	I	¿No? Lo voy a escribir, a ver si lo identifican [anota lo que va diciendo] Q [$\mathbb{Q}$] es el conjunto de los elementos que son de esta **forma**, tal que a coma b están en éste [señala a $\mathbb{Z}$ en: $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b}\middle\vert a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0\right\}$].
00:11:38	I	A ver si identifican éste… y éste de aquí, b… ¿quién es este **conjunto**? [vuelve a señalar a $\mathbb{Z}$].
00:11:56	E_{12}	¡Enteros!
00:12:08	I	Y entonces, ¿quiénes… cómo se llaman éstos? [señala a $\mathbb{Q}$].
00:12:10	E_{12}	¡Racionales!
…	…	…
00:13:21	I	Fíjate, ¿dónde tiene que estar a? [la señala en: $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b}\middle\vert a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0\right\}$].
00:13:30	E_7	En $\mathbb{Z}$.
00:13:33	I	¿Y b?
00:13:34	E_6	También.

00:13:35	I	También, ¡pero **no puede ser cero!** [lo señala en $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \middle\| a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0\right\}$].
00:13:53	I	[…] [Asiente a la observación de E_3] Por eso se llama **racional**, de **razón** [coloca su mano derecha arriba de la izquierda, para indicar numerador y denominador].

Este episodio, al igual que para la trayectoria de enseñanza anterior, atañe a los métodos de compresión del conocimiento de *categorización* y de *definición*, en los que el proceso de *lenguaje* es primordial (véase la Figura 1).

Para el vínculo *Notación-Propiedades* de P_3 (véase la Tabla 1), de particular interés fue un episodio de S_2 relativo a la expresión simbólica $|x| = \begin{cases} x & si\ \ x \geq 0 \\ -x & si\ \ x < 0 \end{cases}$ del valor absoluto de un número, que **I** presentó en el pizarrón y la aplicó con los estudiantes a un valor negativo de x **antes de** proponerles aplicarla a $|x^2–5|$, que también anotó. Para esta última, la interacción reveló la dificultad de los estudiantes en diferenciar entre una "condición", explícita con la conjunción "si" en la definición, y la "suposición" de que se cumpla esa condición:

1:13:53	I	Una pregunta. Ya que estamos en esto [anota un ejemplo en el pizarrón]. ¿A qué sería igual eso?
1:14:10	E_3	¿Menos x cuadrada más 5?
1:14:19	I	¿Por qué? Dime, ¿qué estás **suponiendo**?
1:14:24	E_3	[No responde].
1:14:27	I	Él me dijo lo siguiente: esto es igual… o sea, su valor… el… el valor absoluto de esto va a ser igual a [repite lo que dijo E_3 y anota en el pizarrón] "menos x cuadrada más 5". Yo le pregunté que qué es lo que está **suponiendo** él.
1:14:48	E_1	Está multiplicando, ¿no? [se refiere a qué operación habría realizado E_3 en lugar de qué fue lo que supuso].
1:14:50	I	¿Por qué?
1:14:51	E_1	[Persiste en su interpretación operativa de la pregunta de I] Porque si dice que es x cuadrada más 5, eso nada más… este… es… ah… menos, por menos, es más. Entonces, ya queda el x… queda el x cuadrada y, me imagino, que sería más 5, sería más por menos, menos…

A la intervención de E_1 siguieron otras en las que privó la interpretación operativa de la pregunta de **I**, al inadvertir que *suponer* una *condición* implica considerarla verdadera y luego sujetar a ella un razonamiento u operar. Así ocurrió hasta que **I** lo hizo explícito:

1:15:55	I	De hecho, cuando tenemos un… un… una ecuación, o algo así, **para** poder **operar** con ella, lo que tenemos que hacer es **quitar las barras**.
1:16:06	I	Pero si es este tipo de cosas, para poderlo hacer tenemos que **suponer** [hace énfasis y se dirige a E_3] y en este caso va a haber

		siempre dos opciones: o es **positivo**, o es **negativo**. ¿De acuerdo?
1:16:22	I	Es lo que tú hiciste, **supusiste** que era **negativo**. No consciente, pero lo **supusiste**. ¿Están de acuerdo? [se voltea hacia el pizarrón].
1:16:29	E_3	¿Entonces estoy bien?
1:16:30	I	¿Mande?
1:16:31	E_3	¿Sí lo dije bien?
1:16:32	I	¡Sí! Él multiplicó por –1, pero **supuso** que era negativo. ¿Mhum?

No parece que para E_3 haya quedado claro que aplicar la definición del valor absoluto primero requiere suponer que se satisface cada condición, luego determinar los valores respectivos y revisar si cada uno de ellos es o no posible de acuerdo con el dominio de la variable.

Identidad

Aunque **I** revisó en S_1 el contenido de P_2 (véase la Tabla 1), en S_2 tuvo que subrayar el dominio de definición de la variable de una ecuación para determinar si al sustituir en ella los valores con los que se obtiene una identidad (0 = 0) son soluciones posibles:

00:44:41	I	[En el ejemplo $ax^2 = 0$ en el pizarrón] ¿Cuánto tendría que **valer** x?
00:44:44	E_7	Cero.
00:44:45	I	¡Cero!, ¿verdad? Porque 0 por a [el coeficiente en la forma general de la ecuación] me da 0 [señala al pizarrón]. Entonces obtengo una… **identidad**, ¿no? [anota en el pizarrón 0 = 0].
1:54:26	I	[…] ¡Vamos a llevarlo a… cuando ustedes resuelven una ecuación, en este caso cuadrática o lineal, obtienen dos valores, ¿sí? O, en el caso de una lineal, un solo valor.
1:54:42	I	Y cuando lo llevan y lo sustituyen, ¿qué obtienen?
1:54:46	E_8	Cero.
1:54:47	I	¿Por qué cero? O… obtienen una **identidad**, ¿no? Cero igual a cero, ¿sí?
1:54:54	I	**Significa** que [el sustituto] **es** un **valor posible**.
1:54:59	I	Pero aquí [se refiere a: "$u = w^2 - 2w - 3$, w varía entre 3 y 9. $u = -3$ **no es** un valor posible" en el vínculo ***Problemas*** de **P_2**], ¡les dice que **no es posible**! ¿Qué es lo que está pasando ahí? ¿Qué significaría **no posible**?
1:55:07	E_1	Pues… que no… que no **dependa**, que **no dé cero**, o que no dé [inentendible]
1:55:14	I	Que no va a un… o que ¡no cubre con las condiciones del problema!, ¿de acuerdo?
1:55:19	E_8	¡Ah, ya, ya, ya!

Equivalencia lógica

A partir de la definición del conectivo de doble implicación (si y sólo si), el vínculo de *Enunciados equivalentes* de la página P_3 muestra la equivalencia lógica entre distintas formas de la ecuación cuadrática por la aplicación de los axiomas de los números reales. Aunque los estudiantes mostraron un uso apropiado del término "equivalente", no lograron explicar en qué consistía. Por ejemplo, en S_1, respecto al reactivo 2 en HC de investigar el significado de simplificar (véase la Tabla 2), se manifestó el conocimiento particular adquirido (*set before*) de simplificación de cantidades numéricas:

00:29:26	E_6	[Simplificar] Es convertir una expresión matemática en una más simple, pero **equivalente**… a otra.
00:29:57	I	Ahora sí, obtener una más simple y **equivalente** a la primera, pero ¿qué significa más simple?
00:30:24	I	¿Cómo la hacemos más simple? O sea, porque eso de más simple no sabemos a dónde vamos a llegar, ¿no? (…) ¿hasta dónde vamos a parar ese proceso?
00:30:51	E_7	¡Hasta que haya números primos!
00:30:56	I	En el caso de… si tenemos números, hasta que haya números primos, o sea, que ya no haya manera de simpl… Bueno. ¿Qué usamos para simplificar una expresión?
00:31:07	E_7	Colocaciones, agrupaciones…

Aunque ya era el final del curso de "Álgebra", en S_1 los estudiantes parecieron inadvertir que la consecución de igualdades en los procedimientos algebraicos se deriva de la aplicación de los axiomas de los números reales, o el rol sintáctico de los paréntesis, como han señalado Hoch y Dreyfus (2004); o el significado del exponente en las expresiones del inverso multiplicativo, $\frac{1}{x}$, x^{-1}, $\left(\frac{1}{x}\right)$, (x^{-1}), en el vínculo *1⇒Identidad* de P_2 (véase la Tabla 2):

00:20:52	I	¿Por qué dos **enunciados** son **equivalentes**? ¿Por qué se define ahí?
00:21:54	E_1	[…] nos decía [en la página P_2] que hay diferentes aspectos que hacen que un enunciado sea equivalente ya sea … que los valores sean iguales, o que tengan cuadrado, también puede ser que **otra característica** del **inverso multiplicativo** es que tenga **paréntesis** y que tenga la… **el valor aumentado** a ¿1?, ¿o a **menos 1**?... para poder… como saber si es un **inverso** [inentendible] características.

La *descripción* de E_1 de proposiciones equivalentes con el inverso multiplicativo indica que su método de *categorización* lo ubica aún en el mundo de *incorporación conceptual*. Varias respuestas de los estudiantes indicaron para ese mundo el método de compresión por *encapsulación*. Por ejemplo, en S_2, para la solución de la ecuación cuadrática en P_4 (véase el reactivo 5 en la Tabla 2), E_7 citó al instante incorrectamente su fórmula general, sin que **I** atendiera a la incorrección porque su objetivo era que los jóvenes identificaran el papel de la equivalencia lógica en lugar de aplicar la regla de "completar el binomio cuadrado perfecto":

00:56:21	I	Vamos a pasar al número 5 [en HC], que dice [lee] "¿Qué método se usa para obtener la **expresión general** que determina la solución de la ecuación cuadrática?"
00:56:32	E_7	X es igual a menos b **cuadrada** [incorrecto] más menos la raíz cuadrada de b cuadrada menos 4 ac sobre 2a. Ésa es una fórmula, la fórmula general.
00:56:46	I	Ésa es una fórmula general, pero **no es el método**.
00:58:31	I	[…] Y entonces, si se fijan, en el ejemplo [HC_2] digo que Q y P son dos enunciados; de hecho, son dos expresiones, son dos ecuaciones. Y digo que esas son equivalentes y hago todo el procedimiento que está ahí.
00:58:46	I	O sea, ¿qué es lo que tengo que hacer? Tengo que ver que P es consecuencia de Q y que Q es consecuencia de P. ¿Sí?
00:58:55	I	O sea, ése es el método que se usó en ese lugar, en el sitio de ecuación cuadrática.

No es claro que los estudiantes hayan advertido en qué consiste la equivalencia lógica para la consecución de identidades basadas en las propiedades de los reales. De forma vaga calificaron de "equivalente" una expresión algebraica que puede substituir a otra porque posee las mismas características o significado.

Propiedades

En distintos episodios se pusieron en juego las propiedades de los reales y de sus distintos tipos de números. Por ejemplo, la definición de conjunto cerrado introducida en S_1 se aprovechó en S_2 para revisar en P_3 y en P_2 las propiedades de los distintos tipos de números reales:

00:42:15	I	Eso de que, por ejemplo, que dados dos números y que su suma caiga… que sea otro número, se dice que los conjuntos de números son **cerrados**, ¿sí?
1:02:02	I	[…] O sea que, **si yo sumo dos números, obtengo un número que pertenece al conjunto**, ¿sí? Por ejemplo, si tenemos dos naturales y sumo los naturales, obtengo un natural. Si agarro **dos enteros y sumo, obtengo entero**. Y **si dos racionales, obtengo racional**, ¿sí?
1:02:28	I	No pasa así… pero, por ejemplo, ¿yo podría hablar de la **división** en el conjunto de los números naturales?
1:48:55	I	[…] ¿Cuándo **un producto** es cero? [en el vínculo *Ejercicios* de P_2: $(w-9)(w-13)=0$].
1:49:12	E_{19}	Cuando se **multiplica** por cero. [Como si sólo parafraseara la pregunta].
1:49:17	I	¿De qué otra manera me podrías decir eso? [Intenta que precise su respuesta]
1:49:29	E_{19}	Cuando a un número positivo le **sumas un** número negativo…

1:49:36	I	Bueno. **Retoma** lo primero que me dijiste. O sea, aquí tengo un **producto** que es cero [denotó cada factor por a y b, respectivamente]. ¿Cómo puedo asegurar que es cero ese producto? ¿Qué puedo decir de a y qué puedo decir de b?
1:49:37	E_{19}	Que uno de esos es cero.
1:49:51	I	Que uno de esos fact… es **factor**, este… ¡Que uno de éstos es cero, o ambos son cero!
1:50:18	E_3	[Pide la palabra y pregunta] Pero, bueno, no sé si esté bien, si no… ¡no pueden ser los dos!, o este… ¿tendría que ser **la misma letra**, tendría que ser arriba?
1:50:25	I	Pues igual le puedo hacer, pero obtengo cero.
1:50:29	E_3	Ah, sí, pero yo creo que los factores tienen que ser los mismos para que sean los mismos números.

Con sus dos últimas intervenciones, E_3 expresó su dificultad en conciliar las ideas de orden (ley de la tricotomía de los números reales) y de variación, al asignar dos valores distintos (9 y 13) a la misma representante de la variable (w) y aceptar lo que **I** señaló: que "uno **o ambos** son cero". También respecto a P_2, al factorizar $a^2 + a$, los estudiantes *reconocieron* expresiones equivalentes a ella. Con la lectura de *definiciones* de conceptos se les propusieron ejemplos, como el de raíz de una ecuación; se distinguió entre parámetro y variable en la ecuación cuadrática y se diferenció entre método y regla, que concierne al proceso de *deducción*.

Conclusión

Distintos episodios de la experienciación indicaron, en acuerdo con Hoch y Dreyfus (2004), Österholm (2006) y Planas (2021), que la enseñanza de las matemáticas debe atender al lenguaje para el aprendizaje de contenidos matemáticos precisos, no sólo para la lectura, sino para la expresión oral referida a ellos, al parafraseo con distintos tipos de expresiones simbólicas de las entidades matemáticas, de sus relaciones y hacerlas explícitas. Especificar cada uno de los términos o nombres para referirse a las entidades matemáticas es crucial para iniciar su *categorización* (Tall, 2013) y, por su *repetición* (uso) en distintas instancias, promover su *reconocimiento* (Figura 1). Esto es de particular importancia para preparar una iniciación en la formalización de las matemáticas. La experienciación de la enseñanza en el aula referida al hipertexto y a su contenido indicó que el desempeño de los estudiantes se ubicaba, en general, en el mundo de incorporación conceptual (Tall, 2013). Subrayó la necesidad de que los estudiantes identifiquen, describan y expresen de forma explícita las propiedades de los números reales y la equivalencia lógica al solucionar ecuaciones de segundo grado, para iniciarlos en el razonamiento matemático más allá de sólo el procedimental. Aun y cuando la exploración previa del hipertexto por los jóvenes fue útil para tratar su contenido en el aula, fue insuficiente para dar lugar a una *génesis instrumental* (Drijvers *et al*., 2010). Se hubiera requerido un seguimiento individual durante las sesiones de aula para detectar sus posibles indicios frente al uso efectivo del hipertexto por ellos, suponiendo salvada la exigencia técnica del registro de datos. Pero aún con la ausencia del hipertexto y con sólo dos sesiones de enseñanza en aula, la referencia a él por los estudiantes al responder las preguntas que **I** les planteó sugiere su buen *potencial semiótico* (Mariotti, 2013) como medio para la enseñanza de la ecuación cuadrática e iniciar una introducción a la formalización del conocimiento algebraico.

Referencias

Bruner, J. (1986). *El proceso mental en el aprendizaje*. Madrid: Narcea, S. A. de C. V.

Chávez, H., Garnica, I., Ojeda, A. M. (2018). *Método Hipertexto para la Integración del Conocimiento: Ecuación Cuadrática*. México: DME, Cinvestav. Hipertexto digital disponible en https://matedu.cinvestav.mx/~cognicion/ecuadratica/index.html

Dirección de Educación Media Superior (DEMS-IPN). (2008). *Programa de Estudios de la Unidad de Aprendizaje: Álgebra*. México: IPN.

Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P. y van Gisbergen, S. (2010). Instrumental Orchestration: Theory and practice. *Proceedings of CERME 6*, January 28th-February 1st, 2009, Lyon France © INRP 2010. www.inrp.fr/editions/cerme6

Esty, W. y Teppo, A. (1994). A General-Education Course Emphasizing Mathematical Language and Reasoning. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, **16**, 1, pp. 13-35.

Garnica, I., Chávez, H. S., Ojeda, A. M. (2017). Expresiones figural y escrita de la idea de porcentaje: Experiencia de enseñanza con estudiantes sordos de 17 a 24 años. En *Habla del silencio: Estudios interdisciplinarios sobre la Lengua de Señas Mexicana y la Comunidad Sorda* (Cruz-Aldrete, M., coord..), pp. 211-237. México: UAEMor, Bonilla Artigas Editores.

Hoch, M., Dreyfus, T. (2004). Structure sense in high school algebra: the effect of brackets. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3 pp 49–56.

Mariotti, M. y Maffia, A. (2018). From using artifacts to mathematical meaning: the teacher´s role in the semiotic mediation process. *Didattica della matematica. Dalle ricerche alle pratiche d'aula*, (3), 50-63.

Mariotti, M. (2013). Introducing students to geometric theorems: how the teacher can exploit the semiotic potential of a DGS. *ZDM*, 45, 441–452.

Maturana, H. y Varela, F. (1994). *El árbol del conocimiento*. Santiago de Chile: Universitaria.

Österholm, M. (2006). Characterizing Reading Comprehension of Mathematical Texts. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 63, No. 3, pp. 325-346. DOl: 1O.1007/slO649-005-9016-y

Planas, N. (2021). How specifc can language as resource become for the teaching of algebraic concepts? *ZDM*, 53:277–288. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01190-6

Ricœur, P. (1995). *Teoría de la interpretación. Discurso y excedente de sentido*. México: Universidad Iberoamericana, Siglo XXI.

Tall, D. (2013). *How humans learn to think mathematically. Exploring the three worlds of mathematics.* Cambridge University Press.

Stewart, I. (2013). *17 ecuaciones que cambiaron el mundo*. Barcelona: Ed. Crítica.

REVISTA ACTA LATINOAMERICANA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA - ALME

Principios:

La revista Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (en lo sucesivo ALME), es uno de los proyectos académicos del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa – CLAME, en el que se conjuga el respeto a la pluralidad de formaciones, tradiciones y acercamientos educativos, concebida y desarrollada con la función de difundir la Matemática Educativa en un marco en el que pueden relacionarse autores que comparten este interés común, además de investigadores y profesores de Latinoamérica. A partir de la divulgación de ALME se busca promover acciones que fomenten la investigación, la actualización, el perfeccionamiento y la profesionalización para el desarrollo científico y social de la región en lo referente a la Matemática Educativa.

La revista ALME se configura como el instrumento de CLAME para la difusión de trabajos de carácter científico, experiencias, convocatorias e información bibliográfica dentro del ámbito de la enseñanza/aprendizaje en Matemática Educativa en sus diferentes formulaciones y presentaciones.

La revista ALME es una revista científica arbitrada por pares y que se atiene a los estándares internacionales de calidad propios de las publicaciones científicas de prestigio.

Misión y objetivos:

La misión de la revista ALME es la difusión de la investigación relativa a la Matemática Educativa, persiguiendo los siguientes objetivos:

- ✓ Difundir, preferentemente en lenguas española y portuguesa, relevantes y rigurosos trabajos de carácter científico en el ámbito de la matemática educativa.
- ✓ Ofrecer experiencias innovadoras, siempre relativas al ámbito de la matemática educativa.
- ✓ Potenciar la accesibilidad y visibilidad del conocimiento, favoreciendo el entorno de acceso abierto a la literatura científica en Matemática Educativa.

Política editorial:

- ✓ *Idioma de los trabajos*. Podrán presentarse trabajos en lengua española y portuguesa.
- ✓ *Trabajo original*. Los artículos enviados a ALME para su publicación, deberán constituir una colaboración original no publicada previamente en soporte alguno, ni encontrarse en proceso de publicación o valoración en cualquier otra revista o proyecto editorial. Si el incumplimiento se detectase durante el proceso de revisión o evaluación se desestimará automáticamente la publicación del artículo.
- ✓ *Normas de redacción y presentación*. Los trabajos deberán atender las normas de redacción y presentación de carácter formal de ALME. Las colaboraciones enviadas a ALME que no se ajusten a ellas serán desestimadas.
- ✓ *Recepción de originales*. Los editores de ALME acusarán la recepción del manuscrito enviado por el autor/es. El Comité editorial revisará el artículo enviado informando al autor/es, en caso necesario, si se adecua al campo temático de la revista y al cumplimiento de las normas y requisitos formales de redacción y presen-

tación. En el caso de que todos los aspectos sean favorables, se procederá a la evaluación por parte de pares académicos del artículo.

- ✓ *Proceso de evaluación por pares académicos.* Los artículos propuestos serán evaluados en forma "**ciega**" por dos integrantes del comité de científico. En el proceso de evaluación se garantizará tanto el anonimato de los autores, así como de los evaluadores.
- ✓ *Información*. Los editores de ALME informarán a los autores de la decisión de aceptación, modificación o rechazo de cada uno de los artículos.
- ✓ *Política de privacidad*. Se mantendrá y preservará en todos los casos y circunstancias el anonimato de los autores y el contenido de los artículos desde la recepción del manuscrito hasta su publicación. La información obtenida en el proceso de revisión y evaluación tendrá carácter confidencial.
- ✓ *Fuentes*. Los autores citarán debidamente todas las fuentes de extracción de datos, figuras e información de manera explícita y tangible en las referencias. Si el incumplimiento se detectase durante el proceso de revisión o evaluación se desestimará automáticamente la publicación del artículo.
- ✓ *Responsabilidad*. ALME no se hará responsable de las ideas y opiniones expresadas en los trabajos publicados. La responsabilidad plena será de los autores de los mismos.
- ✓ *Formatos*. ALME se presentará en formato electrónico desde la página oficial de Comité Latinoamericano de Matemática Educativa – CLAME (http://clame.org.mx/actas/) y será de acceso libre y gratuito.
- ✓ *Periodicidad.* ALME tiene una periodicidad semestral.
- ✓ *Secciones:* Las secciones de la revista ALME son las siguientes:
    1. Análisis del discurso matemático escolar.
    2. Propuesta para la enseñanza de las matemáticas.
    3. Aspectos socioepistemológicos en el análisis y el rediseño del discurso matemático escolar.
    4. El pensamiento del profesor, sus prácticas y elementos para su formación profesional.
    5. Uso de recursos tecnológicos en el proceso de aprendizaje de las matemáticas.

Directrices generales para los autores y las autoras:

1. Todo trabajo debe ser inédito y no estar en proceso de evaluación de ninguna otra revista u órgano editorial. Si el incumplimiento se detectase durante el proceso de revisión o evaluación se desestimará automáticamente la publicación del artículo.
2. Extensión: El escrito debe contener 10 páginas como mínimo y 12 como máximo, las cuales deben estar sin numerar. Dicha cantidad de página contiene el apartado de las referencias bibliográficas.
3. Las referencias bibliográficas (deben aparecer bajo ese título, por orden alfabético) habrán de colocarse en estilo APA (American Psychological Association), 7ª edición. Al respecto, se sugiere consultar el siguiente documento: https://drive.google.com/file/d/1NT65KZjVLWD4SZZRQcJXMymluHJinaJx/view?usp=sharing

Las referencias tendrán sangrías de 0.0 y sangría especial, sangría francesa de 1.27 cm.

Dos ejemplos de la estructura son los siguientes:

Alsina, Á. (2009). El aprendizaje realista: Una contribución de la investigación en Educación Matemática a la formación del profesorado. In González & J. Murillo (Eds.) (Ed.), Investigación en Educación Matemática XIII (pp. 119–127).

Barragan, D., & Carrillo, A. (2017). La Sistematización como Interpretación Crítica. El Buho. Corporación Síntesis.

4. La estructura base del artículo debe dar cuenta de: Un planteamiento del problema que incluye revisión de literatura de Matemática Educativa, indicaciones generales sobre la estructura teórica (marco teórico o conceptual o fundamentos teóricos), metodología implementada, desarrollo de algunos ejemplos, análisis de los resultados, conclusiones y referencias bibliográficas. Cabe aclarar, que si lo que se reporta es una investigación en curso, se debe hacer explícito en el escrito para que esto sea considerado en el momento de hacer la evaluación del documento.

5. También se podrán publicar artículos que no son productos de investigaciones, como puede ser: reporte de experiencia en aula, curso corto, taller, grupo de discusión o de laboratorio. Para los casos anteriores la estructura del escrito debería de reportar mínimamente: introducción, desarrollo del tema en donde se hará mención del planteamiento de un problema, así como los fundamentos teóricos y las conclusiones. El artículo deberá mostrar evidencia de revisión de referencias bibliográficas de Matemática Educativa.

   En el caso particular de los **reportes de investigación** deberán dejar explícito dos aspectos en su escrito:

   a. En la *problemática* deberán precisar la línea de investigación en la que se desarrolla la investigación.

   b. El tipo de investigación y el aporte que se hace a la disciplina. En particular habrán de colocarlo de manera enfática en las *conclusiones.*

6. No se aceptarán trabajos con notas a pie de página.

7. Cada uno de los manuscritos recibidos, pasa por una evaluación doblemente ciega (se retiran los nombres y datos de filiación de los autores de los documentos) y se envía a dos árbitros de nuestra comunidad, cuyos resultados, de manera anónima, son devueltos a los autores. En caso haya controversia entre los dos árbitros, se dará la propuesta a un tercer árbitro. La decisión de los árbitros es inapelable. Las evaluaciones pueden tener tres resultados posibles: Aceptado, Aceptado condicionado a modificaciones o Rechazado.

Normas para la publicación del artículo:

- ✓ Microsoft Office Word 2007 o superior.
- ✓ Márgenes. Superior: 2,5 cm; inferior: 2,5 cm; izquierdo: 3,5 cm; derecho: 2,5 cm.
- ✓ Tipo de letra Times New Roman, tamaño 12. Color automático.
- ✓ Interlineado sencillo y justificado a derecha e izquierda. Sin sangría de primera línea.
- ✓ Sangría izquierda derecha 0 cm. Espaciado anterior y posterior 0 pto.

- ✓ Para las expresiones matemáticas debe usarse el **editor de ecuaciones**.
- ✓ Las figuras, tablas e imágenes que se incluyan en el artículo deben ser claras, legibles e incluir epígrafes que indiquen referencia de estas. Las imágenes deben estar en formato jpg. insertadas al texto.

Las figuras, tablas e imágenes se presentan de manera centrada. En la parte superior el rótulo y número en negrita, con fuente Times New Roman tamaño 10 y con punto final. En la siguiente línea se ubica el nombre en cursiva y con fuente Times New Roman tamaño 10. Justificado a la izquierda. Con punto final. En la parte inferior la referencia con fuente Times New Roman tamaño 10. Justificado a la izquierda. Con punto final.

Un ejemplo sería:

Figura 1.

Gráfico realizado por estudiantes al simplificar asuntos de la situación.

Fuente: producción de estudiantes 2017.

Nota: Imagen para el ejemplo tomada de Parra-Zapata et al. (2017)

La estructura del trabajo debe tener el siguiente formato:

- ✓ Primer renglón: Título del trabajo, centrado, en mayúscula en español o portugués (**sin punto al final).**
- ✓ Segundo renglón: Título del trabajo, centrado, en mayúscula en inglés (**sin punto al final**), espacio entre títulos.
- ✓ Tercer renglón: Nombre de los autores separados por comas si hay más de un autor. (**Nombre y Apellido** en ese orden, **sin títulos de grado**)(**sin punto al final**).
- ✓ Cuarto renglón: Nombre de la institución separadas por comas si hay más de un autor. Punto. País al que pertenecen en paréntesis. (**No se considera válido el uso exclusivo de siglas**). (**Sin punto al final**).
- ✓ Quinto renglón: Dirección electrónica de los autores, separados por coma si hay más de uno y **sin hipervínculos**. (**sin punto al final**).
- ✓ Sexto renglón: Resumen de no más de 10 renglones de extensión en fuente Times New Roman, tamaño 10. Título de Resumen en negrita y el texto del resumen en el renglón siguiente. **(Con punto final).**

- ✓ Séptimo renglón: palabras clave (**a lo sumo cinco**). Si son frases, verificar de no extenderse de las cinco palabras. Dejar renglón luego del resumen. El título en negrita y no usar mayúscula inicial en ellas. (**Sin punto final**).
- ✓ Octavo renglón: Abstract en inglés, en fuente Times New Roman tamaño 10. Título de Abstract en negrita y el texto del resumen en el renglón siguiente. (**Con punto final**).
- ✓ Noveno renglón: Keywords, traducción al inglés de las palabras clave. Dejar renglón luego del abstract. El título en negrita y no usar mayúscula inicial en ellas. (**Sin punto final**).
- ✓ Décimo renglón: Inicia la primera sección del documento. Entre títulos de la sección se deja un renglón antes y uno después. Espacio sencillo entre cada párrafo del artículo. Y con punto al final del párrafo.

  Los títulos de nivel 1 sin punto final y con negrita.

  Los títulos de nivel 2 sin punto final y con negrita y con cursiva.

  Los títulos de nivel 3 sin punto final y en cursiva.
- ✓ Cuidar que no queden títulos solos al final de una página.
- ✓ Ortografía y digitación.

Consideración para citaciones:

Citas dentro del texto. Las referencias a artículos o libros figurarán en el texto entre paréntesis, indicando el apellido del autor y el año de publicación, separados por una coma (Peters, 2001). En el caso de que en una misma referencia se incluyan varios libros o artículos, se citarán uno a continuación del otro por orden alfabético y separados por un punto y coma (García Aretio, 2002; Sarramona, 2001). Si en la referencia se incluyen varios trabajos de un mismo autor bastará poner el apellido y los años de los diferentes trabajos separados por comas, distinguiendo por letras (a, b, etc.) aquellos trabajos que se hayan publicado el mismo año (Casas Armengol, 1990, 1995, 2000a, 2000b, 2002, 2004). Si el nombre del autor forma parte del texto sólo irá entre paréntesis el año de publicación [Keegan (1992) afirmó que...].

Citas textuales. Las citas textuales con una extensión menor de 40 palabras irán entrecomilladas y, a continuación, y entre paréntesis, se indicará el apellido del autor del texto, el año y la página o páginas de las que se ha extraído el fragmento. Ejemplo: Si el autor no forma parte del texto “por educación a distancia entendemos [...] contacto ocasional con otros estudiantes” (Blanco, 1986, p. 16). Si el nombre del autor forma parte del texto, sería así: Como Martínez Sanz (2001) señala que “…………..” (p. 102). Las citas de 40 o más palabras deberán aparecer en un bloque de texto independiente, sin comillas y ajustado a la misma altura que la primera línea de un nuevo párrafo. Al final se indicará entre paréntesis, el autor, año y página/s.

Consideración para referencias:

Únicamente se incluirán aquellas que se citan en el texto y deberán ordenarse por orden alfabético en un solo listado, tanto las de formato impreso como electrónico.

El formato será el siguiente:

- *Libro:* Apellido del autor/es, inicial del primer nombre. (Año). *Título del libro*. Editorial.

  Brzezinski, Z. (1970). *La era tecnotrónica*. Paidós.

- *Artículos de revistas:* Apellido del autor/es, inicial del primer nombre. (Año). Título del artículo. *Nombre de la Revista, número o volumen* (número), páginas que comprende el artículo dentro de la revista, si es que existen.

  García, L. (1999). Historia de la educación a distancia. *RIED. Revista Iberoamericana de Educación a Distancia, 2* (1), 11-40.

- *Capítulo o artículo en libro*: Apellido del autor, inicial del primer nombre. (Año). Título del artículo o capítulo. En inicial del primer nombre. Apellido del autor/es, (Ed. o Coord., si es el caso), *Título del libro*. (páginas que comprende el artículo o capítulo dentro del libro). Editorial.

  Oettinger, A. (1971). Communications in the national decision-making process. En M. Greenberger, (Ed.), *Computers, communication, and the public interest* (73-114). Johns Hopkins Press.

- *Informe del gobierno:* Nombre de la institución responsable. (Año). *Título del informe* (Número de publicación). Nombre de agencias presentes en la edición no nombradas en el nombre del autor.

  Instituto Nacional del Cáncer. (2019*). Tomando tiempo: Apoyo para personas con cáncer* (Publicación NIH No. 18-2059). Departamento de Salud y Servicios Humanos de EE. UU., Institutos Nacionales de Salud. https://www.cancer.gov/publications/patient-education/takingtime.pd

- *Artículos en publicaciones periódicas electrónicas* (Revistas electrónicas): Apellido del autor/es, inicial del primer nombre. (Año). Título del artículo. Nombre de la Revista, número o volumen (número), páginas que comprende el artículo dentro de la revista. DOI o en su defecto, URL de acceso.

  Schaefer, NK y Shapiro, B. (2019). Nuevo capítulo intermedio en la historia de la evolución humana. Science*, 365* (6457), 981–982. https://doi.org/10.1126/science.aay3550

- *Video de YouTube:* Nombre del canal. (Fecha de publicación). *Título del video* (Video). YouTube. Enlace de acceso.

  Universidad Harvard. (28 de agosto de 2019). Pinza robótica suave para medusas [Video]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=guRoWTYfxMs

- *Tweet:* Nombre del perfil [@usuario]. (Fecha de publicación). *Contenido del tweet* [Tweet]. Enlace de acceso.

  Gates, B. [@BillGates]. (2019, 7 de septiembre). Hoy en día, es difícil para los investigadores diagnosticar a los pacientes de #Alzheimers lo suficientemente temprano como para intervenir. Un diagnóstico confiable, fácil y preciso sería [Miniatura con enlace adjunto] [Tweet]. Twitter. https://twitter.com/BillGates/status/1170305718425137152

- *Publicación de Facebook:* Nombre del perfil. (Fecha de publicación). *Contenido de la publicación* [Actualización de estado]. Enlace de acceso.

Noticias de la ciencia. (21 de junio de 2019). ¿Eres fanático de la astronomía? ¿Le gusta leer sobre lo que los científicos han descubierto en nuestro sistema solar y más allá? [Imagen adjunta] [Actualización de estado]. Facebook. https://www.facebook.com/ScienceNOW/photos/a.117532185107/10156268057260108/?type=3&theater

- *Página en un sitio web:* Apellido del autor/es, inicial del primer nombre. (Fecha de publicación). *Título de la publicación*. Nombre de la página web. Recuperado de fecha de acceso a la publicación. Enlace de acceso.

Woodyatt, A. (10 de septiembre de 2019). Las siestas diurnas una o dos veces por semana pueden estar relacionadas con un corazón sano, dicen los investigadores. CNN https://www.cnn.com/2019/09/10/health/nap-hearthealth-wellness-intl-scli/index.html

✓ La información actualizada sobre la forma de citación puede ser consultada en la página de APA (American Psycological Association).

✓ Los esquemas, gráficos, tablas y fotografías deberán ser claros y se presentarán titulados, numerados e insertos en el cuerpo del texto.

Forma de evaluación de los trabajos

Cada uno de los manuscritos recibidos, pasa por una evaluación doblemente ciega (se retiran los nombres y datos de filiación de los autores de los documentos) y se envía a dos árbitros de nuestra comunidad, cuyos resultados, de manera anónima, son devueltos a los autores. ***La decisión de los árbitros es inapelable.*** Las evaluaciones pueden tener tres resultados posibles: **Aceptado, Aceptado condicionado a modificaciones y rechazado.**

El equipo editorial podrá rechazar artículos que no cumplan con los criterios que se señalan a continuación:

1. Será rechazado un artículo que no cumpla con el formato indicado en la convocatoria.
2. Será rechazado un artículo que no cumpla con la extensión mínima señalada en la presente convocatoria (10 páginas).
3. Será rechazado un artículo enviado fuera de las fechas establecidas en la convocatoria.

Será rechazado un artículo enviado por otro medio distinto de la plataforma indicada en la convocatoria.

Clame Comite Latinoamericano de Matematica Educativa